

Naslov članka/Article:

Od matematične preiskave pri pouku do raziskovalne naloge na tekmovanju mladih raziskovalcev

From Mathematics Investigation in Classroom to Research Paper in Young Researcher Competition

Avtor/Author:

Jožef Senekovič

DOI:

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



Matematika v šoli št. 1/2024, letnik 30

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2024

Spletna stran revije:

<https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>

Od matematične preiskave pri pouku do raziskovalne naloge na tekmovanju mladih raziskovalcev

From Mathematics Investigation in Classroom to Research Paper in Young Researcher Competition

Jožef Senekovič
Osnovna šola Bojana Illica, Maribor

Izvleček

V članku je opisan primer preiskovanja pri pouku matematike, ki ga dva učenca nadgradita v raziskovalno nalogo. Opredeljeni so bistveni poudarki oblikovanja raziskovalne naloge za osnovnošolce. Vsaka raziskovalna naloga, s katero soočimo učence, je lahko učinkovita metoda za razvijanje v nadaljevanju opredeljenih želenih znanj in sposobnosti pri učencih. V ta namen je predstavljen konkreten primer raziskovalne naloge. Tako je omogočen uvid v pozitivne, a tudi morebitne negativne vplive na razvoj učenčevega razmišljanja.

Ključne besede: raziskovalna naloga, poučevanje, matematična preiskava

Abstract

This article describes a mathematics investigation that two students have upgraded into a research assignment. It outlines the key components of designing a research assignment for primary school pupils. Any research assignment can effectively build the desired knowledge and abilities of pupils. The concrete example of a research assignment sheds light on the good and potentially harmful consequences on the development of student thinking.

Keywords: research assignment, instruction, mathematics investigation

Uvod

Znanje, pridobljeno v osnovni šoli, vedno bolj prehaja iz formalnega v funkcionalno. Učni načrt, razvijanje kompetenc, priporočila sveta Evropske unije in spremembe načina poučevanja (npr. formativno spremljanje) usmerjajo in spreminjajo nekatere obstoječe načine poučevanja. Učitelji želimo s čim učinkovitejšim poukom pri učencih doseči razvijanje predvsem procesnih znanj in hkrati z njimi takih socialnih veščin, ki jim bodo omogočale uspešno delovanje v globaliziranem okolju.

Učni načrt za matematiko v osnovni šoli že v opredelitvi predmeta nagovarja učitelje k dejavnostim, ki spodbujajo in razvijajo različne oblike mišljenja, ustvarjalnost, aplikativna formalna znanja in spretnosti.

Učencem z učnimi situacijami omogočamo, da spoznajo praktično uporabnost in smiselnost učenja matematike (*Učni načrt*, 2011, str. 4). Učni načrt s splošnimi in operativnimi cilji daje okvir preiskavam pri pouku matematike.

Z izrazom preiskovanje označujemo osnovnošolsko obravnavo problemskih situacij z nejasnimi cilji (Magajna in Žakelj, 2000). Preiskujemo torej »naloge« ali, bolje rečeno, izzive, v katerih ni določeno, kaj natančno moramo ugotoviti, niti iz formulacije ali konteksta naloge ni razvidno, kako naj pridemo do ugotovitev.

Zgleda takih ugotovitev sta:

- Preiskuj pravokotnike na geoplošči 3×3 .
- Ali je ugodneje kupovati hrano v Sloveniji ali na Hrvaškem?

Cilja obeh nalog sta nejasna, nedorečena in reševalec se mora sam odločiti, kaj natančno bo preučil in kako bo to storil.

Pri pravokotnikih na geoplošči nas lahko zanimajo mogoči liki, ki nastanejo, njihove ploščine, obsegi. V drugem primeru moramo podrobneje premisliti, kaj razumemo kot ugodnejši nakup (cena prehranskih izdelkov, bližina nakupa, porabljen čas ...).

