Dokaz v srednješolski matematiki

Dr. Brigita Ferčec
Fakulteta za Energetiko Univerze v Mariboru in Center za uporabno matematiko in teoretično fiziko Univerze v Mariboru in Fakulteta za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru

Dr. Matej Mencinger
Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo Univerze v Mariboru in Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana

Izvleček

V članku obravnavamo pomen dokaza v matematiki. Po kratkem zgodovinsko-teoretičnem uvodu se dotaknemo pomena dokaza v srednji šoli. Omenimo tudi Pitagorov izrek, ki velja za enega glavnih rezultatov v matematiki, in navedemo dva dokaza, ki temeljita na geometrijski podlagi. Obravnavamo tudi glavne tehnike dokazovanja (ki so primerne za srednješolski nivo): dedukcija, dokaz s protislovjem, kontrapozicija, protiprimer in indukcija. Pri vsaki tehniki podamo tudi (srednješolskemu nivoju) ustrezne primere. Omenimo tudi eno najslavnejših domnev – Collatzovo domnevo, katere tezo lahko brez težav razumejo celo osnovnošolci, dokaz (ali protiprimer) pa še vedno čakamo.

Ključne besede: dokaz, srednja šola, matematična indukcija, dedukcija, protislovje, proti-primer, Collatzova domneva

Mathematical Proof in Upper Secondary School

Abstract

This article covers the significance of proof in mathematics. It starts with a brief historical-theoretical background before highlighting the role of proof in the context of upper secondary school mathematics. We also refer to the Pythagorean theorem, one of the most important mathematical concepts, and provide two proofs based on geometric foundations. Further, we examine the main proof techniques at the secondary-school level: deduction, proof by contradiction, counterexample, contrapositive and induction, along with suitable examples. We also look at one of the most famous conjectures, i.e., the Collatz conjecture, whose thesis is simple enough for primary school students to understand but whose proof (or counterexample) has not yet been provided.

Keywords: proof, upper secondary school, mathematical induction, deduction, contradiction, counterexample, Collatz conjecture.

1 Uvod

Začetniki dokazovanja matematičnih trditev v smislu sodobne matematike so bili starogrški matematiki, ki so v aritmetiki in geometriji odkrili, da lahko trditvam dokažemo »pravilnost« ali »točnost«, oziroma kar danes v logiki imenujemo resničnost trditve/izjave (Franklin, Daoud, 2011).

V slovenskih gimnazijah v učnem načrtu za matematiko (Žakelj, 2008) dokaz nastopa na več mestih. V osnovi lahko govorimo o dveh nivojih dokazovanja: pasivnem (ko dijak »prejme« dokaz in ga je potencialno sposoben ponoviti/reinterpretirati) in aktivnem (ko dijak pozna neko metodo dokazovanja in jo je sposoben aktivno uporabiti v novih situacijah). Slednje je v gimnaziji večinoma omejeno (Žakelj, 2008) na popolno matematično indukcijo, medtem ko pasivno dokazovanje nastopa na primer pri vsakem izpeljevanju (formul pri danih predpostavkah).

Dokazovanje spada v višji nivo znanja. Z dokazovanjem so povezana procesna znanja, kot je abstraktno razmišljanje, formalno sklepanje, intuitivne izpeljave ter kritično razmišljanje o potrebnih in zadostnih pogojih. V učnem načrtu (Žakelj, 2008) je dokazovanje obravnavano kot posebno znanje in je delno vključeno tudi v izbirne vsebine (npr. polarni zapis kompleksnega števila, analitična geometrija v prostoru, vektorski produkt). Vsebine (in cilji), ki so potencialno povezane s pridobivanjem takšnih procesnih znanj, so (glej (Žakelj, 2008)) predvsem osnove logike izjave (zapis izjave in določevanje logične vrednosti izjave, ugotavljanje enakovrednosti dveh izjav) in številske množice – naravna števila (induktivno sklepajo, posplošujejo, posplošitev dokažejo ali ovržejo in dokazujejo z matematično indukcijo (Žakelj, 2008, str. 11). Primeri nalog, kjer lahko uporabimo induktivni dokaz, so povezani s številskimi množicami, algebrskimi izrazi, (ne)enačbami ter zaporedji in vrstami.

Najpomembnejše (dokazano resnične) trditve v matematiki imenujemo *izreki*, malo manj pomembne imenujemo preprosto *trditve*, tiste, ki same po sebi niso tako zanimive, so pa pomembne kot del dokaza nekega (širšega) izreka, pa imenujemo *leme*. Za razliko od aksiomov, ki so vnaprej dogovorjena dejstva oziroma resnice, moramo veljavnost (resničnost) vsake trditve preveriti z dokazom.

Izpeljave formul (pri danih predpostavkah) imajo seveda pomen izreka oziroma trditve. Dokazovanje veljavnosti formul je v gimnazijskem programu zelo pogosto in je namenjeno prej omenjenim višjim/procesnim ciljem, ki so povezani s sposobnostjo dokazovanja. Omenimo samo nekaj primerov izpeljav, ki so res nujne: kot med premicama v ravnini, vsota geometrijske vrste in vsota poljubnega števila členov aritmetičnega zaporedja, dokazi nekaterih limit in osnovni odvodi z limitami ipd.

