Naslov članka/Article:

Vrednotenje matematičnega znanja na splošni maturi

Mathematics Assessment in General Matura Examination

Avtor/Author: **mag. Simona Pustavrh, Simona Vreš, ddr. Janez Žerovnik**

DOI:

Matematika v šoli št. 1/2022, letnik 28
ISSN 1318-010X
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2022

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Vrednotenje matematičnega znanja na splošni maturi

mag. Simona Pustavrh
Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija

Simona Vreš
Šolski center Ravne na Koroškem, Gimnazija Ravne na Koroškem

ddr. Janez Žerovnik
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

Državna predmetna komisija za splošno maturo za matematiko

Izvleček

Predmetni izpitni katalog za splošno maturo 2021 – matematika določa na obeh ravneh zahtevnosti po dve izpitni poli, ki se razlikujeta v tem, da v prvi računalo ni dovoljeni pripomoček, v drugi pa ga kandidati pri reševanju nalog lahko uporabljajo. V prispevku je obravnavana novost s stališča sestavljanja nalog in deloma tudi s stališča strategije priprave na maturo v novih okoliščinah. Predstavljena je klasifikacija maturitetnih nalog, ki temelji na dovoljenem žepnem računalu na splošni maturi. Klasifikacija se nekoliko razlikuje od drugih, saj je prilagojena ozkemu namenu in se med drugim omejuje na vpliv uporabe računala in ni namenjena splošni analizi, ki upošteva uporabo katerekoli tehnologije. Klasifikacija je uporabljena za predstavitev primerov, ki pojasnjujejo nekaj značilnih lastnosti, ki so pomembne pri oblikovanju in vrednotenju nalog na maturi. Primeri vključujejo posebej izbrane naloge, ki so z ustrezno prilagojenima točkovnikoma primerne za obe izpitni poli.

Ključne besede: splošna matura, računalo, razvrstitev nalog, vrednotenje znanja

Mathematics Assessment in General Matura Examination

Abstract

The general matura exam catalogue for mathematics 2021 determines two parts of the matura examination paper at both levels of difficulty. In the first part, candidates are not allowed to use calculators, while in the second part calculators are permitted. This article looks at a novel approach to constructing exam tasks and, partly, the strategies for the matura exam preparation under the new circumstances. It also describes the task classification, based on the fact that calculators are now permitted for the matura exam. This classification somewhat differs from others in that it focuses on the impact of calculators being allowed, and should therefore not be used for general analysis, which considers the use of any technology. The classification describes specific and interesting examples, which are important when creating and evaluating matura exam tasks (e.g., specific tasks that can be used in both parts of the matura examination paper provided that the marking scale is adapted accordingly).

Keywords: general matura exam (baccalaureate examination), calculator, task classification, knowledge evaluation.

Uvod

Splošna matura je državni izpit, ki je hkrati zaključni izpit po programu gimnazije in pogoj za vpis na univerzitetni študij. Od ponovne uvedbe splošne mature leta 1995 je matematika obvezen maturitetni predmet, pri katerem lahko kandidati opravljajo izpit na dveh ravneh zahtevnosti, na osnovni in višji ravni. Maturitetni izpit iz matematike se do mature leta 2021 ni bistveno spreminjal, manjše spremembe so bile vpeljane le pri definiciji dovoljenega računala na maturi.

Pomembne novosti, ki so stopile v veljavo leta 2021 pri eksternem (pisnem) delu mature iz matematike, so:

(1) kandidati na osnovni in na višji ravni rešujejo dve izpitni poli (na prvi uporaba računala ni dovoljena),

(2) čas pisanja izpitnih pol je spremenjen (za vsako polo je na voljo 90 minut),

(3) na osnovni ravni je uvedena nova kategorija kratkih nalog,

(4) seznama formul, ki sta priložena izpitnim polam na osnovni in na višji ravni, sta razširjena in se razlikujeta.

Spremembe so natančno opredeljene v veljavnem predmetnem izpitnem katalogu [1], podroben opis sprememb s komentarji pa je v člankih [2] in [6].

Žal je prvo izvedbo splošne mature po predmetnem izpitnem katalogu [1], ki velja od leta 2021, močno zaznamovala pandemija virusa. Na nivoju celotne mature so bile zaradi razmer, v katerih je pouk dlje časa potekal na daljavo, odrejene prilagoditve mature. Ker bi bila matura 2021 prva, na kateri bi kandidati na izpitu iz matematike pisali polo brez računala, je bila ena od pomembnih prilagoditev dovoljena uporaba računal na obeh polah. Prilagoditev je bila sprejeta zaradi precej velikega nelagodja pred pisanjem pole brez računala, ki so ga izražali predstavniki bodočih maturantov in tudi nekateri učitelji.

Učni načrt za gimnazije [14] večkrat omenja uporabo IKT (informacijsko-komunikacijske tehnologije) pri pouku matematike, vendar je podrobneje ne opredeljuje. V svetu in tudi pri nas v zadnjih letih (in desetletjih) poteka sorazmerno živahna razprava o uporabi računal pri pouku matematike. Mnenja so zelo različna, od zagovarjanja neomejene uporabe računal pri pouku od osnovne šole naprej do svaril o škodljivosti kakršnekoli uporabe tehnologije. Vročo debato so v svetu poimenovali »Math Wars« (ZDA), »Glaubenkrieg« (Nemčija), za kratek uvod v problematiko in dodatne reference predlagamo na primer članek [12]. V tem prispevku se omejimo na trditev, da verjetno ni vprašanje »tehnologija – da ali ne?«, ampak je pravo vprašanje, kdaj in na kakšen način je uporaba tehnologije korak k bolj kakovostnemu pouku matematike. Slovenski maturanti tradicionalno pri maturi uporabljajo (žepno) računalo, po novem bodo pisali prvo polo brez in drugo z računalom.

V nadaljevanju najprej na kratko predstavimo definicijo t. i. maturitetnega računala. Sledi kratek pregled klasifikacij nalog glede na njihovo občutljivost na uporabo tehnologije in predstavitev klasifikacije, ki smo jo definirali za naš namen. Sledi jedro prispevka, ki se osredotoča na primere nalog različnih tipov s komentarji. Večina primerov je iz starih matur, nekaj nalog pa je sestavljenih na novo ali so vzete iz zbirke [8], ki jo je predmetna maturitetna komisija pripravila pred uvedbo novega modela mature. Sledi povzetek z nekaj zaključnimi ugotovitvami.

Matura in računala

Že od samega začetka mature leta 1995 je bila pri pisnem delu izpita iz matematike uporaba računala dovoljena. V tem času je razvoj tehnologije izredno povečal zmogljivost »žepnih« računal, na tržišče pa vsako leto prihajajo nova računala, ki uporabnikom ponujajo vedno nove možnosti uporabe. Tako so se na izpitnih polah vse pogosteje pojavljale naloge z navodilom, da je treba nalogo reševati brez uporabe računala. Ugotoviti, ali je dijak takšno nalogo dejansko rešil brez uporabe računala, je bilo težko, včasih povsem nemogoče, kar je bil eden izmed glavnih razlogov za vpeljavo dveh izpitnih pol pri maturitetnem izpitu iz matematike.

Veljavni učni načrt [14] med drugim večkrat omenja in celo poudarja uporabo informacijsko-komunikacijske tehnologije, vendar podrobnosti ne opredeljuje. Učitelji so imeli na voljo številna strokovna spopolnjevanja s področja IKT, vključevali pa so se lahko tudi v projekte s tega področja. Kljub temu je praksa po šolah močno odvisna od različnih materialnih pogojev in samoiniciativnosti ter iznajdljivosti pedagogov.

