

Naslov članka/Article:

Algoritmično mišljenje pri zaporedjih v vsakdanjem življenju

Algorithmic Thinking for Sequences in Everyday Life

Avtor/Author:

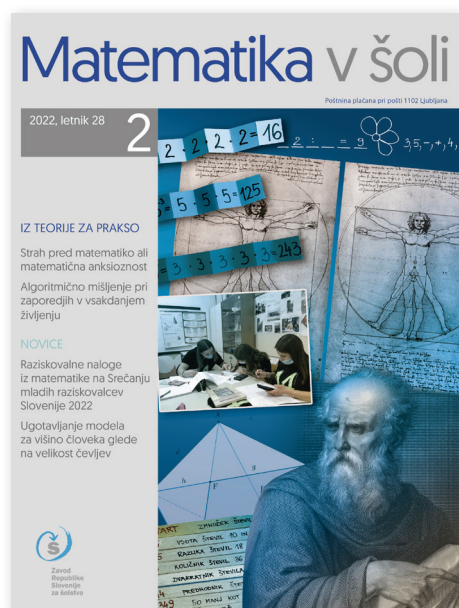
Dr. Andreja Drobnič Vidic

DOI:

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



Algoritmično mišljenje pri zaporedjih v vsakdanjem življenju

Dr. Andreja Drobnič Vidic
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Izveček

V prispevku predstavimo algoritmično mišljenje, ki je pogosto pri pouku matematike, četudi se vselej tega ne zavedamo. Izpostavimo ga pri treh uporabnih primerih iz vsebin o zaporedjih, ki si sledijo po težavnosti in vpetosti v okolje. Omenimo prednosti in slabosti izpostavljanja algoritmičnega mišljenja pri pouku matematike z uporabo digitalnih tehnologij pri reševanju uporabnih primerov.

Ključne besede: algoritmično mišljenje, algoritem, zaporedja

Algorithmic Thinking for Sequences in Everyday Life

Abstract

The paper introduces algorithmic thinking, a concept frequently present in mathematics lessons, although not always apparent. Three pertinent examples from the content on sequences are used to bring attention to it, and they follow each other in terms of difficulty and real-world relevance. We discuss the benefits and drawbacks of introducing algorithmic thinking in mathematics lessons employing digital technologies to solve practical problems.

Keywords: algorithmic thinking, algorithm, sequences.

1 Uvod

Na splošno je algoritem končno zaporedje ukazov, s katerimi, če jim sledimo v določenem vrstnem redu, opravimo nalogo (Fajfar, 2020). Algoritmično razmišljanje ali sposobnost definiranja jasnih korakov pri reševanju problema je ključno pri predmetih, kot so matematika in naravoslovje. »Algoritme pogosto uporabljamo, ne da bi se tega zavedali, zlasti v matematiki. Pri deljenju z večmestnimi števili uporabljamo algoritem, pri katerem iteriramo skozi številke deljenega števila. Za vsako številko deljenega števila moramo deliti, množiti in odštevati. Algoritmično razmišljanje omogoča, da razčlenimo probleme in konceptualiziramo rešitve v smislu diskretnih korakov v postopku« (Evropski socialni sklad: E-gradiva za predmet Informatika). Pri matematiki je algoritmično mišljenje prisotno, a pogosto nezavedno in zato je dobrodošlo, da učitelj algoritmično razmišljanje pri pouku tudi izpostavi. Mladi se tako seznani, kdaj lahko uporabimo digitalno tehnologijo, ki olajša izvajanje zamudnega algoritmičnega postopka, in spoznajo, kako lastno mišljenje lahko nadomesti tako zamudno delo.

2 Algoritmično mišljenje pri zaporedjih

Pri obravnavi zaporedij pogosto začnemo s konkretnim zaporedjem npr. 2, 6, 10, 14 ... in povemo, da je zaporedje natanko določeno s splošnim členom ali z rekurzivno formulo, kjer podamo

tudi prvi člen. Rekurzivna formula oziroma splošni člen natanko določata neko zaporedje in nam omogočata izračun nadaljnjih členov zaporedja.

Za določitev rekurzivne formule podanega konkretnega zaporedja moramo najti pravilo, kako iz predhodnega člena dobiti naslednji člen. Prehod iz 2 v 6: $2 \rightarrow 6$ je možno dobiti vsaj na dva načina: $2 + 4 = 6$ ali $2 \cdot 3 = 6$ (morda še kako drugače). Opazimo, da je prva operacija ustrezna tudi za pridobitev nadaljnjih podanih členov zaporedja: $6 + 4 = 10$, $10 + 4 = 14$, zato postavimo rekurzivno formulo:

$$a_{n+1} = a_n + 4, \quad a_1 = 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rekurzivna formula je algoritem, ponavljajoči se korak, ki omogoča iz danega člena zaporedja a_n določiti naslednji člen a_{n+1} . Tako iz začetnih štirih členov 2, 6, 10, 14 z njo določimo peti člen: $a_5 = a_4 + 4 = 18$ in nadaljujemo, če želimo dobiti nove člene zaporedja. Ponavljajoči se algoritem za računanje členov zaporedja bi lahko predstavili takole:

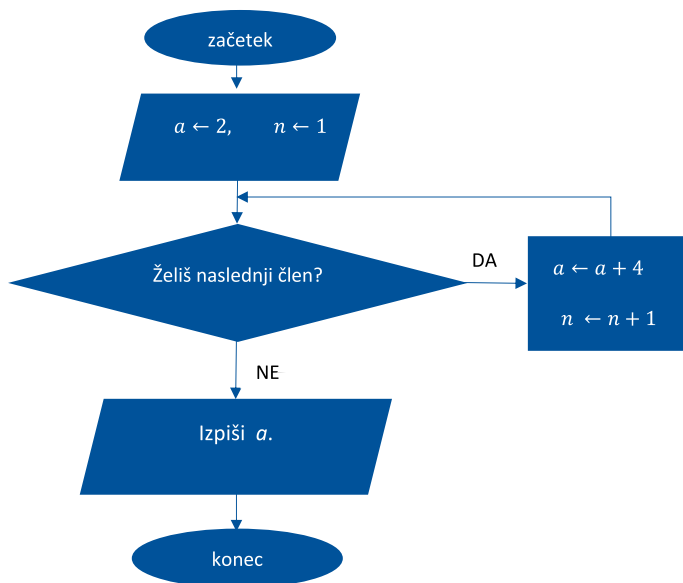
ZAČETEK: Začetni člen je $a_1 = 2$, kjer $n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, imenujemo indeks člena.