Pri dokaz(ovanj)u ločimo dva vzporedna vidika: miselni proces in oblikovanje dokaza. Rezultat dokazovanja je dokaz, rezultat miselnih procesov je razumevanje. Samo dokazovanje lahko poteka na več načinov: induktivno, deduktivno, s protislovjem, s kontrapozicijo in s protiprimerom (če ovržemo trditev o splošnosti neke izjave). Posamezne miselne sheme so povezane z organizacijo miselnih procesov (torej z različnimi strategijami pri oblikovanju dokaza). V (Harel, 2008) avtor omenja dokazne sheme (indukcija, dedukcija, dokaz s protislovjem, dokaz s protiprimerom), ki si jih lahko predstavljamo kot »protokole« razmišljanja in poti do razumevanja, ki se jih lahko priučimo (procesni cilj), medtem ko dokazane izreke (pa tudi sam dokaz) uvrsti v kategorijo institucionalne matematike (zbirka struktur, aksiomov, trditev, dokazov). Težimo torej k temu, da dijaki usvojijo prej omenjene protokole razmišljanja z namenom, da sledijo (institucionalnemu) dokazovanju učitelja.

Alternativno lahko dokazovanje v grobem razdelimo v tri skupine (Harel, Sowder, 1998): avtoritativno (učitelj ali knjiga ponudi dokaz), empirično (na osnovi primerov meritev količin, konkretnih števil vizualizacij itd. induktivno sklepamo/posplošujemo) in deduktivno (zaporedno dokazovanje implikacije $A \Rightarrow B$ z razdelitvijo na več korakov: iz A sledi B_1, iz B_1 sledi B_2, …, iz B_n sledi B, pri čemer je pomembno razumevanje pomena »za vse« oziroma »ne obstajajo izjeme«).

Empirično razmišljanje je najbolj pogost način utemeljevanja, vendar nujno zahteva posplošitev. Proces posploševanja lahko (glej (Harel, 2008)) ločimo na rezultatsko in procesno posploševanje. Da so števila 1, 2, 4, 8, 16 … členi zaporedja s splošnim členom 2^n, lahko preverimo z računanjem (preverimo ujemanje členov za prvih pet vrednosti z dano formulo). V procesnem razmišljanju je treba uvideti, da vsak naslednji člen iz prejšnjega dobimo s podvajanjem (prejšnjega). Pri dokazovanju je lahko rezultatski način razmišljanja zgolj osnovna ideja (ki jo potem nadgradimo z matematično indukcijo). Procesno razmišljanje nas običajno pripelje do »pravega« dokaza.

Oba primera razmišljanja lahko ponazorimo na primeru.

Primer 1. Želimo dokazati, da je 2 zgornja meja zaporedja

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ \dots$$

Trditev v obliki implikacije je: za vsako naravno število n je $a_n < 2$. Kot rečeno, lahko rezultatsko razmišljanje (izračun približnih vrednosti za prvih nekaj členov) služi kot osnovni preizkus potrebnosti pogoja (če bi za nek $n \in \mathbb{N}$ veljalo $a_n \geq 2$ smo našli protiprimer in implikacija ni veljavna). Približne decimalne vrednosti prvih nekaj členov zaporedja so 1. 4142, 1. 8478, 1. 9616, 1. 9904 ... Zavedati se moramo, da to ne more biti dokaz zgornje trditve. Po drugi strani pa vemo, da ravno na osnovi takega rezultatskega raziskovanja postavimo domnevo, da zgornja trditev velja za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za dokaz trditve je potrebno *procesno razmišljanje*: za $n = 1$ je očitno $a_1 = \sqrt{2} < 2$, saj po kvadriranju sledi $2 < 4$. Za $n = 2$ po kvadriranju neenačbe $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$ sledi $2+\sqrt{2} < 4$ oziroma $\sqrt{2} < 2$ (kar smo že dokazali). Za $n = 3$ po kvadriranju neenačbe $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < 2$ sledi $2 + a_2 < 4$ oziroma $a_2 < 2$, kar smo že dokazali. Takšno procesno razmišljanje nas privede do induktivnega dokaza. Induktivni korak zahteva zgolj razmislek, da je $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je $a_1 = \sqrt{2}$, je izraz $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ dobro definiran.

Najpogosteje uporabljen izrek v celotni učni vertikali (ki povezuje matematiko s fiziko, mehaniko, geodezijo, statiko, elektrotehniko) je zagotovo Pitagorov izrek. Dokaj preprosta premisa (ki je pogosto vsaj s strani učencev zamolčana oziroma pozabljena) in zaključek sta zelo razumljiva in zato obravnavana že v osnovni šoli. Kljub pozabljanju se bi verjetno največ bivših sošolcev na 20 ali celo 40 obletnici zaključka OŠ spomnilo Pitagorovega izreka (vsaj obrazca $a^2 + b^2 = c^2$). V srednji šoli pri trigonometriji izrek nadgradimo s sinusnim in kosinusnim izrekom. Pitagorov izrek ima zagotovo še en rekord, namreč številnost različnih dokazov (nekateri se razlikujejo zgolj v niansah, pa vendar). V (Dunham, 1994) najdemo kar nekaj dokazov izreka:

Izrek (Pitagora). (V evklidski geometriji) za vsak pravokotni trikotnik s katetama a in b ter hipotenuzo c velja $a^2 + b^2 = c^2$. (Kot vemo, velja tudi obrat: če za stranice trikotnika velja $a^2 + b^2 = c^2$, je trikotnik pravokoten.)