Računalo je na maturi pripomoček, ki ga je treba za vsako generacijo natančno definirati vsaj dve leti pred izvedbo mature, kar je ob hitrem razvoju tehnologije zelo težka naloga. Nenazadnje učni načrt iz razumljivih razlogov nikjer ne opredeli, kaj natančno je mišljeno s pojmom »uporaba informacijsko-komunikacijske tehnologije«, saj verjetno ni mišljena zgolj uporaba tako imenovanih (žepnih) računal. Vsekakor pa učni načrt predvideva, da kandidati na splošni maturi iz matematike obvladajo nekatere postopke reševanja nalog brez računala, nekatere pa z računalom, saj je med splošnimi cilji/kompetencami zapisano, da morajo kandidati »spoznavati in uporabljati različne informacijsko-komunikacijske tehnologije (IKT) kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov« ter »presojati, kdaj je smiselno uporabiti določeno informacijsko-komunikacijsko tehnologijo in razviti kritični odnos do informacij na spletu.« To sta le dva izmed splošnih ciljev, na maturitetnem izpitu pa preverjamo še druge različne cilje.

Tako je dozorela odločitev o delitvi izpita na polo, ki se rešuje brez računala, in polo, ki se rešuje z računalom. Ta sprememba bo, ko bo dejansko uveljavljena, delno rešila zagato; na poli brez računala se bo lahko preverjalo tudi poznavanje elementarnih postopkov, kar zaradi dovoljene uporabe računal ni bilo izvedljivo, na poli z računalom pa bi se lahko v prihodnosti na primeren način preverjala tudi smiselna uporaba ostale sodobne tehnologije, ne le žepnih računal.

Ob tem se pojavi vprašanje, ali in kako se zaradi dovoljene uporabe potencialno zmogljivih računal spremeni pričakovana »jasno in korektno predstavljena pot do rezultata«. Ta je zagotovo lahko nekoliko drugačna na poli z računalom kot na poli brez računala, pa tudi (delne) rešitve so lahko smiselno različno ovrednotene.

Pred leti je prišlo do dogovora, da je smiselno definirati računalo, ki bi bilo primerno za uporabo na vseh maturitetnih izpitih splošne mature. Predlog je pripravila Državna predmetna komisija za matematiko. V dokumentu *Kaj je* ***žepno*** *računalo* [5] je definirano, katera računala so dovoljena na splošni maturi, dodatno pa je v dokumentu *Kaj je simbolno računanje* [4] še kratka opredelitev, kaj pomeni v definiciji računala prepovedano simbolno računanje. Oboje je skoraj nemogoče povsem natančno opredeliti, saj bi morali definiciji vnaprej predvideti novosti. Ker v nadaljevanju obravnavamo občutljivost nalog glede na uporabo računala, je seveda pomembno, s kakšnimi računali imamo opravka. Zato tu povzemamo definicijo [5]:

»Računalo je elektronsko računalo, ki omogoča delo z osnovnimi računskimi operacijami in ne podpira:

- možnosti komunikacije z okolico – »zunanjim svetom«,
- shranjevanja podatkov iz okolice oziroma zunanjega sveta,
- shranjevanja predhodno naloženih podatkov,
- simbolnega računanja,
- programiranja novih funkcij,
- risanja grafov funkcij.«

V [4] je simbolno računanje opredeljeno kot »nenumerično računanje oziroma uporaba abstraktnih simbolov (spremenljivk x, y, …, parametrov a, b, …) v računanju.«

Simbolno računanje je torej računanje z algebrskimi izrazi, faktorizacija izrazov, računanje nedoločenih integralov in podobno, nesimbolno računanje pa je računanje z natančnimi ali približnimi konkretnimi števili.

Vse več modelov računal, ki ustrezajo definiciji dovoljenih računal na maturi, izvajajo določene numerične metode, ki sodijo med nesimbolno računanje. Pri sestavljanju nalog in njihovem vrednotenju je vsekakor dobro poznati zmogljivosti računal in slediti njihovemu razvoju, saj se z vsako generacijo računal nabor metod podaljšuje. Navedimo nekaj metod, ki jih zmorejo današnja računala (seznam metod temelji na računalu CASIO fx-991EX):

- računajo z natančnimi vrednostmi, npr. delno korenijo, izpišejo in računajo s točnimi vrednostmi kotnih funkcij, izračunajo vrednost logaritma pri poljubni pozitivni osnovi, ki ni enaka 1,
- računajo z ulomki in rezultat izpišejo v obliki okrajšanega ulomka,
- neskončno periodično decimalno število pretvorijo v obliko okrajšanega ulomka,
- računajo s kompleksnimi števili, izračunajo absolutno in konjugirano vrednost kompleksnega števila, določijo realno in imaginarno komponento kompleksnega števila (ali daljšega izraza s kompleksnimi števili),
- dano naravno število zapišejo kot produkt praštevilskih potenc,
- rešijo kvadratno enačbo in izračunajo koordinati temena kvadratne funkcije,
- rešijo sistem linearnih enačb (do vključno štirih enačb s štirimi neznankami),
- poiščejo približek rešitve enačbe z Newtonovo metodo,
- rešijo polinomske enačbe in neenačbe do vključno stopnje 4,
- izračunajo kot med vektorjema,
- izračunajo (tudi natančno) vrednost odvoda v dani točki, vrednost določenega integrala, vsoto končne vrste,
- omogočajo izračun koeficientov (nekaj ponujenih) modelov za modeliranje s funkcijami.

Vpliv tehnologije na sestavljanje in vrednotenje nalog

Razvrstitve nalog glede na vpliv tehnologije

V literaturi je zaslediti različne razvrstitve nalog glede na vpliv tehnologije na reševanje nalog [7]. Roškar in Lokar [13] sta izbrala nekaj maturitetnih nalog splošne mature in jih rešila s programi Mathematica, Derive in Matlab. Naloge sta nato razvrstila glede na razvrstitve različnih avtorjev. V nadaljevanju povzemamo nekaj razvrstitev matematičnih problemov v razrede/skupine glede na vpliv različnih tehnoloških pripomočkov in programov za simbolno računanje CAS (Computer Algebra System) na reševanje problemov, ki jih omenjata Roškar in Lokar [13] (prevodi v slovenski jezik so dobesedno povzeti po [13]). Ker se naša analiza in praksa sestavljanja maturitetnih nalog prilagaja uporabi predpisanih računal, v nadaljevanju predstavljamo klasifikacijo, prirejeno našemu namenu.

Jones in McCrae [7] razvrščata matematične probleme glede na vpliv tehnologije pri reševanju nalog v tri razrede:

- CNI (No impact) Ni vpliva: uporaba tehnoloških pripomočkov ne vpliva na potek reševanja.
- CIU (Have Impact, Unchanged) Vpliv: uporaba tehnoloških pripomočkov sicer vpliva na reševanje problema, vendar naloge zaradi tega ni treba spreminjati.
- CIO (Impact, Omitted) Trivializacija: Uporaba tehnologije vpliva na reševanje toliko, da moramo nalogo spremeniti.

