MERIA scenarij "Tobogan"

Uvod v odvod

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Konceptualno razumevanje naklona krivulje kot naklona tangente.
Splošni cilji	Matematično modeliranje tobogana z uporabo grafov funkcij. Računanje naklona (odvoda funkcije) brez ali z uporabo računalnika. Smiseln uvod v analizo. Preiskovalne veščine: eksperimentiranje z različnimi grafi funkcij brez in z uporabo računalnika, ponavljanje postopka z namenom izboljšanja rešitve, primerjava različnih strategij, utemeljevanje karakteristik dobljene rešitve. Interdisciplinarne veščine: dijaki lahko povežejo svoje izkušnje gladkosti fizičnih predmetov z matematičnimi izrazi za tangento na krivuljo in odvod funkcije. Matematični modeli se lahko uporabijo za izdelavo 3D predmetov s pomočjo 3D printerja (IKT spretnosti) ali iz drugih materialov (ročne spretnosti).
Potrebno matematično predznanje	Grafi in enačbe linearnih in nekaterih nelinearnih krivulj (krožnica, parabola ali graf eksponentne funkcije).
Letnik	Dijaki, stari 16 - 18 let (oziroma kadar se uvede odvod)
Trajanje	60 - 90 minut, dve šolski uri
Potrebni material	Papir, svinčnik, računalniško orodje za risanje grafov funkcij, npr. Geogebra (Uporaba računalnika ni nujna, ampak lahko izboljša izkušnjo dijakov).

Opažanja med učnim procesom
Kontekst opazovanja (razred, šola, država itd.):

Problem:
Oglej si sliki smučarske skakalnice in otroškega tobogana. Obe imata ukrivljen del na dnu in/ali na vrhu ter raven del v sredini. Uporabi matematična orodja in zasnuj tako obliko. Osredotoči se na enega od ukrivljenih delov in sredinski ravni del. Upoštevaj, da želiš ustvariti čim bolj enakomerno vožnjo.
Vpeljite koordinatni sistem in poiščite enačbo za *en* ukrivljeni del in enačbo za ravni del.

Opomba: Za daljšo izvedbo učne ure z več aktivnostmi modeliranja izpustite zadnji stavek iz opisa problema (glejte modul za dodatne faze učne ure).

Faza	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov	Opažanja med izvedbo
Devolucija (Prenos) (didaktična) 5 min	Učitelj predstavi problem. Dijake opozori, da je potrebno zasnovati model, ki bo omogočal <u>enakomerno vožnjo</u> (ki ne trese). Učitelj poskrbi, da se dijaki osredotočijo na enega od ukrivljenih delov in sredinski ravni (linearni) del.	Dijaki se posedejo v skupine po dva ali tri. Dijaki so navdušeni!	
Reševanje (Delovanje) (adidaktična) 20 min	Učitelj si beleži zamisli dijakov, njihove strategije in izsledke. Učitelj preveri, ali dijaki razumejo, kako geometrijsko izgleda dober primer povezave med ukrivljenim delom in premico (rešitev zahteva ne le zvezno, ampak gladko – vsaj zvezno odvedljivo - krivuljo). Če po 10 minutah ni popolnoma nobene zamisli za izbiro ukrivljenega dela, učitelj dijake spomni na oblike grafov funkcij $y = x^2$ in/ali $y = \cos x$ (toda ne krožnice) s kratko (didaktično) prekinitvijo pred celotnim razredom. Če so kakšni dijaki reševali s krožnico, naj nadaljujejo z naslednjimi problemi: “Kaj se zgodi, če spremenimo kot ali če spremenimo točko, v kateri se krožnica in	Dijak nariše skico in vpelje koordinatni sistem. Pristope dijakov lahko opišemo z eno izmed naslednjih kategorij: 1. Pristop z »mejno« premico (Bounding line): poljubno izberejo premico, ki jo nato premikajo (translacija in rotacija) dokler ne izgleda, da je le eno presečišče (v območju gledanja). 2. Pristop s sekanto (Secant line): izberejo eno točko na krivulji - predvidno točko tangentnosti; nato še eno točko na krivulji in narišejo premico skozi ti dve točki in premikajo drugo točko bližje prvi, da dobijo bolj gladek prehod. 3. Pristop z linearno aproksimacijo (Linear approximation): Dijaki	