Zaključek oziroma sklep izreka so (vsaj 1000 let pred Pitagoro) uporabljali že stari Babilonci. Pitagora in pitagorejci (cca. 560-480 p. n. št.) so ga uporabljali, Evklid (cca. 300 let p. n. št.) ga je dokazal na dva načina (Ratner, 2009). Izrek so (za vrednosti $a = 3$, $b = 4$ in $c = 5$) uporabljali že stari egipčani (cca. 4000 p. n. št.). Pred Pitagoro so ga zagotovo poznali tudi stari Kitajci (Cullen, 1996). Pitagorov izrek je najbolj znana trditev v matematiki. Enačba $a^2 + b^2 = c^2$ pa velja za četrto najlepšo enačbo nasploh (Ratner, 2009). Einstein ga je dokazal pri 12 letih. Zato si Pitagorov izrek zagotovo zasluži predstavitev vsaj dveh dokazov. Najpreprostejši dokazi temeljijo na geometrijski predstavi. Na sliki 1 je prikazan miselni proces, ki vodi do dveh preprostih dokazov trditve Pitagorovega izreka.

Dokaz 1. Narišimo kvadrat s stranico $a + b$. Vodoravni in navpični stranici razdelimo na odseka a in b, kot kaže slika 1 (levo). Ostra kota α in β sta določena z razmerjem odsekov a in b in s pravim kotom γ. (Ker smo začeli s kvadratom s stranico $a + b$, je kot γ pravi: 90°. Zato so svetlo-sivi trikotniki pravokotni trikotniki s hipotenuzo c in katetama a in b.)

Ker smo v evklidski ravnini, je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Kot $\alpha + \beta + \varphi$ je iztegnjen in zato je tudi kot φ pravi. Torej je modri štirikotnik kvadrat. Ploščinski argument pove, da je

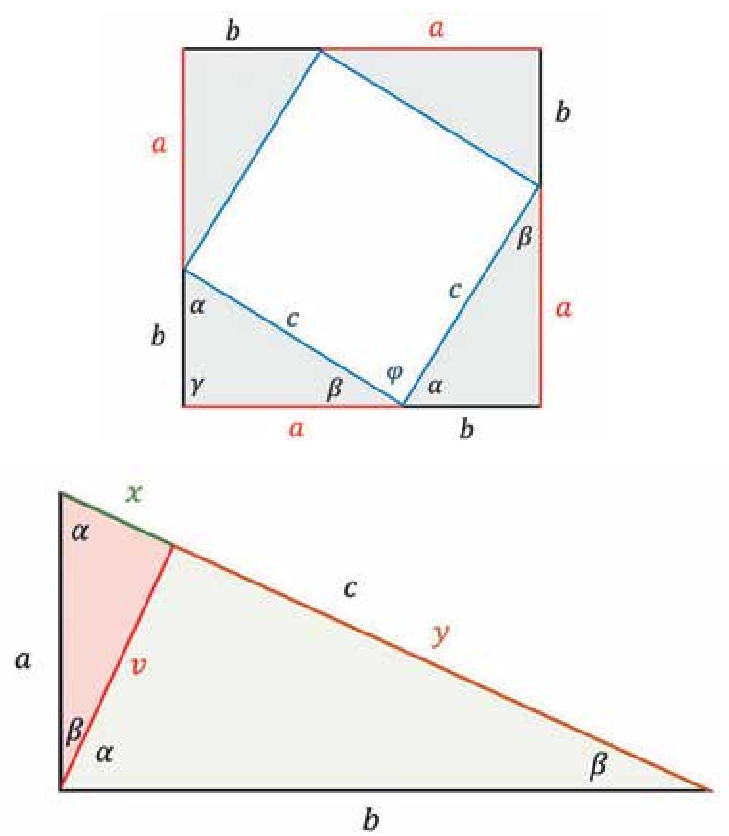
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ in

$(a+b)^2 = 4 \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) + c^2$.

Iz obeh enačb sledi

$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) + c^2 \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

kar smo želeli dokazati. ■



Slika 1: Dve preprosti geometrijski ideji za dokaz Pitagorovega izreka. Zgoraj: miselna shema na osnovi večjega in manjšega kvadrata. Spodaj: skica Einsteinovega dokaza (pri 12 letih).

Dokaz 2. Einsteinov dokaz Pitagorovega izreka, ki ga je napisal pri 12 letih, temelji na ploščinah znotraj osnovnega trikotnika s stranicami *a*, *b* in *c*: oranžni pravokotni trikotnik ima hipotenuzo *a*, zeleni pravokotni trikotnik ima hipotenuzo *b*, skupni pravokotni trikotnik ima hipotenuzo *c* (Slika 1, desno). Za vsakega od teh treh pravokotnih trikotnikov velja, da je ploščina številsko enaka produktu kvadrata njegove hipotenuze in faktorja

$f = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{2}$. Ko razmislimo, da je za podobne trikotnike faktor f enak, iz enačbe ploščin $a^2 \cdot f + b^2 \cdot f = c^2 \cdot f$ po krajšanju s skupnim faktorjem f sledi $a^2 + b^2 = c^2$. ■

Med bolj znanimi dokazi Pitagorovega izreka je še Leonardov dokaz (najdete ga npr. v Mencinger, 2022) in dokaz ameriškega predsednika J. A. Garfielda (Dunham, 1994). Veliko zanimivih geometrijskih dokazov, ki so primerni za dokazovanje v srednji šoli, najdete v (Nelsen, 1993; 2000; 2016).

2 Sheme dokazovanja v srednji šoli

Zgoraj smo omenjali več načinov dokazovanja in z njimi povezane miselne procese. V tem poglavju na kratko opišemo glavne načine/sheme dokazovanja:

a) dedukcija;
b) dokaz s protislovjem;
c) kontrapozicija;
d) dokaz s protiprimerom (ko ovržemo trditev o splošnosti);
e) popolna matematična indukcija.