Kutzler razvršča matematične naloge [7] glede na vlogo programov za simbolno računanje v procesu reševanja naloge (primarna ali sekundarna) in glede na potrebno predznanje pri uporabi programov za simbolno računanje za reševanje (rutinska ali napredna) v pet razredov:

- PR (Primary Routine) – Primarna rutinska uporaba programov za simbolno računanje: uporaba programov za simbolno računanje je vodilna dejavnost pri reševanju naloge, saj naloge brez pomoči tehnologije ne bi mogli rešiti. Potrebujemo osnovno znanje za uporabo programov za simbolno računanje.
- PA (Primary Advanced) – Primarna napredna uporaba programov za simbolno računanje: uporaba programov za simbolno računanje je vodilna dejavnost pri reševanju naloge, saj naloge brez pomoči tehnologije ne bi mogli rešiti. Potrebujemo napredno znanje za uporabo programov za simbolno računanje.
- SR (Secundary Routine) – Sekundarna rutinska uporaba programov za simbolno računanje: uporaba programov za simbolno računanje je stranskega pomena pri reševanju naloge, saj za rešitev naloge potrebujemo druge sposobnosti. Potre-

bujemo osnovno znanje za uporabo programov za simbolno računanje.

- SA (Secundary Advanced) – Sekundarna napredna uporaba programov za simbolno računanje: uporaba programov za simbolno računanje je stranskega pomena pri reševanju naloge, saj za rešitev naloge potrebujemo druge sposobnosti. Potrebujemo napredno znanje za uporabo programov za simbolno računanje.
- NC (No CAS) – Nesmiselna (nepomembna) uporaba programov za simbolno računanje: pri reševanju naloge nam uporaba programov za simbolno računanje ne pomaga.

Razvrstitev po Kokol-Voljč [10] razvršča naloge na podlagi vloge/pomena matematičnega problema pri preverjanju sposobnosti (v smislu razumevanja matematičnih pojmov) ter veščin (v smislu spretnosti pri izvajanju računov) v pet skupin:

- KO¬ Za tehnološke pripomočke neobčutljiva naloga: za rešitev je ključno razumevanje matematičnih pojmov. Uporaba tehnologije nudi le omejeno pomoč.
- KO? Za tehnološke pripomočke občutljiva naloga: brez tehnoloških pripomočkov je reševanje naloge naporno. Uporaba tehnoloških pripomočkov pri reševanju lahko spremeni pomen problema.
- KO! S tehnološkimi pripomočki razvrednotena naloga: naloga zahteva le uporabo znanja o računskih postopkih. Z uporabo tehnoloških pripomočkov se smiselnost naloge popolnoma izgubi.
- KO✓ Naloga, ki preverja sposobnosti in veščine: Večji del reševanja zavzema prevod izrazov iz ene oblike v drugo z uporabo različnih matematičnih pravil. Za rešitev naloge je potrebna veščina uporabe transformacij v matematični svet, pri čemer je potrebno tudi znanje o sintaksah matematičnih izrazov. Z uporabo tehnoloških pripomočkov s problemom preverjamo znanje izbire in uporabe transformacij, saj brez tega uporaba tehnoloških pripomočkov ni mogoča.
- KO∗ Redka naloga: neobičajna naloga, ki jo lahko rešimo na več načinov. Reševanje zahteva ustvarjalnost, uporaba tehnoloških pripomočkov pa služi le kot orodje.

Mac Aogáin [11] razvršča naloge v štiri kategorije glede na težavnost naloge, če pri reševanju dovolimo uporabo tehnoloških pripomočkov.

- CT (CAS Trivial) – Trivialna naloga: naloga je rešljiva v dveh do treh korakih, zato z uporabo tehnoloških pripomočkov postane trivialna.
- CE (CAS Easy) – Enostavna naloga: z uporabo tehnoloških pripomočkov se naloga poenostavi.
- CD (CAS Difficult) – Težka naloga: uporaba tehnologije nudi le omejeno pomoč pri reševanju in ne zmanjša težavnosti.
- CP (CAS Proof) – Za tehnološke pripomočke neobčutljiva naloga: uporaba tehnoloških pripomočkov ne pripomore ali le minimalno pripomore k rešitvi.

Herget, Heugl, Kutzler in Lehmann [9] razvrstijo probleme glede na to, ali pri reševanju dovolimo uporabo tehnološkega pripomočka, ki omogoča simbolno računanje ali ne, v tri skupine:

- -T brez tehnologije: naloge, pri katerih za rešitev ne potrebujemo nikakršne pomoči tehnologije.
- +T s tehnologijo: naloge, kjer pri reševanju dovolimo uporabo zmogljivega računala oziroma tehnološkega pripomočka, ki omogoča simbolno računanje, saj je problem brez uporabe tehnologije težko rešljiv.
- ?T Vprašljivo: naloge, ki bi jih težko uvrstili v eno izmed prvih dveh skupin.

Vsaka razvrstitev je seveda za določen tip nalog in za določene tehnološke pripomočke bolj ali manj ustrezna. Poudariti je treba, da ni jasne meje med skupinami v posameznih razvrstitvah, saj so v realnosti naloge zvezno porazdeljene. Z izjemo Kutzlerjeve razvrstitve, ki je dvodimenzionalna, so ostale porazdelitve enodimenzionalne.

Razvrstitev nalog na splošni maturi iz matematike v štiri tipe oziroma skupine

Zaradi hitrega napredka tehnologije je pri sestavi maturitetnih nalog nujno razmisliti o vplivu dovoljene tehnologije na reševanje nalog in o vrednosti matematične naloge glede na dovoljene pripomočke pri maturitetnem izpitu, saj možnost uporabe računala vpliva tudi na vrednotenje nalog.

Zavedati se moramo, da npr. reševanje kvadratne enačbe vrednotimo drugače, če dovolimo uporabo računala. V tem primeru praviloma vrednotimo samo rešitev, ne pa postopka. Glede na to, da je na trgu veliko modelov različno zmogljivih računal, je zelo težko ali nemogoče pravično vrednotiti postopke v primeru reševanja enačb z računalom, saj bi s tem kandidate, ki imajo manj zmogljiva računala, postavili v neenakovreden položaj. Če želimo preveriti, ali kandidat pozna postopek reševanja enačbe, mu uporabe računala ne moremo dovoliti. Leta 2021 so bile zato na osnovni ravni mature z namenom preverjanja osnovnega znanja uvedene tudi kratke naloge, s katerimi lahko preverjamo poznavanje osnovnih konceptov in obvladovanje osnovnih tehnik. Ker te naloge praviloma preverjajo samo en cilj, so tudi taksonomsko večinoma na nižji ravni in bodo torej po pričakovanjih dobro reševane.

Pri pregledu starih maturitetnih nalog lahko ugotovimo, da je pri nekaterih uporaba računala potrebna, pri večini pa uporaba računala ni potrebna. S pojavom novih funkcij na novejših zmogljivejših tipih računal je vedno več primerov starih maturitetnih nalog, pri katerih bi uporaba računala povsem razvrednotila problem ali pa glede na različne zmogljivosti računal kandidate postavila v neenakovreden položaj. Na tem mestu je treba izpostaviti, da je pri določenem tipu nalog uporaba računala lahko celo zavajajoča. Nazadnje med maturitetnimi nalogami najdemo veliko nalog, pri katerih uporaba računala ne vpliva na postopek reševanja in način vrednotenja, zaradi česar bi jih lahko uvrstili na obe izpitni poli.

Za analizo primernosti uvrstitve na posamezno polo na splošni maturi iz matematike bi lahko naloge razvrstili v skupine po katerikoli razvrstitvi, ki smo jih omenili v prejšnjem razdelku. Ker je trenutno na splošni maturi dovoljena uporaba žepnega računala (kot je opredeljeno v [5] in [4]), bomo v tem prispevku naloge razvrstili po naši klasifikaciji, ki je prirejena za uporabo dovoljenega žepnega računala in ne za drugo programsko opremo. Z morebitno nadgradnjo pa bi bila lahko primerna tudi za uporabo drugih tehnoloških pripomočkov in programov za simbolno računanje.