PONAVLJAJOČA SE FAZA: Želiš naslednji člen zaporedja?

DA $\rightarrow$ Pri danem indeksu n določi $a_{n+1} = a_n + 4$ in indeks povečaj za 1.

NE $\rightarrow$ Zaključi z algoritmom (izpiši zadnji dobljeni člen) – **KONEC**.

Algoritem lahko predstavimo z diagramom na sliki 1, ki je grafični način zapisovanja algoritmov, v katerem preprosto sledimo puščicam in izvajamo ukaze, ki so zapisani v grafičnih blokih (Fajfar, 2020, str. 9).



Slika 1: Algoritem predstavljen z diagramom.

Če iz rekurzivne formule uspemo določiti splošni člen, to omogoča določanje poljubnega člena zaporedja, ne da bi pred tem poznali predhodne člene. Če želimo določiti na primer 100. člen zaporedja, moramo z rekurzivno formulo po danem algoritmu izračunati vse člene do 100, kar je zamudno. Uporabimo rekurzivno formulo in povežemo enakosti: $a_2 = a_1 + 4$, $a_3 = a_2 + 4$, $a_4 = a_3 + 4$. Tako izpeljemo: $a_3 = a_2 + 4 = (a_1 + 4) + 4 = a_1 + 2 \cdot 4$, $a_4 = a_3 + 4 = (a_1 + 2 \cdot 4) + 4 = a_1 + 3 \cdot 4$ in iz ponavljajočega vzorca

$$a_1 = a_1 + 0 \cdot 4, \quad a_2 = a_1 + 1 \cdot 4, \quad a_3 = a_1 + 2 \cdot 4, \quad a_4 = a_1 + 3 \cdot 4$$

pridemo do predpisa za splošni člen (ki ga lahko potrdimo s popolno matematično indukcijo):

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 4, \quad \text{ozioroma} \quad a_n = 2 + (n - 1) \cdot 4, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Splošni člen nam omogoča, da neposredno izračunamo npr. 100. člen danega zaporedja: $a_{100} = 2 + 99 \cdot 4 = 398$.

V treh predstavljenih primerih se zrcalijo in nadgrajujejo osnovne faze najpreprostejšega iterativnega algoritma: ZACETEK – PONAVLJAJOČA SE FAZA – KONEC. Čeprav smo z algoritmom zapisali uporabo rekurzivne formule, nismo zasnovali tipičnega rekurzivnega algoritma, ki je krajši in bolj eleganten, a časovno in razumsko zahtevnejši (Štrukelj, 2014; Demšar, 2016). Poglejmo si tri avtentične uporabne primere iterativnega algoritma.

Primer 1: VRTINA.

V podjetju vrtajo vrtino. Prvi meter stane 5 evrov, vsak naslednji globinski meter vrtine pa je za četrtno dražji od predhodnega. Naj bo cena posameznega metra vrtine člen zaporedja. Določi splošni člen. Izračunaj, kolikšna je cena 50-metrške vrtine. Kaj pa, če bi vrtali v »neskončnost« (Drobnič Vidic, v pripravi)?

Rešitev: Prvi meter stane $a_1 = 5$ evrov, drugi meter stane $a_2 = 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 5 \cdot \frac{5}{4}$ evrov, tretji meter ima ceno $a_3 = a_2 + \frac{1}{4}a_2 = 5 \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot \frac{5}{4} = 5 \cdot (\frac{5}{4})^2$ evrov in tako dalje. Dobimo rekurzivno formulo:

$$a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n, \quad a_1 = 5, \quad n \in \mathbb{N}$$

in izpeljemo splošni člen iz zapisa

$$a_1 = 5 \cdot (\frac{5}{4})^0, \quad a_2 = 5 \cdot (\frac{5}{4})^1, \quad a_3 = 5 \cdot (\frac{5}{4})^2, \\ a_n = 5 \cdot (\frac{5}{4})^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Toliko eurov stane n -ti globinski meter vrtine. Splošni člen nam pove, da je zaporedje geometrijsko z začetnim členom $a_1 = 5$ in količnikom $q = \frac{5}{4}$. Algoritem za 50. člen bi znali zapisati:

ZACETEK: Začetni člen je $a_1 = 5$, kjer $n = 1$ imenujemo indeks člena.

PONAVLJAJOČA SE FAZA: Je $n < 50$? (Želiš naslednji člen?)

DA → Pri danem indeksu n določi $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{5}{4}$ in indeks povečaj za 1.

NE → Zaključi z algoritmom in izpiši a_{50} – KONEC.

Vsoto prvih 50 globinskih metrov izračunamo z uporabo formule za končno vsoto geometrijskega zaporedja, ki zopet nadomešča algoritem za postopno seštevanje členov. Postopoma seštevamo člene z rekurzivno formulo:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = s_1 + a_2, \quad s_3 = s_2 + a_3, \quad \dots, \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}.$$

Za ta algoritem bi zapisali:

ZACETEK: Začetni člen je $s_1 = a_1 = 5$, $n = 1$ in zaporedje $\{a_n\}$ je znano.

PONAVLJAJOČA SE FAZA: Je $n < 50$?

DA → Pri danem indeksu n določi $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ in indeks povečaj za 1.