Poleg omenjenih načinov obstajajo še drugi, kot so npr. konstruktivni dokaz, verjetnostni dokaz in kombinatorični dokaz (Weisstein, 2022). Pomembno je ločiti med (enostavno) izjavo s kvantifikatorji in pa sestavljeno izjavo (kot npr. implikacijo $A \Rightarrow B$). Opozorimo, da načini a)-c) opisujejo dokazovanje implikacije $A \Rightarrow B$ medtem ko d) in e) opisujeta izjavo s kvantifikatorji, kjer govorimo o izjavi, da neka trditev $T(n)$ velja za vsak n. V primeru d) izrek »$T(n)$ velja za vsak n« ovržemo, v primeru e) pa izrek »$T(n)$ velja za vsak n« dokažemo na osnovi baze indukcije ter induktivnega koraka. Seveda mora biti v primeru e) $n \in \mathbb{N}$, medtem ko v primeru d) to ni nujno. V nadaljevanju temeljiteje predstavljamo dokazne sheme za vseh pet primerov.

a) Dedukcija

Izjavo $A \Rightarrow B$ lahko dokažemo povsem deduktivno (direktno): torej najdemo zaporedje implikacij, ki dokazujejo, da iz A sledi B. Logična shema dedukcije je

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \ldots, B_{n-1} \Rightarrow B_n, B_n \Rightarrow B)$.

Ponazorimo to z dvema primeroma.

Primer 2. Dokažimo, da za vsako naravno število n velja: $n^2 - n$ je sodo število.

Sklepamo tako, da najprej število $n^2 - n$ zapišemo kot
$n^2 - n = n(n-1)$.

Ker sta to dve zaporedni naravni števili, lahko brez izgube za splošnost (b. i. z. s.) pišemo
$n = 2k + 1$ in $n - 1 = 2k$ za neko naravno število k. Potem je
$n^2 - n = n(n-1) = (2k+1)2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$,
kar je očitno sodo število, saj je deljivo z 2.

Primer 3. Dokažimo, da je izraz $x^2 - 6x + 16$ pozitiven za vsako realno število x.

Izraz $x^2 - 6x + 16$ lahko zapišemo kot
$x^2 - 6x + 16 = (x-3)^2 + 7$.

Število $(x-3)^2$ je pozitivno za vsak x saj je kvadrat števila. Če dodamo 7, število ostane pozitivno.

b) Dokaz s protislovjem

Dokaz s protislovjem je za razliko od dedukcijskega dokaza indirektna metoda dokazovanja: poskušamo zaobiti problem in najti pameten argument, ki ustvari logično protislovje. Izjavo A lahko dokažemo s protislovjem (kontradikcijo) tako, da ob premisi privzamemo $\neg A$ in dokažemo, da iz tega sledi protislovje, ki običajno nastopa v obliki $B \wedge \neg B$ (za neko drugo izjavo B). Če protislovje označimo s P to pomeni pomeni $\neg A \Rightarrow P$, kar pomeni, da je $\neg A$ neresnična izjava. Trditev A je lahko bodisi resnična bodisi neresnična (ne more biti hkrati resnična in neresnična, kar je obravnaval že Aristotel (Zalta, 2019)). Logična shema (tavtologija) za tak dokaz je

$(\neg A \Rightarrow P) \Rightarrow A,$

kar pomeni: če dokažemo pravilnost trditve, da iz premise in negacije A sledi protislovje, smo s tem dokazali pravilnost izjave A.

Primer 4. Dokaži, da ne obstaja celo število, ki bi bilo sodo in liho hkrati.

Dokaz. Dokaz te (enostavne izjave) s protislovjem poteka takole. Poglejmo negacijo izjave, torej izjavo, da obstajajo cela števila n, k in l, da velja $n = 2k \wedge n = 2l + 1$. Izračunamo $k = \frac{n}{2}$ in $l = \frac{n-1}{2}$. Iz tega sledi, da je $k - l = \frac{1}{2}$, kar je protislovje, saj je množica celih števil zaprta za odštevanje.

Primer 5. Dokaži, da za vsa naravna števila n velja: če je $n^3 + 5$ liho, je n sodo število.

Dokaz. Naj bo n poljubno naravno število in predpostavimo, da sta tako $n^3 + 5$ kot n lihi števili. V tem primeru obstajata takšni števili k in l, da je $n^3 + 5 = 2k + 1$ in $n = 2l + 1$. Torej velja:

$n^3 + 5 = 2k + 1$

$(2l + 1)^3 + 5 = 2k + 1$

$8l^3 + 12l^2 + 6l + 1 + 5 = 2k + 1$

$8l^3 + 12l^2 + 6l + 5 = 2k.$

Če zadnjo enakost delimo z 2, dobimo

$k - 4l^3 - 6l^2 - 3l = \frac{5}{2},$

kar je protislovje, saj je $k - 4l^3 - 6l^2 - 3l$ celo število. Torej mora veljati, da v primeru, ko je $n^3 + 5$ liho število, n ne more biti liho število oz. je lahko samo sodo število. ■

Pogosta alternativna oblika dokazovanja s protislovjem je dokaz, da iz $\neg A \Rightarrow A$, kar je očitno protislovje (razen, če je izjava $\neg A$ neresnična, kar pomeni, da mora biti A resnična). Logična shema za ta tip dokaza je

$A \Rightarrow (A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg(\neg A) \Rightarrow A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A)$

(tu smo uporabili tavtologijo $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$).