Ker nas predvsem zanima sestavljanje in ocenjevanje nalog na splošni maturi po trenutno veljavnem predmetnem izpitnem katalogu [1], bomo v nadaljevanju opisali razvrstitev, ki je verjetno najbolj ustrezna našemu namenu. Definirali smo štiri tipe nalog, in sicer tako, da tip naloge najprej pove, za katero polo je naloga primerna (P1 - prvo, P2 - drugo ali P12 - za obe) in nadalje še, ali je treba glede na izbiro pole prilagoditi točkovnik (T):

1. Naloge tipa P12: Naloge, ki so neobčutljive na rabo računala.
2. Naloge tipa P12T: Naloge, ki jih različno vrednotimo glede na rabo računala.
3. Naloge tipa P1: Naloge, ki so z uporabo računala razvrednotene.
4. Naloge tipa P2: Naloge, pri katerih potrebujemo računalo.

V nadaljevanju bomo navedene štiri tipe nalog podrobneje predstavili. Pri vsakem tipu nalog bomo izpostavili nekaj izbranih primerov. Naloge so večinoma izbrane iz preteklih maturitetnih izpitov, ki so objavljeni na spletni strani Državnega izpitnega centra [3]. Dodanih je nekaj nalog, ki smo jih sestavili na novo in še niso bile del izpita, ali kratkih nalog iz zbirke Matematika – Nekaj kratkih nalog na splošni maturi [8].

Pri nekaterih nalogah je v točkovniku uporabljen zapis *1, kar pomeni, da je točka postopkovna. Kandidat dobi postopkovno točko, če je svoje vmesne rezultate, ki so bili izračunani narobe, pravilno uporabil v postopku v nadaljevanju naloge. Točkovnike nalog iz starih izpitov smo ponekod dopolnili z namenom, da postanejo bolj razumljivi tudi bralcem, ki nimajo izkušnje z ocenjevanjem splošne mature.

Bralci bodo opazili tudi dva različna zapisa točkovnikov. Pri starejših nalogah so točke v stolpcu »Točke« razdeljene bolj podrobno, kot bo videti v primeru 11. Pri novejših nalogah je v stolpcu »Točke« zapisano skupno število točk, ki jih dobi kandidat za pravilno rešitev naloge ali del naloge, če je le-ta razdeljena v več delov. Razlika točk med točkami v stolpcu »Točke« in točkami v stolpcu »Dodatna navodila« so točke za pravilen rezultat.

Razvrstitev nalog na splošni maturi – primeri

Naloge tipa P12 – naloge, ki so neobčutljive na rabo računala

Naloge, ki so neobčutljive na rabo računala, so naloge, pri katerih je za rešitev ključno razumevanje matematičnih pojmov. Računala v nobenem koraku reševanja nalog kandidatom niso v pomoč in jim ne olajšajo dela, saj menimo, da morebitni preizkus rezultata z računalom ne pomeni bistvene prednosti.

Take naloge lahko uvrstimo na obe izpitni poli in jih na obeh tudi enako vrednotimo. Oglejmo si dva primera.

Primer 1: (Splošna matura – avgust 2020, naloga 11)

Za funkcijo $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ velja, da je $f(1) = 1$ in $f'(x) = 2x - 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Zapišite predpis funkcije f.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
11	**6**	Zapisan predpis funkcije f npr. $f(x) = x^2 - x + 1$.	Zapis ali uporaba povezave z nedoločenim integralom, npr. napisan nastavek $\int(2x-1)dx$ ... 1 točka. Izračunan nedoločeni integral, npr. $\int(2x-1)dx = x^2 - x + C$ ... (1 + 1 + 1) 3 točke. Upoštevanje pogoja $f(1) = 1$ ... *1 točka.

Pri reševanju primera 1 morajo kandidati poznati zvezo med odvodom in nedoločenim integralom, za kar dobijo 1 točko. Za pravilno izračunan nedoločeni integral dobijo 3 točke; za vsak člen 1 točko, kar označuje oznaka (1 + 1 + 1). Za upoštevanje pogoja $f(1) = 1$ prejmejo 1 točko, ki je postopkovna točka, in jo dobi kandidat tudi, če je nepravilno izračunal nedoločeni integral in pravilno upošteval pogoj. Eno točko dobijo kandidati še za pravilen končni rezultat, torej za pravilno zapisan predpis funkcije. Ta točka ni zapisana posebej, saj je pravilno rešena naloga vredna 6 točk, v dodatnih navodilih pa je zapisano, kako kandidat prejme do pet točk, če je končen rezultat napačen.

Pri tej nalogi računala, ki so dovoljena na maturi iz matematike, kandidatom niso v pomoč, saj ne omogočajo računanja nedoločenega integrala. Tako lahko nalogo uvrstimo na prvo ali drugo izpitno polo in jo na obeh tudi enako vrednotimo.

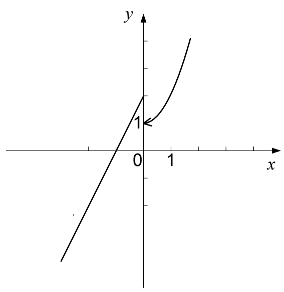
Primer 2: (Splošna matura **–** junij 2016, naloga 11)

Dana je funkcija s predpisom $f(x) = \begin{cases} x^2 + c; & x > 0 \\ 2x + 2; & x \leq 0 \end{cases}$

V koordinatni sistem narišite graf funkcije f za $c = 1$.
V katerih točkah je funkcija zvezna?

Določite vrednost konstante c tako, da bo funkcija f zvezna za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
11	**3**	Narisan graf funkcije 	Vsaka veja po 1 točko, pravilno narisan graf v $x = 0$ ... 1 točka. Le narisani premica in parabola ... 1 točka.
	1	Funkcija je zvezna za vse x, razen za $x = 0$.	
	1	Funkcija je zvezna za $c = 2$.	
Skupaj	**5**		

Tudi pri primeru 2 računala, ki so dovoljena na maturi, naloge ne razvrednotijo, ker ne omogočajo risanja grafov funkcij. Kandidati si lahko z računalom pomagajo tabelirati vrednosti funkcije, vendar to lahko naredijo tudi brez računala, pri tem pa ne porabijo veliko dodatnega časa. V drugem delu naloge je ključno razumevanje zveznosti funkcij, pri čemer računalo ne pomaga. Tudi to nalogo lahko uvrstimo na obe izpitni poli z enakim točkovnikom.

Naloge tipa P12T – naloge, ki jih različno vrednotimo glede na rabo računala

Naloge, ki jih različno vrednotimo glede na uporabo ali neuporabo računal, so naloge, pri katerih uporaba računala pri reševanju kandidatom nudi pomoč. Nalogo lahko uvrstimo na obe izpitni poli, vendar se naloga glede na to, koliko uporaba računala vpliva na sam potek reševanja, vrednoti drugače, če je umeščena na izpitno polo z računalom, kot če je na izpitni poli brez računala.

V to skupino bi tako uvrstili vse naloge, kjer morajo kandidati v postopku reševanja naloge npr. rešiti enačbo ali izračunati določeni integral, in naloga ne preverja cilja, ali kandidat zna npr. rešiti enačbo oziroma izračunati določeni integral. Če je osrednji cilj naloge rešiti enačbo ali izračunati določeni integral, potem naloga spada izključno na polo brez računala. Oglejmo si nekaj primerov.