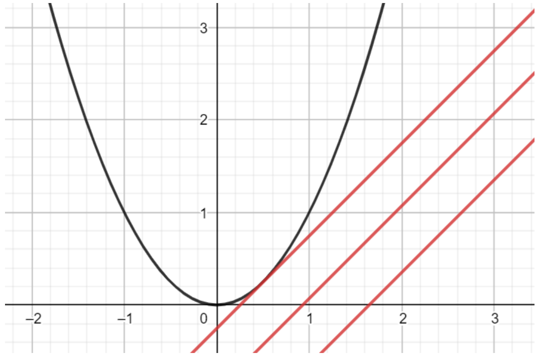
	premica dotikata? Kako se spremeni enačba tangente/premice?" Za tem učitelj prosi skupino učencev, da se osredotočijo na primer, kjer ukrivljeni del ni krožnica.	izberejo eno točko na krivulji, narišejo premico skozi to točko in poizkušajo prilagoditi naklon tako, da se čim bolje prilega krivulji. Nekateri dijaki bi lahko uporabili krožnico za ukrivljeni del in dejstvo, da je tangenta pravokotna na polmer. Takemu reševanju bomo rekli *reševanje s krožnico*. Za podrobnosti teh (kategorij) strategij/pristopov glejte spodaj *Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja.*	
Formulacija (Zapis ugotovitev) (adidaktična) 15 min	Učitelj prosi dijake, naj izoblikujejo svoje predstavitve rešitev. Med delom dijakov učitelj izbere skupine različnimi pristopi, ki bodo predstavile svoje izsledke.	Dijaki oblikujejo rezultate znotraj svojih skupin. Za določene skupine posamezen dijak predstavi njihove izsledke.	
Verifikacija (Potrditev) (didaktična) 10 min	Učitelj vpraša: "Kako vemo, da je rešitev dobra?" in "Ali obstaja najboljša rešitev?" Če so dijaki uporabili le vizualno validacijo, lahko učitelj predlaga algebraičen ali numeričen pristop.	Dijaki razložijo, zakaj je posamezna rešitev dobra in ali je kakšna boljša od drugih. • Vizualna validacija: Nekateri se bodo zanašali na vizualno oceno konstrukcije; če izgleda dobro, je dobro. Uporabijo lahko tudi povečavo krivulje. • Algebraična validacija: Dijaki lahko izračunajo presečišče (oz. presečišča)	

		algebraično in mogoče vidijo, da je lokalno edino. • Numerična validacija: Dijaki lahko izračunajo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ za dve točki na krivulji in opazijo, da je to približno naklon njihove premice. Če so dijaki reševali s krožnico in izračunali enačbo tangente, bi morali biti prepričani v to, da imajo najboljšo rešitev, in razložiti zakaj (geometričen in/ali algebraičen dokaz).	
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična) 10 min	Učitelj razpravlja o pojmu tangente na enak način, kot so ga uporabili dijaki. Učitelj lahko izpostavi enega *ali več* od naslednjih vidikov naklona krivulje v točki: a) najboljša lokalna aproksimacija sledi vizualni validaciji b) lokalno ena »mejna« premica – eno presečišče sledi algebraični validaciji c) klasična definicija z uporabo sekant in limit diferenčnih količnikov sledi numerični validaciji Če so dijaki reševali s krožnico, lahko učitelj govori o tangenti na krožnico in tangenti na druge krivulje. Učitelj spomni, da je tangenta najboljša rešitev za krožnico, s tem, da so dijaki računali približek za tangento na ostalih krivuljah.	Nekateri lahko govorijo o naklonu. Lahko govorijo o “tangenti” ali uporabi gumba v Geogebri. Dijaki poslušajo in jih zanima, kako izračunamo najboljšo rešitev tega problema za poljubne oblike in krivulje.	