Z vidika vsebine pri osnovnošolskem pouku matematike preiskujemo dva tipa problemskih situacij. Pri matematičnih problemskih situacijah so objekti preiskovanja matematične narave, take situacije obravnavamo z matematičnimi preiskavami, zgled je zgornja naloga o pravokotnikih na geoplošči. Obravnava večine preostalih problemskih situacij v osnovni

šoli temelji na delu s podatki, taka je npr. zgornja naloga o nakupovanju hrane. Ločevamo se jih z empiričnimi preiskavami.

Matematične preiskave temeljijo na problemskih situacijah. Problemske situacije spodbujajo razvoj matematičnega razmišljanja (Žakelj, 2003, str. 16). Matematična preiskava je dejavnost, ob kateri učenci pri pouku ali doma, s samostojnim delom ali sodelovanjem, premisleki in povezovanjem znanja preiščejo značilnosti, lastnosti dane problemske situacije. Preiskava problemske situacije lahko odpira nova vprašanja in vodi v matematično raziskovalno nalogo. Učenje ob problemskih situacijah omogoča razvoj procesnih znanj, ki niso nujno vsa matematična (Žakelj, 2003, str. 34). Prav razvoj znanj, ki presegajo okvire matematičnih vsebin, je srž matematičnih preiskav in raziskovalnih nalog. Gre za znanja, ki so prenosljiva tudi na druga predmetna področja in jih običajno poimenujemo procesna znanja.

Navedimo kategorije procesnih znanj (Žakelj, 2003, po Frobisher):

- komunikacijski procesi (pojasnjevanje, strinjanje, spraševanje ...),
- operacijski procesi (zbiranje, sortiranje, urejanje, spreminjanje ...),
- miselni procesi (analiziranje, razjasnitev, razumevanje ...),
- procesi zapisovanja (risanje, izdelava seznamov, grafični prikazi ...).

Različni avtorji procesna znanja različno klasificirajo. Dodajmo morda še čedalje pomembnejši vidik uporabe digitalne tehnologije. S preiskavami in raziskovalnimi nalogami učenci posamezne procese združujejo v učne strategije.

Matematična preiskava poteka ob izbrani problemski situaciji, ki ima največkrat delni ali končni zaključek oziroma ugotovitev raziskovalca. Pri matematični preiskavi lahko rečemo, da gre za metodo pouka.

Raziskovalna naloga oz. matematična raziskava lahko obravnava enako problem-sko situacijo kot preiskava, vendar veliko bolj poglobljeno, z iskanjem splošnih ugotovitev, posplošenih pravil, zapisov formul, izdelavo modela. Matematična raziskava je obsežnejša od preiskave tako po vsebini kot po času obravnave. Zah-teva uporabo različnih strategij, morda uporabo digitalne tehnologije, uporabo raznih virov, posvetovanja, različnih metod reševanja. S spreminjanjem pogojev

problemske situacije matematično raziskovanje posega v nenačrtovana področja začetne problemske situacije. Ugotovitve matematične raziskave je treba utemeljiti, zapisati v matematičnem jeziku in predstaviti.

Raziskovalne naloge nastajajo tudi na srečanjih mladih raziskovalcev. Več o tem najdete na spletu (<https://www.zotks.si/raziskovalci/razpis>). Na področnih izborih komisije izberejo najkakovostnejše naloge za državno srečanje. Na zaključno državno srečanje se uvrstijo samo naloge, ki tekmujejo za srebrna in zlata priznanja, bronasta podelijo že prej. Pogosta napaka, ki jo avtorji in mentorji največkrat naredijo, tj. usmerjanje v postavljanje hipotez, izhaja iz presplošnih navodil za raziskovalne naloge. O tem piše dr. Borut Jurčič Zlobec v več člankih revije *Matematika v šoli*. Naloge te vrste pravzaprav niso matematične raziskovalne naloge, saj se največkrat ukvarjajo z odgovori na anketna vprašanja. Menim, da področje matematike, sploh v osnovni šoli, težko zadosti predpisanim navodilom za raziskave. Matematični problemi so odprti, pogosto ne vemo, v katero smer bo raziskava potekala in do katerih ugotovitev bomo prišli.

