Naslov članka/Article: Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2022

Avtor/Author: **Dr. Borut Jurčič Zlobec**

DOI:

Matematika v šoli št. 2/2022, letnik 28
ISSN 1318-010X
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2022

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2022

Dr. Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je *čim* zgodnejše uvajanje mladih v znanost, popularizacija znanosti in tehnike, odkrivanje nadarjenih učencev in dijakov na posameznih področjih in njihovo spodbujanje k poglabljanju znanja in raziskovalne dejavnosti.

Na državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge z regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2022 je potekalo *že* 56. državno srečanje v Murski Soboti.

Organizator je dobil v pregled 11 osnovnošolskih in 4 srednješolske naloge. Med osnovnošolskimi nalogami smo izbrali 7 nalog za bronasto priznanje, ostale so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje. Med srednješolskimi nalogami je vsaka dobila ali zlato ali srebrno priznanje.

Naloge, ki so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje, so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, izr. prof. dr. Marko Jakovac, doc. dr. Mateja Grašič, asist. Simon Brezovnik in Borut Jurčič Zlobec.

Komisija je izbrala 2 osnovnošolski in 2 srednješolski nalogi za zlato priznanje, ostale pa so dobile srebrno priznanje. Naloge, ki so dobile zlato priznanje, je komisija razdelila v dve skupini. V prvi skupini so bile naloge, za katere je komisija določila, da so najboljše v svoji kategoriji.

Objavo rezultatov je narekoval predvsem namen, da izpostavimo delo učencev in mentorjev, in pri*čaku*jemo, da bodo drugi sledili njihovemu zgledu.

Pojdimo k nalogam. Teme nalog, ki so bile predstavljene pred državno komisijo, so bile geometrija (6 nalog),teorija iger (4 naloge), analiza (3 naloge) ter ena naloga iz statistike in ena iz kombinatorike.

Anketnih nalog letos ni bilo. Naj kljub temu ponovimo, da so anketne naloge privlačne, ker ustrezajo napotkom organizatorjev, da je treba v raziskovalni nalogi narediti nekaj izvirnega, kar pa v matematiki ni tako lahko. Zato stalno poudarjamo, da taka inovativnost za matematične naloge ni primerna. Tudi kakovost teh nalog je vprašljiva. Vprašljive so tudi statistične metode, ki jih uporabljajo. Zato mentorjem priporočamo, da se takih tem izogibajo. Pri matematičnih raziskovalnih nalogah je pomembno, da se učenci naučijo nekaj novega iz matematike in da znajo to lepo predstaviti. *Če* pa jim uspe kakšen izviren problem opisati matematično in ga tako rešiti, so dosegli največ, kar se od njih pričakuje.

Pri ocenjevanju nalog je komisija poleg nalog ocenjevala tudi predstavitev.

Naloge smo uredili po vrsti, najprej osnovnošolski zlati nalogi, nato pa *še* srednješolski. Na prvem mestu je naloga, ki jo je komisija ocenila kot najboljšo.

Pri srednješolskih nalogah je bila komisija v zadregi, ker sta bili obe nalogi vsaka na svoj način izjemni. Ena je bila naloga z naslovom Origamika, ki je v resnici pokazala inovativnost, druga pa je bila naloga Katje Vreš, ki je bila tudi na svoj način inovativna, vendar ni uporabljala tako zahtevnega matematičnega orodja. Njena predstavitev naloge je bila briljantna. Bila je ena najboljših v tridesetih letih, odkar sodelujem pri ocenjevanju raziskovalnih nalog.

Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2022

Zlato priznanje so dobile *štiri* raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski:

• IGRA NIM
Avtor: Gregor Bokal
Mentorja: Ambrož Demšar, Drago Bokal
Šola: Osnovna *šola* Alojzija *Šuštarja,* Ljubljana-Šentvid

• ČAROBNI PLATONSKI POLIEDRI
Avtorja: Jarnej Starčič, Martin Starčič
Mentor: Mišo Krog
Šola: Osnovna *šola* Miška Kranjca Ljubljana

• ORIGAMIKA
Avtorji: Matic Kravos, Rene Turk, Aljaž Velikonja
Mentor: Alojz Grahor
Šola: Škofijska gimnazija Vipava

• KVADRATNI PALINDROM
Avtor: Kaja Vreš
Mentor: Domen Vreš
Somentor: Simona Vreš
Šola: Šolski center Ravne na Koroškem, Gimnazija Ravne na Koroškem

Kratek opis nagrajenih nalog

1. naloga: Igra Nim skozi matematiko in spodbujevano učenje

V igri Nim imamo na mizi določeno *število žetonov* in dva igralca. Igralca smeta izmenoma vzeti enega ali dva *žetona. Tisti,* ki pobere zadnji *žeton,* je poraženec. Avtor se je odločil, da bo iskanje optimalne strategije prepustil računalniku.