NE → Zaključi z algoritmom in izpiši s_{50} – KONEC.

Za izvedbo tega algoritma bi morali imeti shranjene vse člene zaporedja do 50, kar zavzame veliko pomnilniškega prostora pri uporabi digitalne tehnologije, zato oba algoritma izvedemo hkrati, diagram zanj pa je na sliki 2.

ZACETEK: Začetni člen je $a_1 = 5$ s prvo vsoto $s_1 = a_1 = 5$ pri indeksu $n = 1$.

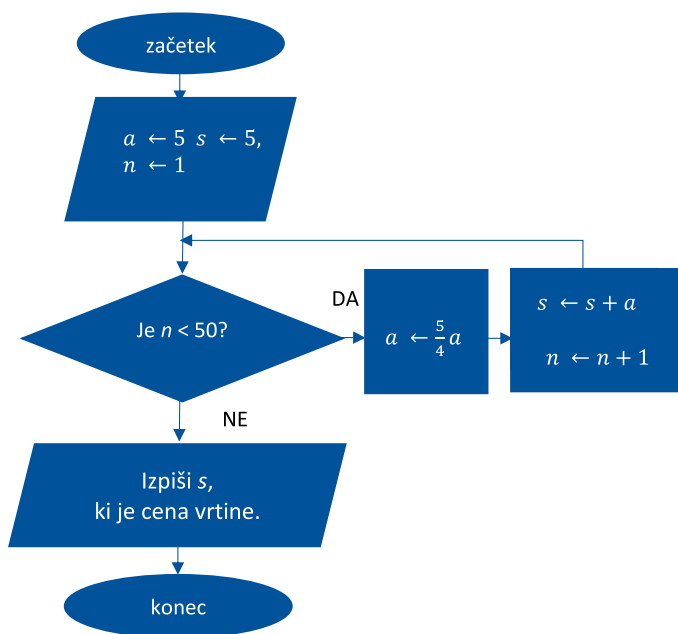
PONAVLJAJOČA SE FAZA: Je $n < 50$?

DA → Določi $a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n$ in $s_{n+1} = a_{n+1} + s_n$, indeks n povečaj za 1.

NE → Zaključimo algoritem ter izpišemo s_{50} – KONEC.

Za manj rutinskega dela izpeljemo formulo za vsoto členov geometrijskega zaporedja $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ s količnikom q . Enakost

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}$$



Slika 2: Algoritem predstavljen z diagramom.

odštejemo od enakosti, ki ima vse zgoraj zapisane člene pomnožene s faktorjem q :

$$s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n.$$

Dobimo

$$s_n \cdot q - s_n = a_1 \cdot q^n - a_1,$$

saj se ostali členi na desni odštejejo. Vsota n členov geometrijskega zaporedja se glasi

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Cena 50 globinskih metrov vrtine s ceno začetnega metra 5 evrov in s količnikom rasti $q = \frac{5}{4}$ znaša:

$$s_{50} = a_1 \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{50} - 1}{\frac{5}{4} - 1} \approx 1401278,46 \text{ evrov.}$$

Opazimo, da cena vsakega nadaljnjega metra hitro raste in toliko bolj vsota, saj znaša za 50 metrov že preko milijon evrov. V tem primeru za količnik v splošnem členu velja $q = \frac{5}{4} > 1$, zato limita n -te delne vsote ni končno realno število. Vrednost vsote gre v neskončnost. Naraščajoče vrednosti lahko predstavimo z izvajanjem algoritma v programu Microsoft Excel, ki je sicer robusten program, a vsakemu učencu dosegljiv in poznan (Slika 3).

Primer 2: ANTIBIOTIK

Antibiotik razpada v človeškem telesu z razpolovnim časom 2,5 ure. Določi splošni člen a_n zaporedja, ki predstavlja maso antibiotika v telesu po zaužitju 250-miligramske tablete antibiotika. Ob predpostavki, da pacient vzame eno 250 miligramsko tableto antibiotika vsakih 6 ur, izračunaj približno vrednost antibiotika v telesu takoj po končani terapiji, ki znaša 28 tablet (teden dni) (Drobnič Vidic, v pripravi).

Globinski meter:	Cena globinskega metra (v eur):	Cena vrtine:
n	$a_{n+1} = a_n + 1/4 \cdot a_n = 5/4 \cdot a_n$	$s_{n+1} = s_n + a_n$
1	5	5
2	6,25	11,25
3	7,8125	19,0625
4	9,765625	28,828125
5	12,20703125	41,03515625
...	...	...
47	143492,963	717444,81
48	179366,203	896811,02
49	224207,754	1121018,77
50	280259,693	1401278,46

Slika 3: Naraščajoče vrednosti v programu Microsoft Excel.

Rešitev

Razpad 250 mg tablete antibiotika poteka tako:

Po času $t_1 = 2,5$ ure imamo v telesu $a_1 = 0,5 \cdot 250$ mg antibiotika.

Po času $t_2 = 5$ ur je v telesu le še $a_2 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 250$ mg antibiotika itd. Po času $t_n = n \cdot 2,5$ ur imamo v telesu maso antibiotika

$$a_n = (0,5)^n \cdot 250 = 250 \cdot (0,5)^{\frac{t_n}{2,5}} \text{ mg.}$$

Masa antibiotika oblikuje člene geometrijskega zaporedja s količnikom $q = 0,5$.

V terapiji jemljemo na 6 ur nove tablete antibiotika, ki imajo enak način razpadanja v telesu. Čas, po katerem želimo določiti maso antibiotika v telesu, je $(28 - 1) \cdot 6$ ur, saj prvo tableto vzamemo v času $t = 0$, drugo v času $t = 6$, tretjo v času $t = 2 \cdot 6$ ur, ..., osemindvajseto v času $t = 27 \cdot 6$ ur.

