

Naslov članka/Article:

Reševanje polinomskih enačb z želvjo grafiko

Solving Polynomial Equations with Turtle Graphics

Avtor/Author:

Ema Ptičak, Tadej Vovk
Mentor: Alojz Grahor

DOI:

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



Matematika v šoli št. 2/2024, letnik 30

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2024

Spletna stran revije:

<https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>

Reševanje polinomskih enačb z želvjo grafiko

Solving Polynomial Equations with Turtle Graphics

Ema Ptičak, dijakinja Škofijske gimnazije Vipava
Tadej Vovk, dijak Škofijske gimnazije Vipava

Mentor: Alojz Grahor, Škofijska gimnazija Vipava

Izvleček

V članku predstavimo reševanje polinomskih enačb $p(x) = 0$ z grafično metodo, ki jo imenujemo »želvja grafika.« S to metodo lahko poiščemo rešitve polinomske enačbe poljubne stopnje, kjer je $p(x)$ polinom z realnimi koeficienti. Programi dinamične geometrije omogočajo izvedbo te metode na zelo prikladen in zanimiv način.

Ključne besede: polinomska enačba, dinamična geometrija, želvja grafika

Abstract

This paper presents the solving of polynomial equations $p(x) = 0$ employing the so-called turtle graphics, which we can use to find solutions of a polynomial equation of arbitrary degree where $p(x)$ is a polynomial with real coefficients. With the help of dynamic geometry software, this concept can be user-friendly and engaging.

Keywords: polynomial equation, dynamic geometry, turtle graphics

1 Uvod

V šolskem letu 2022/23 sva avtorja v okviru Zveze za tehnično kulturo Slovenije (ZOTKS) sodelovala na 57. Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije z raziskovalno nalogo iz matematike z naslovom *Reševanje polinomskih enačb z geometrijo*. Najin mentor je bil profesor Alojz Grahor, ki se mu zahvaljujemo za idejo, pomoč in podporo. V nalogi sva raziskovala, kako poiščemo rešitve enačbe $p(x) = 0$ kjer je $p(x)$ polinom z realnimi koeficienti. Obravnavala sva reševanje s parabolami, s tako imenovano želvjo grafiko in z matematičnim prepogibanjem papirja. Pri metodi reševanja s parabolami sva uporabljala program GeoGebra, ki konstruira parabolo, če sta dana gorišče in premica vodnica. Želvja grafika omogoča določeni točki na zaslonu (ki ji rečemo želva), da izrisuje lomljeno črto: lahko se premakne naprej ali nazaj za določeno število »korakov«, v ogliščih pa se zasuka za določen kot. Metoda s prepogibanjem papirja deluje tako, da najprej iz koeficientov polinoma določimo na papirju s koordinatnim sistemom nekaj izbranih točk in premic ter nato s prepogibanjem papirja določimo točko, ki predstavlja rešitev dane enačbe. V zadnjem delu naloge sva z vsemi tremi načini rešila starogrški problem podvojitve kocke. V članku predstavimo način reševanja polinomskih enačb z želvjo grafiko. Utemeljitev in dokazi so navedeni v raziskovalni nalogi (Ptičak in Vovk, 2023).

Reševanje kvadratne enačbe

1.1 Parabola

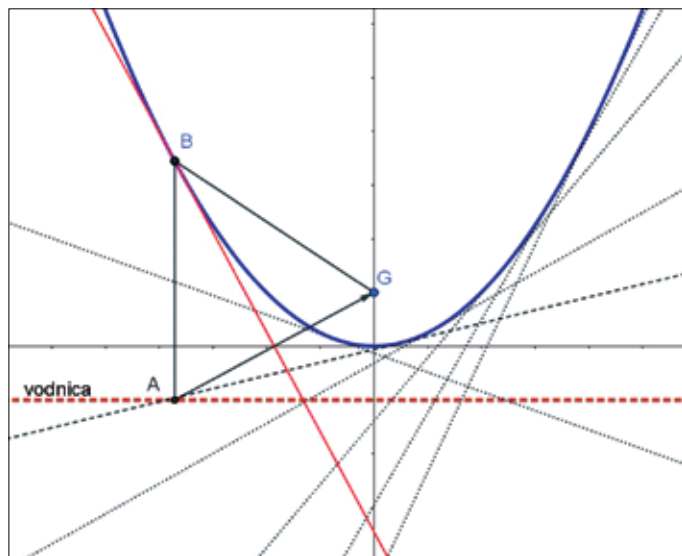
Parabolo definiramo kot množico točk v ravnini, ki so enako oddaljene od dane točke G – gorišča in premice vodnice v .

Če je os parabole vzporedna abscisni osi, teme v točki (r, q) , gorišče v točki $G(r + \frac{p}{2}, q)$, enačba vodnice $x = -\frac{p}{2} + r$, je enačba parabole:

$$(y - q)^2 = 2p(x - r), \quad (1)$$

če pa je os parabole vzporedna ordinatni osi, teme v točki (r, q) , gorišče v točki $G(r, \frac{p}{2} + q)$, enačba vodnice $y = -\frac{p}{2} + q$, je njena enačba:

$$(x - r)^2 = 2p(y - q). \quad (2)$$

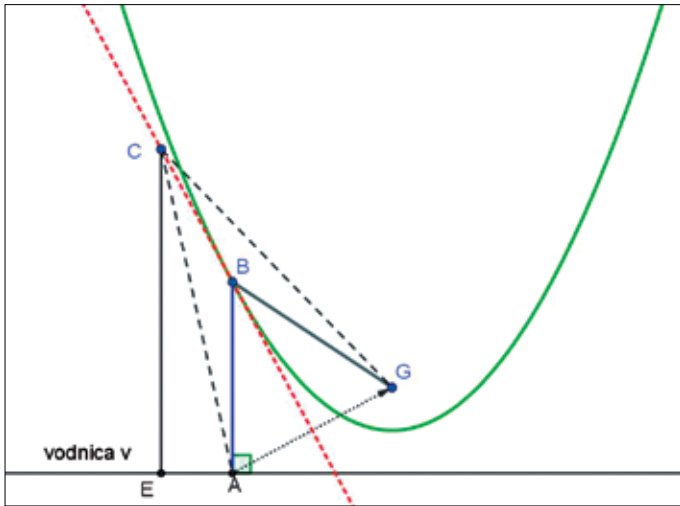


Slika 1: »Konstrukcija« parabole s prepogibanjem papirja.