<table>
<tr>
<td>Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja</td>
<td>

Dijaki lahko uporabijo več pristopov:

1. Pristop z »mejno« premico (Bounding line approach):

   Dijaki izberejo na primer $y = x^2$
   Algebraična validacija: obravnavajmo družino premic

   $$y = x + b.$$

   »Mejno« krivuljo dobimo z eliminiranjem y-spremenljivke:

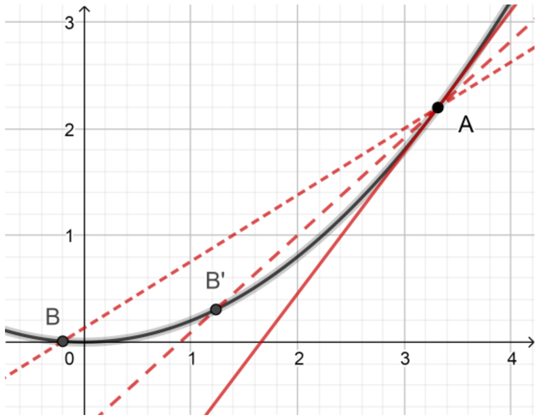
   $$x^2 = x + b.$$

   Ta enačba ima eno rešitev, če je diskriminanta enaka 0:

   $$1 + 4b = 0.$$

   Torej $b = -\frac{1}{4}$ nam da gladek prehod.

2. Pristop s sekanto (Secant line approach):

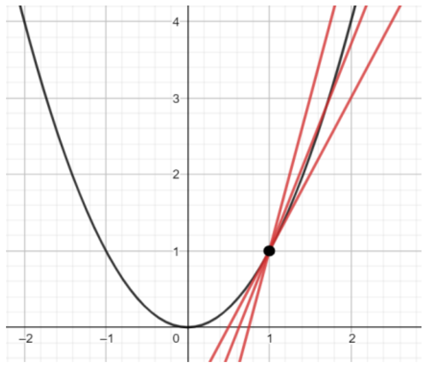
   

   Dijaki fiksirajo eno točko na krivulji – točko, kjer želimo prehod med krivuljama. Nato izberejo še eno točko na krivulji, narišejo premico skozi ti dve točki in premikajo drugo točko bližje prvi, da dobijo bolj gladek prehod. Bližje se izbere točka, boljša aproksimacija bo.

   Ta pristop je najbolje uporabiti s pomočjo računalnika.

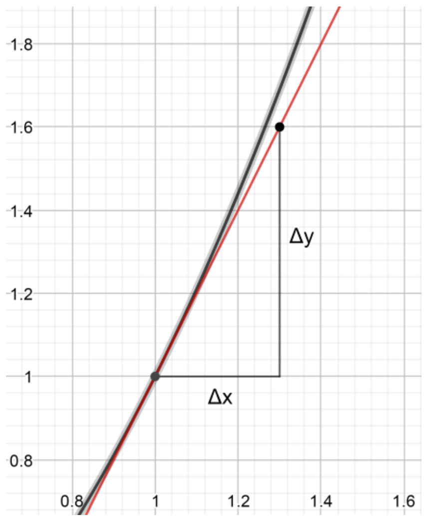
</td>
</tr>
</table>

3. Pristop z linearno aproksimacijo (Linear approximation approach):



Dijaki na primer izberejo $y = x^2$ in točko (1,1), kjer se ukrivljen del konča in se premica y = ax + b začne. Ugotovijo lahko $a > 1$ in poizkušajo različne vrednosti (kjer je $a = 2$ pravilna vrednost). »Poizkušajo« pomeni s skiciranjem ali risanjem grafov.

Z opisom premice kot $y = ax + b$, zaključijo $a + b = 1$.
Torej lahko za vsak naklon a izračunajo b.



Nekateri dijaki lahko dobijo aproksimacijo za a z uporabo dveh točk na narisani premici in uporabo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Numeričen primer: Dijak lahko dobi $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}6}{0{,}3} = 2$.
Iz $a + b = 1$ sledi $b = -1$.

