

PRIPOMBE in DODATEK

k članku z naslovom

Predlog drugega načina razlage posebne relativnosti v srednji šoli

avtorja Petra Preloga, iz revije **Fizika v šoli**, letnik 29, št. 1, 2024.

--- --- ---

[*0] (1. str.) Gl. rač. program »vlak1«, $\gamma = 1$ in »ura.12«

[*1] (2. str.) Svetlobna hitrost c je 'ena sama' in Maxwell jo je opredelil ne da bi vedel za bodočo relativnostno teorijo. Toda v srednji šoli lahko razlage poenostavljamo in si izmislimo npr., da merijo c_A posebej v sistemu A in c_B posebej v B . In kaj naj bi namerili? $c_A = c_B$! Tudi ta postulata sta nekoliko poenostavljena in prirejena, Maxwella pa je pri tem skoraj treba omeniti!

Zakovitosti evklidskega (klasična fizika) in psevdoevklidskega (posebna relativnostna teorija) vektorskega prostora so matematiki poznali že prej, za naše srednješolce je to opisal France Križanič v učbeniku Aritmetika, algebra in analiza – za gimnazije, DZS 1970, 39, 50 stran (novejših učbenikov ne poznam). V šoli lahko npr. pokažemo tak »vektorski prostor«: vlak A je prva vrsta učencev, vlak B profesor, ki se sprehaja ob njih in mu omejimo hitrost v – npr. na premik za 2 stola na sekundo. Seveda se lahko zaleti v zid s še večjo hitrostjo, toda tak dogodek ne spada v »prostor«, ki smo ga omejili z izbiro največje hitrosti! Podobno je na naših vlakih A in B , fizikalno je hitrost v inercialnih sistemih omejena na $3 \cdot 10^8$ m/s, matematično bi lahko bila meja poljubna.

Ne verjamem pa, da bi ob vsej časovni stiski pri pouku fizike imeli čas za tako obširnejše pripovedovanje o povezavi matematike in fizike. Zanimivo: včasih je bilo to enostavneje, saj smo pogosto oba predmeta – hočeš – nočeš učili profesorji matematike. Če pa hočete dober, za vse v razredu koristen pouk fizike, nikar ne zapravljajte časa s fizikalnimi »gospodinjskimi« marnjami!

[*2] (2. str.) Klasično hitrost predmeta v B v_B (npr. na vlaku) ne more biti enaka hitrosti istega predmeta v_A – merjeno iz A (npr. iz perona: $v_A = v + v_B > v_B$). Podobno ($v_A = (v + v_B)/(1 + v \cdot v_B/c^2)$) velja tudi relativistično, za svetlobo $c_A = c_B$

[*3] (2. str.) Lorentzova formula za transf. časa za $x = 0$!

[*4] (2. str.) zaradi 1. predpost. ne more biti $v_A \neq v_B$, čeprav si to lahko – zaradi zelo različnih koordinat v A in B lahko predstavljamo.

[*5] (3. str.) Dijaki so navajeni na graf $f(x, t)$, tukaj je $f(ct, x)$ – ker je tako v fizikalni literaturi. Morda bo potrebno to malce pojasnjevati. Podobno je z NE PIŠEMO ENOTE. Do sedaj smo pri pouku fizike vztrajali, da MORAJO pisati enote, sedaj pa ne. TODA TEGA SI NISO IZMISLILI UČITELJI FIZIKE!

S časom t so pa težave. Vsak x je lahko večji ali manjši, pozitiven ali negativen in je kraj s to koordinato vedno dostopen. Ne pa čas: že na istem mestu ne morem prestopiti v včerašnji čas in celo sosednji istočasni dogodki nam niso dostopni – saj potrebujemo za pot do njih nekaj časa, ne moremo biti na dveh razmaknjenih krajih istočasno! Seveda pa lahko dva merilca tako sinhronizirata svoji meritvi, da bosta opravljeni istočasno, čeprav sta razmaknjena.