Znano je, da lahko konstruiramo parabolo s prepogibanjem papirja. Ko prepognemo papir, dobimo model premice, ki mu rečemo pregib.

Na pravokotnem papirju izberemo točko G (gorišče) in vzporedno s spodnjim robom narišemo premico vodnico. Še bolje je, da za premico vodnico izberemo kar spodnji rob papirja. Premico vodnico (ali spodnji rob papirja) prepogibamo tako, da vodnica poteka skozi gorišče. Praktično je najlažje, da si na premici vodnici (spodnjem robu) izberemo niz točk in vsakič papir prepognemo tako, da izbrana točka npr. točka A na vodnici v pokrije gorišče. Na ta način naredimo veliko pregibov. To so tangente na parabolo z goriščem G in premico vodnico. Ogrinjače tangent določajo parabolo (Slika 1). Dokažimo trditev, ki pojasni konstrukcijo parabole (glejte Trditev 1).

Trditev 1: Pregib, ki ga dobimo tako, da premico vodnico prepognemo v točko G , je tangenta na parabolo z goriščem G in dano premico vodnico.



Slika 2: K dokazu, da je pregib tangenta na parabolo.

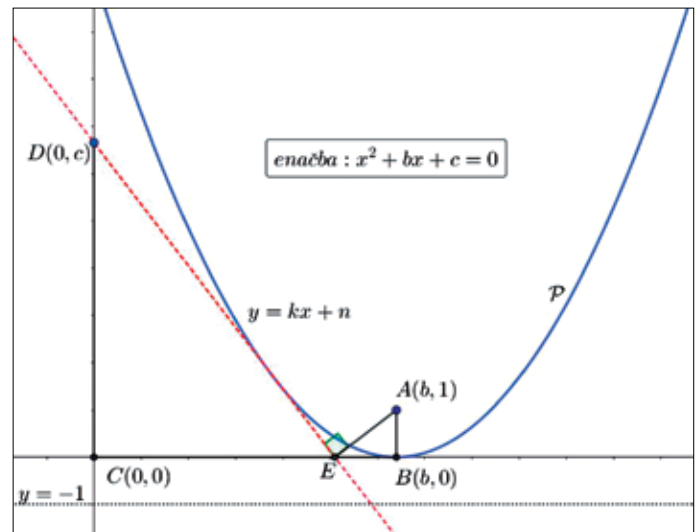
Dokaz: (Glejte Sliko 2.) Na premici vodnici izberemo točko A in naredimo pregib BC tako, da se točka A pokrije s točko G . Za vsako točko C , ki leži na premici BC , velja, da je enako oddaljena od točk A in G (trikotnik AGC je enakokrak). Toda le ena točka med njimi je enako oddaljena od premice vodnice v in točke G . Ta leži na presečišču pravokotnice na vodnico skozi točko A in premico skozi BC . Za vsako drugo točko C , ki leži na premici (pregibu) skozi BC velja, da njena razdalja do premice vodnice ni enaka razdalji do gorišča $|CE| \neq |CG|$. Ker je trikotnik AGB enakokrak, je premica skozi točki B in C (to je dobljeni pregib, ki je tangenta na parabolo) pravokotna na premico skozi točki A in G . Q.E.D.

1.2 Izpeljava postopka reševanja kvadratne enačbe z želvjo grafiko

Dana je kvadratna enačba:

$$x^2 + bx + c = 0; b, c \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Izpeljali bomo povezavo med rešitvama enačbe (3) in smernimi koeficienti določenih tangent na izbrano parabolo (glejte Trditev 2). Določimo točke: $A(b, 1)$, $B(b, 0)$, $C(0, 0)$ in $D(0, c)$ (Slika 3).



Slika 3: Povezava rešitev enačbe s smernim koeficientom tangente.

Trditev 2: Dana je enačba $x^2 + bx + c = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$. Naj bosta točki $A(b, 1)$ in $D(0, c)$ ter parabola P z goriščem v točki A in premico vodnico $y = -1$. Skozi točko D konstruirajmo tangento na parabolo P . Smerni koeficient te tangente je enak rešitvi dane enačbe.

Dokaz: Enačba parabole P je $(x - b)^2 = 4y$ oziroma $y = \frac{(x-b)^2}{4}$. Na paraboli izberemo točko $T\left(t, \frac{(t-b)^2}{4}\right)$. Smerni koeficient tangente v točki T je enak $y'(T) = k = \frac{(t-b)}{2}$. Nastavek za enačbo tangente je enak $y = kx + n$. Ob upoštevanju smernega koeficienta k in dejstva, da točka T leži na tangenti, dobimo $n = -\frac{t^2 - b^2}{4}$ in enačbo tangente:

$$y = \frac{t-b}{2}x - \frac{t^2 - b^2}{4}.$$

Ker tangenta poteka skozi točko $D(0, c)$ dobimo $c = \frac{t-b}{2} \cdot 0 - \frac{t^2 - b^2}{4}$. Ko vstavimo še $t = 2k + b$, dobimo enačbo: $k^2 + bk + c = 0$.

Sklep: Za smerni koeficient tangente smo dobili enako enačbo, kot je dana na začetku. Torej so rešitve dane enačbe enake smernim koeficientom tangent, ki zadoščajo opisanim pogojem v Trditvi 2.

Q.E.D.

Odkriti moramo postopek, kako poiskati enačbi tistih dveh tangent, ki zadoščata opisanim pogojem, in odčitati njun smerni koeficient.

1.3 Reševanje kvadratne enačbe z želvjo grafiko

Želvja grafika (angl. *turtle graphics*) je enostaven način vektorskega risanja v programerskem svetu. Vključena je v enega izmed prvih izobraževalnih programskih jezikov *Logo*. Virtualni želvi uporabnik pove, za koliko in pod kakšnim kotom naj se premakne, s svojimi premiki pa »želva« ustvarja »želvjo pot«. Na podlagi te ideje risanja je zasnovana tudi ta metoda.