Primer 3: (nova naloga)

Izračunajte, za katere vrednosti x so $x + 1$, $3x + 1$, $3x^2 - 1$ prvi trije zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Koliko členov naraščajočega aritmetičnega zaporedja je manjših od 5500?

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	5	$x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{3}$	Zapis ali uporaba zveze med zaporednimi členi aritmetičnega zaporedja … 1 točka. Ureditev enačbe, npr. $3x^2 - 5x - 2 = 0$ … 1 točka. Uporaba ali zapis formule za reševanje kvadratne enačbe ali razcep enačbe … 1 točka.
	3	Od 5000 je manjših 1375 členov.	Le izračun prvega člena $a_1 = 3$ ali diference $d = 4$ … 1 točka. Zapis neenačbe $4n - 1 < 5500$ … *1 točka.
Skupaj	**8**		

Točkovnik primera 3 je pripravljen za nalogo na prvi izpitni poli brez računala. Kandidat mora poznati zvezo med zaporednimi členi aritmetičnega zaporedja, za kar dobi eno točko. Za urejanje kvadratne enačbe dobi eno točko. Kandidat dobi še točko za uporabo formule za reševanje kvadratne enačbe in po eno točko za vsako rešitev, kar ni zapisano med dodatnimi navodili. Prvi del naloge je tako ovrednoten s petimi točkami. V drugem delu naloge kandidat izračuna prvi člen zaporedja in diferenco, zapiše in reši neenačbo ter napiše odgovor, kar je ovrednoteno s tremi točkami. Naj omenimo še, da kandidat prejme 1 postopkovno točko za zapisano neenačbo z napačnim izračunom prvega člena ali diference.

Če bi nalogo uvrstili na polo z računalom, moramo upoštevati, da nekatera računala zmorejo rešiti kvadratno enačbo, če vnesemo njene koeficiente. Kandidati, ki takšnega računala nimajo, bi bili v nekoliko slabšem položaju, kljub temu da lahko enačbo rešijo brez računala po formuli. Točkovnik bi za drugo izpitno polo spremenili tako, da kandidati ne bi dobili točke za uporabo formule za reševanje kvadratne enačbe, zapisani rešitvi enačbe pa bi vrednotili z eno točko. Tako bi prvi del naloge vrednotili s 3 točkami, točkovnik drugega dela bi ostal nespremenjen. Celotna naloga bi bila vredna 6 točk.

Pri tovrstnih nalogah na drugi izpitni poli izhajamo iz predpostavke, da je kandidat, ki je kvadratno enačbo rešil z računalom, ravno tako kot kandidat, ki je nalogo rešil z uporabo formule brez računala ali pa je računalo uporabil samo za preračunavanje rešitev, pokazal neko znanje oziroma spretnost. V konkretnem primeru ocenjujemo, da razlike v zmogljivosti računal niso bistvene oziroma niso tako velike, da naloge ne bi bilo mogoče uporabiti na maturi.

Primer 4: (Splošna matura – junij 2017, naloga 11)

Dani sta realni funkciji *f* in *g* s predpisoma $f(x) = x^2$ in $g(x) = 6 - x$. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij *f* in *g*.

Točkovnik

Naloga	**Točke**	**Rešitev**	**Dodatna navodila**
11	**2**	Izračunani abscisi presečišč grafov $x_1 = -3$ in $x_2 = 2$.	Le zapis enačbe $x^2 = 6 - x$ ... 1 točka.
	2	Zapis, npr. $\int_{-3}^{2}(6-x-x^2)\,\mathrm{d}x$	Pravilno zapisani meji določenega integrala … *1 točka. Pravilno zapisan integrand … 1 točka. Upoštevamo tudi $\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)\,\mathrm{d}x$.
	3	Rezultat $S = \frac{125}{6}$	Le izračun nedoločenega integrala (tudi brez C) $\int(6-x-x^2)\,\mathrm{d}x = 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$ ... 1 točka. Le pravilno vstavljene meje ... *1 točka.
Skupaj	**7**		

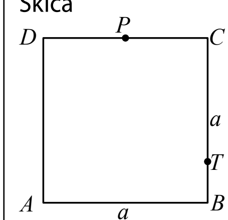
Točkovnik primera 4 je pripravljen za nalogo na izpitni poli brez računala. Ker je kvadratna enačba zelo preprosta, kandidat ne dobi točk za postopek reševanja enačbe, temveč le dve točki za njeni rešitvi. Enačbo lahko reši z razstavljanjem ali z uporabo formule za reševanje kvadratne enačbe. Dve točki dobi kandidat za zapis določenega integrala, pri čemer dobi postopkovno točko za zapisani integracijski meji, četudi ju je izračunal napačno. Za računanje določenega integrala dobi kandidat 3 točke, pri čemer dobi eno točko za izračun nedoločenega integrala in eno točko za pravilno vstavljanje mej. Ta točka je postopkovna točka, kar pomeni, da jo dobi tudi, če je nedoločeni integral izračunal narobe. Tretjo točko dobi kandidat za izračunano vrednost določenega integrala in zapisano ploščino območja.

Naloga je primerna tudi za drugo polo s smiselno spremenjenim točkovnikom. Kandidat bi na enak način dobil prve štiri točke, pri čemer bi lahko kvadratno enačbo rešil z uporabo računala ali brez. Od zadnjih treh točk bi kandidat dobil le 1 za zapisan rezultat $S = \frac{125}{6}$. Kandidat je določeni integral lahko izračunal z računalom ali brez, zato mu točke za izračun nedoločenega integrala in točke za pravilno vstavljene meje ne dodelimo. Na poli 2 bi celotno nalogo vrednotili s 5 točkami.

Primer 5: (Splošna matura – junij 2020, naloga 6)

V kvadratu z oglišči *A*, *B*, *C*, *D* in stranico dolžine *a* je točka *P* razpolovišče stranice *CD*. Točka *T* leži na stranici *BC* tako, da je $|BT| : |TC| = 1 : 3$. Narišite skico.
Z vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ izrazite vektorja $\overrightarrow{AT}$ in $\overrightarrow{AP}$.
Preverite, da je skalarni produkt vektorjev $\overrightarrow{AT}$ in $\overrightarrow{AP}$ enak $\frac{3}{4}a^2$.

Točkovnik

Naloga	**Točke**	**Rešitev**	**Dodatna navodila**
6	**1**	Skica 	
	1	Zapisan vektor $\overrightarrow{AT} = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$	
	1	Zapisan vektor $\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$	
		1. način	
	4	Izračunan skalarni produkt $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AP} = \left(\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a}\vec{a} + \frac{9}{8}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}\vec{b} = \frac{3}{4}a^2$	Upoštevanje distributivnosti ... *1 točka. Upoštevanje $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$ ali $\vec{b}\cdot\vec{b} = a^2$... 1 točka. Upoštevanje $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ... 1 točka.
		2. način	
	1	Zapis ali uporaba definicije skalarnega produkta, npr. $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AP} = \lvert\overrightarrow{AT}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AP}\rvert\cdot\cos\varphi$	
	1	Izračunan kot φ npr. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \left(\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{2}\right)$	

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	1	Izračunani dolžini, npr. $\lvert\overrightarrow{AT}\rvert=\frac{a\sqrt{17}}{4}$, $\lvert\overrightarrow{AP}\rvert=\frac{a\sqrt{5}}{2}$	
	1	Izračunan skalarni produkt $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}a^2$	
Skupaj	7		Če kandidat rezultat zapiše s približnimi vrednostmi, npr. $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AP}=0{,}749a^2$, se mu zadnja točka ne dodeli.