Primer 6. Najbolj klasični primer dokaza trditve s protislovjem, ki se obdela tudi v gimnaziji, je dokaz izjave $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Privzamemo nasprotno, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Torej je mogoče $\sqrt{2}$ zapisati v obliki okrajšanega ulomka, t. j. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, kjer je $D(a, b) = 1$. Po kvadriranju in množenju z b^2 dobimo $2b^2 = a^2$. Vidimo, da je a^2 sodo število in posledično je tudi a sodo število, torej oblike $a = 2m$, kjer je m naravno število. Tako velja $2b^2 = (2m)^2 = 4m^2$. Po deljenju z dva dobimo $b^2 = 2m^2$ od koder vidimo, da je tudi b^2 sodo število in posledično je b sodo število. Torej sta oba a in b deljiva z 2, kar nas privede do protislovja (s tem, da je ulomek $\frac{a}{b}$ okrajšan). To pa pomeni, da je resnična izjava $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (in ne njena negacija $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

c) Kontrapozicija

Dokaz s protislovjem ni edini način indirektnega dokazovanja – obstaja še dokaz s kontrapozicijo, ki je prav tako indirektna metoda dokazovanja in ki poteka po naslednji shemi: namesto implikacije $A \Rightarrow B$ dokažemo implikacijo $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Primer 7. Dokaži, da za $a, b, n \in \mathbb{Z}$ velja: če $n \nmid ab$, potem $n \nmid a$ in $n \nmid b$.

Najprej moramo najti negacijo izjave "$n \nmid a$ in $n \nmid b$". Tukaj je potrebna previdnost, kajti negacija je

"$n|a$ **ali** $n|b$"

(Uporabili smo DeMorganov zakon). Recimo, da n deli a. Potem je $a = nc$ za nek $c \in \mathbb{Z}$ in $ab = ncb = n(cb)$. Torej $n|ab$. Podobno, če n deli b, je $b = nd$ za nek $d \in \mathbb{Z}$ in $ab = and = n(ad)$. Zato $n|ab$.

Primer 8. Dokaži, da za $x \in \mathbb{Z}$ velja: če je $x^2 - 6x + 5$ sodo število, potem je x liho število.

Dokažimo s kontrapozicijo: predpostavimo, da je x sodo število in dokažimo, da je potem $x^2 - 6x + 5$ liho število. Če je x sodo število, je oblike $x = 2k$ za nek $k \in \mathbb{Z}$, od koder sledi

$x^2 - 6x + 5 = (2k)^2 - 6(2k) + 5 = 4k^2 - 12k + 5 = 2(2k^2 - 6k + 2) + 1.$

Vidimo, da je $x^2 - 6x + 5$ liho število.

d) Dokaz s protiprimerom

Če želimo ovreči, da je neka trditev tipa »za vsak element $m \in M$ je trditev $T(m)$« resnična, iščemo protiprimer. V jeziku logike to pomeni »obstaja (vsaj en) element (iz množice M), za katerega T ni resnična«.

Primer 9. Naj bo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva in monotono naraščajoča funkcija (torej iz $x > y$ sledi $f(x) > f(y)$). Trditev, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f'(x) > 0$, ne velja. Protiprimer je funkcija $f(x) = x^3$, za katero v točki $x = 0$ sklep ne velja, saj je $f'(0) = 0$.

Primer 10. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja, da je $\sqrt{2+n}$ iracionalno število.

Trditev ni resnična, saj lahko najdemo protiprimer. Če izberemo npr. $n = 7$, vidimo, da trditev »$\sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$ je iracionalno število« ni resnična.

Primer 11. Preveri, ali velja trditev: če je p praštevilo, je tudi $2^p - 1$ praštevilo.

Izračunamo vrednost izraza za prvih nekaj praštevil in rezultate zapišemo v spodnji tabeli.

p	2	3	5	7	11
$2^p - 1$	3	7	31	127	2047

Števila 3, 7, 31 in 127 so praštevila, medtem ko $2047 = 23 \cdot 89$ ni praštevilo. Torej smo našli protiprimer, zato zgornja trditev ne velja.

e) Matematična indukcija

Matematična indukcija je močna in elegantna tehnika za dokazovanje določenih vrst matematičnih trditev: splošne izjave, ki trdijo, da je nekaj res za vsa naravna števila ali za vsa naravna števila od nekega naravnega števila naprej. Z naslednjim primerom se je že kot mlad učenec ukvarjal znani matematik C. F. Gauss (1777–1855).

Primer 12. Dokaži, da je vsota prvih n naravnih števil enaka $\frac{n(n+1)}{2}$.

Preverimo trditev za prva štiri naravna števila in rezultate zapišimo v tabelo:

n	1	2	3	4
Vsota prvih n naravnih števil	1	$1 + 2 = 3$	$1 + 2 + 3 = 6$	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$	$\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$	$\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$	$\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$

Morda je to precej prepričljivo in lahko se vprašamo, ali je potreben še kakšen dokaz. Če trditev velja za vsa števila, ki smo jih preizkusili, ali lahko sklepamo, da je resnična za vse vrednosti n? Spomnimo se primera 11, kjer je trditev veljala za prva štiri praštevila, pri petem praštevilu pa se je izkazalo, da je splošna trditev napačna. Vrnimo se k primeru 12 in se vprašajmo, koliko naravnih števil bi morali preveriti, da bi lahko z gotovostjo trdili, da je trditev pravilna. Recimo, da nam računalnik po vrsti po naravnih številih računa vsote. Ne glede na to, za koliko naravnih števil n smo ugotovili, da je trditev pravilna, ne bomo prepričani, ali obstaja večje naravno število n za katero je trditev napačna. Ravno to pa narekuje potrebo po splošnem dokazu, ki zajema vse vrednosti n.