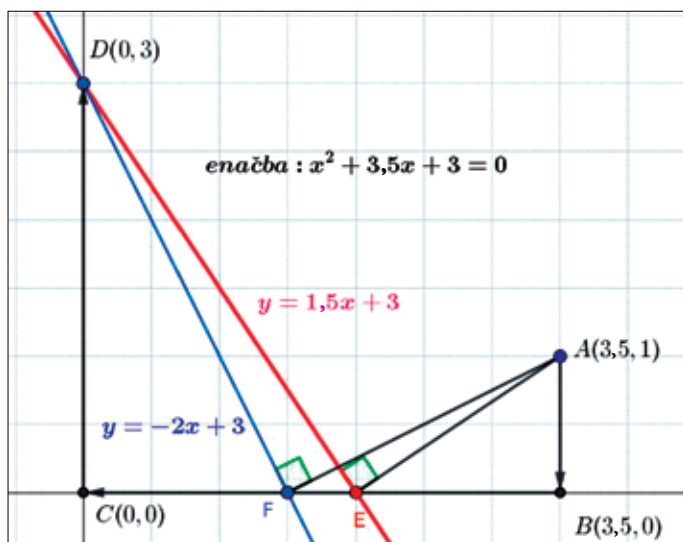
Na situacijo, ki jo prikazuje Slika 3, lahko pogledamo drugače. Opazujemo vse štiri označene točke A , B , C in D ter si zamislimo

pot, ki jo naredi »želva«, ko se sprehodi po poligonu A, B, C in D . V točki A je obrnjena navzdol in naredi pot dolžine 1. Nato se zasuka desno za kot 90° in naredi pot dolžine b . Če je b negativen, naredi pot v vzratni smeri. V točki C se zasuka desno za 90° in naredi pot dolžine c . (Če je c negativen, se premika vzvratno.) Želva se ustavi v točki D . Končni cilj je poiskati enačbo tiste premice skozi D in E , za katero velja, da je pravokotna na daljico AE kjer je točka E izbrana točka daljice BC . Poligonu $A - B - C - D$ običajno pravimo želva pot.

Opisani zadnji del postopka obrnemo (glejte Sliko 3). Narišemo premici – nosilki daljic BC in CD . Na nosilki BC si izberemo premično točko, na primer točko E . V njej naredimo pravokotnico na daljico AE . Nato premikamo točko E po nosilki daljice BC . Ko s »pravokotnico zadenemo točko D «, je smerni koeficient nosilke daljice ED enak rešitvi dane enačbe.

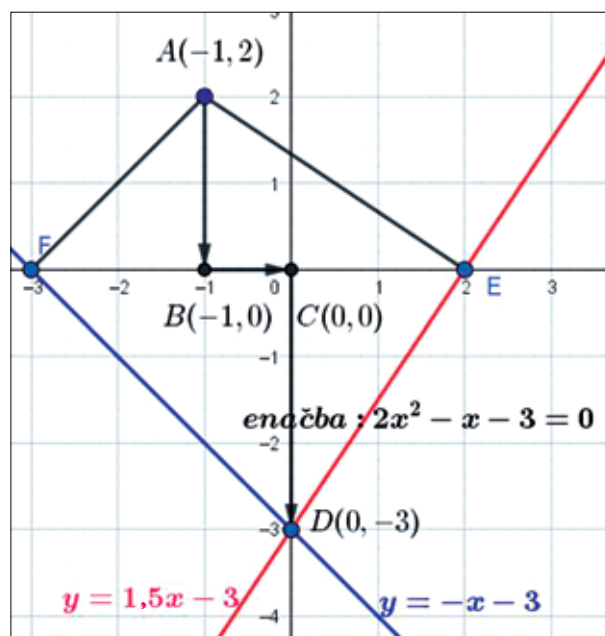
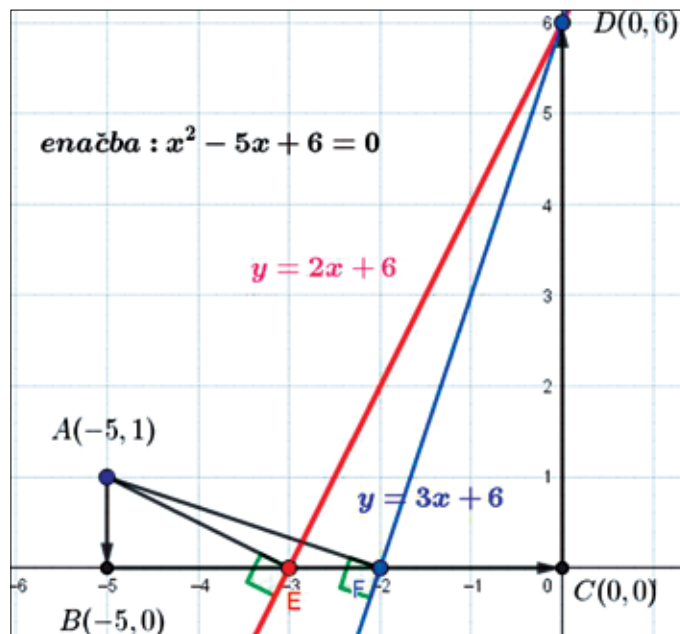
V točki E , ki leži na nosilki daljice BC , se »notranja« pot AED »odbije kot žogica pri biljardu«, a ne tako, da je vpadni kot enak odbojnemu, ampak sta poti AE in ED med seboj pravokotni. Ta način odboja smo poimenovali »odboj_90«, pa tudi celotni notranji poti AED rečemo »odboj_90«.

Primer reševanja kvadratne enačbe je prikazan na Sliki 4. Rešena je enačba $x^2 + 3,5x + 3 = 0$. Narišemo želvjo pot $A - B - C - D$ od začetne točke $A(3,5, 1)$ s koraki 1, 3,5 in 3. Želva konča pot v točki $D(0, 3)$. Na nosilki daljice BC izberemo premično točko E in narišemo odboj_90 z začetkom v točki A in odbojem v točki E . S premikanjem točke E poiščemo takšno lego, da gre pravokotnica na AE skozi točko D . Takrat odčitamo smerni koeficient nosilke daljice ED , ki je 1,5. Druga možnost je v točki F (smerni koeficient je enak 2). Rešitvi dane enačbe sta torej 1,5 in 2.



Slika 4: Reševanje kvadratne enačbe $x^2 + 3,5x + 3 = 0$ z želvjo grafiko.

