

Naslov članka/Article:

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev 2023

Avtor/Author:

dr. Borut Jurčič Zlobec

DOI:

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



Matematika v šoli št. 1/2024, letnik 30

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2024

Spletna stran revije:

<https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev 2023

dr. Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani

Zveza za tehnično kulturo Slovenije je leta 2023 v Murski Soboti organizirala že 57. državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije.

Namen srečanja je popularizacija znanosti in tehnike med mladimi, približevanje raziskovalne dejavnosti mladim talentiranim učencem in dijakom ter poglobljanje njihovega šolskega znanja.

Na državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih.

Organizator je dobil v pregled 13 osnovnošolskih in šest srednješolskih nalog s področja matematike in logike. Med osnovnošolskimi nalogami smo jih sedem izbrali za bronasto priznanje. Preostale so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje. Med srednješolskimi nalogami je vseh šest nalog, ki so prišle v končni izbor, kandidiralo za zlato ali srebrno priznanje.

Naloge, ki so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje, so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, doc. dr. Polona Repolusk, doc. dr. Mateja Grašič, asist. Simon Brezovnik in dr. Borut Jurčič Zlobec.

Komisija je izbrala dve osnovnošolski in dve srednješolski nalogi za zlato priznanje, preostale pa so dobile srebrno priznanje.

Rezultate vsako leto objavljamo v tej reviji, med drugim zato, da se lahko učenci, dijaki in ne nazadnje tudi mentorji orientirajo, kakšne naloge komisija ocenjuje za najprimernejše. Po drugi strani pa želimo učence in mentorje spodbuditi, da se prijavijo na tekmovanje.

Pojdimo k nalogam, najprej k temam, ki so bile predstavljene pred državno komisijo.

- Med osnovnošolskimi nalogami: pet pedagoških, štiri geometrijske in štiri aritmetične.
- Med srednješolskimi nalogami: 2 aritmetični, 1 geometrijska, 1 iz numeričnih metod, 1 statistična in 1 iz kriptografije.

Anketnih nalog letos ni bilo. Vendar pa se je med osnovnošolskimi nalogami pojavil val pedagoških nalog. Komisija jih je ocenila za ne najbolj primerne, ker nas na srečanjih mladih raziskovalcev ne zanima, kako drugi rešujejo matematične probleme, ampak bolj to, kako jih sami učenci in dijaki rešujejo. Zato ni nobena od pedagoških nalog prišla v ožji izbor za srebrno oziroma zlato priznanje.

Naj ponovimo, da so anketne in pedagoške naloge privlačne, ker ustrezajo napotkom organizatorjev, da je potrebno v raziskovalni nalogi narediti nekaj izvirnega, kar pa v matematiki ni tako lahko. Zato stalno poudarjamo, da tovrstna inovativnost za mate-

matične naloge ni primerna. Tudi kakovost teh nalog je vprašljiva. Vprašljive so tudi statistične metode, ki jih uporabljajo. Zato mentorjem priporočamo, da se teh tem izogibajo.

Pri matematičnih raziskovalnih nalogah je pomembno, da se učenci naučijo nekaj novega iz matematike in da znajo to lepo predstaviti. Če pa jim uspe kakšen izviren problem opisati matematično in ga tako rešiti, so dosegli največ, kar se od njih pričakuje.

Pri ocenjevanju nalog je komisija poleg samih nalog ocenjevala tudi njihovo predstavitev.

Naloge smo uredili po vrsti, najprej osnovnošolski zlati nalogi, nato pa še srednješolski. Na prvem mestu v kategoriji je naloga, ki jo je komisija ocenila za najboljšo in je dosegla prvo mesto v kategoriji.

1 Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2023

Zlato priznanje so dobile štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski.

- **KAPREKARJEVA KONSTANTA**
Avtorici: Nuša Demšar in Neža Jeromen
Mentor: Ambrož Demšar
Šola: Osnovna šola Alojzija Šuštarja, Ljubljana Šentvid
- **EULERJEVA KARAKTERISTIKA**
Avtorica: Polona Larisa Perman
Mentorica: Meta Hrast
Šola: Osnovna šola Škofljica
- **NUMERIČNA ANALIZA RAYLEIGH-BENARDOVE KONVEKCIJE**
Avtorja: Žiga Vaupotič in Jaka Jakopin
Mentorja: Grega Celcar in doc. dr. George Mejak
Šola: Gimnazija Jožeta Plečnika Ljubljana
- **REŠEVANJE POLINOMSKIH ENAČB Z GEOMETRIJO**
Avtorja: Tadej Vovk in Ema Ptičak
Mentor: mag. Alojz Grahor
Šola: Škofijska gimnazija Vipava

2 Kratek opis nagrajenih nalog

2.1 naloga: Kaprekarjeva konstanta.

