

Naslov članka/Article:

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev 2024

Avtor/Author:

dr. Borut Jurčič Zlobec

DOI:

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



Matematika v šoli št. 2/2024, letnik 30

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2024

Spletna stran revije:

<https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev 2024

dr. Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko Univerze v Ljubljani

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je popularizacija znanosti in tehnike med

mladimi, približevanje raziskovalne dejavnosti mladim talentiranim učencem in dijakom ter poglobljanje njihovega šolskega znanja.

Na državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge z regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2024 je potekalo že 58. državno srečanje v Murski Soboti.

Organizator je dobil v pregled deset osnovnošolskih in pet srednješolskih nalog. Med osnovnošolskimi nalogami smo izbrali šest nalog za bronasto priznanje. Preostale so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje. Med srednješolskimi nalogami je vseh pet nalog prišlo v končni izbor za zlato ali srebrno priznanje.

Naloge, ki so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje, so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, doc. dr. Polona Repolusk, doc. dr. Mateja Grašič, asist. Simon Brezovnik in dr. Borut Jurčič Zlobec.

Sledi pregled tem, ki so bile predstavljene pred državno komisijo.

- med osnovnošolskimi nalogami: 4 pedagoške, 1 geometrijska, 3 aritmetične, 1 iz teorije števil in 1 statistična;
- med srednješolskimi nalogami: 1 iz teorije števil, 3 geometrijske in 1 iz kriptografije.

Anketnih nalog letos ni bilo. Vendar se je med osnovnošolskimi nalogami pojavil val pedagoških nalog. Komisija jih je ocenila za ne najprimernejše, ker nas na srečanjih mladih raziskovalcev ne zanima, kako drugi rešujejo matematične probleme, ampak bolj to, kako jih rešujejo sami učenci in dijaki. Zato ni nobena od pedagoških nalog prišla v ožji izbor za srebrno oziroma zlato priznanje.

Pri ocenjevanju je komisija poleg samih nalog ocenjevala tudi njihovo predstavitev.

1. Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2024

Zlato priznanje sta prejeli le dve srednješolski raziskovalni nalogi. Nalogi sta obravnavani po vrsti. Na prvem mestu v kategoriji je naloga, ki jo je komisija ocenila za najboljšo.

• REŠEVANJE TRIKOTNIKA BREZ UPORABE KOTNIH FUNKCIJ

Avtorice: Lara Lozar, Nika Mravlja in Tiana Požar

Mentor: Miha Šušteršič, prof. mat.

Somentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Šola: Škofijska gimnazija Vipava

• UPORABA KONGRUENC V KRIPTOLOGIJ

Avtorica: Jana Avšič

Mentorica: prof. Karmen Kete

Somentor: prof. Jakob Avšič

Šola: Šolski center Nova Gorica, Nova Gorica

2. Kratek opis nagrajenih nalog

2.1. Naloga: Reševanje trikotnika brez uporabe kotnih funkcij

Avtorice so o ciljih naloge napisale:¹

V nalogi smo zastavili tri cilje:²

- (1) *Preučiti koncept razreševanja trikotnikov brez uporabe običajnih kotnih funkcij.*

Koncept se imenuje pristop racionalne trigonometrije.

- (2) *Dokazati, da s konceptom racionalne trigonometrije lahko razrešimo trikotnik.*

- (3) *Narediti primerjavo razreševanja trikotnika po obeh konceptih.*

Nekaj osnovnih formul trigonometrije brez transcendentnih funkcij, ki so omejene v nalogi

- Kvadratnica $\overline{AB}^2$:

$$A(x_1, y_1),$$

$$B(x_2, y_2),$$

$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

- Pogoj kolinearnosti A, B, C:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4),$$

$$a = \overline{BC}, b = \overline{CA}, c = \overline{AB}.$$

- Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$.