Na Sliki 5a je prikazano reševanje kvadratne enačbe $x^2 - 5x + 6 = 0$. Najprej narišemo želvjo pot $A - B - C - D$. Le-ta se začne v točki $A(-5, 1)$. Konstruiramo še odboj_90 in s pomikanjem določimo lego točke E tako, da se konec želvjete poti pokrije z zadnjo točko odboja_90. Rešitvi sta 2 in 3 (smerna koeficienta nosilk daljic ED in FD). Na Sliki 5b je prikazan primer rešitve splošne kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$. Začetek želvjete poti $A - B - C - D$ je v točki $A(b, a)$, konec pa v točki $D(0, c)$.



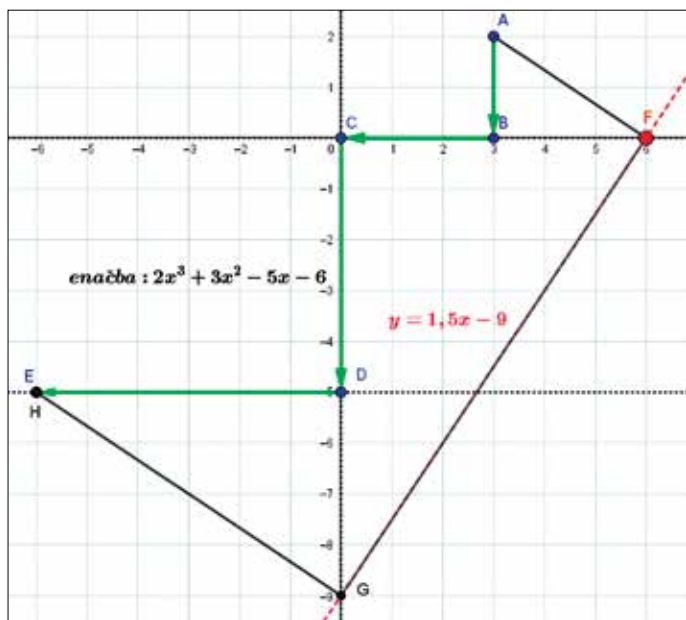
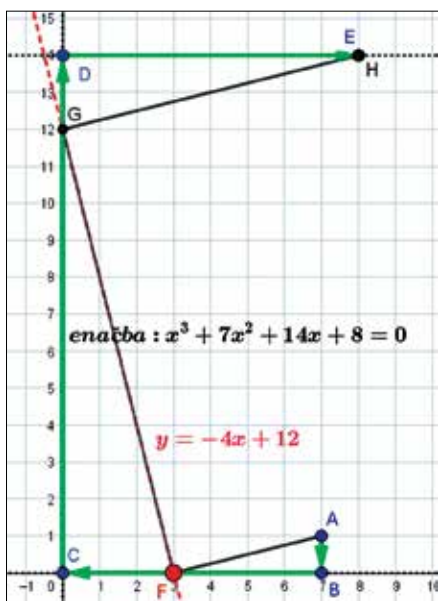
Sliki 5a in 5b: Primera reševanja kvadratne enačbe.

Rešena je enačba $2x^2 - x - 3 = 0$. Enačbi $ax^2 + bx + c = 0$ in $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$; $a \neq 0$ imata enaki rešitvi. Ker so koeficienti sorazmerni, sta si želvjete poti podobni s faktorjem raztega a , ustrezni premici pa vzporedni. Smerna koeficienta ustreznih premic sta torej enaka.

2 Reševanje kubične enačbe

Idejo reševanja kvadratne enačbe z želvjo grafiko uporabimo tudi pri reševanju kubične enačbe $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Želva je v začetni točki $(b, 1)$, potem pa gre navzdol in nadaljuje po odsekih 1, b , c , d . Če je koeficient pozitiven, naredi pot naprej, sicer pa vzvratno pot. Vsakič se zasuka za 90° v desno. Njena končna točka je točka (d, c) . S pomočjo odbojev_90 bomo dobili rešitev,

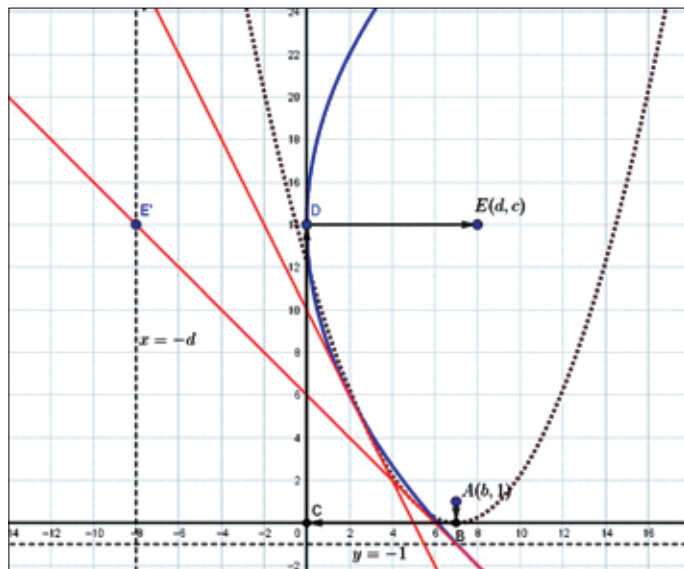
ko bomo »zadeli« končno točko željve poti. Oglejmo si primera (Sliki 6a in 6b).



Sliki 6a in 6b: Primera reševanja kubične enačbe.

Na Sliki 6a je prikazano reševanje enačbe $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$ z željvo grafiko. Željva pot se začne v točki $A(7, 1)$, nato pa opravi pot po odsekih 1, 7, 14 in 8, vsaki se zasuče za pravi kot v desno. Nato konstruiramo še odboja_90 s premično točko F . Lego točke F določimo tako, da se končna točka odboja_90 pokrije s končno točko željve poti. Rešitev dane enačbe je enaka smernemu koeficientu nosilke daljice FG , to je -4 . Na Sliki 6b je prikazana rešitev enačbe $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$. Rešitev je $1,5$. Zaradi sorazmernosti koeficientov in enake množice rešitev enačb $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ter $(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}) = 0$; $a \neq 0$; sta željvi poti obeh enačb podobni.

Teoretično ozadje reševanja enačbe tretje stopnje z željvo grafiko je opisano in dokazano v Trditvi 3.



Slika 7: K dokazu reševanja enačbe tretje stopnje s parabolama.