Člene Kaprekarjevega zaporedja računamo po naslednjem pravilu. Vzamemo poljubno število. To število je prvi člen zaporedja. Njegove številke v desetiškem zapisu uredimo po velikosti od najve-

čje do najmanjše. Od tako dobljenega števila odštejemo število, ki se zapiše z istimi števki v obratnem vrstnem redu. Razlika, ki jo dobimo, je naslednji člen zaporedja.¹

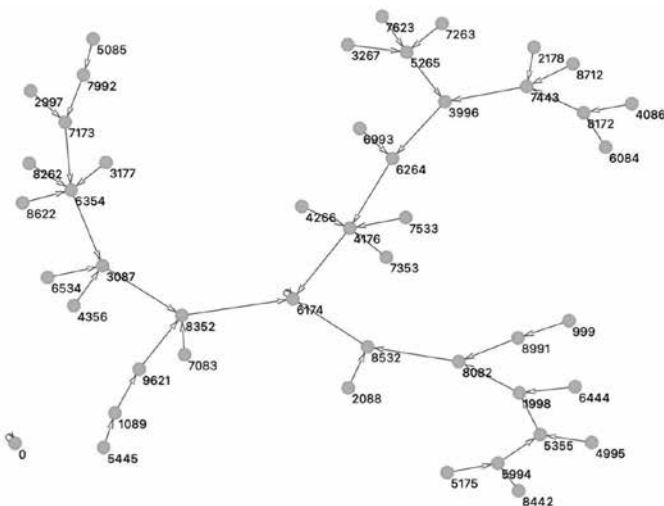
Naloga je zanimiva, zato si zasluži malo več pozornosti.²

Ker vsakokrat uredimo števke po vrstnem redu, je dovolj, če vzamemo za prve člene le števila, ki imajo v zapisu števke urejene po velikosti. Tako začnemo pri številih, zapisanih s štirimi števki namesto z 10 000 števili le s 715 števili, kolikor je število kombinacij (to pomeni, da ni pomemben vrstni red) s ponavljanjem razreda 4, (štirimestna števila) z desetimi elementi, to so števke od 0 do 9.

Vsako zaporedje se zaključi s ciklom, to pomeni, da se števila v zaporedju začnejo ponavljati. Cikel dolžine 1, kjer se ponavlja le eno število, je negibna točka zaporedja, ki dobi ime Kaprekarjeva konstanta.

Pri številih, ki se zapišejo s štirimi števki v desetiškem številskem sistemu, imamo le dve negibni točki 0 in 6174 (glejte sliko 1).

Vseh drugih različnih členov Kaprekarjevega zaporedja pri številih, zapisanih s štirimi števki v desetiškem sistemu, je le 55, ti so prikazani na sliki 1.



Slika 1: Drevo števil, ki se zapišejo s štirimi števki. Slika je vzeta iz naloge.

Na koncu naloge je zapisan še program v programskem jeziku python. Kot sem razumel, ta program izrisuje slike, kot je na primer slika 1, za števila zapisana s štirimi števki v desetiškem številskem sistemu.

Zato sem posebej zapisal program, ki razumljiveje odraža opis v besedilu.

```
#!/usr/bin/env python3
def kombinacije(razr, lst, pon=True): # Vrne seznam kombinacij s ponavljanjem
    if razr == 1: # elementov s seznama [lst] dolžine n = 10,
    return [[x] for x in lst] # razreda [razr] dolžine r.
```

```
res = [] # Število kombinacij je k = (n + r - 1)! / r! * (n - 1)!
j = 0 if pon else 1 # To je število vseh različnih števil med 0 do 999...9,
for i in range(len(lst)): # ki se zapišejo s števki, urejenimi po velikosti.
for item in kombinacije(razr - 1, lst[i+1:], pon):
res.append([lst[i]] + item)
return res
def kaprekar_(seed): # Izračuna naslednji člen Kaprekarjevega zaporedja.
r = len(seed)
seed_max = ''.join(sorted(seed, reverse = True))
seed_min = ''.join(sorted(seed)) # Sestavimo obe števili s padajočimi in naraščajočimi števki,
seed = str(int(seed_max) - int(seed_min))
# ju odštejemo in
seed = (r - len(seed)) * '0' + seed # dodamo vodilne ničle.
return seed
def kaprekars(seed_list): # Seznam drugih členov Kaprekarjevega zaporedja.
all_list = set()
for seed in seed_list:
seed = kaprekar_(seed)
while True:
if seed in all_list:
break
else:
all_list.add(seed)
seed = kaprekar_(seed)
return all_list
if __name__ == '__main__':
res = kaprekars([''.join([str(y) for y in x]) for x in kombinacije(4, range(10))])
print(len(res)) # Seznam drugih členov Kaprekarjevega zaporedja,
dict_branch = {} # Prvi člen preberemo s seznama kombinacij s ponavljanjem.
for x in res:
dict_branch[x] = kaprekar_(x) # Drevo drugih členov Kaprekarjevega zaporedja,
# kot ga prikazuje slika 1, zapisano v obliki slovarja.
for k in sorted(dict_branch.keys()):
print(k, dict_branch[k]) # Izpis slovarja.
```

2.2 naloga: Eulerjeva karakteristika

Nalogo bomo predstavili z njenim povzetkom.