- Stežaj dveh premic $l_i = a_i x + b_i y + c_i$, $i = 1, 2$:

$$s(l_1, l_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 / (a_1^2 + b_1^2)^2 / (a_2^2 + b_2^2)^2.$$

Opombe

- *Kvadratnica* je kvadrat razdalje med dvema točkama.
- *Kolinearnost*: tri točke ležijo na isti premici. Ploščina trikotnika, ki ga razpenjajo, je enaka nič.
- *Stežaj dveh premic*: Tu se skriva kotna funkcija $s = \sin^2 \phi$, kjer je ϕ kot med premicama.
- Omenjena so razmerja stranic v pravokotnem trikotniku, le da so vse količine kvadrirane.
- Omenjen je *stežajni izrek*, ki je v bistvu sinusni izrek, le da so razmerja kvadrirana.
- Najdemo tudi *kostežajni izrek*, $(c^2 + a^2 - b^2)^2 = 4c^2 a^2 (1 - s_b^2)$, ki je kvadriran kosinusov izrek $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$.
- Izpeljan je pogoj, da je vsota notranjih kotov trikotnika 180° .
- Sledijo konstrukcije trikotnikov.

Kar se pa tiče iracionalnih rešitev kvadratne enačbe, so Grki po porazu pitagorejskih racionalnih razmerij, potem ko so domnevno utopili Hipasa, ki je dokazal, da diagonala kvadrata ni izmerljiva z njegovo stranico, problem rešili tako, da so govorili o kvadratnih razmerjih in s tem obšli kvadratni koren. Tako so lahko ostali pri racionalnih razmerjih. Dalje se Grki niso spuščali v iracionalne vode.

Naloga je dosledno izpeljana, vendar je bil zalogaj za učenke kar velik. Upam, da jih to ne bo odvrnilo od matematike. Glede na njihovo minulo delo priporočam, da si za nagrado ogledajo prispevek o projektivni geometrijski algebri. Ob lepoti teorije bodo pozabile na trdo delo pri nalogi in utrdile občutek, da je matematika lepa.

A Swift Introduction to Projective Geometric Algebra – YouTube

<https://www.youtube.com/watch?v=0i3ocLhbxj4>



QR-koda do posnetka

¹ Z osnovno pisavo so zapisani komentarji avtorja.

² Z ležečo pisavo so prepisi iz raziskovalnih nalog.

2.2. Naloga: Uporaba kongruenc v kriptologiji

Naj nalogo predstavimo kar z avtoričinim povzetkom k njej.

V raziskovalni nalogi želimo pokazati uporabo modularne aritmetike v nekaterih metodah šifriranja ter prikazati delovanje teh metod s pomočjo programskega jezika Python. V začetnem delu opišemo matematična orodja, ki jih potrebujemo v kriptologiji, med njimi Eulerjev izrek, reševanje linearne kongruence z eno in z dvema neznankama, reševanje sistema dveh linearnih kongruenc z dvema neznankama, računanje potenc z velikimi eksponenti po danem modulu ter računanje inverza proti modulu tujega števila s pomočjo Eulerjevega izreka in s pomočjo razširjenega Evklidovega algoritma. V nadaljevanju se ukvarjamo z dvema metodama šifriranja: šifriranje s pomočjo afine transformacije ter RSA šifriranje. Spotoma vpeljemo matematične pripomočke, ki jih potrebujemo pri posameznem tipu šifriranja, ter izdelamo računalniške programe, s katerimi šifriranje prikažemo na konkretnih primerih. V primeru afine transformacije se ukvarjamo tudi s kriptanalizo in pokažemo, da je ta metoda glede na današnjo moč računalniške tehnologije za uporabo preveč ranljiva.

Kratek pregled vsebine

- (1) Modulska aritmetika

Glej <https://www.youtube.com/watch?v=IJ3CD9M3nEQ>



- (2) Osnovni pojmi kriptologije
- (3) Eulerjev izrek
- (4) Recipročna vrednost a^{-1} v danem modulu (r), $a^{-1} \times a \equiv 1 \pmod{r}$
- (5) Potence z velikimi eksponenti
- (6) Linearni sistemi kongruenc
- (7) Razširjeni Evklidov algoritem
- (8) Afina transformacija

- (9) Kriptanaliza tajnopisa, šifriranega s pomočjo afine transformacije
- (10) Šifrirni sistem RSA

2.3. Opombe

Naloga stoji trdno na nogah. Dijakinja je zapisala vse izreke in dokaze, ki jih je potrebovala. Večino jih je verjetno dokazala sama, to je videti iz načina, kako se je lotila dokazov.