Eden od načinov razmišljanja o matematični indukciji je, da ne dokažemo ene trditve za splošen n ampak celo zaporedje trditev za posamezna naravna števila n. Bistvo matematične indukcije je, da dokažemo prvo trditev zaporedja, nato pa, če je katerakoli trditev v zaporedju resnična, je tudi njena naslednja trditev resnična. Iz tega sledi, da so vse trditve pravilne. Zapišimo ta dva koraka v formalnem navodilu.

Baza indukcije (začetni korak). Dokaži, da je trditev resnična za $n = 1$. (Ali, če dokazujemo trditev za $n \geq a$, dokažemo njeno resničnost za $n = a$.)

Indukcijski korak. Dokaži, da če je trditev resnična za $n = k$, potem je resnična tudi $n = k + 1$. Ta korak predstavlja zahtevnejši del indukcije, zato ga razdelimo na več manjših korakov.

Korak 1: Zapišemo trditev za $n = k$ in predpostavimo, da ta trditev velja. Zato jo ponavadi imenujemo *indukcijska predpostavka*.

Korak 2: Zapišemo trditev za $n = k + 1$, t. j. trditev, ki jo želimo dokazati.

Korak 3: Dokažemo korak 2 ob indukcijski predpostavki iz koraka 1. Za ta korak ni splošnega recepta, saj se razlikuje za različne primere in je odvisen od matematičnega konteksta. Uporabiti je treba iznajdljivost in znanje matematike.

Ko enkrat izvedemo oba koraka (baza indukcije in indukcijski korak), lahko takoj zaključimo, da je trditev resnična za vsak $n \geq 1$ (ali za vsak $n \geq a$, če smo začeli z $n = a$). Na celotni postopek lahko gledamo kot na nek »avtomatski stroj dokazovanja izjav«. Dokažemo trditev za $n = 1$. Po indukcijskem koraku, ker trditev velja za $n = 1$, velja tudi za $n = 2$. Nato ponovno po indukcijskem koraku, ker trditev velja za $n = 2$, velja tudi za $n = 3$ itd. Ker smo dokazali indukcijski korak, se ta proces nikoli ne zaključi. Ta »avtomatski stroj« nikoli ne preneha delati ne glede na to, kako veliko je število n.

Recimo, da obstaja število K, za katerega je trditev neresnična. V tem primeru, ko pridemo do števila $K - 1$, imamo situacijo: trditev je resnična za $n = K - 1$ ampak napačna za $n = K$. To nasprotuje induktivnemu koraku in zato se to ne more zgoditi, kar pomeni, da je trditev resnična za vsa naravna števila.

Matematično indukcijo lahko primerjamo s procesom zanke v računalniškem programiranju, kjer začnemo tako, da določimo začetno vrednost, kar je pri indukciji analogno bazi indukcije. Nato pa definiramo zanko, ki s pomočjo prejšnjih vrednosti spremenljivk računa nove vrednosti, kar je analogno indukcijskemu koraku v matematični indukciji. V računalniškem programu je potrebna še ena stvar: nastaviti je treba pogoj »stop«, sicer bo program deloval večno. To pa nima analogije v našem procesu – naš teoretični stroj bo deloval večno in zato smo lahko prepričani, da je naš rezultat resničen.

Poglejmo, kako matematična indukcija deluje na konkretnem primeru. Dokažimo trditev iz primera 11, torej, da je $1 + 2 + 3 + \cdots = \frac{n(n+1)}{2}$.

Baza indukcije. Če je $n = 1$, je vsota 1. Po drugi strani pa je za $n = 1$ vrednost izraza $\frac{n(n+1)}{2}$ prav tako enaka 1. Torej je trditev resnična za $n = 1$.

Indukcijski korak.

Korak 1: Zapišemo indukcijsko predpostavko:
$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2} k(k + 1)$ (Lastnost za $n = k$).

Korak 2: Zapišemo indukcijski sklep

$$1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]=$$
$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2).$$

Korak 3: Dokažemo, da iz indukcijske predpostavke sledi indukcijski sklep (t. j. desno stran enačbe v koraku 2 pridobimo s pomočjo leve strani enačbe v koraku 1 z dodajanjem člena $k+1$:

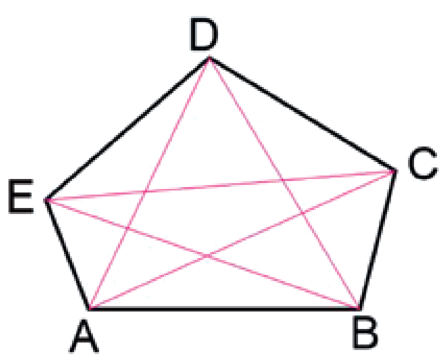
$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+(k+1) &= 1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\ &= \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\ &= (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2),\end{aligned}$$

kar zaključuje induktivni korak. Zato trditev velja za vse $n \in \mathbb{N}$.

Na koncu si poglejmo še geometrijski primer, kjer trditev velja od $n = 4$. Zato se baza indukcije začne pri 4.