Prva tableta ima po tem času skupno $\frac{27 \cdot 6}{2,5}$ razpolovitev, zato od prve tablete na koncu ostane masa $Q_1 = 250 \cdot (0,5)^{27 \cdot \frac{6}{2,5}}$ mg. Druge tablete imajo zaporedoma manj razpolovitev. Zapišemo po vrsti.

$$250 \cdot (0,5)^{27 \cdot \frac{6}{2,5}}, \quad Q_2 = 250 \cdot (0,5)^{26 \cdot \frac{6}{2,5}}, \quad Q_3 = 250 \cdot (0,5)^{25 \cdot \frac{6}{2,5}}, \quad \dots, \quad Q_{28} = 250 \cdot (0,5)^0$$

Zadnjo tableto vzamemo pri koncu terapije in ta tisti trenutek učinkuje v telesu v celoti, zato maso te lahko postavimo za 1. člen zaporedja $\{Q'_N\}$ s količnikom $q' = (0,5)^{\frac{6}{2,5}}$. Seštejemo končno členov ($N = 28$) tega geometrijskega zaporedja.

$$Q'_1 + Q'_2 + \dots + Q'_{28} = 250 + 250q' + 250q'^2 + \dots + 250q'^{27} = 250 \frac{(q')^{28} - 1}{q' - 1} \approx 308,438$$

Masa antibiotika v telesu takoj po končani tedenski terapiji znaša približno 308 mg.¹ Z daljšanjem terapije se masa antibiotika v telesu bistveno ne spremeni:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 250 \frac{((0,5)^{\frac{6}{2,5}})^N - 1}{(0,5)^{\frac{6}{2,5}} - 1} \approx 308 \text{ mg.}$$

V tem uporabnem primeru imamo kar nekaj algoritmov za računanje različnih zaporedij, ki jih bomo zapisali z rekurzivnimi formulami:

- $t_{n+1} = t_n + 2,5$, $t_1 = 2,5$ (časovni intervali);
- $a_{n+1} = a_n \cdot 0,5$, $a_1 = 125$ (spreminjanje mase ene tablete antibiotika);

- $Q'_{N+1} = Q'_N q'$, $Q'_1 = 250$ (mase posameznih tablet antibiotika);
- $s_{N+1} = s_N + Q'_{N+1}$, $s_1 = 250$ (vsote mas posameznih tablet antibiotika).

V primeru so skrita 4 različna zaporedja: dve aritmetični in dve geometrijski. Vendar pa indeksi členov za vse formule niso enaki: indeks v prvih dveh formulah šteje količino razpolovitev (v obdobju $27 \cdot 6$ ur), medtem ko indeks v drugih dveh formulah šteje količino tablet, vzetih v tem času. Naloga je toliko bolj kompleksna, ker ne zaključimo računanja neposredno po razpadu posamezne tablete, kar lahko vidimo na sliki 4 pri računanju posameznih rekurzivnih formul s programom Microsoft Excel. Navpično so indeksi n , ki štejejo razpolovitve in se ne končajo

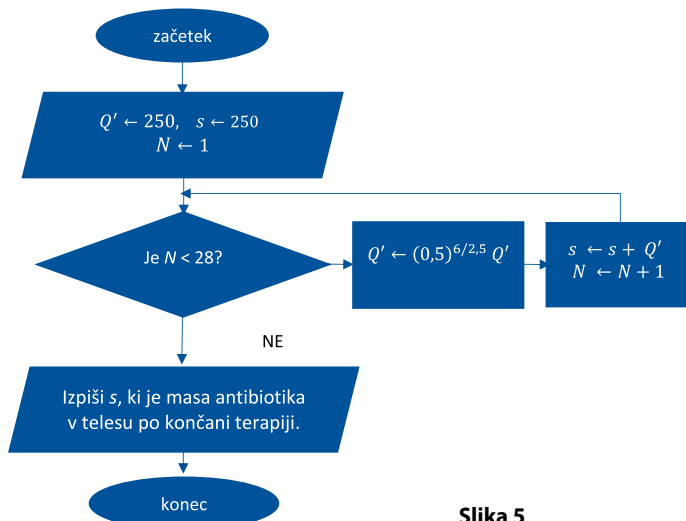
natančno pri času $27 \cdot 6 = 162$ ur ob koncu terapije, vodoravno pa število tablet v terapiji, označenih z N .

Kaj se dogaja z maso antibiotika v vmesnih dobah? Biološka razpolovna doba ali razpolovni čas izločanja je namreč čas, potreben za snovi (zdravila, droge, radioaktivne snovi ali druge), da izgubijo polovico svoje farmakološke, fiziološke ali radiološke aktivnosti (Razpolovna doba, Wikipedija). Masa snovi torej ni diskretna spremenljivka, kar bi zlahka pripisali številu razpadlih jeder določenega atoma, ker ti razpadejo na dva dela ali pa ne. Masa snovi se spreminja tako, kot kaže graf eksponentne funkcije. Zato tudi ne smemo odkimavati ob branju prej zapisane stavke: »Prva tableta ima v tem času skupno $\frac{27 \cdot 6}{2,5}$ razpolovitev«, čeprav število razpolovitev v stavku sploh ni naravno število. Med enim in drugim razpolovnim časom masa razpada, zato rezultat,

ki smo ga dobili z izpeljanimi formulami, dobro opiše vrednost antibiotika po končani terapiji. Algoritem za en indeks bi lahko predstavili s sliko 5.