[*6] (3. str.) **K 3. posledici:** Vladka (v izhodišču B) pošlje ob dogodku D_2 ($t_2 = 100$, $t_2 = 200$) svetlobni signal Peru na cilj v izhodišču A, kamor signal prispe ob t_c , t_c (gl. sliko spodaj)

Gibanje signala v A: $v \cdot t_2 = c \cdot (t_c - t_2)$ Gibanje signala v B: $v \cdot t_c = c \cdot (t_c - t_2)$

Če upoštevamo še (2. posledica), da pri Vladki velja $t_2 = \gamma \cdot t_2$ in pri Peru $t_c = \gamma \cdot t_c$ dobimo iz teh štirih enačb $\gamma^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$.

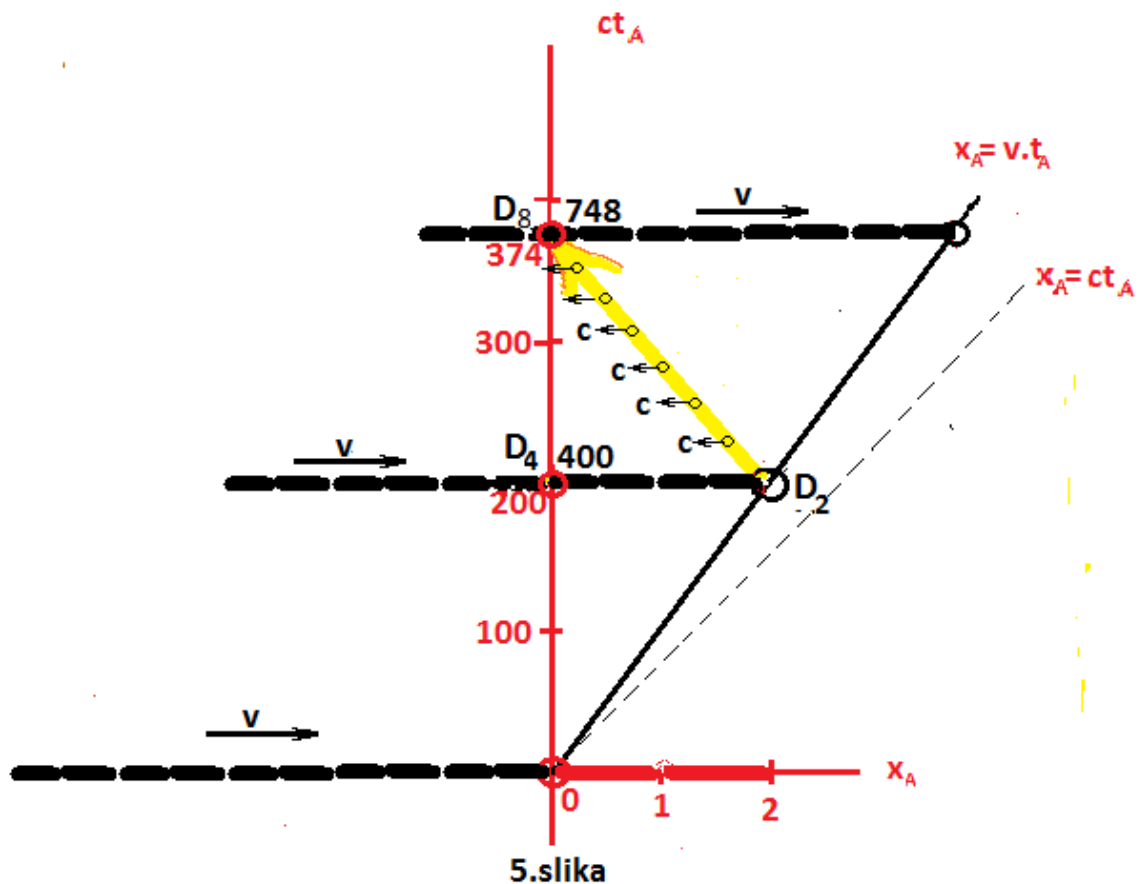
Zakaj te izpeljave ni pri razlagi 3. posledice na 3. strani? Spomnite se, da želimo razlago s čim manj enačbami, če jim povemo kar rezultat, ne bomo pri slabših matematikah nič zamudili! Če pa imamo v razredu dobrega matematika, lahko to izpeljavo dobi za domačo nalogo, naslednjo uro v razredu zablesti z razlago in si pridobi še eno 'odlično' lovoriko. (Podobno kasneje izpeljavi pri $W = mc^2$).

Kako A-jevec »vidi« enakost svetlobnih hitrosti c_A in c_B ?

Ko Vladka ob D_2 ($t_B = 100$, $t_A = 200$, 2. leva slika) pošlje Peru v izhodišče A svetlobni signal (predstavljajmo si gibanje rumenega krožca na 5. sliki (tudi na 2. sliki levo) od črnega krožca proti rdečemu s hitrostjo c), bo to trajalo manj časa kot začetni odmik Vladke proti desni s hitrostjo v : $200v/c = 200 \cdot 0.87 = 174$, ko pride rumeni krožec do cilja, do Pera (D_8), bo njegova ura kazala $t_{Ac} = 200 + 174 = 374$, ob Peru sosedova ura B pa $t_{Bc} = \gamma t_{Ac} \rightarrow 374 \cdot 2 = 748$ (zaokroženo!)

Privzemimo v B enako svetlobno hitrost $c_B = c_A = v/0,87$ kot v A, pri vračanju rumenega signala bo pot signala v A dolga $200v$, v B pa $(748 - 100) \cdot c = 748 \cdot v$. Ob startu signala pri Vladki ($100, D_2$) je cilj pri Peru oddaljen (A istočasno) $200v$ in $400v$, to se v B pri oddaljevanju Vladke poveča na $748v$. Tako lahko gibanje istega rumenega krožca razlagam v vsakem sistemu z drugimi številkami. V našem primeru je B-jevski $\Delta t_B / \Delta t_A = 648 / 174 = 3,7$ krat tolikšen kot Δt_A v A – toda enako je tudi razmerje poti rumenega krožca $\Delta x_B / \Delta x_A = 748v / 200v = 3.7$ – hitrost gibanja svetlobnega krožca pa je zato za opazovalca A v obeh sistemih enaka, $c_A = c_B = \Delta x / \Delta t (= 200v / 174 = 748v / 648)$. Podobno dobimo, če opazujemo iz B.

Perova slika (A istočasnih dogodkov!):



Mnogi dijaki si težje predstavljajo, kaj pomeni taka dvodimenzionalna (ct, x) slika dogodkov. Zato (učitelju) za domačo nalogo: Napravite računalniški program, kjer se bosta na (enodimenzionalni) sliki A istočasnih dogodkov na mirujočem rdečem vlaku (1. slika) in na vzporednem odmikajočem se črnem

vlak, vzporedno gibala (dva) rumena krožca (start pri Vladki in **P1** v skupni točki D_2), cilj **Peru**, $D_2 \rightarrow D_8$) z določeno hitrostjo $w_A = w_B = c$, ob izhodiščih in rumenih krožcih naj se izpisujejo časi t_A in t_B . Samo pri svetlobni hitrosti c krožcev se bosta krožca premikala skupaj in bosta prispela na cilj pri **Peru** istočasno! Premikanje črnega vlaka B na zaslonih naj bo v skokih (klik $\rightarrow$ premik črnega za en vagon na desno) – da bomo lahko prebiral zapisane čase!

Podobno lahko naredimo z B istočasnimi dogodki in skoki, premiki rdečega za en vagon_B na levo!

[*7] Da iz vsakih koordinat dogodka v sistemu **A** (ct_A, x_A) lahko izračunamo koordinate istega dogodka v sistemu B (ct_B, x_B) vemo iz Lorentzovih enačb. Namesto z enačbami povemo to z dvema vlakoma: vsak opazovalec dogodka **D**(ct_A, x_A) »vidi« koordinate istega dogodka **D**(ct_B, x_B) tudi v sosednjem sistemu! **Peru** poroča pomočnik **P1** na koncu drugega vagona_A, da se je ob $t_A = 200$, **D**(200, 2) mimo, proti vzhodu pripeljala Vladka in njena ura je kazala $t_B = 100$, **D**(100, 0). Vladka to po radiu potrdi: ko je njena ura kazala $t_B = 100$ se je mimo proti zahodu pripeljal **P1** in je njegova ura kazala $t_A = 200$. Bistočasni dogodki npr. niso le nekaj, kar »pripisemo« samo opazovalcu iz B in z opazovalcem iz **A** nima nobenega opravka! V grafu (ct_A, x_A) ležijo na zelenih vzporednicah (3.b slika) in povedo **A**-jevcu isto, kot **B**-jevcu: da **B** istočasno **Perova** ura kaže manj kot Vladkina in da je takrat vagon_B = 2 · vagon_A [*8]! Zelene vzporednice pa lahko narišemo, če poznamo v , brez tega pa tudi premice Vladkinega gibanja $x_A = v \cdot t_A$ ne bi mogli narisati na tej sliki! **A**-jevec mora izmeriti samo Vladkino hitrost v in že so mu dostopne vse **B**-jevske koordinate, poročila po radijski zvezi jih lahko le potrdijo.

Taka razlaga povsakdanji te zadeve, jih napravi bolj razumljive in poenostavi razlago. Največji fiziki so se trudili (Einstein, Feynmann ...), da bi fizikalne teorije tudi vsakdanjim ljudem predstavili poenostavljeno. Tudi v razredih imamo vsakdanje ljudi, ne samo fizike, zato se moramo tudi mi malce potruditi ...!

[*8] (str.) Lorentzova formula za transformacijo x ob $\Delta t = 0$.

DODATEK

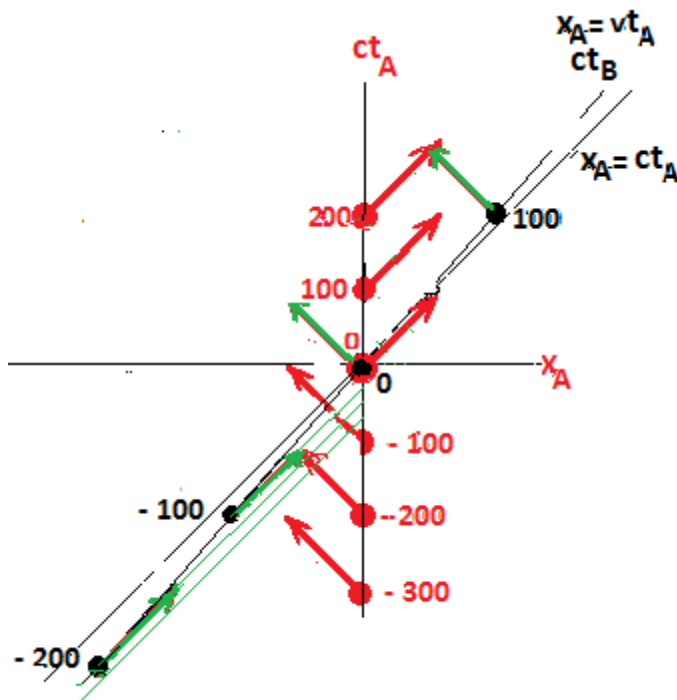
Opazovalci dogodkov v A in B.

Prvi razlagalci relativnosti so si pogosto pri razlaganju pomagali s primerjavami tega, kar vidita opazovalca dogodkov iz A in B. Pri nas sta to Pero in Vladka, koordinate dogodkov in oznake sistemov lahko ločimo po oznaki A, B ali kar po barvi: t, x; t, x. Namesto preprostega »številkanja« (I, II, posledice 1 do 8) lahko za razlago v srednji šoli izpeljemo (ali pa pogledamo v matematične učbenike) psevdoeuklidsko teorijo transformacijskih enačb posebne teorije relativnosti. Ta omogoča - ob primernih podatkih - izračunati vsako koordinato v A in B in so ti podatki na razpolago vsem opazovalcem, ne samo določenemu. Torej lahko opazovalec v A opazuje tudi razmere ob nizu B-istočnih dogodkov in ne le A-istočnih, saj pozna vse njihove koordinate! On ne »vidi« le skrajšanega metra v B ampak (ob B-istočnih dogodkih) tudi skrajšanega v A, saj iz koordinat lahko to razdaljo izračuna (seveda pa skrajšanega A-jevskega predmeta ob A istočasnem opazovanju ne more zares videti!)! Če primerja ob zaporednih A istočnih dogodkih čase na razmaknjenih urah A (koordinatni časovni presledek) in B (lastni časovni presledek merjen na istem mestu v B) bodo zamujale ure B, nasprotno, pri B istočnih razmaknjenih dogodkih (lastni časovni presledek merjen na istem mestu v A) zamujajo ure A.

Razlaga s periodičnimi signali

Namesto razlage z vlakom so možne tudi razlage s signali: Pero ali Vladka, ali kar oba naj oddajata v presledkih po $\Delta t = 100$ svetlobne signale, Pero rdeče, Vladka zelene.

Na sliki smo videli, da Vladkin signal oddan ob 100 doseže Pera z $\Delta t = 374$, isti presledek bo veljal tudi za naslednje Vladkine signale. Če oddajniki **A** in B



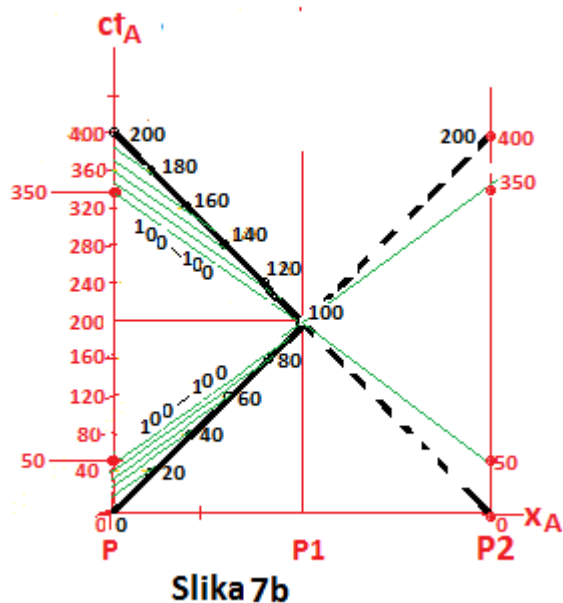
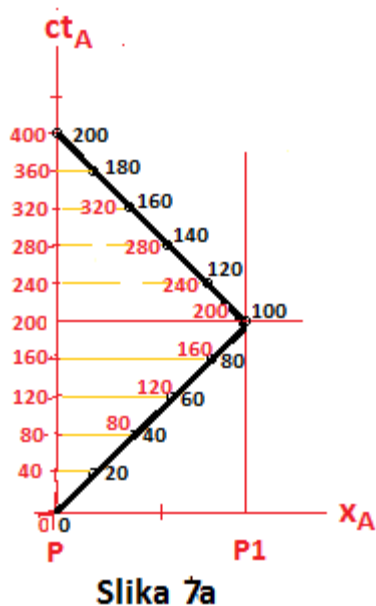
6 slika

oddajajo signale v presledkih **100** (100) in **Pero**, opazovalec v **A** miruje (in gleda levo ali desno) in prihaja (**EN!**) **oddajnik** Bsignalov (Vladka) s hitrostjo v ($\gamma = 2$) iz leve, zahodne strani, je v **A** frekvenca prejetih B-signalov (skoraj štirikrat) povečana, ko odhaja na desno (na vzhod) (skoraj štirikrat) pomanjšana, to ni samo zaradi relativnosti, ampak predvsem zaradi Dopplerjevega efekta.

Če na severni strani na mimovozečem vlaku B (4. slika)

registrira **Pero** iz ISTEGA MESTA **A** (EN opazovalec gleda proti severu) začetek vsakega vagona B (**več oddajnikov**), je lastni časovni presledek (**50**) **A**-jevca med tema (DVEMA) v B (2. slika, desno) razmaknjenima zaporednima dogodkoma D_1 in D_3 manjši od koordinatnega presledka (100), ki ga izmerijo B-jevci med tema dogodkoma, npr. $100 > 50$. Zato so ti registrirni signali iz koncev 100v dolgih B vagonov skrajšanih na **50v** pogostejši kot signali iz mirujočega **100v A** vagona, Vladkina ura teče hitreje!

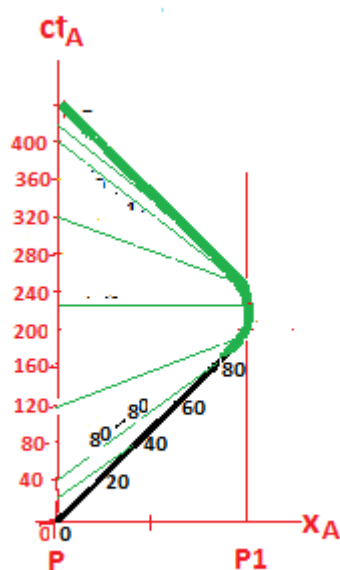
Potovanje v vesolje in nazaj – »paradoks dvojčkov«. Kako se ustavi čas?



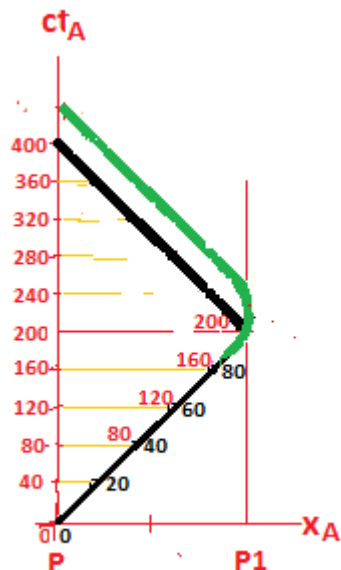
Če na 1. sliki razdalja med Perom in P1 nista le 2, vagona ampak 200 svetlobnih let, je to lahko kar slika Vladkinega poleta z

raketo v vesolje. Da pri tem lahko zasledujemo čase na Perovi in Vladkini uri pri potovanju tja in nazaj, dodajmo še ordinatno os ct_A oz. dopolnjeno sliko 3b (slika 7a). Vladka potuje s konstantno hitrostjo v od P do $P1$ in se vrne z enako hitrostjo v v P . Narišimo tudi zelene vzporedne istočasnice 20 – 20, 40 – 40 ... 100 – 100, (slika 7b), ki bi se nadaljevale tudi desno navzgor; zato po Vladkinem obratu na sliki 7b dobimo na levi zeleno istočasnico 100–100 proti 350 in potem vzporedne istočasnice (120, 140 ...) do 400//200.

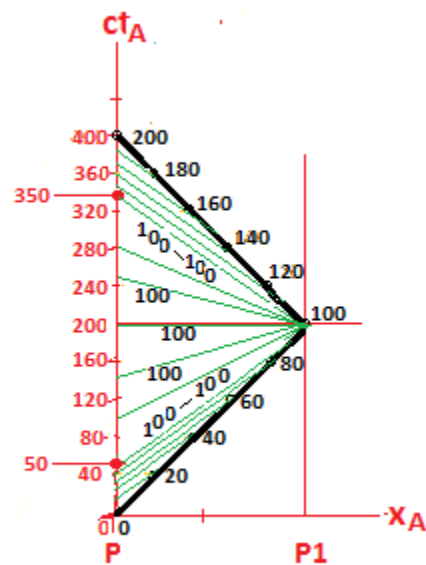
Na tej sliki nismo upoštevali zaviranja, ustavljanja, ... poskusimo to prikazati na naslednji slikah cd. Čim začne Vladka zavirati (krivulja se ukrivi navzgor!) ne veljajo več naša dosedanja pravila za $v = \text{konst.}$ Zato ukrivljeno krivuljo razrežemo na kratke »ravne« odseke, zelena B istočasnica postane manj strma in se pri ustavitvi (takrat **Pero** in Vladka – oba mirujeta!) ujema z **A** istočasnico,



Slika 7c



Slika 7d



Slika 7e

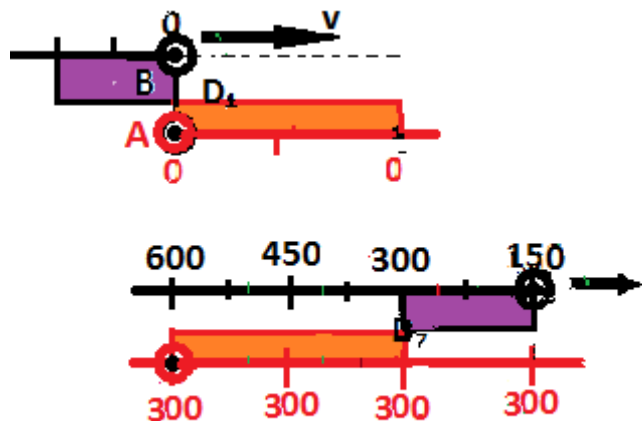
njuni uri takrat tečeta enako! Nasprotna slika je potem pri pospeševanju. Zaradi vsega tega je na koncu povratna (debela zelena) premica Vladke samo malce premaknjena od vzporedne prvotne (črne) premice (slika 7d). Toda če številke na sliki 7a ne pomenijo sekunde ampak leta, ob pristajanju na 7cd so pa to morda samo ure, lahko ta odmik zanemarimo in dobimo približno končno sliko 7e. Vladka spremlja med svojim gibanjem čas na urah B in – po sporočilih Pera tudi čas na urah A. Do P1 je vse teklo kot običajno, potem pa je Perova ura preskočila iz 50 na 350, tako da je na koncu, po povratku, kazala dvakrat toliko, kot njena: $400//200$.

Pero je to doživljal drugače: do 50 ga je Vladkina ura prehitevala (100) potem pa se je ustavila in ves čas kazala 100, šele pri 350 zopet začela teči. Pri Vladki se je ob $t_B = 100$ ustavil čas, zato ni čudno, da je na koncu njena ura kazala manj od njegove: $400//200!!$

Zakaj sedaj tudi Pero ne zamuja? Zato, ker pri obračanju Vladka ne spada pod naša pravila, ki veljajo samo, dokler ne začnejo delovati sile, ki spreminjajo hitrost. Pri zaviranju in pospeševanju pa je Vladka morala uporabiti močne motorje rakete, zato pač ne more predstavljati gibanja inercialnega sistema! Na ravni delih krivulje, tja in nazaj, pa oba enakovredno prehitevata in zamujata!

- **PRIMERJAVA MERSKIH**

ENOT: Dolžine metrov v **A** in **B** (m_A, m_B) bi (klasično, $v = 0$) primerjali tako, da bi ju položili vzporedno; če bi ob skupnih levih krajiščih bili skupni tudi desni krajišči, bi trdili, da sta metra enako dolga. Pri velikih hitrostih odmikanja npr.



8.slika

(vijoličastega) metra **B**, pa bi celo ob **istočasni meritvi časa** ob $t_A = 0$ v krajiščih (oranžne, 4. slika) daljice ob izhodišču **A** bila časa $t_B = 150$ in 0 v **B** različna – torej za krajišči v **B** ta **A** istočasna meritev ni **B** istočasna, levo krajišče **B** zamuja in je zato pomaknjeno (zaradi gibanja »vlaka« **B** na desno) na desno, kjer so pa časi t_B manjši od 150, npr. 75. To pa pomeni, da je pri taki meritvi $m_A > m_B$!!

Zato poskusimo meriti v **A** in **B** v obeh krajiščih neistočasno (D_1, D_7) in to potem prikazati na 8. sliki – za nas obveznih (**A**)istočasnih dogodkov!

Če sta koordinati krajišč vijoličastega in oranžnega odseka na 8. sliki enaki – na začetku pri D_1 : obe izhodišči $((0, 0), (0, 0))$ in na koncu premika ob D_7 drugi krajišči odsekov $((300, 2), (300, -2))$, potem sta tudi razliki $\Delta t_A = \Delta t_B$ in $\Delta x_A = |\Delta x_B|$ enaki! Tako lahko trdimo, da sta tudi intervala, merski enoti 1 m in 1 s v **A** in **B** enako dolga!! Oranžni odsek je sicer na 8. sliki dvakrat tolikšen kot vijoličasti, vendar je to zato, ker so na sliki **A** istočasni dogodki (pri 0 in 300). Pri sliki **B** istočasnih dogodkov bi bila slika istih dogodkov ravno nasprotna: vijoličasti odsek bi bil na sliki daljši.