Trditev 3: Rešujemo enačbo $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. V koordinatnem sistemu narišemo točki $A(b, 1)$ in $E(d, c)$ ter premici $y = -1$ in $x = -d$. Zapišemo enačbi parabol: prvo z goriščem v točki A s premico vodnico $y = -1$ ter drugo z goriščem v E in premico vodnico $x = -d$. Smerni koeficienti skupnih tangent obeh parabol so enaki rešitvam dane enačbe (glejte Sliko 7).

Dokaz: Enačba prve parabole ($A, y = -1$) je $(x - b)^2 = 4y$, enačba druge ($E, x = -d$) pa $(y - c)^2 = 4dx$.

Tangenta na prvo parabolo v točki T ima enačbo $y = kx - k(b + k)$.

Ker je dobljena tangenta tudi tangenta na drugo parabolo, vstavimo dobljeni y v enačbo druge parabole ter poenostavimo. Upoštevamo, da je tudi $t = b + 2k$. Tako dobimo kvadratno enačbo:

$$k^2x^2 - 2x(k^3 + bk^2 + ck + 2d) + k^4 + 2bk^3 + (b^2 + 2c)k^2 + 2bck + c^2 = 0.$$

Diskriminanta te enačbe mora biti enaka 0:

$$(-2(k^3 + bk^2 + ck + 2d) + k^4)^2 - 4k^2(k^4 + 2bk^3 + (b^2 + 2c)k^2 + 2bck + c^2) = 0,$$

$$16d(k^3 + bk^2 + ck + d) = 0,$$

$$k^3 + bk^2 + ck + d = 0.$$

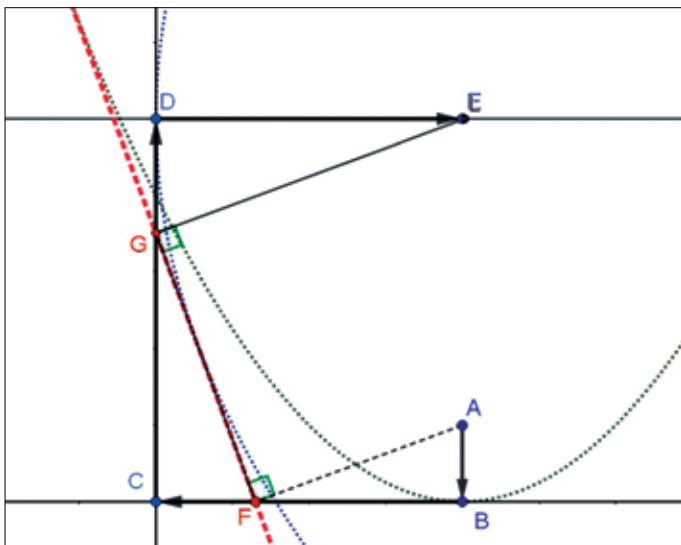
Sklep: Za izračun smernih koeficientov skupnih tangent obeh parabol smo dobili enako enačbo, kot je dana enačba. To pomeni, da so smerni koeficienti skupnih tangent na izbrani paraboli enaki rešitvam dane enačbe.

Q.E.D.

Zaradi same konstrukcije tangente na parabolo sta daljici AF in EG pravokotni na tangento (glejte Sliko 8). Z iste slike je razviden potek reševanja z željvo grafiko. Primera sta prikazana na Slikah 6a in 6b.

3 Hornerjev algoritem

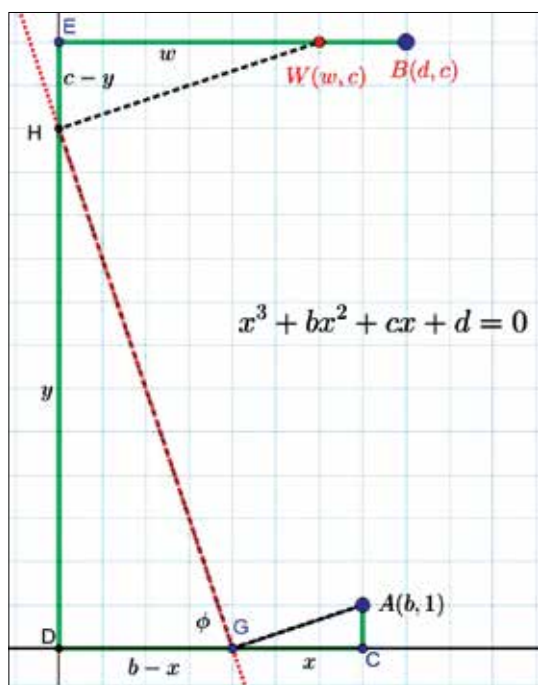
V tem poglavju preiskujemo, ali sta postopka, ki smo ju opisali v prejšnjih poglavjih, povezana s Hornerjevim algoritmom. Na Sliki 9 je predstavljen polinom tretje stopnje $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$,



Slika 8: Reševanje enačbe tretje stopnje z želvjo grafiko.

želvja pot je $A - C - D - E - B$, odboj_90 pa $AGHW$. Izpeljimo povezavo med reševanjem z želvjo grafiko in Hornerjevim algoritmom (Trditev 4).

Trditev 4: Naj bo leva stran enačbe $p(x) = 0$ polinom $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Vrednost polinoma $p(x)$ pri $x = x_0$ je enaka razliki abscis točk B in W , kjer je točka B končna točka želvjete poti, W pa končna točka odboja_90 iste poti.



Slika 9: K izpeljavi Hornerjevega algoritma na grafični način.

Dokaz: Naj bo $x = x_0$ dolžina daljice CG (glejte Sliko 9). Trikotniki ACG , GDH in HEW so podobni. Tako velja:

$$\frac{x_0}{1} = \frac{y}{b-x_0} = \frac{w}{c-y}.$$

Opazimo, da je x_0 enak smernemu koeficientu premice skozi točki GH , to je tangensu kota DGH . Iz prejšnje trojne enačbe dobimo: $y = x_0(b - x_0)$, $w = x_0(c - y)$:

$$w = x_0(c - x_0(b - x_0)) = x_0(c - bx_0 + x_0^2) = cx_0 - bx_0^2 + x_0^3 = cx_0 - bx_0^2 + x_0^3 - d + d.$$