Št. razpolovitev: n	Čas t_n	Masa v tbi 1: a_n	Masa v tbi 2: a_n	Masa v tbi 3: a_n	Masa v tbi 25: a_n	Masa v tbi 26: a_n	Masa v tbi 27: a_n	Masa v tbi 28: a_n
0	0	250	250	250	250	250	250	250
1	2,5	125	125	125	125	125	125	125
2	5	62,5	62,5	62,5	62,5	62,5	62,5	62,5
3	7,5	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25
4	10	15,625	15,625	15,625	15,625	15,625	15,625	15,625
5	12,5	7,8125	7,8125	7,8125	7,8125	7,8125	7,8125	7,8125
6	15	3,90625	3,90625	3,90625	3,90625	3,90625	3,90625	3,90625
7	17,5	1,953125	1,953125	1,953125	1,953125	1,953125	1,953125	1,953125
...	...	...	...	...	...	...	...	...
58	145	8,674E-16	8,674E-16	8,674E-16	8,674E-16	8,674E-16	8,674E-16	8,674E-16
59	147,5	4,337E-16	4,337E-16	4,337E-16	4,337E-16	4,337E-16	4,337E-16	4,337E-16
60	150	2,168E-16	2,168E-16	2,168E-16	2,168E-16	2,168E-16	2,168E-16	2,168E-16
61	152,5	1,084E-16	1,084E-16	1,084E-16	1,084E-16	1,084E-16	1,084E-16	1,084E-16
62	155	5,421E-17	5,421E-17	5,421E-17	5,421E-17	5,421E-17	5,421E-17	5,421E-17
63	157,5	2,711E-17	2,711E-17	2,711E-17	2,711E-17	2,711E-17	2,711E-17	2,711E-17
64	160	1,355E-17	1,355E-17	1,355E-17	1,355E-17	1,355E-17	1,355E-17	1,355E-17
65	162,5	6,776E-18	6,776E-18	6,776E-18	6,776E-18	6,776E-18	6,776E-18	6,776E-18
Št. tbi v terapiji: N		1	2	3	25	26	27	28
Masa antibiotika v tbi po terapiji: Q_N		7,784E-18	4,108E-17	2,168E-16	1,700	8,974	47,366	250
Masa antibiotika v telesu: s_N		7,784E-18	4,887E-17	2,657E-16	2,098	11,072	58,438	308,438

Slika 4



Slika 5

Primer 3: GASILNA OPREMA OBJEKTOV PO SLOVENIJI

Na podlagi Pravilnika o izbiri in namestitvi gasilnih aparatov (2005) želimo ugotoviti, katere podatke potrebujemo za določanje teoretičnega minimalnega potrebnega skupnega števila enot gasila (teoretični EG) za posamezen objekt in kako avtomatično izračunati teoretični EG s pomočjo tabele v pravilniku. Enota gasila je sposobnost medija v gasilnem aparatu, da pogasi ogenj. Na podlagi teoretičnega EG določi postopek, kako primerjati konkretno gasilno opremljenost objektov v Sloveniji (dejanski EG) s teoretičnim EG iz pravilnika (Drobnič Vidic, 2016a).

¹ Če bi si razpolovno dobo izbrali sami, na primer 2 uri, bi že takoj dobili precej bolj enostaven izračun za vsoto mase antibiotika v telesu po terapiji 28 tablet:

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{28} = 250((0,5)^{27 \cdot 3} + (0,5)^{26 \cdot 3} + \dots + (0,5)^0) = 250((0,125)^{27} + (0,125)^{26} + \dots + 1) = 285,714$$

Rešitev

V tej kompleksni nalogi morajo mladi povezati znanje naravoslovja (fizike in kemije), tehnologije, inženirstva in matematike (STEM). Za pridobivanje in obdelavo podatkov o posameznih konkretnih objektih je potrebno: znanje inženirstva za branje standardov o opremljenosti in požarni nevarnosti objektov ter za pridobivanje podatkov o dejanski gasilni opremljenosti objektov po Sloveniji; znanje kemije in fizike za preoblikovanje dobljenih podatkov pri določanju teoretičnega EG (ta je odvisen od dnevne dejavnosti, ki se odvija v objektu in od velikosti objekta) in pri določanju dejanskega EG v objektu (ta je odvisen od kemijskih in fizikalnih lastnosti medija v gasilnikih in v drugi gasilni opre, kot so npr. hidranti); znanje matematike za urejanje, obdelavo podatkov ter za določanje formul za teoretični EG na podlagi standardov ter znanje tehnologije za algoritmično preverjanje, ali opremljenost objektov zadošča predpisanim standardom. Na koncu je potrebno znanje statistike za ugotavljanje povezanosti teoretičnega in dejanskega EG ter interpretacijo rezultatov. Računalniška avtomatizacija je potrebna zaradi velike količine objektov, ki jih je treba analizirati (v izvedenem primeru je bilo v vzorcu 208 objektov (Drobnič Vidic, 2016b)). V prispevku se bomo osredotočili na reševanje matematičnega dela problema, kjer bomo pripravili vse potrebno za delo z digitalno tehnologijo.

Preglednica 1, ki je prepisana iz Pravilnika o izbiri in namestitvi gasilnih aparatov (2005) v prilogi 2, kaže, da je izračun teoretičnega EG odvisen od požarne varnosti objekta, ki se določi na podlagi dejavnosti, s katero se v objektu ukvarjajo, ter fizikalnih lastnosti objekta, kot je na primer površina objekta. Na podlagi preglednice 1 izpeljemo formule za izračun teoretičnega EG za posamezno vrsto objekta. (Določenim vrstam objektov, kot so nekatere javne ustanove, se teoretični EG ne določa po preglednici 1, ampak enostavneje po členih 6–10 v pravilniku.)

Preglednica 1: Določanje teoretičnega EG objektov je odvisno od njihove požarne varnosti² in površine.