V primeru 5 kandidat v prvem delu naloge izrazi vektorja v obliki linearne kombinacije danih vektorjev, v drugem delu pa izračuna njun skalarni produkt, za kar ima dve možnosti.

Prva možnost je, da izračuna produkt vektorjev, ki sta linearni kombinaciji danih vektorjev, in pri tem uporabi distributivnost množenja linearnih kombinacij vektorjev. Pri tem upošteva, da je skalarni produkt pravokotnih vektorjev enak 0. Kandidat dobi postopkovno točko, če je za napačno zapisani linearni kombinaciji vektorjev pravilno uporabil distributivnost množenja. Nalogo lahko reši brez uporabe računala, zato jo lahko uvrstimo na izpitno polo brez računala.

Druga možnost je, da si kandidat v drugem delu naloge pri reševanju lahko pomaga z računalom, če mu ga dovolimo. Najprej izračuna dolžini obeh vektorjev $\overrightarrow{AT}$ in $\overrightarrow{AP}$ (lahko brez računala) in kot med njima (z računalom). Po definiciji skalarnega produkta nato izračuna zahtevani skalarni produkt, pri čemer je natančnost rezultata odvisna od kandidata. Kandidat lahko vmesne rezultate zaokroži, kar vodi k ne dovolj natančnemu rezultatu. To pomeni, da je v tem primeru dovoljena uporaba računala lahko celo zavajajoča. Če je kandidat kljub uporabi računala dobil natančen rezultat, mu seveda dodelimo vse točke, sicer pa kljub pravilnemu postopku ne.

Če torej nalogo uvrstimo na polo z računalom, pričakujemo, da računalo kandidatom služi le za trivialne izračune, saj jih v prvem delu naloge usmerimo, da izrazijo dana vektorja kot linearno kombinacijo baznih vektorjev in da bodo z uporabo distributivnosti in upoštevanjem pravokotnosti baznih vektorjev izračunali skalarni produkt.

Naloge tipa P1 – naloge, ki so z uporabo računala razvrednotene

Naloge brez računala so naloge, pri katerih je cilj uporaba računskih postopkov, poznavanje formul in podobno. S temi nalogami preverjamo tako razumevanje matematičnih pojmov kot tudi veščine. Z uporabo računala taka naloga izgubi smisel in postane trivialna. V skrajnem primeru uporaba računala nalogo razvrednoti ali pa postavlja dijake z zmogljivejšimi računali v zelo privilegiran položaj.

Naloge brez računala omogočajo preverjanje pomembnih ciljev, ki jih na poli z dovoljenim računalom ne moremo preverjati. Vpeljava pole brez računala je zato prinesla dodano vrednost mature, saj lahko na ta način dijakom omogočimo, da pokažejo tudi osnovna znanja in razumevanje pojmov tako, da rešujejo preprostejše krajše naloge, ki bi jih uporaba računala razvrednotila. V času pisanja tega prispevka izkušenj s polami brez računala še nimamo, saj je bila za leto 2021 zaradi epidemiološke situacije sprejeta prilagoditev mature, da so dijaki na obeh polah lahko uporabljali računala. Pole so bile temu primerno prilagojene, tako da so bile prej omenjene naloge izločene in nadomeščene z drugimi. Za ilustracijo smo izbrali tri primere, ki jih najdemo v zbirki Matematika – Nekaj kratkih nalog na splošni maturi [8].

Primer 6: (Preizkus 1 brez računala, naloga 2)

Delno korenite in izračunajte $\sqrt{20}-\sqrt{80}+3\sqrt{125}$.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	2	Rezultat $13\sqrt{5}$	Delno korenjenje $\sqrt{20}=2\sqrt{5}, \sqrt{80}=4\sqrt{5}$, $\sqrt{125}=5\sqrt{5}$, … 1 točka.

V primeru 6 je cilj naloge preveriti, ali kandidat obvlada delno korenjenje. Ker večina računal izračuna vrednost izraza in rezultat delno koreni, naloga ni primerna za izpitno polo z računalom.

Primer 7: (Preizkus 6 brez računala, naloga 4)

Rešite enačbo $2x^2 - 16x = -30$.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	3	$x_1 = 3, x_2 = -1$	Poenostavitev enačbe, npr. $2x^2 - 16x + 30 = 0$. … 1 točka. Poenostavitev in razcep na linearne faktorje oziroma zapis ali uporaba formule za rešitvi kvadratne enačbe ali razcep tričlenika … *1 točka.

Z nalogo v primeru 7 želimo preveriti, ali kandidati znajo rešiti kvadratno enačbo bodisi z razcepom bodisi z uporabo formule, zato uporaba računala ni primerna, saj večina računal reši kvadratno enačbo. Za poenostavitev enačbe dobi kandidat eno točko. Prav tako dobi eno točko za pravilen postopek reševanja enačbe, ki je postopkovna točka. Kandidat jo dobi, če napačno uredi kvadratno enačbo, a pravilno uporabi postopek njenega reševanja. Tretjo točko dobi za pravilno zapisani rešitvi enačbe. Nalogo bi uvrstili na izpitno polo brez računala.

Primer 8: (Preizkus 3 brez računala, naloga 4)

Naj bo $z = 2 - i$. Za dani z izračunajte $(\overline{z} + 1)^2$.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	3	$8 + 6i$	Zapis ali uporaba $\overline{z} = 2 + i$ … 1 točka. Zapis ali uporaba $i^2 = -1$ … 1 točka.

Cilj naloge v primeru 8 je računanje s kompleksnimi števili. Kandidat mora poznati konjugirano vrednost kompleksnega števila, za kar dobi eno točko, in $i^2 = -1$, za kar dobi eno točko. Za poenostavljanje izraza in kvadriranje dvočlenika ter zapis končnega rezultata dobi kandidat eno točko.

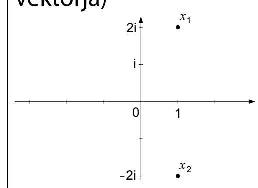
Če bi nalogo uvrstili na polo z računalom, bi jo popolnoma razvrednotili, saj zmogljivejša računala računajo s kompleksnimi števili. Kandidat bi le vnesel podatke (računala imajo tudi ukaz za konjugirano vrednost) in dobil končen rezultat.

Poglejmo še primera nalog, ki postavljata dijake z zmogljivejšimi računali v privilegiran položaj.

Primer 9: (Splošna matura – avgust 2013, naloga 3)

Rešite enačbo $x(x - 2) + 5 = 0$ in narišite rešitvi v dani kompleksni ravnini.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
3	**3**	Rešitvi enačbe, npr. $x_{1,2} = 1 \pm 2i$.	Zapis ali uporaba formule za reševanje kvadratne enačbe … *1 točka. Ugotovitev $\sqrt{-16} = 4i$ … 1 točka.
	2	Rešitev v kompleksni ravnini (točki ali vektorja) 	Pravilno predstavljeni kompleksni števili … (*1 + 1) 2 točki
Skupaj	**5**		

Cilj naloge v primeru 9 je zopet preveriti znanje reševanja kvadratne enačbe – tokrat enačbe, ki ima kompleksni rešitvi. Za zapis ali uporabo formule za reševanje kvadratne enačbe dobi kandidat 1 točko, ki je postopkovna. Kandidat jo dobi tudi, če je enačbo napačno uredil, koeficiente enačbe pa pravilno vstavil v formulo. Tretjo točko dobi za pravilno zapisani rešitvi enačbe. V drugem delu dobi kandidat po eno točko za vsako pravilno predstavljeno kompleksno število v kompleksni ravnini. Kandidat dobi postopkovno točko, če kvadratno enačbo napačno reši, napačni rešitvi pa pravilno predstavi v kompleksni ravnini.