Od matematične preiskave do raziskovalne naloge

Poglejmo si primer prehoda od matematične preiskave k matematični raziskovalni nalogi. Izhodišče matematične preiskave je naloga »Katera zaporedna naravna števila imajo vsoto 171?« (Žabkar, 1971).

Nekatere ugotovitve in predstavitev izvedbe preiskave te problemske situacije pri pouku so opisane v prispevku Ane Kodolja v priročniku *Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi: Matematika* (str. 179).

Problemska situacija je odprta. Naloga ne sprašuje po dveh ali katerem drugem številu seštevancev. Postavlja samo pogoj, da so števila naravna in zaporedna. Problemska situacija je časovno obširnejša, poleg matematičnega znanja zahteva miselne procese, procese zapisovanja, urejanja, pravzaprav vse predhodno omenjene (po Frobisher).

V procesu reševanja učenci najprej najdejo vsoto dveh zaporednih števil, $85 + 86 = 171$. Uporabijo zase najenostavnejšo in najobičajnejšo pot do rešitve.

Dve števili najpogostejše seštevajo. Pri opisu reševanja navajajo deljenje števila 171 s številom 2 (ker sta v vsoti dve števili). S sklepanjem in poskušanjem (število 171 ni deljivo z 2) pridejo do seštevancev 85 in 86. Z uporabo enake strategije razmišljajo tudi o vsoti treh zaporednih naravnih števil. Število 171 delijo s številom 3. Količnik je število 57. Ker seštejemo tri zaporedna števila, je v vsoti še predhodnik in naslednik števila 57. Torej $56 + 57 + 58 = 171$.

Nadaljevanje preiskave je bolj ali manj odvisno od posredovanja učitelja. Učenci so namreč zadovoljni že samo z eno rešitvijo (števili 85 in 86), le redki posamezniki razmišljajo o treh zaporednih številih. Izjemno redko kateri izmed učencev postavi vprašanje: »Sem našel vse možne rešitve? Obstaja še katera?« Od tu naprej se za učence začne raziskovanje. Potrebna je spodbuda učitelja.

Recimo, da učenci utemeljijo, zakaj število 171 nikakor ne more biti vsota štirih seštevancev. V taki vsoti je vedno polovica sodih in polovica lihih števil (po dve). Vsota dveh lihih števil je sodo število. Vsota sodih števil je sodo število. Ker je vsota štirih seštevancev vedno sodo število, lihega števila 171 nikakor ne moremo zapisati na ta način. Sledi pomembna ugotovitev: v vsoti zaporednih naravnih števil mora biti liho število lihih seštevanec, če želimo dobiti liho število 171.

Primeri

V vsoti $56 + 57 + 58 = 171$ je en lihi seštevanelec.

S sistematičnim poskušanjem lahko učenci najdejo tudi rešitev s tremi lihimi seštevanci. Tako dobijo vsoto šestih zaporednih naravnih števil:

$$26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 = 171.$$

Podobno lahko najdejo rešitev s petimi lihimi seštevanci oziroma z devetimi zaporednimi naravnimi števili: $15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 = 171$.

Nekateri učenci so ugotavljali, da je število 171 deljivo s števili 1, 3, 9, 19, 57, 171. Ker so našli že rešitev s tremi in devetimi zaporednimi naravnimi števili, so preverili, ali obstaja 19, 57 ali celo 171 zaporednih naravnih števil z vsoto 171.

V nadaljevanju predstavimo razvoj raziskovalne naloge **Vsota zaporednih naravnih števil** (Smaka in Verlič, 2013). Učenca devetošolca sta problem začela reševati z zapisom enačb.

Za dve zaporedni naravni števili rešujemo enačbo:

$$\begin{aligned}x + (x + 1) &= 171 \\2x + 1 &= 171 \\x &= 85\end{aligned}$$

Rešitev sta zaporedni naravni števili 85 in 86.

Za tri zaporedna naravna števila rešujemo enačbo:

$$\begin{aligned}x + (x + 1) + (x + 2) &= 171 \\3x + 3 &= 171 \\x &= 56\end{aligned}$$

Rešitev so zaporedna naravna števila 56, 57, 58.