Pri programiranju je uporabil metodo *spodbujevanega učenja* (angleško reinforcement learning).

V Wikipediji ob geslu Spodbujevano učenje piše, da je to strojno učenje, katerega cilj je priučiti ali optimizirati vedenje na podlagi povratne informacije. Spodbujevani učenec izbira možnosti, ki so mu v dani situaciji na voljo. *Če* se izkaže, da je izbral možnost, ki ga je pripeljala do zmage, je nagrajen, sicer pa kaznovan.

Zapišimo skrajšani povzetek k nalogi, ki ga je napisal avtor.

Z logičnim razmišljanjem lahko pridemo do optimalne strategije. Kako pa bi do op-

Matematika v šoli, št. 2., letnik 28, 2022

timalne strategije prišel računalnik? Računalnik skozi odigrane igre s soigralcem pridobiva znanje. Na hitrost učenja vpliva tudi izbor soigralca. Če soigralec igra z optimalno strategijo, se računalnik hitreje nauči. Če pa soigralec igra naključno, računalnik potrebuje več časa, da razvije optimalno strategijo. Uporabili smo knjižnico za spodbujevalno učenje programskega jezika Python. Med igranjem si računalnik beleži, koliko žetonov je vzel v danem primeru. Če je po koncu igre poražen, zmanjša verjetnost, da bi kasneje v enakem primeru spet izbral to število žetonov. *Poleg tega poveča verjetnost za potezo, ki je ni izbral. Če v igri zmaga, stori obratno. Računalnik si zapomni, koliko žetonov mora vzeti pri danem* številu žetonov *na polju, ki ga je že srečal. Tega znanja ne zna posplošiti.*

Pa poglejmo, kakšna naj bi bila optimalna strategija:

(1) Če ostane na mizi le en *žeton,* potem je igra za tistega, ki je na vrsti, izgubljena.

(2) Pri dveh *žetonih* na mizi je igra za tistega, ki je na vrsti, dobljena. Vzame en *žeton* in prepusti izgubljeni primer soigralcu.

(3) Če ostanejo na mizi trije *žetoni,* potem mora igralec, ki je na vrsti, vzeti dva *žetona.* Tako ostane en *žeton* za soigralca.

(4) Pri *štirih žetonih* je primer za soigralca, ki je na vrsti, izgubljen. *Če* vzame en *žeton,* prepusti soigralcu zmagovalni primer, to so trije *žetoni, če* pa pobere dva *žetona,* potem ravno tako prepusti soigralcu zmagovalni primer, to sta dva *žetona.*

(5) Splošno velja, da je igra v primeru, ko imamo na mizi $3(n-1)+1$ žetonov, za igralca, ki je na vrsti, izgubljena, *če* njegov partner uporablja optimalno strategijo.

(6) Če pa je na mizi $(3(n-1)+k)$ žetonov, kjer je $k = 2, 3$, potem bo igralec zmagal, *če* vzame en *žeton za* $k = 2$ in dva *žetona* za $k = 3$.

2. naloga: Platonski poliedri

Nalogo bomo predstavili z njenim povzetkom.

V nalogi sva raziskovala čarobne *platonske poliedre: Rubikova kocka, pyraminx, skwebdiamond, kilominx, dogic. To so mehanske matematične uganke v obliki pravilnih teles, ki so sestavljena iz več manjših delov, ki se vrtijo okrog nevidnega jedra. Zakonitosti premikov in položajev sva opisala v matematičnem jeziku. Glavni cilj pa je bil najti algoritme, ki premešane* čarobne *poliedre spet spravijo v prvotno stanje. To je stanje, ko so na vsaki ploskvi vsi delci enake barve. Domislila sva se tudi uporabe* čarobnih *poliedrov pri* šifriranju *sporočil.*

Slika 1: Poliedri, opisani v nalogi (vir avtorja)

V nalogi so natanko opisani algoritmi za sestavljanje teh teles in izračun vseh možnih kombinacij. Vsega je preveč, da bi na tem mestu natančneje opisali.