Ker zmogljivejša računala, ki so dovoljena na maturi, znajo računati s kompleksnimi števili, mora biti naloga v izpitni poli brez računala, sicer bi bili kandidati z manj zmogljivimi računali v slabšem položaju. Naloga je ob uporabi računala skoraj popolnoma razvrednotena, saj jo je mogoče rešiti (prvi del) z uporabo računala brez znanja, kako se rešuje kvadratna enačba. Ker je drugi del naloge odvisen od rezultata prvega dela, so ti kandidati tudi pri reševanju drugega dela v bistveni prednosti pred kandidati, ki rešujejo kvadratno enačbo brez računala in se morda kljub poznavanju postopka pri reševanju zmotijo.

Primer 10: (Splošna matura – junij 2016, naloga 1)

Za poljubni naravni števili m in n označimo z $D(m, n)$ največji skupni delitelj teh dveh *števil in* z $v(m, n)$ njun najmanjši skupni večkratnik.

1.1 Razcepite števila 45, 48 in 60 na prafaktorje.

1.2 Izračunajte $\left(\frac{D(45,\ 48)}{D(48,\ 60)} - \frac{D(11,\ 23)}{v(4,\ 10)}\right) \cdot v(5, 20)$.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
1.1	**2**	$45 = 3^2 \cdot 5$ $48 = 2^4 \cdot 3$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$	Le dva pravilna razcepa ... 1 točka. Upoštevamo tudi drugačen zapis prafaktorjev.

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
1.2	1	$D(48, 60) = 12$	Zapis posamezne vrednosti ali vstavljena vrednost v dani izraz.
	1	$D(45, 48) = 3$	
	1	$D(11, 23) = 1$	
	1	$v(4, 10) = 20$	
	1	$v(5, 20) = 20$	
	1	$\left(\frac{D(45,\ 48)}{D(48,\ 60)} - \frac{D(11,\ 23)}{v(4,\ 10)}\right) \cdot v(5,\ 20) = 4$	
Skupaj	8		

Naloga v primeru 10 ima več ciljev. V prvem delu kandidati zapišejo dana števila kot produkt praštevilskih potenc, kar zmorejo tudi nekoliko zmogljivejša računala. Drugi del naloge, v katerem je treba izračunati največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik števil, bodo kandidati reševali brez računala, saj računala zaenkrat tega ne zmorejo. V tretjem delu naloge, ko je treba izračunati vrednost izraza, lahko kandidati zopet uporabijo računalo. Nalogo bi zaradi prvega in tretjega dela uvrstili na izpitno polo brez računala, da bi vsem kandidatom zagotovili enake možnosti.

Za ilustracijo je bilo navedenih le nekaj primerov, pri katerih je pokazano, kako računalo bodisi razvrednoti naloge bodisi kandidate postavi v neenakovreden položaj. Omenimo še nekaj podobnih nalog, ki jih reši nekoliko bolj zmogljivo računalo ob vnosu podatkov (preverjeno na računalu CASIO fx-991EX):

Natančno izračunajte $0{,}8\overline{3} \cdot 0{,}12$.

Rešite sistem enačb $5x - 4y = 1$ in $3x + 2y = 5$.

Rešite enačbo $\log_2(x + 2) = 2$.

Rešite enačbo $3^{x-1} = 27 \cdot 9^x$.

Rešite neenačbo $x^2 - 2x - 3 < 0$.

Rešite enačbo $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$.

Rešite neenačbo $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 > 0$.

Dana je funkcija $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Izračunajte $f'(2)$.

Izračunajte $\int_{-1}^{3} (x^2 - 2)dx$.

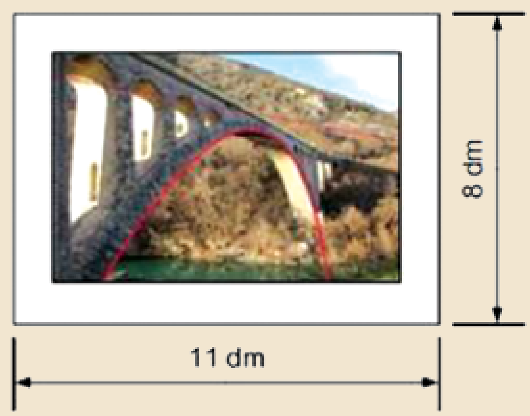
Izračunajte $\sum_{i=1}^{10} (3i - 1)$.

Naloge tipa P2 – naloge, pri katerih potrebujemo računalo

Naloge z računalom so naloge, pri katerih je računalo potrebno, saj je brez njega reševanje zahtevno in dolgotrajno ali pa naloge brez računala sploh ne moremo rešiti. Najpogosteje so to naloge, kjer so zahtevani decimalni približki, naloge iz procentnega računa, geometrijske naloge, ki jih rešimo z uporabo kotnih funkcij … Tovrstne naloge so lahko izključno na poli z računalom.

Primer 11: (Splošna matura – junij 2014, naloga 12)

Zunanji rob okvira slike je je pravokotnik dimenzij 11 dm × 8 dm. Okvir slike je ob vseh štirih robovih enako širok. Znotraj notranjega roba okvira je slika s ploščino 61,75 dm². Izračunajte širino okvira.



Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
12	**1. način**		
	1	Izbira širine roba za neznanko, npr. x	
	1	Zapis dolžine slike, npr. $11 - 2x$ ali $11 - y$	
	1	Zapis širine slike, npr. $8 - 2x$ ali $8 - y$	
	1	Zapis enačbe, npr. $(11 - 2x)(8 - 2x) = 61{,}75$	
	1	Urejena enačba, npr. $16x^2 - 152x + 105 = 0$	
	1	Zapis rešitev $x_1 = 8{,}75$ dm, $x_2 = 0{,}75$ dm	
	1	Izločena neustrezna rešitev 8,75 dm ali zapisan odgovor	

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	2. način		
	1	Izbira širine roba za neznanko, npr. x	
	1	Ploščina okvirja je 26,25 dm^2	
	2	Zapis ploščine okvirja z neznanko, npr. $11 \cdot 2x + (8 - 2x) \cdot 2x$	Le en člen ... 1 točka.
	1	Urejena enačba, npr. $4x^2 - 38x + 26{,}25 = 0$	
	1	Zapis rešitev $x_1 = 8{,}75$ dm, $x_2 = 0{,}75$ dm	
	1	Izločena neustrezna rešitev 8,75 dm ali zapisan odgovor	
Skupaj	**7**		Če je kandidat nalogo pravilno rešil s poskušanjem, dobi vse točke.

Primer 11 je zanimiva problemska naloga, pri kateri lahko kandidati spretno rešijo kvadratno enačbo z računalom, če jim računalo to seveda omogoča, ali pa si z računalom pomagajo pri reševanju kvadratne enačbe, če se je lotijo po formuli. Ker je reševanje kvadratne enačbe rutinski postopek, kandidati z zmogljivejšim računalom niso v veliki prednosti. Pri reševanju po formuli je računalo v največjo pomoč pri računanju kvadratnega korena diskriminante. Nalogo bi vsekakor uvrstili na polo z računalom.