Požarna nevarnost → (PN) oz. ogroženost	Majhna (1)	Srednja (2)	Velika (3)
Objekt do površine ↓ (v m ²)	Enot gasila (EG)		
50	6	12	18
100	9	18	27
200	12	24	36
300	15	30	45
400	18	36	54
500	21	42	63
600	24	48	72
700	27	54	81
800	30	60	90
900	33	66	99
1000	36	72	108
Vsaki nadaljnji 250	+6	+12	+18

Iz preglednice 1 v pravilniku razberemo, da imamo objekte z majhno, srednjo in veliko požarno nevarnostjo (PN), ki zahteva različne izračune vrednosti teoretičnega EG. Prav tako se drugače obravnavajo objekti različnih površin X : do 100 m², med 100 in 1000 m² in objekti nad 1000 m². Objektom med 100 in 1000 m² se po stotih povečuje število teoretičnega EG v aritmetičnem zaporedju (preglednica 1):

- pri objektih z majhno požarno ogroženostjo z oznako $PN = 1$ imamo zaporedje z rekurzivno formulo $a_{n+1} = a_n + 3$, $a_1 = 9$,
- pri objektih s srednjo požarno ogroženostjo z oznako $PN = 2$ imamo zaporedje z rekurzivno formulo $b_{n+1} = b_n + 6$, $b_1 = 18$,
- pri objektih z veliko požarno ogroženostjo z oznako $PN = 3$ imamo zaporedje z rekurzivno formulo $c_{n+1} = c_n + 9$, $c_1 = 27$ za mejne vrednosti teoretičnega EG.

Za manjše in večje objekte sledijo aritmetična zaporedja z drugimi aditivnimi konstantami in začetnimi členi. Skupna formula za mejne vrednosti teoretičnega EG (mejni teoEG) za objekte s površino med 100 in 1000 m² iz preglednice 1, ki nadomešča vse tri prej zapisane rekurzivne formule za objekte z različnimi vrstami požarne nevarnosti, se glasi:

$$\begin{aligned} \text{mejni teoEG}_1 &= PN \cdot 9, \\ \text{mejni teoEG}_{n+1} &= \text{mejni teoEG}_n + PN \cdot 3. \end{aligned}$$

Splošni člen bi se glasil:

$$\text{mejni teoEG}_n = PN \cdot (9 + 3(n-1)).$$

Če bi želeli računanje potrebnega teoretičnega EG avtomatizirati za podatke o objektih po Sloveniji s požarno ogroženostjo PN in s površino X , ki jih dobimo na terenu, potrebujemo postopek, kako določiti vse potrebno za izračun.

Najprej si zastavimo vprašanje, **kolikšna je požarna ogroženost PN objekta.**

Če je majhna, pišemo $PN = 1$, če je srednja, velja $PN = 2$, pri veliki pa je $PN = 3$. Nato sledi vprašanje: **Kolikšen je teoretični EG pri objektu s površino X v m² (in požarno nevarnostjo PN)?**

Pri $X \in (0, 100)$ uporabi formulo:

$$\text{teoEG}(X) = PN \cdot (6 + 3 \cdot \text{Zaokroži}(X/100)).$$

Pri $X \in [100, 1000)$ uporabi formulo:

$$\text{teoEG}(X) = PN \cdot (9 + 3 \cdot \text{Celi del}(X/100)).$$

Pri $X \in [1000, \infty)$ uporabi:

$$\text{teoEG}(X) = PN \cdot (42 + 6 \cdot \text{Celi del}((X - 1000)/250)).$$

Seveda bi formule lahko zapisali tudi kako drugače, saj je podanih le nekaj začetnih členov zaporedja. Predlagane formule so primerne za avtomatizacijo z računalniškim programom Microsoft Excel, kjer lahko uporabimo funkcijo zaokroževanja in iskanja celega dela realnega števila. Postopek bi lahko zapisali z vprašanji pri DA, NE odgovorih takole (logična vrata):

Začetek: Ali imamo objekt z majhno požarno ogroženostjo?

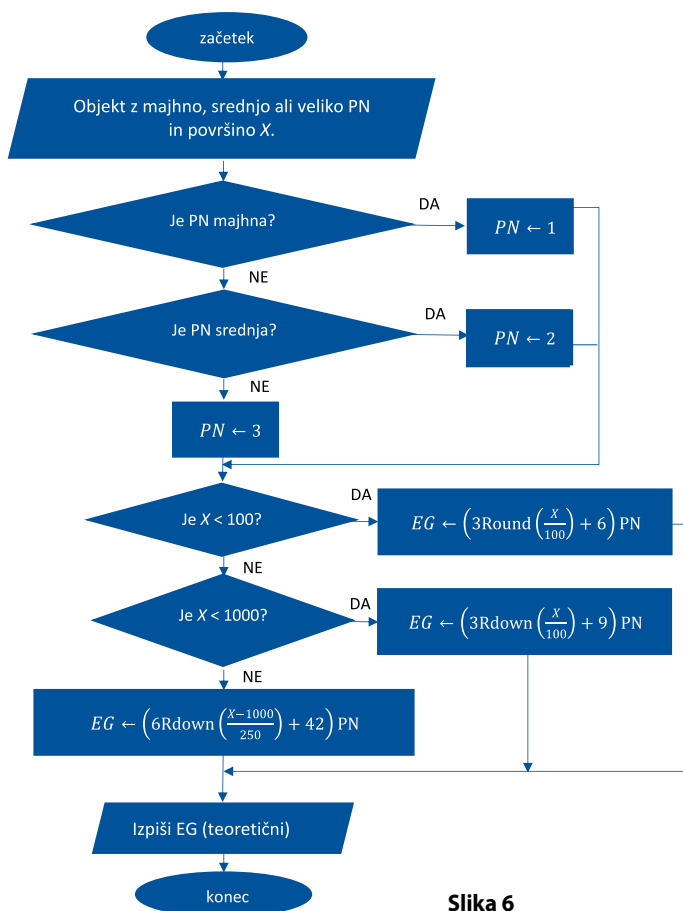
DA → Zapiši $PN = 1$

NE → Je objekt s srednjo požarno ogroženostjo?

• **DA → Zapiši $PN = 2$.**

• **NE → Zapiši $PN = 3$.**

² Požarna varnost se določi na podlagi več dejavnikov, od tega, kako je stavba zgrajena do tega, kaj v stavbi počnejo in s katerimi materiali imajo opravka. Če za stavbo požarna ogroženost ni vnaprej določena, jo morajo učenci določiti sami.



Slika 6

Podobna logična vrata sledijo nato za objekte različnih površin X , kot je predstavljeno na sliki 6. Izračuni za obe vrsti logičnih vrat so zapisani s programom Microsoft Excel z vgnezenimi IF stavki na sliki 7.

Logična vrata so potrebna tudi za preverjanje, ali teoretični EG ustreza dejanskemu EG ali ne. Glede na to, da se nekaterim posebnim objektom teoretični EG ne določa po tabeli 1, ampak drugače (po členih 6–10 v pravilniku), bi bilo za celotno obravnavo, ki je predstavljena v Drobnič Vidic (2016a), treba preveriti naslednje faze, predstavljene na sliki 8.

3 Prednosti in slabosti vključevanja algoritmičnega razmišljanja v pouk matematike

Ob navedenih zgledih algoritmičnega mišljenja se pogosto porajajo vprašanja, ali je dana aktivnost matematično ali algoritmično mišljenje. Natančne ločnice po mojem mnenju ni moč potegniti, saj imata pojma, če ju ponazorimo z množico aktivnosti, neprazen presek. Iskanje ponavljajočega se koraka pri pridobivanju členov zaporedja in oblikovanje rekurzivne formule zanj lahko prištevamo tako med algoritmično kot matematično mišljenje. Vendar iskanje ločnice ni namen tega prispevka. Cilj je izpostaviti algoritmično mišljenje (ki je hkrati lahko tudi matematično mišljenje) pri pouku matematike.

Kadar ob določeni matematični vsebini izpostavimo algoritmično mišljenje, omogočimo mladim, da matematične vsebine takoj

povežejo z informatiko in tehnologijo. Algoritmično mišljenje, ki je izpostavljeno ob vsebini o zaporedjih, omogoči določanje pomembnih korakov (algoritmov), kot je določanje rekurzivne formule za avtomatično pridobivanje členov zaporedja. Hkrati se ob vsebini o zaporedjih izpostavi pomen matematičnega mišljenja, na primer pri določanju predpisa za splošni člen iz rekurzivne formule, ki nam olajša zamudno delo postopnega določanja členov in omogoča takojšnji izračun poljubnega člena zaporedja.

V primeru VRTINA nam algoritmično mišljenje pomaga določiti rekurzivno formulo za postopni izračun cene posameznega globinskega metra vrtine, prav tako pa nam algoritmi oziroma ponavljajoči se koraki pomagajo določiti predpis za splošni člen cene metra vrtine kot tudi za izpeljavo formule za vsoto členov geometrijskega zaporedja. Seveda je za izpeljavo teh formul potrebno matematično mišljenje (povezovanje elementov v celoto oziroma sinteza).

Algoritmično mišljenje mladim pomaga pri urejanju korakov in postopkov pri reševanju problema, saj z analizo in delitvijo naloge na manjše dele (kot je algoritmični postopek Začetek – Ponavljajoča se faza – Konec) lažje rešijo kompleksno nalogo. (Mimogrede je analitično razmišljanje in delitev problema na manjše dele tudi aktivnost matematičnega mišljenja.) V primeru ANTIBIOTIK začnemo s časovno delitvijo, nato razpolavljanjem ene tablete antibiotika, kasneje z razpolavljanjem več tablet antibiotika in nato pridobivanjem njihove vsote ...). Ravno primer ANTIBIOTIK kaže, kako pomembno je matematično mišljenje, saj je treba izpeljati formule za izračun posameznih mas tablet in pravilno določiti konec algoritma.

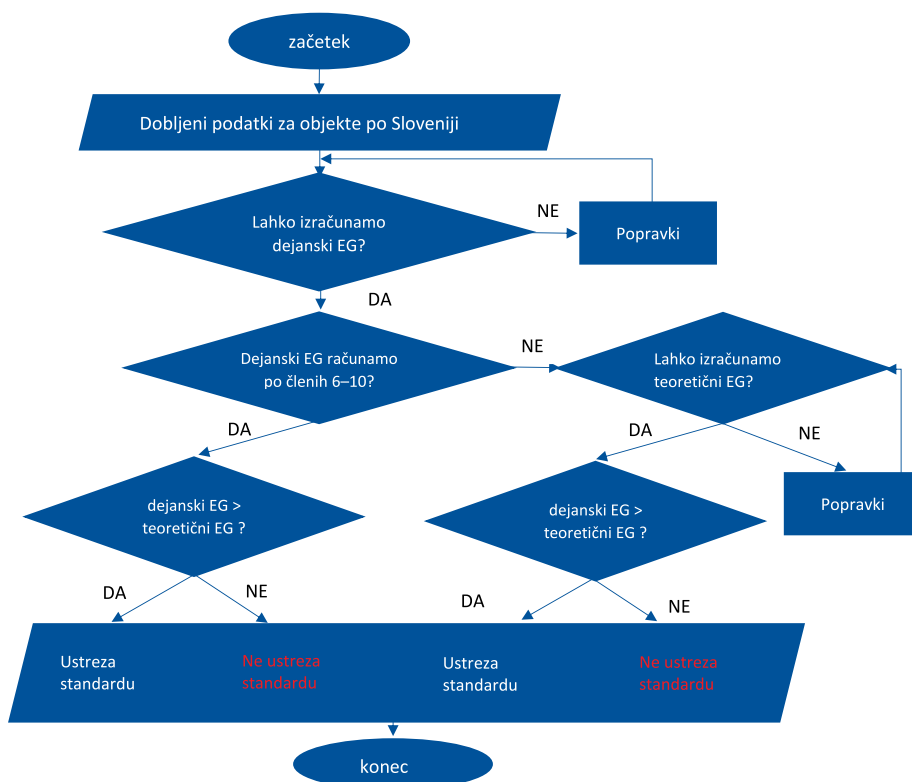
Algoritmično mišljenje je nujno potrebno, če želimo avtomatizirati nek postopek. Avtomatizacija je nujna pri velikem številu podatkov, četudi z bistrim umom izpeljemo mnoge matematične formule za neposredno računanje. V primeru GASILNA OPREMA OBJEKTOV PO SLOVENIJI avtomatiziramo določanje dejanskega EG s teoretičnim EG, kar je potrebno za analizo velikega števila objektov po Sloveniji. Matematično mišljenje uporabimo za določanje formule za izračun dejanskega EG na podlagi površine in požarne nevarnosti objekta, algoritmično mišljenje pa uporabimo za umestitev logičnih vrat, ki omogočajo avtomatiziran postopek določanja dejanskega EG pri veliki količini podatkov.