Ko v zadnjo enačbo vstavimo $-x_0$ namesto x_0 , dobimo:

$$w = -cx_0 - bx_0^2 - x_0^3 - d + d = -p(x_0) + d.$$

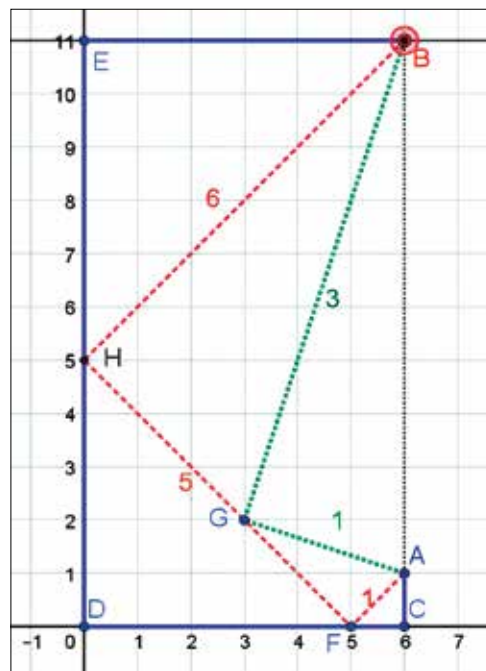
Od tod pa sledi $p(x_0) = d - w$. Torej je razlika med abscisama točk B in D enaka vrednosti polinoma $p(x_0)$. Hkrati smo dokazali tisto, kar že vemo, da je rešitev enačbe $p(x) = 0$ (ko točki B in D sovpadata) enaka smernemu koeficientu premice skozi G in H .

Q.E.D.

Na Sliki 9 je kot primer predstavljena enačba $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$. Odboj_90 se konča v točki W , ki ima absciso enako 6. Torej je vrednost polinoma pri $x_0 = -3$ enaka $p(-3) = d - w = 2$. Vrednost -3 je enaka smernemu koeficientu premice skozi točki G in H pa tudi abscisi točke G glede na absciso točke A , ker je ordinata točke A enaka 1, saj je vodilni koeficient polinoma $p(x)$ enak 1.

Obenem smo dobili tudi količnik in ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ s polinomom $(x + 3)$. Koeficienti količnika so odseki odboja_90, pri čemer vzamemo za enoto dolžino prvega odseka AG . Odseki so 1, 4, 2, ostanek je 2. Tako je: $p(x) = (x + 3)(x^2 + 4x + 2) + 2$.

Ko točki W in B sovpadata, dobimo, da je smerni koeficient premice skozi G in H rešitev dane enačbe, odboj_90 pa nam da koeficiente količnika. Iskanje rešitev lahko nadaljujemo kar na odboju_90.



Slika 10: Razstavlanje polinoma.

Na Sliki 10 je prikazano zaporedno iskanje ničel polinoma $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Želvja pot je enaka $A - C - D - E - B$, odboj_90 pa poligon $AFHB$. Odčitamo ničlo -1 in koeficiente količnika 1, 5, 6. Torej je:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x^2 + 5x + 6).$$

Ta odboj_90 $AFHB$ vzamemo kot novo želvjo pot in narišemo drugi odboj_90: AGB . Smerni koeficient premice skozi BG glede

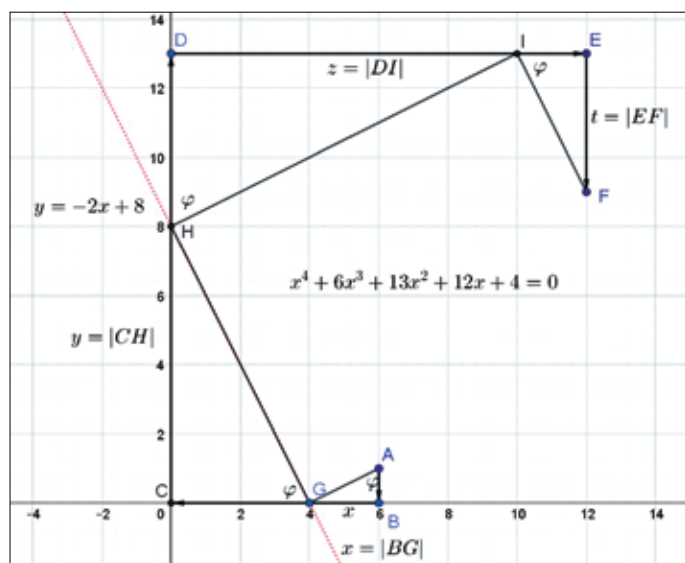
na novo ordinatno os HG in novo abscisno os HG je enak -2 , količnik pa ima koeficienta 1 in 3. Tako je:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

4 Reševanje polinomske enačbe višje stopnje

Z želvjo grafiko lahko rešujemo tudi polinomske enačbe višjih stopenj od 3. Oglejmo si primer enačbe četrte stopnje, potem pa posplošimo.

Dana naj bo enačba $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$. Slika 11 prikazuje rešitev z želvjo grafiko.



Slika 11: K dokazu, da želva grafika deluje tudi pri enačbah višje stopnje.

Domneva. V primeru reševanja enačbe $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$ z želvjo grafiko dobimo rešitev dane enačbe takrat, ko

konec želvje poti sovpade s koncem odboja $_{90}$ (na Sliki 11 je to v točki F). Rešitev x je enaka negativni vrednosti tangensa naklonskega kota nosilke daljice GH : $x = -\tan\varphi$.

Utemeljitev. Trikotniki AGB , GHC , HID in IFE so podobni. Naj bo $\frac{|BG|}{|BA|} = x$. V trikotniku GHC velja: $\frac{|CH|}{|CG|} = x = \frac{y}{6-x}$, v trikotniku HID : $\frac{|DI|}{|DH|} = x = \frac{z}{13-y}$, v trikotniku IFE pa podobno $\frac{|EF|}{|EI|} = x = \frac{4}{12-z}$.

Zapišemo drugače: $y = x(6 - x)$, $z = x(13 - y)$, $4 = x(12 - z)$.

Razvijmo: $4 = x(12 - z) = x(12 - x(13 - y)) = x(12 - x(13 - x(6 - x))) = x(12 - x(13 - 6x + x^2)) = x(12 - 13x + 6x^2 - x^3) = 12x - 13x^2 + 6x^3 - x^4$.

Tako dobimo enačbo: $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$.