Primer 13. Za vsak $n \geq 4$ je število diagonal v konveksnem n-kotniku enako $\frac{n(n-3)}{2}$.

n-kotnik je večkotnik, ki ima n oglišč. n-kotnik je *konveksen*, če za vsako njegovo nosilko stranice velja, da preostala oglišča ležijo na isti polravnini te nosilke. V konveksnem n-kotniku so diagonale vedno znotraj lika. Slika 2 prikazuje konveksni petkotnik z diagonalami.



Slika 2: Konveksni petkotnik.

Sedaj s pomočjo indukcije pokažimo, da trditev v primeru 12 velja za vsak $n \geq 4$.

Baza indukcije. Če je $n = 4$, je lik štirikotnik, za katerega vemo, da ima dve diagonali. Prav tako je za $n = 4$ vrednost izraza $\frac{n(n-3)}{2}$ enaka 2. Torej je trditev resnična za $n = 4$.

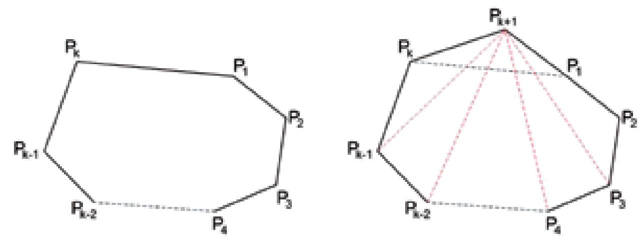
Indukcijski korak.

Korak 1: Indukcijska predpostavka: trditev velja za $n = k$. Število diagonal v konveksnem k-kotniku je enako $\frac{k(k-3)}{2}$.

Korak 2: Indukcijski sklep: trditev velja za $n = k + 1$. Število diagonal v konveksnem $(k + 1)$-kotniku je enako

$$\frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Korak 3: Dokažemo, da iz indukcijske predpostavke sledi indukcijski sklep. Zato konveksnemu -kotniku dodamo novo oglišče, da dobimo konveksni $(k + 1)$-kotnik (pazimo, da nastali lik ostane konveksen). Nato pogledamo, koliko novih diagonal s tem pridobimo (glej sliko 3).



Slika 3: Konveksni k-kotnik (levo) in konveksni $(k + 1)$-kotnik (desno).

Ko dodamo še eno oglišče k večkotniku s k oglišči, vse diagonale, ki so bile že v prejšnjem k-kotniku, ostanejo tudi v novem $(k+1)$-kotniku in teh je po indukcijski predpostavki $\frac{k(k-3)}{2}$. Dodatno nastane še $k - 2$ diagonal, ki jih narišemo iz oglišča P_{k+1} do drugih nesosednjih oglišč (glej sliko 3 (desno), kjer so te diagonale narisane z rdečo barvo). Ena dodatna diagonala pa nastane iz stranice, ki je v k-kotniku povezovala oglišči P_1 in P_k. Tako dobimo

$$\frac{k(k-3)}{2}+(k-2)+1=\frac{k(k-3)+2k-4+2}{2}=$$
$$=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

diagonal (kar potrjuje, da iz indukcijske predpostavke sledi indukcijski sklep). ■

Nazadnje obravnavajmo primer, ki je zanimiv predvsem zaradi enostavnosti trditve. Kljub temu pa matematiki (še) niso postregli z dokazom (ali ovrgli veljavnost trditve s protiprimerom), kar pomeni, da ima trditev status *domneve* (in ne izreka). Domneva se imenuje po nemškem matematiku Lotharju Collatzu, druga imena so tudi »3x + 1 domneva«, *Ulamova domneva*, *Kakutanijev problem*, *Thwaitesov problem*, *Hassejev algoritem* in *sirakuški problem*. Collatzova domneva je zanimiva , ker je njena trditev tako preprosta, da jo lahko razume učenec v osnovni šoli, pa vendar je v 85-ih letih od njene formulacije niso uspeli niti dokazati, niti ovreči.

Domneva (Collatz, 1937). Collatzova funkcija $C(n)$ naravnemu številu $n \in \mathbb{N}$ priredi število $\frac{n}{2}$ če je število n sodo, oziroma $3x + 1$, če je število n liho. Collatzova domneva pravi, da za vsako naravno število n zaporedno izračunavanje Collatzove funkcije na nekem koraku privede do števila 1.

Opomba. Če zaporedno iteracijo $\underbrace{C(C(\cdots(C(n))))}_{k-krat}$ označimo s $C^k(n)$, lahko zgornjo domnevo zapišemo takole: za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $C^k(n) = 1$, vendar ta formulacija ni primerna za osnovno šolo.

Omenimo, da poskusi, da bi domnevo ovrgli segajo v neverjetne višave. Največje število doslej, ki so ga testirali kot potencialni proti-primer (Ren, 2019), je število $n = 2^{100000} - 1$. Po neverjetnih k = 1344926 iteracijah sledi $C^k(n) = 1$; od tega je bilo treba 481603-krat uporabiti funkcijo $n \mapsto 3n + 1$ in 863323-krat deljenje z 2. Omenimo še, da so raziskave na področju Collatzove domneve številne in zelo aktualne (Ren, 2019). Problem naravno spada v teorijo (diskretnih) dinamičnih sistemov (iteracije). Bistvo težavnosti problema seveda ne tiči v sodih številih, ki jih delimo z 2, ampak v lihih številih, ki jih množimo s tri (in prištejemo ena). Zato je indukcijski sklep težko izpeljati.

Za dovolj majhne množice $\mathbb{N}_m = \{1, 2, \dots, m\}$ niti v osnovni šoli, še manj pa v srednji šoli ni težko dokazati veljavnost trditve, »za vsak $n \in \mathbb{N}_m$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $C^k(n) = 1$«.