3. naloga: Origamika, delitev kota na več enakih delov

Z neoznačenim ravnilom in *šestilom* lahko rešimo kvadratno enačbo, medtem ko s pregibanjem papirja lahko rešimo tudi enačbe tretje stopnje. Ker moramo pri trisekciji kota, to je delitev kota na tri enake dele, rešiti enačbo tretje stopnje, pomeni, da lahko s pomočjo pregibanja papirja razdelimo kot na tri enake dele, kot prikazuje slika 2.

Če poznamo $k = \tan(3\alpha)$, potem $x = \tan\alpha$ ustreza enačbi

$$x^3 - 3kx^2 - 3x + k = 0.$$

Enačbo dobimo iz zveze

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

Več o tem najdete na spletni strani https://www.youtube.com/watch?v=IUC-8P0zXe8.

V povzetku naloge je zapisano:
V raziskovalni nalogi uporabljamo za reševanje geometrijskih problemov matematični origami. To je metoda, pri kateri namesto neoznačenega ravnila in šestila *konstruiramo geometrijske elemente s pomočjo prepogibanja papirja. V prvem delu naloge obravnavamo problem delitve kota na tri enake dele. Predstavimo Abejevo in dve Justinovi metodi, ki opisujeta delitev ostrega in topega kota. V drugem delu opišemo metodo dvojnega pregibanja in z njeno pomočjo razdelimo kot na pet enakih delov (Langova metoda). Langovo metodo kvintisekcije smo priredili tudi za trisekcijo kota.*

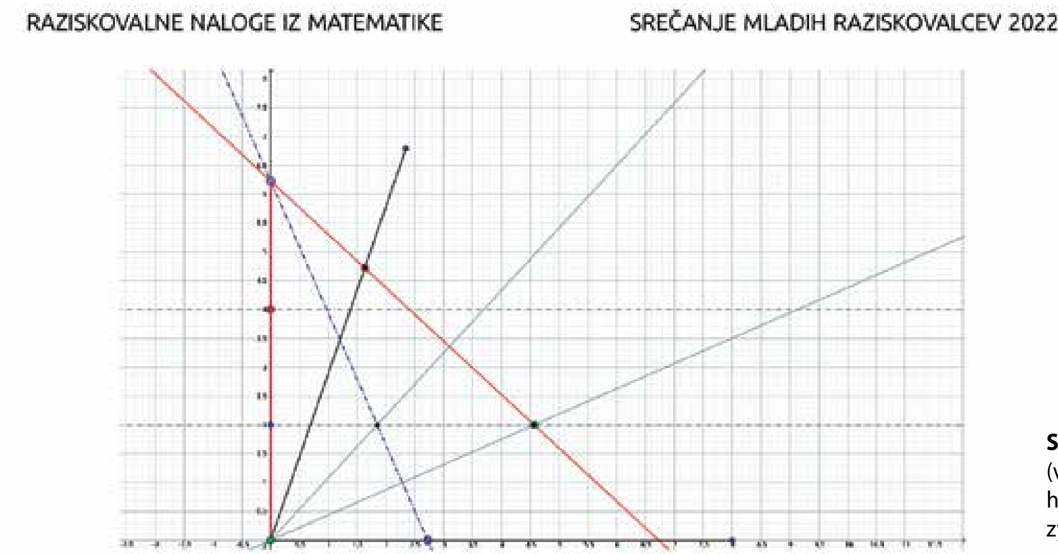
Pravila matematičnega origamija:

(1) Za dani različni točki P_1 in P_2 obstaja pregib, s katerim dobimo premico skozi ti dve točki.

(2) Za dani premici lahko poiščemo presečišče, *če* obstaja.

(3) Za dani dve točki P_1 in P_2 obstaja pregib, ki točko P_1 preslika v točko P_2 (tako dobimo simetralo daljice (P_1, P_2)).

(4) Za dani dve različni premici l_1 in l_2 obstaja pregib, ki premico l_1 preslika na premico l_2 (tako dobimo simetralo kota, ki ga določata premici (l_1, l_2)).