Prav tako se algoritmično mišljenje v tem primeru zrcali v vrstnem redu postopkov in operacij, ki jih je treba izvesti, da lahko pravilno primerjamo dejansko opremljenost objektov z gasilno opremo od teoretičnih zahtev in predpisov. Seveda pa natančna razčlenitev med matematičnim in algoritmičnim mišljenjem ni mogoča, saj je algoritmično mišljenje pogosto sestavni del celovitega matematičnega mišljenja.

Natrpne matematične vsebine v kurikulumu gotovo ne pomagajo učitelju, da bi pri matematičnih vsebinah izpostavljал algoritmično mišljenje. A vendar uporaba matematike v vsakdanjem življenju kaže, da je uporabna matematika močno povezana s tehnologijo, kjer moramo algoritmično mišljenje osmisлити in uporabiti v računalniških programih. Pogosto je algoritmično mišljenje povezano z modeliranjem v matematiki, ki pri pouku matematike tudi aktualna didaktična vsebina. Ker je algoritmično mišljenje že tako ali tako nezavedno prisotno pri učenju matematičnih vsebin, je morda dovolj, da pri nekaterih vsebinah

Objekt	PN	Površina X	$PN = \text{IF}(B = \text{"majhna"}; 1; \text{IF}(B = \text{"srednja"}; 2; 3))$	$\text{teoEG} = \text{IF}(X < 100; PN * (6 + 3 * \text{Round}[X/100]); \text{IF}(X < 1000; PN * (9 + 3 * \text{Rounddown}[X/100]); PN * (42 + 6 * \text{Rounddown}[(X - 1000)/250]))$
1	majhna	925	1	36
2	velika	122	3	36
3	velika	550	3	72
4	srednja	1200	2	84
5	majhna	210	1	15
6	majhna	675	1	27
7	srednja	2200	2	132
...	...	...	...	...
208	velika	80	3	27

Slika 7



Slika 8

učitelj tako mišljenje izpostavi (morda z zgledom na računalniškem programu, z dodatnim predstavljenim algoritmom v besedilu naloge ali dodatno z domačo nalogo, kjer mladi poskusijo faze algoritmičnega mišljenja zapisati sami).

Morda so predstavljeni primeri pri vsebini o zaporedjih bralcu vzbudili misel, da je rekurzivna formula bolj pomembna, kot je mislil doslej. Morda se nam prikra-de misel o tem, kako bistro matematično mišljenje in izpeljava formul za splošni člen ali pa vsoto zaporedja nadomesti rutinsko delo in ponavljanje enakega postopka. Morda smo na kak drug način ozavestili razliko med matematičnim in algoritmičnim mišljenjem in s tem dosegli cilj tega prispevka. Prav ozaveščanje algoritmičnega mišljenja pa bi bil lahko tudi eden od ciljev učitelja matematike pri delu z mladimi: po potrebi izpostaviti algoritmično mišljenje, ki mladim pomaga pri strukturiranju njihovega razmišljanja in jim po drugi strani morda vzbudi zanesenost, lepoto in korist matematičnega mišljenja, ki pogosto nadomesti zamudno in rutinsko algoritmično opravilo.

Viri

- Demšar, J. (2016). *Učenje računalništva s pomočjo tekmovanja Bober*. Algoritmi. Zapiski. Pridobljeno dne 26. 9. 2022 na: <https://ucilnica.fri.uni-lj.si/course/view.php?id=200>
- Drobnič Vidic, A. (2016a). Using a Problem-Based Learning Approach to Incorporate Safety Engineering into Fundamental Subjects, *Journal of Professional Issues in Engineering Education and Practice*, 142 (2), str. 9.
- Drobnič Vidic, A. (2016b). STEM – povezovanje v slovenskem izobraževanju (STEM connection in Slovenian education). V: Suban, M. (ur.), idr., *KUPM 2016: zbornik razširjenih povzetkov*. 1. izd. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, str. 194–196.
- Drobnič Vidic, A. (v pripravi). *Matematika v uporabi: učbenik za visokošolske inženirske programe*, Univerza v Ljubljani.
- Evropski socialni sklad. *E-gradiva za predmet Informatika. Algoritmi*. Pridobljeno dne 8. 9. 2022 na: <http://sasa.musiclab.si/eri1/INFORMATIKA/index.html>.
- Fajfar, I. (2020). *Algoritmi in podatkovne strukture. Uvod za inženirje*. Ljubljana: Založba fakultete za elektrotehniko.
- Pravilnik o izbiri in namestitvi gasilnih aparatov (2005). V: Ur.l. RS, št. 67/2005. Dostopno na: <http://www.pisrs.si/Pis.web/pregledPredpisa?id=PRAV5533>
- Razpolovni čas (Wikipedia). Pridobljeno 29. 9. 2022 na <https://sl.wikipedia.org/wiki/>
- Štrukelj, T. (2014). *Poučevanje rekurzije v osnovni šoli* (diplomska naloga). Pedagoška fakulteta: Univerza v Ljubljani.