Eulerjeva karakteristika mi je bila prvič predstavljena kot formula za izračun neznanega števila oglišč, robov ali ploskev konveksnih poliedrov v treh dimenzijah.

Število ploskev označimo s F , število robov z E in število oglišč z V . Formula se glasi:

$$F + V = E + 2.$$

¹ Z ležeco pisavo bomo zapisali prepise iz raziskovalnih nalog.

² Z osnovno pisavo so zapisani komentarji avtorja.

Če si poznal dve od naštetih količin, si lahko izračunal tretjo neznano. Predstavljena formula je Eulerjeva poliedrska formula, iz katere izrazimo Eulerjevo karakteristiko, ki jo pišemo z grško črko χ :

$$\chi = V - E + F.$$

Kot smo omenili, to velja za konveksne poliedre. Zanimalo me je, kako se izraža formula za poliedre, ki niso konveksni. Začela sem z najosnovnejšim geometrijskim objektom – točko. Nato sem nadaljevala z robovi, ploskvami in na koncu še s telesi. Raziskovala sem, kaj se zgodi z Eulerjevo karakteristiko, če jih medsebojno povežemo, lepimo in razrežemo. Natančno sem obravnavala enostavne mnogokotnike in pokazala, da njihova Eulerjeva karakteristika ni odvisna od tega, kako so razrezani na trikotnike. Spraševala sem se, kaj vpliva na Eulerjevo karakteristiko in kaj ne. Pokazala sem, kako z Eulerjevo karakteristiko lahko dokažemo, da res obstaja le pet platonskih teles. Svoje ugotovitve sem na koncu prikazala s pomočjo tabele. Primerjala sem objekte, ki imajo enako Eulerjevo karakteristiko, in ugotovila, kako so medsebojno povezani. Objekte sem si za lažjo predstavo risala v programu Geogebra in si tako omogočila globlje razumevanje.

2.3 naloga: Numerična analiza Rayleigh-Bénardove konvekcije

V povzetku k nalogi je med drugim zapisano:

Ta raziskovalna naloga obravnava numerične metode reševanja Navier-Stokesovih enačb. V nalogi obravnavamo dve preprosti mrežni metodi s stališča njune matematične formulacije, časovne zahtevnosti in natančnosti. Navier-Stokesove enačbe opisujejo gibanje tekočin.

Posvetili smo se predvsem enačbam, ki opisujejo nestisljive tekočine. Zapisali smo enačbe na podlagi Rayleigh-Bénardove konvekcije in se ukvarjali z najpreprostejšimi robnimi pogoji.

Numerično rešujemo parcialne diferencialne enačbe, tako da diferencialne enačbe pretvorimo v sistem navadnih enačb. Za reševanje Navier-Stokesovih enačb se uporabljajo različne metode. V nalogi smo si izbrali dve metodi, in sicer metodo končnih volumnov in končnih razlik. V nadaljevanju primerjamo obe metodi. Rešitve v dveh dimenzijah so grafično predstavljene.



Slika 2: Kritično Rayleighovo število. Slika je vzeta iz naloge.

Rayleighovo število je mera za intenzivnost konvekcije tekočine. Konvekcija se pojavi, ko vrednost Rayleighovega števila (Ra) doseže kritično vrednost.



Slika 3: Bénardove celice, slika se nahaja na naslovu: https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh%E2%80%93B%C3%A9nard_convection

2.4 naloga: Reševanje polinomskih enačb z geometrijo

Poglejmo najprej, kaj piše v povzetku k nalogi.

V nalogi obravnavamo reševanje polinomskih enačb, to so enačbe oblike

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

kjer so koeficienti a_i realna števila. Za polinomske enačbe do vključno četrte stopnje poznamo formule, po katerih se rešitve izrazijo s koeficienti polinoma z uporabo korenov. V nalogi obravnavamo alternativne metode reševanja polinomskih enačb, in sicer s pomočjo dinamične geometrije, konstrukcije skupnih tangent, s pomočjo prepogibanja papirja ter s pomočjo tako imenovane željeve grafike.

Pravila konstrukcij z neoznačenim šestilom in ravnilom:

- (1) Za dani točki P_1 in P_2 lahko narišemo premico, tako da bo potekala skozi obe točki.
- (2) Za dano točko O in daljico P_1P_2 lahko narišemo krožnico, katere središče je v točki O s polmerom dolžine daljice P_1P_2 .
- (3) Za dane premice in krožnice lahko določimo presečišča.