Slika 2: Prikaz trisekcije ostrega kota (vir Borut Jurčič Zlobec, Geogebra) https://www.geogebra.org/m/zykratk2

(5) Za dano točko P in premico l lahko naredimo pregib skozi točko P pravokotno na premico l (tako dobimo pravokotnico na premico, ki poteka skozi dano točko).

(6) Za dani točki P_1 in P_2 ter premici l_1 in l_2 lahko naredimo pregib tako, da se točka P_1 preslika na premico l_1 in točka P_2 preslika na premico l_2.

Cilji naloge:

(1) Opisati znane konstrukcije delitve kota na tri enake dele.

(2) Odkriti nove načine delitve kota na tri enake dele.

(3) Opisati Langovo konstrukcijo delitve kota na pet enakih delov.

(4) Proučiti delitev kota na sedem enakih delov.

Na Sliki 2 je prikazana konstrukcija trisekcije ostrega kota, poleg tega pa imamo *še* povezavo na spletno stran, kjer je ta konstrukcija narejena v programu Geogebra. Kot, ki ga bomo razdelili na tri enake dele, ima vrh v koordinatnem izhodišču. En krak poteka po osi x, drugi krak pa je označen s poudarjeno poševno daljico v *črni* barvi. Narišemo dve premici, vzporedni z osjo x. Medsebojni razdalji premic in spodnje premice z osjo x sta enaki. Papir prepognemo tako, da se koordinatno izhodišče preslika na spodnjo premico, ti dve točki sta označeni z zeleno barvo. Hkrati pa se mora presečišče zgornje premice z osjo y preslikati na krak kota. Točki sta označeni rdeče. Prepogib je označen z modro *črtkano črto. Kako narišemo* premici, ki določata trisekcijo kota, je razvidno s slike.

4. Naloga: Kvadratni palindromi

Zapis *števila* je palindrom, *če* se *števke* v zapisu berejo enako naprej kot nazaj. To pomeni, da so v njegovem zapisu *števke* razporejene simetrično (prva *števka* je enaka zadnji, druga *števka* je enaka predzadnji itd). Lahko ga zapišemo kot: $a_1a_2a_3 ...|...a_3a_2a_1$.

Poglejmo povzetek k nalogi.

Kvadratni palindrom je število, *za katero velja, da drugo* število *s* števkami *v obratnem vrstnem redu nima vodilnih ničel. Poleg tega velja enako za njuna kvadrata; torej ima kvadrat prvega* števila števke *v obratnem vrstnem redu kot kvadrat drugega* števila. *V tej raziskovalni nalogi raziskujemo, kakšni so pogoji, da je zapis* števila *kvadratni palindrom. S pomočjo Microsoft Excela smo poiskali nekaj primerov kvadratnih palindromov in jih nato opazovali. Ugotovili smo, da jih sestavljajo samo* števke *0, 1, 2 in 3. V nadaljevanju dokažemo, da kvadratni palindrom ne more vsebovati nobene druge* števke *in da ne sme prihajati do prenosa enote pri kvadriranju* števila. To *dokažemo s pomočjo kongruenc in matematične indukcije. Iz tega zaključimo, da je v kvadratnem palindromu lahko največ ena* števka *enaka 3 in, da* števki *2 in 3 ne moreta nastopati skupaj. Ugotovili smo tudi, da* števka *3 ne sme biti na sredini zapisa* števila, *ki ga kvadriramo. Prav tako pokažemo ,da lahko enako obravnavamo tudi kvadratne palindrome, ki imajo različno* število števk; *torej ima eno* število *na koncu vsaj eno* števko *enako 0, vendar zanje ne velja ugotovitev, da* števka *3 ni na srednjem mestu.*

Delo nam olajša bolj nabrušeno orodje. Program, ki naredi vse potrebno, zapisan v jeziku Python.

```
#!/usr/bin/env python3

def inv_order(n):
    # Pretvori število v niz znakov (števk)
    # obrne vrstni red v nizu in ga pretvori nazaj v število
    return int(str(n)[::-1])

def qpalin(n):
m = inv_order(n)        # Števke v obratnem vrstnem redu
nn = n**2               # Kvadriramo števili m in n
mm = m**2
mm = inv_order(mm)      # V številu mm obrnemo vrstni red števk
return nn - mm          # Če sta obe števili enaki
                        # je število n kvadratni palindrom

if __name__ == '__main__':
    n = int(input('n --> '))
    print(qpalin(n))
```