Enostavnejša kodiranja izračunajo iz indeksa danega znaka v abecedi nov indeks in zamenjajo dani znak z znakom, ki v abecedi stoji na mestu z izračunanim indeksom.

Opisala je naslednje načine kodiranja:

- (1) Afino kodiranje: Indeks znaka i v abecedi se spremeni po formuli

$$f(i) = a \times i + b \pmod{r},$$

kjer je r dolžina abecede. S pomočjo statistične porazdelitve črk v slovenskem besedilu ji je uspelo dekodirati zakodirano besedilo.

- (2) Kodiranje RSA je omenjeno v prispevku na spletu na zgornjem naslovu.

Vse, kar je povedano v nalogi, je tudi podprto s programi v programskem jeziku python.

3. Druge naloge

Letos je komisija dodelila le dve zlati priznanji. Nobena osnovnošolska naloga ni prejela zlatega priznanja.

Vendar bi omenil dve nalogi, ki sta vzbudili pozornost.

3.1. O konstrukciji obsega celih števil

Prva je naloga, ki govori o konstrukciji naravnih števil po metodi Montessori.

Konstrukcija temelji na Peanovih aksiomih za naravna števila.

- (1) Število 0 je naravno število.
- (2) Vsako naravno število n ima naslednika n' .
- (3) Če za dvojce naravnih števil m in n velja, da je $m' = n'$, potem sta števili enaki.

- (4) Vsako naravno število razen števila 0 je naslednik nekega naravnega števila.

V Montessorijevi konstrukciji število nič predstavlja prazno škatlo, kamor se lahko namestijo druge škatle. Škatla, v kateri se nahaja druga prazna škatla, predstavlja število 1. Naslednika naravnega števila dobimo tako, da v njegovo škatlo dodamo še eno prazno škatlo.

V nadaljevanju so avtorji vpeljali konstrukcijo gnezdenih škatel, imenovali so jih polištevila, ki pa jim niso uspeli vdihniti življenja. Tako je ostalo le pri konstrukciji.

Zadeva se je dokončno zapletla, ko so hoteli konstruirati cela števila. V ta namen so vpeljali dodatno škatlo, to je antiškatlo, ki predstavlja antinič. Če se znajdeti v škatli nič in antinič, se medsebojno izničita.

Tu so storili prvo napako. V obsegu celih števil velja, da je $0 = -0$. Zaradi te napake so morali žrtvovati distributivni zakon v obsegu celih števil. Algebrska struktura obsega se je zrušila.

Vendar jih to ni ustavilo. V nadaljevanju so definirali multištevila gnezdenih škatel, kjer nastopajo škatle nič in antinič. Omenili so, da je to pot za konstrukcijo elementarnih delcev, kjer nastopajo delci in antidelci.

Seveda nas ta multištevila ne bodo pripeljala do spinorjev. Dobili so napačen namig na prvi stopnji, češ da si njihova naloga zasluži objavo v matematični reviji.

Pot do spinorjev je obravnavana v prispevkih na spletu:

<https://www.youtube.com/watch?v=j5soqexrwqY>.



QR-koda do posnetka

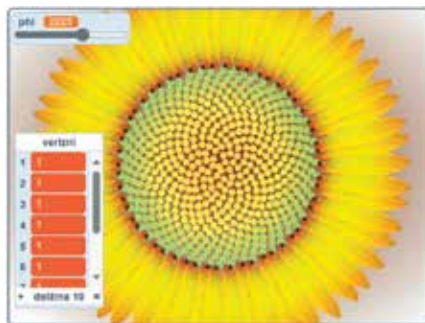
Žal je veliko dela in entuziazma dijakinj in dijakov izzvenelo v prazno. Naj jih ohrabrim, da je bilo njihovo delo kljub temu dragoceno. Z izkušnjami, ki so jih pridobili, lahko v nadaljevanju dosežejo lepe uspehe.

3.2. O zlatega rezu

V nalogi sta avtorici poskušali iz njihove šolske stavbe izrezati pravokotnike v zlatega rezu. Če pravokotniku v zlatega rezu odstranimo kvadrat z dolžino stranice, ki je enaka manjši od stranic pravokotnika, nam ostane pravokotnik, katerega stranici sta v enakem razmerju kot stranici prvotnega pravokotnika.