S pomočjo ravnila in šestila lahko rešujemo enačbe druge stopnje. S prepogibanjem papirja lahko rešujemo tudi enačbe višjih stopenj. Prepogibanje papirja se imenuje matematični origami, zanj pa veljajo naslednja pravila:³

- (1) Za dani različni točki P_1 in P_2 obstaja pregib, s katerim dobimo premico skozi ti točki.
- (2) Za dani premici lahko poiščemo presečišče, če obstaja.
- (3) Za dani točki P_1 in P_2 obstaja pregib, ki točko P_1 preslika v točko P_2 (tako dobimo simetralo daljice P_1P_2).

³ Različni avtorji nekoliko drugače razvrstijo in poimenujejo pravila matematičnega origamija.

- (4) Za dani različni premici l_1 in l_2 obstaja pregib, ki premico l_1 preslika na premico l_2 (tako dobimo simetralo kota, ki ga določata premici l_1 in l_2).
- (5) Za dano točko P in premico l lahko naredimo pregib skozi točko P pravokotno na premico l (tako dobimo pravokotnico na premico, ki poteka skozi dano točko).
- (6) Za dani točki P_1 in P_2 ter premico l lahko naredimo pregib tako, da točko P_1 preslika na premico l in da poteka skozi točko P_2 .
- (7) Za dani točki P_1 in P_2 ter premici l_1 in l_2 lahko naredimo pregib tako, da se točka P_1 preslika na premico l_1 in točka P_2 preslika na premico l_2 .

Avtorja sta si zastavila naslednja vprašanja:

- Kako z želvjo grafiko rešimo polinomsko enačbo poljubne stopnje?
- Kako s prepogibanjem papirja rešimo kvadratne in kubične enačbe?
- Kako rešiti starogrški problem konstrukcije podvojitve kocke s prepogibanjem papirja?

Film o reševanju enačb s pomočjo želvje grafike najdete na naslovu: <https://www.youtube.com/watch?v=IUC-8P0zXe8>

3 Opombe glede ocenjevanja nalog

Pri raziskovalnih nalogah na ravni osnovne in srednje šole vrednotimo tako kakovost izbire in obdelave problema kot tudi ustrezno težavnost in izvirnost.

Večkrat smo opazili, da nekatere naloge presegajo znanje, ki ga dobi učenec oziroma dijak v šoli. To se mi ne zdi narobe. Gre za učence in dijake, ki se zanimajo za snov, in zaželeno je, da se ne ustrašijo tem, ki jih v šoli niso srečali. Vendar ima vse svoje

meje. Izogibati se moramo pretirano zahtevnih nalog, ki zahtevajo znanje daleč nad tistim, ki se pričakuje od učencev oziroma dijakov na dani stopnji, ki med drugim zahtevajo tudi vrhunsko strokovno pomoč, ki jo lahko nudi le strokovnjak za določeno področje. Komisija bo težavnost take naloge upoštevala le do določene mere in tako omogočala, da lahko dobijo nagrade tudi tisti dijaki in učenci, ki jim taka pomoč ni dostopna.

Včasih dobimo pritožbe, češ zakaj ni moja naloga dobila zlatega priznanja, kaj je narobe z njo. Tu je treba upoštevati politiko organizatorja. Prva zlata medalja se podeli v posamezni skupini le eni nalogi zato, ker imajo prvi zlati nagrajenci določene ugodnosti, na primer izberejo lahko brezplačen poletni tabor v organizaciji Zveze za tehnično kulturo Slovenije (ZOTKS). Sredstva so omejena, zato se določi le ena naloga iz vsake skupine za prvo zlato priznanje.

Zato je ocenjevanje nalog relativno. Naloge komisija zbere na kup in pogleda, katera je po njenem mnenju najboljša, katera je druga najboljša in tako naprej. Tako se lahko zgodi, da z dano nalogo, ki je dobila drugo zlato priznanje, ni nič narobe. V drugem kontekstu bi prav lahko dobila prvo zlato priznanje.

V navodilih za ocenjevanje nalog organizatorja piše, da se naloge ocenjujejo po naslednjih kriterijih:

1. Raziskovalna odličnost naloge.
2. Jasno opredeljen namen raziskovalne naloge in njena izvirnost.
3. Interpretacija rezultatov (preglednost, grafi, tabele).
4. Navajanje literature in citiranje (označeno v besedilu naloge).
5. Tehnična izvedba in dovršenost naloge (jezik, oblika, estetski videz).

Komisija na koncu naredi relativno lestvico nalog na podlagi omenjenih ocenjevalnih kriterijev.