Za štiri zaporedna naravna števila rešujemo enačbo:

$$\begin{aligned}x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) &= 171 \\4x + 6 &= 171 \\x &= 41,25\end{aligned}$$

41,25 ni naravno število, zato ne obstajajo štiri zaporedna naravna števila z vsoto 171.

Ob zapisih enačb, ki sta jih reševala, sta opazila, da nastaja vzorec. Z x je označeno prvo naravno število v vsoti zaporednih naravnih števil:

$$\begin{aligned}2x + 1 &= 171 \\3x + 3 &= 171 \\4x + 6 &= 171 \\5x + 10 &= 171 \\6x + 15 &= 171 \\7x + 21 &= 171 \\8x + 28 &= 171 \\9x + 36 &= 171\end{aligned}$$

Drugi členi vsote oblikujejo zaporedje števil 1, 3, 6, 10, 15 ... To so trikotniška

števila. Poljubno trikotniško število lahko zapišemo $\frac{n(n-1)}{2}$.

Zapisala sta splošno enačbo

$$nx + \frac{n(n-1)}{2} = 171.$$

Spremenljivka x je v tem primeru prvo izmed zaporednih števil, ki jih iščemo, n pa je število zaporednih števil (število seštevancev). Število 171 je seveda vsota zaporednih števil, ki jih iščemo.

Iz enačbe izrazimo prvo zaporedno število vsote

$$x = \frac{171}{n} - \frac{n-1}{2}.$$

Število x (prvo izmed števil v zaporedju) je naravno število in ga izračunamo kot razliko dveh členov.

Učenca sta ugotovila, da je prvi člen $\frac{171}{n} \in \mathbb{N}$, ko je n delitelj izbranega števila 171. Z razcepom na prafaktorje sta poiskala delitelje števila 171, $D_{171} = \{1, 3, 9, 19, 57, 171\}$. Tako je $n \in \{1, 3, 9, 19, 57, 171\}$. Ker so vse vrednosti za n liha števila,¹ je vrednost ulomka $\frac{n-1}{2}$ vedno naravno število ali število nič.

Vsak delitelj števila 171 sta vstavila v enačbo, jo rešila ter tako zapisala iskana zaporedja naravnih števil.

a) $n = 1$

$$\begin{aligned}x &= \frac{171}{1} - \frac{1-1}{2} \\x &= 171\end{aligned}$$

Gre za eno zaporedno število. To je število samo, 171.

b) $n = 3$

$$\begin{aligned}x &= \frac{171}{3} - \frac{3-1}{2} \\x &= 57 - 1 = 56\end{aligned}$$

Pri treh zaporednih naravnih številih je prvo torej 56. Iskana vsota števil je $56 + 57 + 58 = 171$.

c) $n = 9$

$$\begin{aligned}x &= \frac{171}{9} - \frac{9-1}{2} \\x &= 19 - 4 = 15\end{aligned}$$

Pri devetih zaporednih naravnih številih je prvo torej 15. Iskana vsota števil je $15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 = 171$.

d) $n = 19$

$$\begin{aligned}x &= \frac{171}{19} - \frac{19-1}{2} \\x &= 9 - 9 = 0\end{aligned}$$

Pri devetnajstih zaporednih številih je prvo torej 0 (ki ni naravno). Iskana vsota števil je $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 171$.

Na ta način smo našli vsoto osemnajstih zaporednih naravnih števil $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 171$.

e) $n = 57$

$$\begin{aligned}x &= \frac{171}{57} - \frac{57-1}{2} \\x &= 3 - 28 = -25\end{aligned}$$

Ko dobimo negativno rešitev enačbe, trditev, da je n število zaporednih naravnih števil, ne velja več. V tem primeru dobimo 57 celih števil od -25 do $+31$, katerih vsota je 171. Med temi celimi števili je vsota od -25 do $+25$ enaka 0. Tako k vsoti prispevajo le naravna števila $26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 = 171$. Na ta način smo našli vsoto šestih zaporednih naravnih števil.

f) $n = 171$

$$\begin{aligned}x &= \frac{171}{171} - \frac{171-1}{2} \\x &= 1 - 85 = -84\end{aligned}$$

Rešitev enačbe je število -84 . V tem primeru dobimo 171 celih števil od -84 do $+86$. Izkaže se, da je vsota teh sto enainsedemdesetih celih števil prav tako 171. Med temi celimi števili je vsota od -84 do $+84$ enaka 0. Tako k vsoti prispevata le naravni števili 85 in 86. Na ta način smo našli vsoto dveh zaporednih naravnih števil $85 + 86 = 171$.

¹ Seveda bi v splošnem reševali enačbo v dveh delih, ko je n liho in ko je n sodo število.

Pa posplošimo.

Za poljubno liho naravno število y , ki je vsota zaporednih naravnih števil, izračunamo prvo zaporedno število s pomočjo enačbe:

$$x = \frac{y}{n} - \frac{n-1}{2}.$$

Število n je delitelj poljubnega lihega naravnega števila y .

Število x je prvo naravno število v zaporedju.

Število n je hkrati tudi število členov vsote.

Če je rešitev enačbe $x \leq 0$, je v vsoti zaporednih naravnih števil natanko $y - (2|x| + 1)$ števil.

V nadaljevanju raziskovalne naloge učenca razmišljata, ali ugotovljeno pravilo velja tudi za soda števila. Raziskovalno vprašanje torej razširita, zanima ju širši vidik problema. V prvem delu namreč obravnavata le liha števila (ker je 171 liho število). Raziskavo nadaljujeta s sistematičnim preizkušanjem uporabnosti pravila še za soda števila.

Na primerih ugotovita, da pravilo velja le za lihe delitelje sodih števil.

Primer

Število 20 ima samo dva liha delitelja, število 1 in število 5, saj je

$D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. Z uporabo enačbe $x = \frac{20}{n} - \frac{n-1}{2}$ zapišemo:

a) $n = 1$

$$x = \frac{20}{1} - \frac{1-1}{2}$$

$$x = 20$$

V tem primeru lahko število 20 zapišemo kot vsoto enega samega zaporednega števila. To je število 20 samo.

b) $n = 5$

$$x = \frac{20}{5} - \frac{5-1}{2}$$

$$x = 2$$

To pomeni, da lahko število 20 zapišemo z vsoto petih zaporednih naravnih števil $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$.

c) Za preostale delitelje, ki so soda števila (2, 4, 10, 20), pa na primerih ugotovita, da za x ne dobita naravnega števila.

Sledi še ugotovitev:

Za poljubno sodo naravno število y določimo vsoto zaporednih naravnih števil s pomočjo enačbe

$$x = \frac{y}{n} - \frac{n-1}{2}.$$

Število n je lihi delitelj poljubnega sodega naravnega števila y .

Število x je prvo naravno število v zaporedju.

Število n je hkrati tudi število členov vsote.

Če je rešitev enačbe $x \leq 0$, je v vsoti zaporednih naravnih števil natanko $y - (2|x| + 1)$ števil.

Zaključek

Med matematično preiskavo in raziskovalno nalogo je očitna razlika: po obsegu, globini preiskovanja, času dela, zahtevanih procesnih znanjih in uporabi matematičnega znanja.

Kot dolgoletni mentor ugotavljam nedvoumne pozitivne pridobitve učencev, ki se lotijo raziskovalne naloge. Učenci postanejo bistveno samozavestnejši in pridobijo veliko matematičnega ter širšega znanja. Naučijo se zapisovanja matematičnih vsebin, predstavljanja in zagovarjanja svojih idej in zamisli. Utemeljujejo in diskutirajo, sodelujejo, razdelijo delo, povzemajo in razmišljajo o novih vprašanjih.