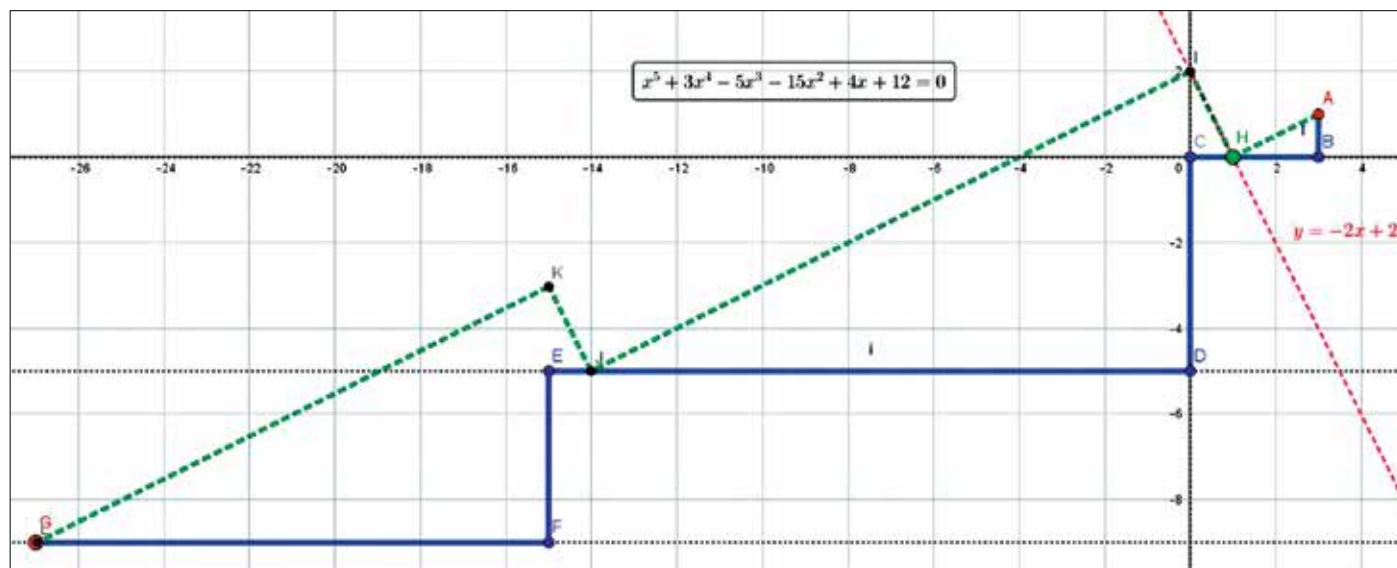
V trikotniku AGB velja, da je $x = \tan\varphi$. Hitro pa vidimo, da dobimo enačbo enako prvotni enačbi, če x nadomestimo z izrazom $-\tan\varphi$. To je tudi vrednost, ki je enaka tangensu naklonskega kota nosilke daljice GH , kar je enako njenemu smernemu koeficientu.

Sklepamo, da bo dokaz pri splošni enačbi stopnje n potekal enako, le koeficienti bodo poljubni, nekaj nadaljnjih korakov »želve« pa bo analognih. Tako da lahko zapišemo:

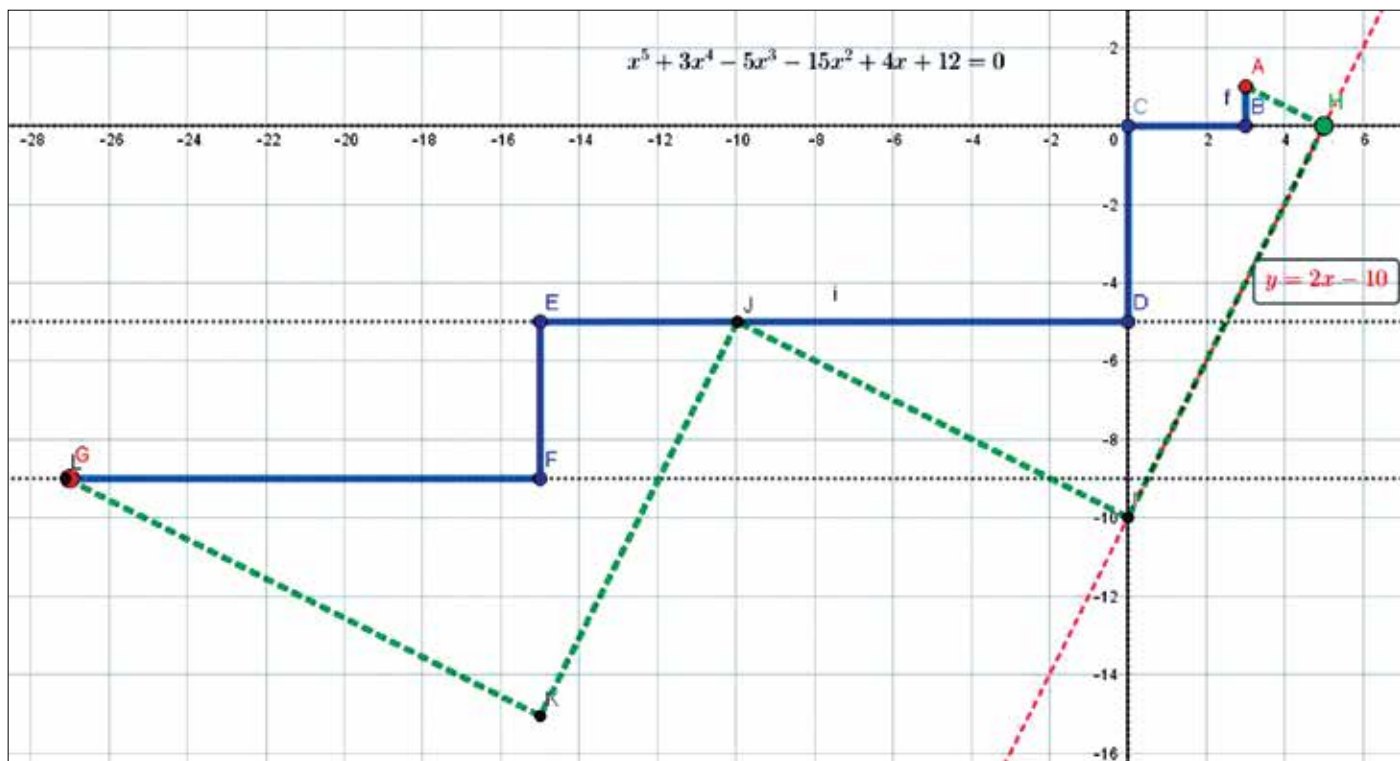
Trditev 5: Polinomske enačbo $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ rešujemo po naslednjih korakih:

Prvi korak: V koordinatnem sistemu narišemo pot od točke $A(a_{n-1}, 1)$ do končne točke X tako, da začne želva pot v točki A in se potem na vsakem koraku zasuka v desno za 90° . Če je naslednji koeficient pozitiven, se premakne naprej, sicer pa nazaj za toliko, kolikor je velikost trenutnega koeficienta. Če je koeficient enak 0, se samo zasuka. Želva pot se konča v točki X na zadnjem koraku, ko se želva premakne za koeficient a_0 .

Drugi korak: Na vsakem odseku narišemo premice, nosilke odsekov.



Slika 12: Prvi primer reševanja enačbe pete stopnje. Rešitev je -2 .



Slika 13: Drugi primer reševanja enačbe pete stopnje. Rešitev je 2.

Tretji korak: Na premici, nosilki drugega odseka, izberemo (giblivo) točko G in jo povežemo z začetno točko A (narišemo daljico AG). Nadaljujemo risanje poti odboja_90.

Četrty korak: Premikamo točko G po nosilki drugega odseka tako, da zadnja pravokotnica sovpada z zadnjo točko željeve poti, to je s točko X .

Rezultat: Smerni koeficient nosilke daljice GH je enak rešitvi dane enačbe.

Q.E.D.

Podobno, kot smo utemeljili reševanje kvadratne in kubične enačbe z vodilnim koeficientom različnim od 1, velja tudi za reševanje enačbe višje stopnje.

Sliki 12 in 13 prikazujeta dve od petih rešitev enačbe $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0$.

Vse rešitve so: 1, -1, 2, -2 in -3.

Hornerjev algoritem z želvjo grafiko lahko posplošimo tudi na polinome višje stopnje. Dokaz poteka enako. Ker se položaji končnih točk željeve poti in odboja_90 razlikujejo, ugotovimo vrednost polinoma $p(x_0)$ takole:

Naj bo točka D končna točka željeve poti, točka W pa končna točka odboja_90; vektor $\vec{d}$ vektor v smeri zadnjega premika željeve, vektor $\vec{w}$ pa vektor od točke W do točke D . Števili d in w sta abscisi (pri enačbah lihe stopnje) ali ordinati (pri enačbah sode stopnje) točk D in W . Vrednost polinoma je enaka $p(x_0) = \mp |d - w|$. Predznak je pozitiven, ko sta vektorja $\vec{d}$ in $\vec{w}$ enako usmerjena, negativen pa, ko sta ta vektorja različno usmerjena.

Ko točki D in W sovpadeta in dobimo rešitev enačbe $p(x_0) = 0$, nam dajo odseki odboja_90 koeficiente količnika. Poglejmo primere. Upoštevamo, da peljemo želvico po odboju_90 enako kot pri konstrukciji željeve poti. Želva začne pot v začetni točki odboja_90 in se na vogalih zasuka za 90° v desno. Odsek, po katerem se giblje zadenjsko, ima negativen predznak. Zapišimo primera s Slik 12 in 13:

Slika 12:

$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = (x + 2)(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6).$$

Slika 13:

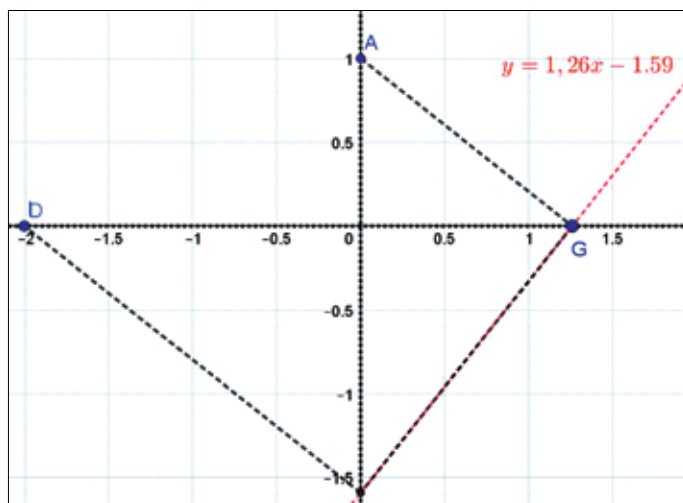
$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = (x - 2)(x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6).$$

5 Rešitev starogrškega problema podvojitve kocke

Podvojitve kocke je eden izmed starogrških problemov. Za dano kocko s stranico a moramo poiskati stranico b nove kocke, ki ima dvojno prostornino $b^3 = 2a^3$.

Enačbo preoblikujemo v $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = 2$. Označimo količnik $\frac{b}{a} = x$. Tako dobimo enačbo $x^3 = 2$ oziroma $x^3 - 2 = 0$.

Iz enačbe $x^3 - 2 = 0$ sledi, da sta točki $A(0, 1)$ in $D(-2, 0)$. Želvico peljemo od točke $A(0, 1)$ do točke $D(-2, 0)$. Kjer se želva obrne na mestu (to je v koordinatnem izhodišču), vsakič narišemo premico v njeni smeri. Ti premici služita za konstrukcijo odboja_90 (glejte Sliko 14). Z opisano metodo lahko rešimo tudi poljubno enačbo $x^3 - d = 0$, le točka D ima koordinati $D(-d, 0)$.



Slika 14: Podvojitev kocke z želvjo grafiko.

Zaključek

Grafična metoda reševanja polinomskih enačb je zelo zanimiva. Pred razvojem računalniških aplikacij iz dinamične geometrije je bila težko izvedljiva. Znano je, da je Riaz (Riaz, 1962, v Ptičak in Vovk, 2023) izdelal praktični pripomoček. Reševanje kvadratne in kubične enačbe pa lepo poteka tudi s prepogibanjem papirja. V raziskovalni nalogi (Ptičak in Vovk, 2023) je obdelana tudi ta zanimiva metoda.

Viri in literatura

Ptičak, E., Vovk, T. (2023). *Reševanje polinomskih enačb z geometrijo*. Škofijska gimnazija Vipava. Dostopno na naslovu https://zbirke.zotks.si/2023/resources/SS_matem_2965.pdf.

Digitalna bralnica ZRSŠ

Trajnostni razvoj