Sam pojem zlatega reza ima močan mistični naboj. V tridesetih letih, odkar sodelujem pri ocenjevanju raziskovalnih nalog iz matematike na srečanjih mladih raziskovalcev pod okriljem Zveze za tehnično kulturo, je bilo mnogo nalog na temo zlatega reza. Ni treba posebej poudarjati, da so mrzlično iskali razmerje povesod, kjer je in kjer ga ni.

Res je, da se razmerje zlatega reza pojavlja v naravi. Vendar je razlog za to posebna lastnost razmerja, ki je v nekem smislu najbolj iracionalno število. To dejstvo pride v poštev, kadar imamo opravka z enakomernimi razporeditvami, kot je na primer razporeditev semen pri sončnici. Glej <https://scratch.mit.edu/projects/344169437/fullscreen>.



Vir: Posnetek zaslona.



QR-koda do aplikacije

Navajamo nekaj napačnih trditev o zlatega rezu v nalogi.

- Znamenita podoba Vitruvijskega človeka Leonarda da Vinci ni v zlatega rezu. Vitruvij je sledil pitagorejcem, ki so oboževali racionalna razmerja (harmonija sfer). Tudi zapisi na podobi človeka govorijo o racionalnih razmerjih v človeškem telesu.

Glej <http://matematika.fe.uni-lj.si/html/people/borut/scratch/Dokumenti/Vitruvian.pdf>.



QR-koda do dokumenta

- Zgradba OZN na sliki z več kot 16 % odstopa od zlatega reza. Seveda pa vedno lahko popravimo pravokotnik tako, da bo v zlatega rezu. Enako velja za Partenon v Atenah.
- Razmerje zlatega reza je limita količnika dveh sosednjih členov Fibonaccijevega zaporedja. Ti so v nekem smislu najboljši možni racionalni približki zlatega reza. V nalogi je zapisano, da je količnik že po petem členu zelo blizu zlatega številu in se mu tudi naprej zelo hitro približuje. Ravno to ni res, bistvo zlatega reza je nekje drugje, kot smo omenili zgoraj.

Tudi to je napaka mentorjev, ki so bili premalo pozorni. Tako skrbno napisana naloga ni našla mesta, ki bi si ga lahko zaslužila.

S tem dijakinj nočem oplasiti, ampak ju vabim, naj se naslednje leto odločita za raziskovalno nalogo, pri kateri bi z novim znanjem preverili pravilnost trditev v tej nalogi. Ponujam se za somentorja. ■

DMFA organizira NATEČAJ

Matematika, ki se je lahko dotaknete



Letošnji ustvarjalni izziv je sestavljanje **matematičnih elementov – matematike** z uporabo vsakdanjega fizičnega materiala ali elementov iz gospodinjstva, narave itd., lahko so to tudi ljudje. Uporabite umetnost in ustvarjalnost, da naredite **skulpture**, ki bodo matematiko prenesle iz glave in knjig v resnični svet.

Kdo lahko sodeluje?

Sodelujejo posamezniki ali skupine v vrtcih, osnovnih šolah in srednjih šolah pod mentorstvom učiteljev in/ali vzgojiteljev.

Kako sodelovati?

Ustvarite izdelke na temo letošnjega izziva in prek spletne strani (<https://www.dmfa.si/Izobrazevanje/Mednarodni-DanMatematike.aspx>) oddajte do 3 fotografije s kratkim opisom izdelka.

Oddaja izdelkov bo mogoča med **14. 3.** in **31. 3. 2025**, zato lahko izziv hkrati uporabite za razredne aktivnosti na dan števila π ali že ustvarjeni izdelek natečaja ta dan razstavite na šoli.

Ocenjevanje izdelkov?

Komisija DMFA bo izdelke pregledala in izbrala po enega zmagovalca v vsaki kategoriji (vrtec, 1. triletje, 2. triletje, 3. triletje in srednja šola). Vsi udeleženci prejmejo diplome za sodelovanje, nagrajenci pa tudi simbolične nagrade.

Vabljeni k sodelovanju.