Negativne izkušnje učencev z raziskovalnimi nalogami lahko bistveno zmanjšajo interes in motivacijo učenca. Vplivajo lahko tudi na učenčevo samopodobo. Učenci pri izdelavi raziskovalne naloge ne smejo doživeti pritiska s strani učitelja. Morebitno nerazumevanje vsebin, postopkov, iskanje rešitev ... rešujejo skupaj z učiteljem (mentorjem). Ta vloga učitelja je zato zelo pomembna, pomembnejša od vloge usmerjevalca v raziskovanju matematičnih vsebin. Napake v razmišljanju so lahko ključne pri razvoju procesnih znanj. Učencem nikakor ne smemo odvzeti možnosti napak. Zato je napačna tudi preveč pokroviteljska vloga učitelja, če ta prevzame bistveno delo v korakih nastajanja raziskovalne naloge. Učenci morajo pridobiti izkušnjo vseh korakov, od zasnove problema, iskanja problemskih vprašanj, iskanja virov, uporabe digitalne tehnologije, izdelave zapisov, skic, grafov, postopkov reševanja do utemeljenih zaključkov in predstavitev.

Viri

- Jurčič Zlobec, B. (2017). Raziskovalne naloge iz matematike na srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2017. *Matematika v šoli*, 23 (2), str. 57. Zavod RS za šolstvo.
- Magajna, Z., Žakelj, A. (2000). *Obdelava podatkov pri pouku matematike 6–9*. Zavod RS za šolstvo.
- Smaka, M., Verlič, J. (2013). *Vsota zaporednih naravnih števil, raziskovalna naloga*, mentor Senekovič, J. Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2013.
- Suban, M., Kmetič, S., Žakelj, A., Lipovec, A., Magajna, Z., Sirnik, M., Vrščič, V., Legvart, P., Perkovič, A., Čekada, D., Flisar, M., Magdič, M., Kmetec, K., Kodelja, A., Bone, J., Rajh, S., Repovž, B. in Senekovič, J. (2013). *Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi*. Zavod RS za šolstvo.
- Učni načrt. *Program osnovna šola. Matematika* (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport in Zavod RS za šolstvo.
- Žabkar, J. (1971). *Vaje in naloge iz matematike za VIII. razred osnovne šole*. DZS.
- Žakelj, A. (2003). *Kako poučevati matematiko*. Zavod RS za šolstvo.

IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

Priročnik

Elementi coachinga in supervizije v podporo kolegialnemu svetovanju: za sistemsko vodenje v praksi

je nastal iz prakse za prakso.

Avtorici dr. Mihaela Zavašnik in dr. Tatjana Ažman izhajata iz predpostavke, da trenutni čedalje hitrejši tempo sprememb in razvoja terja od ravnatelja, pomočnika ravnatelja in drugih vodij v vzgojno izobraževalnih zavodih vse več učenja s poglobljenim razmišljanjem, proučevanjem in presojanjem, za kar je praviloma premalo časa.

Glavni del priročnika predstavljajo izbrani coachinški in supervizijski pripomočki ter orodja za kolegialno svetovanje in podpiranje, ki jih je mogoče uporabiti v različnih kontekstih, kot so:

- delo z zaposlenimi,
- vodenje pedagoških konferenc in sestankov,
- individualna podpora strokovnim delavcem,
- mentorstvo,
- delo z učenci, otroki ...

22 orodij je na kratko razloženih, podani so koraki za uporabo in primeri vprašanj, ki jih lahko uporabite za izvedbo podpiranja s pomočjo izbranega orodja. Uporabiti jih je mogoče na primer za:

- zastavljanje močnih vprašanj za razjasnjevanje problemov,
- reševanje konfliktov,
- vodenje refleksije,
- analizo stanja,
- ugotavljanje vpliva,
- usmerjanje v in načrtovanje prihodnosti,
- ustvarjanje ravnovesja,
- omogočanje oddaljenega pogleda na problem ...

Priročnik lahko naročite po pošti (Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana), elektronski pošti (zalozba@zrss.si) ali na spletni strani www.zrss.si/spletna-knjigarna/. Cena priročnika je 27,00 EUR.