Validacija je najverjetneje vizualna, toda lahko je tudi numerična – predvidoma predlagana s strani učitelja, saj je metoda podobna. Izberite dve točki na paraboli in izračunajte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; na primer (1 , 1) in (1,1 , 1,21). Tedaj

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}21}{0{,}1} = 2{,}1,$$

kar je dokaj blizu pravilnega odgovora.

Dijaki lahko preverijo pravilnost rešitve tudi z računanjem presečišč med parabolo in premico (algebraična validacija). Če dijaki poznajo kvadratne enačbe in diskriminante, lahko nadaljujejo z reševanjem sistema enačb:

$$y = x^2, y = ax + 1 - a,$$

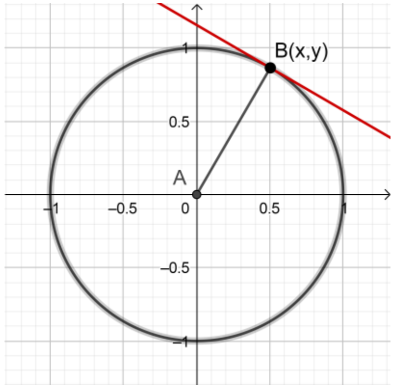
in dobijo $x^2 - ax + a - 1 = 0$. Enačba bo imela eno rešitev, če bo diskriminanta enaka 0:

$$a^2 - 4(a - 1) = 0 \;\Rightarrow\; a = 2.$$

4. Reševanje s krožnico: Dijaki izberejo krožnico.
Če so dijaki izbrali krožnico, lahko izberejo enačbo

$$x^2 + y^2 = 1$$

in točko $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ki ustreza kotu $\frac{\pi}{4}$. Če se spomnijo, da je polmer krožnice pravokoten na tangento, lahko ugotovijo $a = -1$. Od tu lahko določijo enačbo tangente.



Če učitelj naroči dijakom, da izberejo drugo točko (x, y), lahko določijo naklon tangente a iz naklona premice skozi izhodišče in točko (x, y), ki je enak $\frac{y}{x}$. Torej $a = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (v splošnem), toda najverjetneje bodo dijaki to naredili le za posamezno konkretno točko. Če dijaki poznajo in uporabljajo vektorje, je ta razmislek nekoliko lažji.

5. Z računalnikom (Geogebra in podobni)
Če dijaki uporabljajo Geogebro, bodo verjetno uporabljali podobne korake in razmisleke kot sicer. Razlika je v tem, da računalnik izračuna enačbo premice hitreje in nariše natančen prikaz izbrane krivulje. Z računalnikom lahko dijaki preizkusijo več možnosti v manj časa in zato lahko opazijo kaj, česar ne bi s papirjem in svinčnikom. Na primer:
   - Nekateri lahko najdejo gumb za risanje tangente in nadaljujejo tam.
   - Mogoče narišejo krivuljo in poljubno "dobro" premico skozi točko na krivulji in neko drugo točko. Nato sliko približajo in preverijo, ali izgleda v redu. Za boljše prileganje lahko premikajo drugo točko. Nato lahko izberejo možnost, ki se jim zdi najboljša, in preberejo enačbo premice s pomočjo orodja v programu.
   - Nekateri bi lahko začeli tako, da sliko povečajo, dokler graf krivulje ne izgleda raven. Nato lahko izberejo dve točki na grafu, iz katerih določijo enačbo premice (ali vsaj narišejo bolj ali manj tangento).
   - Lahko preverjajo, ali ima njihova premica presečišča s krivuljo (v tem primeru je pomembno, ali so narisali premico ali poltrak). Računalnik jim lahko tudi prikaže presečišča med premico in krivuljo. Nato lahko opazijo: kadar spremenijo naklon premice s fiksno točko na krivulji, spremenijo tudi (drugo) presečišče s krivuljo (na to smo opozorili tudi v institucionalizaciji). Ker takoj vidijo rezultat, lahko pridejo do hipoteze, da je najboljša rešitev, ko točki A in D sovpadata.