Primer 14. Za $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ je trditev »za vsak $n \in \mathbb{N}_4$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $C^k(n) = 1$« resnična.

Za $n = 1$ izračunamo: $C(1) = 4$, $C(4) = 2$in $C(2) = 1$, kar pomeni $C^3(1) = 1$.

Za $n = 2$ izračunamo: $C(2) = 1$.

Za $n = 3$ izračunamo: $C(3) = 10$, $C(10) = 5$, $C(5) = 16$, $C(16) = 8$, $C(8) = 4$, $C(4) = 2$ in $C(2) = 1$ kar pomeni $C^7(3) = 1$

Za $n = 4$ izračunamo: $C(4) = 2$ in $C(2) = 1$ kar pomeni $C^2(4) = 1$.

Zgornji izračuni potrjujejo/dokazujejo, da ima za množico $\mathbb{N}_4$ Collatzova domneva status (dokazane) trditve.

Opomba. Zgornje zaporedne izračune lahko krajše zapišemo v obliki *orbite*, ki nastane z iteriranjem Collatzove funkcije C. Za $n = 3$ je pripadajoča orbita $3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$.

Primer 15. Za $\mathbb{N}_{10} = \{1, 2, \dots, 10\}$ je trditev »za vsak $n \in \mathbb{N}_{10}$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $C^k(n) = 1$ resnična.

Pripadajoče orbite so naslednje:

$1 \to 4 \to 2 \to 1$ (za $n = 1$), $2 \to 1$ (za $n = 2$),
$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ (za $n = 3$),
$4 \to 2 \to 1$ (za $n = 4$), $5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ (za $n = 5$),
$6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ (za $n = 6$),
$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ (za $n = 7$), $8 \to 4 \to 2 \to 1$ (za $n = 8$),
$9 \to 28 \to 14 \to 7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ (za $n = 9$) in $10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ (za $n = 10$).

Zgornji seznam pomeni, da je za množico $\mathbb{N}_{10}$ Collatzova domneva dokazana.

Opazimo, da so dolžine orbit enake

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	3	1	7	2	5	8	16	3	19	6

Iz zgornje tabele je razvidno, kaj je potencialna težava pri induktivnem dokazovanju za splošno naravno število. Gre za dolžino (najdaljšega) cikla: za $m = 10$ je dolžina maksimalnega cikla pri naravnem številu $n = 9$ enaka $k = 19$. Drugi problem je največje število, kamor nas iteracije »odnesejo«: v tem primeru število 52. To število je lahko bistveno večje, kot sam $m = 10$, ki nastopa v trditvi.

Zaključek

Na preprostih primerih smo spoznali različne tehnike dokazovanja, katerih poznavanje in razumevanje je (tako za učitelja kot za dijaka) zelo pomembno.

Dokaz mora pokazati, da je trditev (vedno: za vse pogoje premise oziroma za vse vrednosti iz dane množice) resnična, pri čemer lahko včasih navedemo vse možne primere in preverimo veljavnost za vsak konkreten primer, ni pa dovolj zgolj navesti končnega števila primerov, za katere trditev velja, če naj nekaj velja za vsa naravna števila. Navajanje primerov, za katere trditev velja, lahko zgolj privede do nepotrjene trditve, za katero se domneva, da je resnična in jo zato imenujemo *domneva*, če zanjo še ni bilo mogoče najti dokaza. Ena izmed najbolj znanih domnev je Collatzova domneva, ki smo jo navedli kot primer domneve, katere dikcija je zelo preprosta, dokaz pa je zelo zahteven.

Literatura

[1] Cullen, C. (1996). *Astronomy and mathematics in ancient China: the Zhou bi suanjing*. Cambridge University Press. https://avserzhen.files.wordpress.com/2016/06/astronomy-and-mathematic-in-ancient-china.pdf

[2] Dunham, W. (1994). The Mathematical Universe. New York: John Wiley & Sons.

[3] Franklin, J., Daoud, A. (2011). Proof in Mathematics, An Introduction, Quakers Hill Press. https://web.maths.unsw.edu.au/~jim/proofs.html

[4] Harel, G. (2008). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM Mathematics Education* 40, str.893–907.

[5] Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (ur.), *Research in collegiate mathematics education* 3, str. 234–283.

[6] Mencinger, M. (2022). Simetrijske grupe končnih vzorcev, Univerzitetna založba UM. https://dk.um.si/IzpisGradiva.php?id=81064

[7] Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words*. ZDA: The Mathematical Association of America.

[8] Nelsen, R. B. (2000). *Proofs Without Words II*. ZDA, The Mathematical Association of America.

[9] Nelsen, R. B. (2016). *Proofs Without Words III*. ZDA, The Mathematical Association of America.

[10] Ratner, B. (2009). Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it 1000 years before him. *J Target Meas Anal Mark* **17**, 229–242. https://doi.org/10.1057/jt.2009.16

[11] Ren, W. (2019). A New Approach on Proving Collatz Conjecture, Journal of Mathematics, Hindawi. https://www.hindawi.com/journals/jmath/2019/6129836/

[12] Weisstein, E. W. (2022). Constructive Proof, From MathWorld-A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/ConstructiveProof.html

[13] Zalta, E. N. (ur.) (2019). The Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://plato.stanford.edu/

[14] Žakelj, A. Učni načrt: Matematika, Gimnazja (Splošna, klasična in strokovna gimnazja), Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo 2008. http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2017/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf