Naslov članka/Article:

Posebna teorija relativnosti po Bondijevo

Bondi's Approach to Special Relativity

Avtor/Author:

dr. Tomaž Kranjc

Fizika v šoli 2/2024, letnik 29
ISSN 1318-6388
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2024

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/fizika-v-soli/

Posebna teorija relativnosti po Bondijevo

Bondi's Approach to Special Relativity

dr. Tomaž Kranjc
upokojeni profesor Pedagoške fakultete Univerze v Ljubljani

Izvleček

Vsakdo ve za teorijo relativnosti, tudi njen avtor Albert Einstein je eden najbolj znanih in popularnih znanstvenikov, a je še vedno slabo razumljena in tudi pri pouku fizike v srednjih šolah dijaki o njej ne izvedo veliko. Po eni strani je privlačna, ker ljudje poznajo nenavadne pojave »krčenja dolžin«, »podaljšanja časa« in »paradoksa dvojčkov«, vendar razen fizikov redki te pojave tudi razumejo. Pojavljajo se tudi ugovori, da teorija nasprotuje »zdravi pameti«. Ti ugovori so posledica nepopolnega ali napačnega razumevanja teorije.

V prispevku obravnavamo enega osnovnih pojavov posebne teorije relativnosti – različen tek časa v dveh medsebojno gibajočih se inercialnih opazovalnih sistemih. Uvedemo pojem četvernega prostora – prostora-časa[1] – in v njem pojem dogodkov in procesov ter svetovnic (»življenjskih črt«), pa tudi diagrame, ki predstavljajo različna gibanja teles.

Ponovimo osnovni načeli posebne teorije relativnosti in predstavimo »*k*-račun« Hermanna Bondija, ki pripelje do povezave med časovnimi intervali v različnih inercialnih opazovalnih sistemih. Pokažemo, da sta poljubna inercialna opazovalna sistema »enakopravna«, tj. da velja različen tek časa enega opazovalca glede na drugega na enak način v obeh smereh. Rezultat dobimo še z uporabo Lorentzovih[2] transformacij in primerjamo obe poti.

Na osnovi Bondijevega *k*-računa izpeljemo relativistično seštevanje hitrosti.

Ključne besede: posebna relativnost, kvaternionski prostor, prostor-čas, svetovne črte, dilatacija časa, Bondijev pristop k relativnosti, Bondijev K-faktor, relativistično seštevanje hitrosti, Lorentzove transformacije

Abstract

Everyone is familiar with the theory of relativity proposed by Albert Einstein, one of the most famous and popular scientists. However, it remains poorly understood, and even in secondary school physics classes, students learn little about it. On the one hand, it is appealing because people are familiar with the strange phenomena of »length contraction«, »time dilation«, and the »twin paradox«, but few people, aside from physicists, understand them. There are also claims that the theory defies »common sense«. These objections stem from a limited or incorrect understanding of the theory.

This paper explores one of the fundamental phenomena of special relativity – the different passage of time in two mutually moving inertial frames of reference. We introduce the notion of quaternionic space (spacetime) and, within it, the concept of events, processes, world lines, and diagrams representing the different motions of bodies.

We review the basic principles of special relativity and introduce Hermann Bondy's »k-calculus«, which establishes a connection between time intervals in different inertial observing systems. We demonstrate that two arbitrary inertial observing systems are »equivalent«, meaning that the difference in time passage between one observer and the other is valid in the same way in both directions. We extend this conclusion using Lorentz transformations and compare the two paths.

1 Opomba uredništva: V fizikalni srenji je navada, da v izrazu za četverni prostor »prostor-čas« sklanjajo obe sestavini. Z vidika slovenskega pravopisa pa je prav, da sklanjamo le drugo sestavino, saj gre za en pojem in eno besedo, zato bi npr. v rodilniku zapisali: »prostor-časa«.

2 Opomba uredništva: Fizikalno-matematična srenja že vrsto let uporablja izraz »Lorentzove transformacije«, kot je zapisano v tem članku. Glede na sodobni slovenski pravopis pa bi bil pravilen zapis »Lorentzeve transformacije«, ki nakazuje tudi pravilno izgovarjavo [lorenčeve transformacije].

Using the Bondi k-calculus, we derive relativistic velocity summation.

Keywords: special relativity, quaternionic space, spacetime, world lines, time dilation, Bondian approach to relativity, Bondi K-factor, relativistic velocity summation, Lorentz transformations

1 Uvod

»Tradicionalne« in »nove« učne metode pogosto obravnavajo iste učne vsebine, vendar na različne *didaktične* načine. Včasih se posreči za predstavitev iste snovi najti preprostejšo *vsebinsko* razlago, ki učencem odpre boljši vpogled in razumevanje, do katerega po »tradicionalni« poti težko pridejo. Tak je morda primer Bondijevega pristopa k posebni teoriji relativnosti.

Posebna teorija relativnost je stara že več kakor sto let. Ker je ena od temeljnih in krovnih fizikalnih (in splošno-naravoslovnih) teorij z ogromnimi implikacijami tudi na drugih, nefizikalnih področjih, pedagogi in znanstveniki že desetletja iščejo načine, kako bi jo vsaj v temeljnih črtah predstavili v šoli. In ne le v srednji, ampak celo v osnovni šoli. Tako je britanski matematik in kozmolog, ekspert za splošno teorijo relativnosti, sir Hermann Bondi[3] zapisal (1967):

> »Zelo so me zanimali načini, kako bi postala posebna teorija relativnosti bolj dostopna razumevanju, in vedno sem si govoril, da je moj končni cilj, da bi postala del osnovnošolskega učnega programa. Kaj je treba za ta cilj narediti, se mi je tudi vedno zdelo preprosto. Če bi lahko kdo izumil poceni in varno igračo – pospeševalnik, dovolj hiter, da bi se pokazali relativistični učinki, tako da bi se lahko pet-, šest- ali sedemletni otroci igrali z njim, potem bi se zdela posebna teorija relativnosti povsem očitna in primeren predmet za osnovnošolski program.
>
> Slišal sem, da je najboljša pomoč za razvoj industrijsko nerazvitih dežel, če jih preplavijo s cenenimi mehanskimi igračami; otroci v teh deželah potem zrastejo z mehanskimi pripravami, ki jim postanejo všeč in jih začnejo zanimati. Če bi znali enako narediti v fiziki, bi 'videli veliko dlje'. Zame je velik fizik tisti, ki zna z žepno baterijo pokazati to, za kar je bilo prej treba uporabiti ogromen pospeševalnik. Mislim, da taka vrsta fizike potrebuje več spodbude in več podpore.«

Včasih se posreči za predstavitev iste snovi najti preprostejšo *vsebinsko* razlago, ki učencem odpre boljši vpogled in razumevanje, do katerega po »tradicionalni« poti težko pridejo.

Zame je velik fizik tisti, ki zna z žepno baterijo pokazati to, za kar je bilo prej treba uporabiti ogromen pospeševalnik.

V svojem iskanju preproste razlage relativnostne teorije je Bondi predstavil t.i. k-račun, s katerim je lahko brez zahtevnega računanja in brez standardnih osnovnih orodij teorije relativnosti, predvsem Lorentzovih transformacij, prišel do nekaterih temeljnih rezultatov. Izognil se je tudi razlaganju znamenitega poskusa Michaelsona in Morleyja, s katerim sta – zgodovinsko gledano – postavila prvi trdni dokaz proti obstoju etra in pomembno prispevala k odkrivanju poti do posebne teorije relativnosti.

V tem prispevku si želimo podobno, kakor si je želel/zastavil Bondi, da bi nekaj vsebine posebne teorije relativnosti predstavili na dostopnejši in lažje razumljiv način. Najprej (v 2. razdelku) predstavimo znani osnovni načeli teorije, potem (v 3. razdelku) uvedemo nazorno orodje za predstavitev dogodkov in procesov – življenjske črte (svetovnice) v diagramih štirirazsežnega prostora-časa (ki bo pri nas le dvorazsežen). V 4. razdelku se posvetimo osrednjemu delu prispevka, to je razlagi, kakor jo je zasnoval Hermann Bondi s svojim k-računom, ki pojasni različen tek časa v različnih opazovalnih sistemih. Za tiste, ki že nekaj vedo o teoriji relativnosti in poznajo Lorentzove transformacije, v Dodatku pokažemo račun na osnovi teh transformacij, ki privede do enakega rezultata kakor Bondijev k-račun. Čisto na koncu (v podrazdelku 4.2) pokažemo še, kako nenavadno se znotraj teorije relativnosti seštevajo hitrosti.

3 Znanstvenik judovskega rodu, rojen leta 1919 na Dunaju, kjer je tudi odraščal. Leta 1937 je zaradi vse hujšega antisemitizma zbežal v Anglijo.

2 Osnovi načeli posebne teorije relativnosti

Posebna teorija relativnost temelji na dveh načelih (»postulatih«):
1. (načelo relativnosti): zakoni narave imajo enako obliko v vseh inercialnih opazovalnih sistemih,
2. (invariantnost svetlobne hitrosti): hitrost svetlobe v vakuumu (c) je enaka v vseh inercialnih opazovalnih sistemih.

Drugo načelo pomeni tudi, da je hitrost svetlobe v vakuumu neodvisna od gibanja izvira ali sprejemnika ali da v vakuumu noben svetlobni curek nikoli ne prehiti drugega svetlobnega curka.

Konstantnost hitrosti svetlobe je dejstvo, potrjeno s poskusi, a je s stališča naših izkušenj (»zdrave pameti«) zelo nenavadna.

V zgodovinskem razvoju je svetlobna hitrost v vakuumu pri razlagi relativnosti odigrala ključno vlogo. Maxwellove enačbe elektromagnetizma, v katerih nastopa svetlobna hitrost v praznem prostoru c, so skladne s teorijo relativnosti (so invariantne glede na Lorentzove transformacije). Vendar teorija relativnosti ni del elektromagnetne teorije, ampak je širša in jo je mogoče razviti neodvisno od elektromagnetne teorije. Nekateri avtorji zato menijo, da bi bilo bolj smiselno hitrost c imenovati »invariantna« hitrost ali tudi »mejna« (»limitna«) hitrost, saj je ne more doseči noben masni delec (c je hitrost razširjanja katerega koli polja z brezmasnimi nosilci interakcije). Velja, da nobeno telo ali signal ne moreta preseči hitrosti c (Kuščer idr., 2002).

Teorija relativnosti ni del elektromagnetne teorije, ampak je širša in jo je mogoče razviti neodvisno od elektromagnetne teorije.

Michelson in Morley sta svoj slavni poskus izvedla leta 1887, Einstein pa je svoj sloviti članek »O elektrodinamiki gibajočih se teles« objavil leta 1905 (Einstein, 1905). Za invariantnost svetlobne hitrosti se je torej vedelo že pred Einsteinom. Vendar je bil Einstein prvi, ki je iz tega naredil sklep, da ni absolutnega časa, ampak je tek časa odvisen od opazovalca, in je to tudi jasno formuliral. Invariantna hitrost (tudi hitrost svetlobe) je torej fundamentalna konstanta narave. Kot tako jo je treba izmeriti.

3 Podobe gibanja – črte-svetovnice

V naslednjem razdelku bomo potrebovali pojem prostora-časa ter pojem dogodkov in svetovnic. Zato na kratko ponovimo, kaj je to.

Eno od osnovnih orodij teorije relativnosti je prostor, v katerem so združene in prepletene tri prostorske in ena časovna dimenzija v enotnem *četvernem prostoru* ali *prostoru-času*, ki ima štiri dimenzije (Kuščer idr., 2002). Vsaka točka v prostoru-času predstavlja *dogodek* (ne glede na to, ali se tam kaj zgodi ali ne), krivulje pa so podobe gibanja – »življenjske črte«, ki kažejo zaporedje dogodkov nekega procesa in jih imenujemo *svetovnice*.

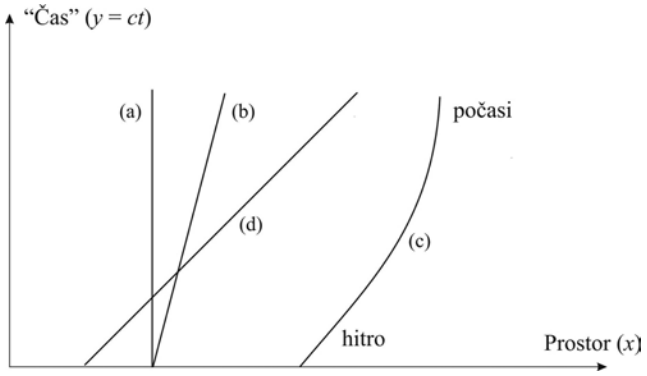
Vsaka točka v prostoru-času predstavlja *dogodek* (ne glede na to, ali se tam kaj zgodi ali ne), krivulje pa so podobe gibanja – »življenjske črte«, ki kažejo zaporedje dogodkov nekega procesa in jih imenujemo *svetovnice.*

Zaradi enostavnosti vzemimo le eno prostorsko dimenzijo (x), tako da se gibanje odvija le vzdolž ene premice. V tem primeru ima prostor-čas dve dimenziji in ga lahko nazorno prikazujemo v ravnini. Namesto »golega« časa v grafih raje vzamemo produkt ct, ki ima enako dimenzijo kakor krajevna koordinata. To novo »časovno koordinato« bomo označili z y, $y = ct$ (produkt ct je treba vzeti, kakor da je ena sama črka) in je ne smemo mešati s kako krajevno koordinato! Krajevno koordinato (x) in »časovno koordinato« (y) lahko potem merimo v enakih enotah, npr. v metrih ali svetlobnih sekundah. (Eni svetlobni sekundi na grafu seveda ustreza čas ena sekunda.) Količino $y \equiv ct$ bomo zaradi enostavnosti imenovali kar »časovna koordinata« ali celo kar »čas«. Diagrami v prostoru-času prikazujejo gibanje teles, tj. njihovo lego (x) v odvisnosti od »časa« (y).

Pokažimo nekaj primerov. Na sliki 1 je za nek izbran inercialni opazovalni sistem narisanih nekaj svetovnic za gibanje delca. Svetovnica (a), ravna navpična črta, predstavlja delec, ki miruje pri koordinati x_0. Njegova življenjska črta (svetovnica) je črta, vzporedna s »časovno« osjo (osjo y), saj je njegova lega za vsak čas enaka x_0. Črta (b) prikazuje življenjsko črto delca, ki se enakomerno (s konstantno hitrostjo, manjšo od svetlobne hitrosti c) premika v smeri pozitivne osi x. Svetovnica (c) opisuje delec, ki se v smeri pozitivne osi x začne gibati hitro,

potem pa se mu gibanje upočasnjuje. Črta (d), ki leži pod kotom 45° glede na koordinatni osi, kaže svetlobni signal (ki potuje s svetlobno hitrostjo c); pri naklonu 45° sta koordinati enaki, $x = ct$, kar pomeni enakomerno naraščanje koordinate x s hitrostjo c, tj. potovanje s svetlobno hitrostjo.

Masni delci nikoli ne morejo doseči svetlobne hitrosti. Zato svetovnica, ki opisuje gibanje kakršnega koli masnega delca, nikoli (in na nobenem odseku) ne more doseči strmine 45° glede na koordinatno os (x), ampak je vedno bolj strma.



Slika 1: Primeri diagramov prostora-časa. Navpična črta (a) predstavlja mirujoč delec, saj je koordinata (x_0) enaka za vsak čas t (oziroma za vsak »čas« $y = ct$). Črta (b) je svetovnica delca, ki se giblje s stalno hitrostjo v smeri pozitivne koordinatne osi x. Krivulja (c) kaže gibanje delca, ki se mu hitrost zmanjšuje: sprva je naklon manjši (hitrost je velika – koordinata x s časom hitro narašča), potem se naklon povečuje (hitrost se zmanjšuje). Črta (d), ki leži pod kotom 45° glede na koordinatni osi, kaže svetlobni signal. Tu se posebej nazorno kaže praktičnost izbire koordinate $y = ct$ namesto golega časa: pri naklonu 45° sta koordinati enaki, $x = y \equiv ct$, kar pa ravno pomeni, da koordinata x narašča s hitrostjo c, tj. se povečuje s svetlobno hitrostjo.

4 Bondijev *k*-račun

Ena od temeljnih ugotovitev posebne teorije relativnosti – in ena njenih temeljnih konceptualnih težav – je, da ne prostor in ne čas nista absolutna. Opazovalcem, ki se drug glede na drugega gibljejo, ure tečejo različno in z enakimi merilnimi napravami namerijo različne dolžine za isto telo. To je posledica nuje, da morajo različni opazovalci med seboj komunicirati, če hočejo svoje meritve primerjati. Signali za komunikacijo pa ne potujejo neskončno hitro. Najhitrejši način komunikacije je s svetlobnimi (oz. elektromagnetnimi, na primer radarskimi) curki, hitrejše poti ni. Vendar je tudi hitrost svetlobe (c) končna. Sporočila, ki si jih pošiljajo opazovalci, potrebujejo nekaj časa, da pridejo od enega opazovalca do drugega. Upoštevanje končnosti svetlobne hitrosti in dejstva, da se vsi svetlobni curki v vakuumu za vse opazovalce vedno gibljejo enako hitro, pripelje do tega, da so »merilni metri« za različne opazovalce različno dolgi, in da ure različnih opazovalcev tečejo različno hitro.

Naše vsakdanje izkušnje nam dajejo občutek, da obstajata absolutni prostor in absolutni čas, kar je predpostavil tudi Newton in je vgrajeno v njegovo mehaniko. Ko gledamo z zvezdami posejano nočno nebo, morda ne pomislimo, da ne gledamo trenutne slike zvezdnega neba, marveč podobe nebesnih teles, ki so različno stare, odvisno od oddaljenosti teles oz. od časa, ki ga je svetloba potrebovala za pot od njih do nas. Luna, ki jo vidimo, je bila taka pred dobro sekundo, Sonce pred malo več kakor osmimi minutami, Proxima Centauri pred dobrimi štirimi leti.

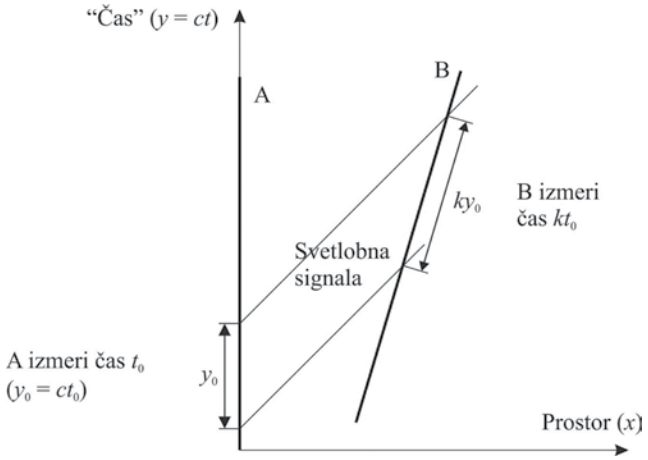
Naše vsakdanje izkušnje nam dajejo občutek, da obstajata absolutni prostor in absolutni čas, kar je predpostavil tudi Newton in je vgrajeno v njegovo mehaniko.

Lahko si *mislimo*, da imamo na razpolago nekega drugega posrednika informacij, ki nam informacije posreduje »takoj«, tj. z neskončno hitrostjo. O takem svetu lahko *filozofiramo*. Vendar to ne spremeni *fizikalne realnosti*. V dejanskem svetu nič, niti informacije, ne more potovati hitreje od svetlobe. Posledica tega je svet, kakršnega opisuje teorija relativnosti.

Pri vsakem opazovanju, ki ga želimo kvantificirati, je tedaj treba upoštevati, da se svetloba v vakuumu razširja s končno hitrostjo, ki je enaka natanko $c = 299.792.458$ m/s, ne več in ne manj (s tem je definiran meter, enota za dolžino!), in da je vsako komuniciranje med opazovalci omejeno s to hitrostjo.

4.1 Kako teče čas za različne inercialne opazovalce?

Osnovna ideja Bondijevega *k*-računa (Bondi, 1967) je, da obravnava več inercialnih opazovalcev, ki se gibljejo v eni prostorski dimenziji.



Slika 2: *k*-faktor pove, za kolikšen faktor se razlikujeta časa za opazovalca A in B. Čas za opazovalca A ne teče enako kakor za opazovalca B, ki se glede na A giblje s stalno hitrostjo. Na sliki smo na navpično os nanašali »časovno koordinato« $y = ct$, »golemu« času t_0 ustreza časovna koordinata $y_0 = ct_0$.

Najprej vzemimo dva opazovalca, kakor je prikazano na sliki 2: opazovalec A miruje v izhodišču prvega inercialnega opazovalnega sistema (njegova svetovnica teče vzdolž navpične – časovne osi), opazovalec B pa se giblje glede na A s stalno hitrostjo stran od izhodišča, v smeri pozitivne koordinatne osi x (njegova svetovnica je nekoliko nagnjena ravna črta). Oba opazovalca za merjenje časa uporabljata identične ure.

Opazovalec A v nekem trenutku odda *svetlobni blisk* in po času t_0 še enega. Oba bliska ujame (zazna) opazovalec B. Svetovnici obeh bliskov sta vzporedni ravni črti, nagnjeni za 45° glede na koordinatni osi. Z diagrama prostora-časa na sliki 2 je razvidno, da izmeri opazovalec B med bliskoma nek drug časovni interval kakor opazovalec A. Ta interval zapišemo kot kt_0, k je neka konstanta – faktor »k-računa«, ki je neodvisen od časa.

Sistema A in B sta popolnoma enakovredna. Če tedaj opazovalec B odda v časovnem razmiku t_0 dva svetlobna signala, ki ju sprejme opazovalec A, bo po načelu relativnosti tudi opazovalec A izmeril za časovni interval med njima vrednost kt_0. Če faktor k ne bi bil enak v obeh smereh, opazovalca ne bi bila enakovredna in bi lahko rekli, da je eden »bolj pri miru« kakor drugi.

Faktor k je seveda odvisen od relativne hitrosti obeh opazovalcev. (Če mirujeta drug glede na drugega, sta njuni svetovnici dve navpični črti in je očitno, da mora biti $k = 1$.)

Faktor *k* je odvisen od relativne hitrosti obeh opazovalcev. (Če mirujeta drug glede na drugega, sta njuni svetovnici dve navpični črti in je očitno, da mora biti *k* = 1.)

Z diagramom prostora-časa lahko brez velikih težav pridemo do odvisnosti faktorja k od relativne hitrosti opazovalcev, $k(v)$, in do pravila za seštevanje hitrosti.

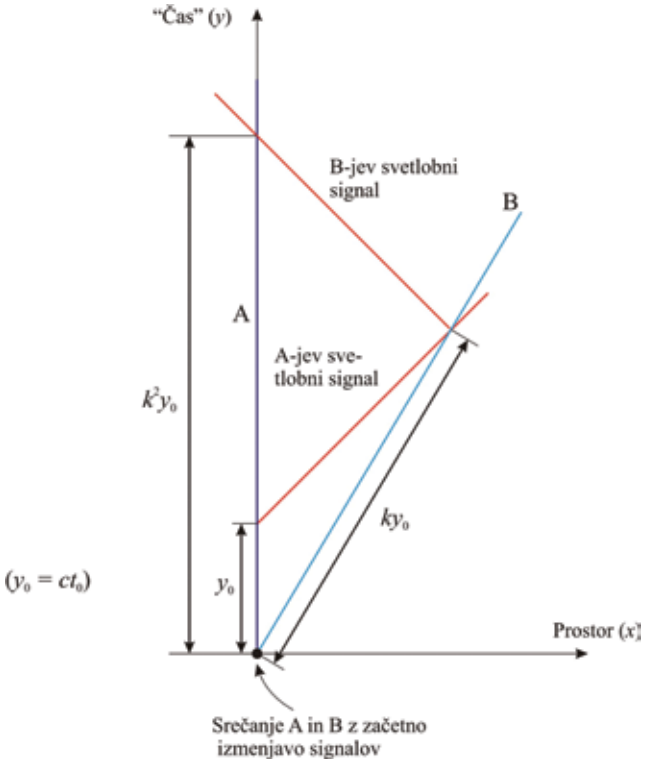
Povežimo torej hitrost (v), s katero se giblje opazovalec B glede na opazovalca A, s faktorjem k.

Vzemimo primer, da se opazovalca A in B v nekem trenutku srečata. V trenutku, ko se srečata, oba nastavita svoji uri na čas 0 in si izmenjata svetlobni signal (glej sliko 3 in tekst pod njo). Opazovalec A po času t_0 odda nov svetlobni signal, ki pripotuje do B-ja in ta ga isti trenutek pošlje nazaj A-ju. To dogajanje je prikazano na sliki 3. Prvi signal A-ja B-ju in odboj tega signala od B-ja nazaj do A-ja se zgodita v istem trenutku na istem mestu. Drugi signal, ki ga A po času t_0 odda B-ju, in odboj tega signala od B-ja nazaj do A-ja prikazujeta rdeči svetovnici, nagnjeni za kot 45° glede na koordinatni osi.

Poiščimo hitrost opazovalca B glede na A. Ta hitrost je enaka kvocientu poti, ki jo opravi B, in časa, v katerem opravi to pot. Poiščemo jo v nekaj korakih.

1. Med oddajo prvega signala (ob času $t = 0$) in drugega signala preteče za opazovalca A čas t_0; za opazovalca B pa preteče za faktor k drugačen čas, tj. kt_0. (Primerjaj to s primerom na sliki 2. Pozor: Opazovalca A in B povezujejo svetlobni bliski. Na sliki 3 sta v začetnem trenutku opazovalca A in B na istem mestu, na sliki 2 pa ne.)
2. Ko preteče za opazovalca B čas kt_0 (ko prejme drugi svetlobni blisk opazovalca A in ga takoj odbije nazaj proti opazovalcu A), preteče za opazovalca A za faktor k drugačen čas, tj. $k \cdot kt_0 = k^2t_0$. S slike 3 preberemo, da je ta čas ravno čas, ko opazovalec A ponovno prejme drugi signal (ki ga je odposlal ob svojem času $t = t_0$), potem ko se je odbil od B-ja in pripotoval k A-ju.

3. Čas, ki preteče za opazovalca A od oddaje drugega signala (ob njegovem času $t = t_0$) do ponovnega prejema tega signala, potem ko se je le-ta odbil od B-ja, je (glej sliko 3) $k^2t_0 - t_0 = (k^2 - 1)t_0$.
4. Za opazovalca A je svetlobni curek potreboval za pot »tja in nazaj« (od A-ja do B-ja in nazaj od B-ja do A-ja) čas $(k^2 - 1)t_0$, za pot od A-ja do B-ja pa polovico tega časa, tj. $\frac{1}{2}(k^2 - 1)t_0$, saj je svetlobna hitrost v obeh smereh enaka.
5. Kako daleč od A-ja je B v trenutku, ko ga doseže drugi svetlobni signal z A-ja? Če bi merili oddaljenost med A in B z radarjem (radar oddaja elektromagnetne valove, ki se razširjajo s svetlobno hitrostjo c), bi dobili za oddaljenost B-ja od A-ja v trenutku, ko opazovalca B doseže drugi svetlobni signal, vrednost $c \cdot \frac{1}{2}(k^2 - 1)t_0$.
6. Kolikšen pa je čas, ki ga A *pripiše* trenutku odboja signala od B-ja? Besedo »pripiše« smo uporabili zato, ker gre za čas v točki, ki je nekje drugje kakor opazovalec A in njegova ura. To je nekaj drugega kakor *meritev* časa. Tokrat A *pripiše* čas na mestu B z uro A. S slike 3 preberemo, da je čas od srečanja obeh opazovalcev do trenutka, ko B prejme drugi signal, enak vsoti časa t_0, ko A odda drugi signal, in časa, ki ga drugi signal potrebuje, da pride do B-ja (to je $\frac{1}{2}(k^2 - 1)t_0$); skupaj $t_0 + \frac{1}{2}(k^2 - 1)t_0 = \frac{1}{2}(k^2 + 1)t_0$.



Slika 3: Določitev faktorja *k*. Opazovalec A v koordinatnem sistemu prostora-časa na sliki miruje, opazovalec B pa se glede na opazovalca A giblje s stalno hitrostjo. Opazovalca A in B se v nekem trenutku srečata (in mesto srečanja izbereta za izhodišče koordinatnega sistema). Tedaj oba nastavita svoji uri na čas 0 in si izmenjata svetlobni signal. Ker sta takrat na istem mestu, taka »izmenjava« signala ne zahteva nič časa. Po času t_0 (merjeno z uro A) opazovalec A odda drug signal, ki nekoliko pozneje pride do opazovalca B. (V diagramu ustreza času t_0 »čas« $y_0 = ct_0$.) Po definiciji faktorja *k* opazovalec B prejme drugi signal ob času kt_0 po svoji uri oziroma ob »času« ky_0. V istem trenutku, ko B sprejme drugi svetlobni signal, se svetloba od njega odbije in odpotuje nazaj k opazovalcu A. Spet je po definiciji faktorja *k* in ob pomoči slike očitno, da prejme opazovalec A signal, ki se je odbil od B-ja, ob času $k \cdot kt_0 = k^2t_0$ (ob »času« $k \cdot ky_0 = k^2y_0$) po srečanju obeh opazovalcev, merjeno z uro A. Po A-jevi meritvi je potekel od trenutka, ko je oddal svoj drugi signal proti B-ju, do trenutka, ko je zaznal od B-ja odbiti signal, čas $k^2t_0 - t_0 = (k^2 - 1)t_0$. To je čas, ki ga je drugi svetlobni signal potreboval za pot od A-ja do B-ja in nazaj.

Hitrost je kvocient poti in časa. Torej se opazovalec B giblje glede na opazovalca A s hitrostjo

$$v = \frac{\frac{1}{2}(k^2-1)ct_0}{\frac{1}{2}(k^2+1)t_0} = \frac{(k^2-1)c}{k^2+1}$$

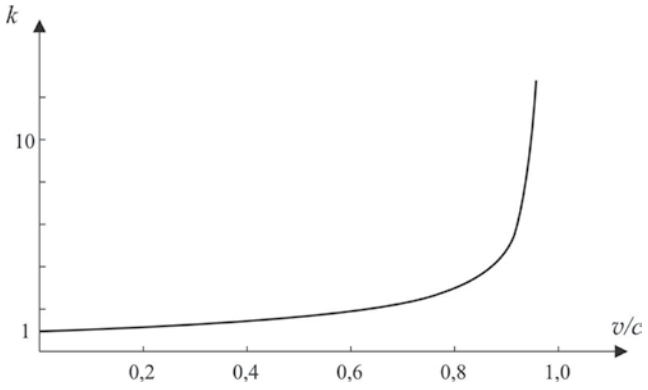
oziroma

$$\frac{v}{c} = \frac{k^2-1}{k^2+1}. \qquad (1)$$

Če enačbo (1) »obrnemo«, tj. izrazimo k z v, dobimo odvisnost faktorja k od hitrosti v:

$$k = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}. \qquad (2)$$

Faktor k pove, kako sta medsebojno umerjeni časovni skali dveh opazovalcev, ki se gibljeta eden glede na drugega s stalno hitrostjo v.



Slika 4: Graf faktorja k v odvisnosti od hitrosti (oziroma od v/c).

Za tiste bralce, ki so jim Lorentzove transformacije že domače, v Dodatku pokažemo, da se rezultat (2) ujema s standardnim rezultatom, ki ga dobimo z njihovo pomočjo. Bralec naj sam presodi, katera pot je enostavnejša.

4.2 Seštevanje hitrosti

Kolikšna je hitrost potnika, ki hodi s hitrostjo 6 km/h po hodniku vlaka v smeri gibanja vlaka, ki pelje s hitrostjo 40 km/h? Seveda je hitrost potnika glede na zemljo enaka vsoti obeh hitrosti, to je 46 km/h. Saj vlak v eni uri prevozi 40 km, potnik v njem prehodi še dodatnih 6 km (vlak je zelo dolg!), kar da 46 km v eni uri. In če hodi potnik proti zadnjemu koncu vlaka, je njegova hitrost glede na zemljo 34 km/h. Naš sklep temelji na pravilu za seštevanje hitrosti in je intuitivno razumljiv.

Kaj pa če bi se vlak gibal s hitrostjo 250.000 km/s in bi potnik po njem hodil s hitrostjo 100.000 km/s? Ali bi bila potnikova hitrost glede na zemljo 350.000 km/s? Seveda ne! Saj smo v 2. razdelku povedali, da je svetlobna hitrost »mejna« hitrost in da nobeno telo ali signal te hitrosti ne more preseči.

Pravilo za seštevanje hitrosti, ki temelji na naših izkušnjah in ga uporabljamo v vsakdanjem življenju, ni točno in dobro velja le pri hitrostih, ki so majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Pri hitrostih, ki so primerljive s hitrostjo svetlobe, pa je pravilo za seštevanje drugačno, kakor smo ga navajeni.

Posebej nenavadno se seštevajo hitrosti takrat, ko je ena od njih natanko enaka c, svetlobni hitrosti. Mislimo si svetlobni vir v laboratoriju, ki se giblje. Ne glede na gibanje laboratorija, bo hitrost svetlobnega curka ostala enaka c (glej razdelek 2). Drugače povedano, če hitrosti svetlobe dodamo kakršnokoli hitrost, bomo spet dobili le isto hitrost, tj. c.

Kakšno je torej pravilo za seštevanje poljubnih hitrosti, tudi zelo velikih?

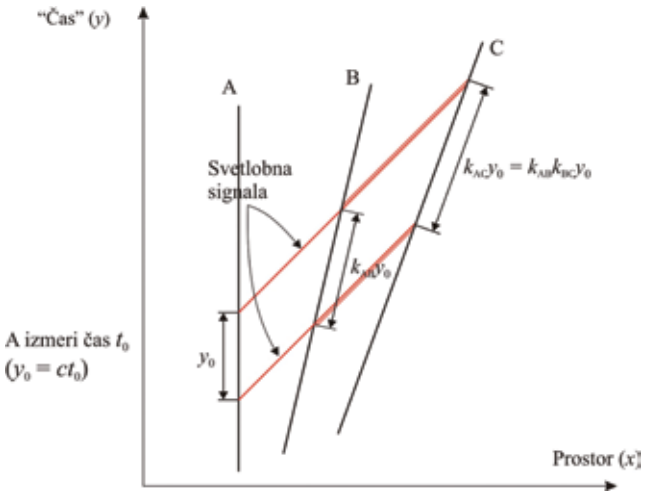
S k-računom brez težav dobimo zanimiv in netrivialen rezultat – relativistično »formulo« za seštevanje hitrosti.

Pravilo za seštevanje hitrosti, ki temelji na naših izkušnjah in ga uporabljamo v vsakdanjem življenju, ni točno in dobro velja le pri hitrostih, ki so majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo.

Imejmo tri opazovalce A, B in C. Opazovalec B se giblje s hitrostjo v_{AB} glede na opazovalca A, opazovalec C se giblje s hitrostjo v_{BC} glede na opazovalca B in opazovalec C se giblje s hitrostjo v_{AC} glede na opazovalca A. Povežimo njihovo merjenje časov s faktorji k, ki se nanašajo na dvojice opazovalcev: faktor k za opazovalca A in B označimo s k_{AB}, faktor k za opazovalca B in C označimo s k_{BC} in za opazovalca A in C s k_{AC} (slika 5).

Opazovalec B izmeri za časovni interval, ki v sistemu A meri t_0, vrednost $k_{AB}t_0$; opazovalec C izmeri za časovni interval, ki v sistemu B meri $k_{AB}t_0$, vrednost $k_{BC}(k_{AB}t_0)$; in seveda izmeri opazovalec C za časovni interval, ki ima v sistemu A vrednost t_0, svojo vrednost $k_{AC}t_0$. Za časovni interval, ki meri v sistemu A t_0, mora torej hkrati veljati $k_{BC}(k_{AB}t_0) = k_{AC}t_0$ oziroma

$$k_{AC} = k_{AB}k_{BC}. \qquad (3)$$



Slika 5: Sestavljanje faktorjev *k* za tri opazovalne sisteme A, B in C.

Toda faktorje k znamo izraziti z medsebojnimi hitrostmi opazovalcev. To nas bo brez posebnih težav, le z nekaj računanja, pripeljalo do slovitega Einsteinovega »zakona za seštevanje hitrosti«.

Da bo manj pisanja, označimo hitrost sistema B glede na sistem A z v_{AB} ter $\beta_1 = v_{AB}/c$. Izraz (2), ki smo ga dobili za Bondijev faktor k, nam potem pove, da je

$$k_{AB} \equiv k_1 = [(1 + \beta_1)/(1 - \beta_1)]^{1/2}. \tag{4a}$$

Če je hitrost sistema C glede na sistem B enaka v_{BC} ter zapišemo $\beta_2 = v_{BC}/c$, imamo tudi

$$k_{BC} \equiv k_2 = [(1 + \beta_2)/(1 - \beta_2)]^{1/2}. \tag{4b}$$

Označimo končno še hitrost sistema C glede na sistem A z v_{AC} ter pišimo $\beta_3 = v_{AC}/c$, pa imamo

$$k_{AC} \equiv k_3 = [(1 + \beta_3)/(1 - \beta_3)]^{1/2}. \tag{4c}$$

Za relacijo (3), $k_3 = k_1 k_2$,

velja seveda tudi

$$k_3^2 = k_1^2 k_2^2.$$

S pomočjo izrazov (4) prepišemo gornji izraz kot

$$\frac{1+\beta_3}{1-\beta_3} = \left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right)\left(\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}\right). \tag{5}$$

Zaznamujmo desno stran (5) s $q = \left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right)\left(\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}\right)$. Iz $\frac{1+\beta_3}{1-\beta_3} = q$ dobimo $\beta_3 = \frac{q-1}{q+1}$ in

$$\beta_3 = \frac{q-1}{q+1} = \frac{\left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right)\left(\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}\right) - 1}{\left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right)\left(\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}\right) + 1} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}. \tag{6}$$

Pomnožimo (6) v števcu in v imenovalcu s c in izrazimo β_1, β_2 in β_3 s hitrostmi:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}. \tag{7}$$

Namesto navadne klasične formule $v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$ smo za seštevanje hitrosti dobili relativistično »formulo« (7).

Da bi dobili nekaj občutka za to, koliko se obe formuli razlikujeta, si spet zamislimo vlak in v njem potnika, ki hodi proti sprednjemu koncu vlaka.

Naj najprej vlak vozi glede na zemljo s hitrostjo 0,01 c (to je ogromna hitrost 3000 km/s in

takega vlaka (ali rakete) človek še ni naredil). Potnik naj se sprehaja po vlaku s hitrostjo 0,001 c = 300 km/s. Klasična formula bi dala za hitrost potnika glede na zemljo 3300 km/s. Relativistični izraz (7) nam da praktično enak rezultat

$$v_{AC} = (0{,}01\,c + 0{,}001\,c)/(1 + 10^{-5}) = 3300 \text{ km/s}.$$

Klasični in relativistični rezultat se skorajda ne razlikujeta. Razlika med njima je $1{,}1 \cdot 10^{-7}\,c$ = 33 m/s. Hitrost 33 m/s = 120 km/h je v našem vsakdanjem življenju že kar velika hitrost, v primerjavi s 3000 km/s ali tudi 300 km/s pa je zanemarljiva. Hitrosti 0,01 c in 0,001 c sta sicer za nas ogromni, a sta majhni v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Zato nam klasična formula v vsakdanjem življenju izvrstno služi.

Pa vzemimo, da se vlak giblje s hitrostjo 0,5 c, potnik pa hodi po njem s hitrostjo 0,1 c. Klasična vrednost za hitrost potnika glede na zemljo bi bila 0,6 c. Relativistična vrednost (7) pa bi bila tokrat

$$v_{AC} = (0{,}5\,c + 0{,}1\,c)/(1 + 0{,}05) = 0{,}57\,c.$$

V tem primeru bi bila razlika med pravo (relativistično) in klasično hitrostjo že pet odstotkov, kar pa ni več zanemarljivo. V absolutni vrednosti bi dala klasična formula za skoraj 8600 km/s preveliko vrednost.

Kaj pa če bi se vlak in potnik gibala vsak s hitrostjo 0,999 c? Tedaj bi se potnik gibal glede na zemljo s hitrostjo, ki bi se razlikovala od svetlobne le za $5 \cdot 10^{-7}\,c$. To je v nasprotju z našimi klasičnimi predstavami, po katerih bi se potnik glede na zemljo gibal s hitrostjo 1,998 c. A je rezultat smiseln, če pomislimo, da se nobeno telo ne more gibati hitreje od svetlobe. Klasični rezultat, da bi se potnik gibal glede na zemljo skoraj z dvojno svetlobno hitrostjo (z 1,998 c), je seveda popolnoma napačen.

5 Sklep

Teorija relativnosti je še vedno slabo razumljena in nedorečena tudi pri pouku fizike v srednjih šolah. Po eni strani se zdi privlačna, ker ljudje poznajo nenavadne pojave »podaljšanja časa« in »krčenja dolžin«, »paradoks dvojčkov«, nenavadna potovanja na oddaljene zvezde in še kaj. Vendar pogosto ni pravega razumevanja teh pojavov. Pojavljajo se ugovori, ki temeljijo na »zdravi pameti«, a so posledica nepopolnega razumevanja teorije.

V prispevku smo želeli predstaviti k-račun fizika Hermanna Bondija, ki neposredno in po našem mnenju intuitivno jasno poveže tek časa v različnih inercialnih opazovalnih sistemih. Pomembno je spoznanje, da je posebna teorija relativnosti posledica tega, da morajo različni opazovalci, ki želijo komunicirati med seboj, uporabljati neko komunikacijsko sredstvo. Če bi signali potovali z neskončno hitrostjo, ne bi bilo nobene teorije relativnost. A najhitrejši signali potujejo od enega opazovalca do drugega s hitrostjo svetlobe c, ki za pot med njimi potrati nekaj časa. Posebna teorija relativnosti to upošteva. Pri majhnih hitrostih ni opaznih posledic. Pri hitrostih, ki niso majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo, pa pride do drastičnih sprememb in za našo »zdravo pamet«, ki nima neposrednih izkušenj s pojavi pri zelo velikih hitrostih, je to (vsaj sprva) težko razumljivo.

Poleg izračuna Bondijevega faktorja k smo predstavili tudi, kako se s pomočjo faktorja k v posebni teoriji relativnosti seštevajo hitrosti.

Verjamemo, da je Bondijev k-račun mogoče uspešno predstaviti v srednji šoli in da se z njim razjasni marsikateri dvom glede posebne teorije relativnosti.

Posebna teorija relativnosti je posledica tega, da morajo različni opazovalci, ki želijo komunicirati med seboj, uporabljati neko komunikacijsko sredstvo. Če bi signali potovali z neskončno hitrostjo, ne bi bilo nobene teorije relativnosti.

Viri in literatura

1. Bondi, H. (1967). *Assumption and Myth in Physical Theory*. Cambridge University Press.
2. Einstein, A., (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Ann. Physik*, *17*, 891–921.
3. Kuščer, I., idr. (2002). *Fizika za srednje šole*, 3. del. DZS.
4. Strnad, J. (1982). *Fizika*, 3. del. DZS.

Dodatek

Podaljšanje časa z Lorentzovimi transformacijami

Posebna teorija relativnosti odgovarja na vprašanje, kako teče čas v inercialnih opazovalnih sistemih, ki se gibljejo eden glede na drugega in ugotavlja, da ni ne absolutnega časa ne absolutnega prostora.

Posebna teorija relativnosti odgovarja na vprašanje, kako teče čas v inercialnih opazovalnih sistemih, ki se gibljejo eden glede na drugega in ugotavlja, da ni ne absolutnega časa ne absolutnega prostora.

Lorentzove transformacije povezujejo krajevne in časovne koordinate (oziroma dogodke, glej 3. razdelek) v dveh inercialnih opazovalnih sistemih A in B, ki se drug glede na drugega gibljeta s stalno hitrostjo (v) (Strnad, 1982). Vzamemo, da se sistem B giblje premo, tedaj zadošča ena sama krajevna koordinata. Krajevno in časovno koordinato v A zaznamujmo z x in t, v B pa z x' in t'. Lorentzove transformacije so (Strnad, 1982)

$$x' = \gamma(x - vt), \quad x = \gamma(x' + vt'), \tag{8a}$$

$$t' = \gamma(t - vx/c^2), \; t = \gamma(t' + vx'/c^2), \tag{8b}$$

zaznamovali smo $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$.

Zanimamo se za dva posebna dogodka: prvi dogodek (D-1) je dogodek, ko odda A prvi blisk, drugi dogodek (D-2) je dogodek, ko B prejme drugi blisk, ki ga A odda v času t_0 po prvem blisku. V 3. razdelku smo rekli, da dogodek predstavlja točka v prostoru-času, torej vsak dogodek podajata prostorska in časovna koordinata. Poiščimo koordinate dogodkov D-1 in D-2 v koordinatnem sistemu A in v koordinatnem sistemu B.

Ob prvem dogodku izhodišči koordinatnih sistemov A in B sovpadata in v obeh sistemih tedaj naravnajo ure na čas 0. Torej sta v sistemu A koordinati dogodka D-1

$$x_1 = 0,$$
$$t_1 = 0$$

in tudi v sistemu B sta koordinati prvega dogodka

$$x_1' = 0,$$
$$t_1' = 0.$$

Drugi dogodek je sprejem drugega bliska v izhodišču sistema B. Kje je B (merjeno v sistemu A), ko prejme drugi blisk? Od prvega bliska ob času 0 do drugega bliska ob času t_0 se sistem B oddalji za razdaljo vt_0 od A, v je hitrost, s katero se opazovalec B giblje glede na A. Opazovalec A ob (svojem) času t_0 odda drugi blisk, ki potuje s hitrostjo c in dohiti B po času τ (ki ga za zdaj še ne poznamo). V času τ naredi B še dodatno pot $v\tau$. Razdalja B od lege A v trenutku, ko B ujame drugi blisk, je torej po eni strani $c\tau$, po drugi strani $vt_0 + v\tau$. Iz $c\tau = v(t_0 + \tau)$ dobimo $\tau = vt_0/(c - v) = \beta t_0/(1 - \beta)$, $\beta = v/c$.

Torej so koordinate drugega dogodka

$$x_2 = c\tau = \beta c t_0/(1 - \beta),$$
$$t_2 = t_0 + \tau = t_0 + \beta t_0/(1 - \beta) = t_0/(1 - \beta)$$

in

$x_2' = 0$ (saj B sprejme blisk tam, kjer je),

$t_2' = ?$ (ta čas iščemo).

Označimo s $t_B' \equiv t_2' - t_1'$ čas, ki v sistemu B preteče med oddajo prvega bliska in prejemom drugega bliska. Prva iz Lorentzovih transformacij (8b) pove, da je

$$t_1' = \gamma(t_1 - vx_1/c^2) = 0,$$

saj je $t_1 = 0$ in $x_1 = 0$, in da je

$$t_2' = \gamma(t_2 - vx_2/c^2) = \gamma[t_0/(1 - \beta) - (v/c^2)\beta c t_0/(1 - \beta)] = \gamma t_0(1 + \beta) = t_0[(1 + \beta)/(1 - \beta)]^{1/2}.$$

Torej je

$$t_B' = t_2' - t_1' = t_0[(1 + \beta)/(1 - \beta)]^{1/2} \equiv k t_0.$$

Spet smo dobili Bondijev rezultat (2) oziroma faktor k

$$k = [(1 + \beta)/(1 - \beta)]^{1/2}.$$

Katera pot je lažja?