Primer 12: (Splošna matura – junij 2018, naloga 12)

Kurilno olje je mogoče naročiti v trgovini *A* ali v trgovini *B*. Doplačati je treba tudi prevoz. Cene za liter olja in za prevoz so podane v spodnji preglednici. Cena prevoza je v obeh trgovinah neodvisna od količine kupljenega olja in od razdalje.

	Trgovina A	Trgovina B
Cena za liter olja	0,811 €	0,795 €
Cena prevoza	36 €	51 €

Jure ima posodo za kurilno olje v obliki kvadra. Široka je 8 dm, dolga 17 dm in visoka 12,5 dm. Jure je izmeril, da olje v posodi sega do višine 3 dm. Dokupil bo toliko olja, da bo posoda polna do vrha.

V kateri od trgovin, *A* ali *B*, bo Jure kupil kurilno olje, da bo za olje s prevozom plačal manj? Koliko bo plačal? Zapišite odgovor.

Pri kateri količini olja bo za olje in prevoz skupaj plačal v obeh trgovinah enako? V kateri trgovini bo nakup olja cenejši za večje in v kateri za manjše količine olja?

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
12.1	**2**	Izračunana prostornina olja, ki ga mora Jure dokupiti, npr. $V = 1292\ \ell$	Le uporaba formule za prostornino kvadra ... *1 točka.
	3	Odgovor, npr.: Jure bo kupil kurilno olje v trgovini B, plačal bo 1078,14 €	Le izračun cene za plačilo v trgovini A: 1083,81 € ... 1 točka. Le izračun cene za plačilo v trgovini B: 1078,14 € ... 1 točka.
12.2	**1**	Izračun ali ugotovitev mejne vrednosti, npr. 937,5 ℓ	
	1	Odgovor: Nakup količine olja, manjše od 937,5 ℓ je cenejši v trgovini A, večje od 937,5 ℓ pa v trgovini B.	
Skupaj	**7**		

Problemska naloga v primeru 12 je sestavljena iz dveh delov, kjer morajo kandidati računati z decimalnimi števili. Postopkovno točko dobi kandidat, ki je uporabil napačne podatke za izračun količine olja, ki jo mora kupiti Jure, a je uporabil pravilno formulo za prostornino kvadra. Ker cilj naloge ni preverjati znanje računanja z decimalnimi števili, je smiselno, da kandidatom dovolimo uporabo računala, zato bi nalogo uvrstili na polo z računalom.

Primer 13: (Splošna matura – junij 2019, naloga 6)

V trikotniku *ABC* stranica *AB* meri 6 cm. Kot $\alpha = \sphericalangle BAC$ meri 70° in kot $\gamma = \sphericalangle ACB$ meri 30°. Izračunajte dolžino stranice *AC* in ploščino trikotnika ΔABC. Rezultata zaokrožite na dve decimalki.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
6	**1. način**		
	4	Izračunan približek dolžine stranice AC, $\lvert AC\rvert \doteq 11{,}82$ cm	Izračunan $\beta = 80°$ ... 1 točka. Zapis ali uporaba sinusnega izreka za izračun stranice $b = \lvert AC\rvert$, $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$ ... *1 točka. Izračunan $b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{6 \cdot \sin 80°}{\sin 30°}$ ... 1 točka.
	2	Izračunan približek ploščine trikotnika ABC, $S \doteq 33{,}31$ cm^2	Zapis ali uporaba formule, npr. $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$ ... *1 točka.
	2. način		
	4	Naj bo N nožišče višine na AC. Izračunan približek dolžine stranice AC, $\lvert AC\rvert = \lvert AN\rvert + \lvert NC\rvert \doteq 11{,}82$ cm	Zapis ali uporaba $\lvert AN\rvert = c \cdot cos\,\alpha$ ... 1 točka. Zapis ali uporaba $v_{AC} = c \cdot sin\,\alpha$ ... 1 točka.
	2	Izračunan približek ploščine trikotnika ABC, $S \doteq 33{,}31$ cm^2	Zapis ali uporaba formule, npr. $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$ ... *1 točka.
Skupaj	6		Če kandidat nikjer pri rezultatih ne zapiše enot, se mu odšteje 1 točka.

Primer 13 je standardna geometrijska naloga, pri kateri je cilj, da iz danih podatkov izračunajo dolžino stranice in ploščino trikotnika. Kandidati morajo izkazati geometrijsko predstavo in uporabo formul za razreševanje trikotnika. Postopkovne točke dobi kandidat, ki je uporabil pravilne formule, a je vstavil svoje predhodno napačno izračunane podatke. Kandidati naloge ne morejo rešiti brez uporabe računala, zato bi jo uvrstili na izpitno polo z računalom.

Kljub temu moramo opozoriti na natančnost končnih rezultatov. Ker je oblika rezultata predpisana, se priznata le rezultata za pravilno dolžino stranice in pravilno ploščino trikotnika, ki sta zapisana v rešitvah. Pri popravljanju naloge je bilo opaziti predvsem dve vrsti napak.

Prva napaka je izvirala iz zaokroževanja vmesnih rezultatov. Kandidati so tudi vmesne rezultate zaokroževali na dve decimalki, zato sta bila končna rezultata posledično napačna. Težavi se seveda lahko izognemo, če vmesne rezultate zapišemo z vsemi decimalkami, ki jih vrne računalo. Pravi način je seveda uporaba spomina v računalu.

Druga napaka pa je izvirala le iz napačno zaokroženega končnega rezultata. Kandidati so lahko vmesne rezultate zapisali točno, kot je predvideno v točkovniku, končen rezultat pa so zaokrožili narobe. Tako je bil rezultat napačen, če so dolžino stranice AC zaokrožili na 11,81 cm.

Kandidate je treba vsa leta izobraževanja in pred izpitom opozarjati na pravilen način reševanja podobnih nalog in na pravilno zaokroževanje rezultatov.

Zaključek

Informacijsko-komunikacijsko tehnologijo bodo maturanti kasneje uporabljali tudi pri opravljanju svojih poklicev, pa naj gre za poklic na družboslovnem, naravoslovnem, tehniškem ali kakem drugem področju. Pri mnogih poklicih si bodo s tako tehnologijo pomagali pri reševanju matematičnih problemov. Ker je zelo pomembno, da poleg uporabe take informacijsko-komunikacijske tehnologije zna uporabnik dobljene rezultate tudi kritično interpretirati, je prav, da se v gimnaziji dijak temeljito nauči osnov matematike, ki stoji za uporabo vsake take informacijsko-komunikacijske tehnologije.

Z maturitetnim izpitom iz matematike v prvi vrsti preverjamo osnovno znanje matematike, le v manjši meri pa tudi spretnost uporabe informacijsko-komunikacijske tehnologije pri matematiki. Pouk matematike, s težiščem na razumevanju osnovnih pojmov in konceptov brez uporabe računala ter njegova nadgradnja s smiselno uporabo tehnologije (na primer) pri modeliranju praktičnih problemov, je verjetno pravi recept za uspeh.

Avtorji želimo, da bodo primeri s komentarji v tem članku in vzorčna izpitna pola, ki je objavljena na spletni strani Državnega izpitnega centra [3], učiteljem v pomoč pri pripravi primernih nalog za pripravo na maturitetni izpit. Verjamemo, da je pomembno, da se dijaki navadijo na reševanje nalog z računali in brez računal, zato močno priporočamo sprotno preverjanje in ocenjevanje znanja s testi obeh vrst, z računali in brez računal. Ponovno spomnimo, da je v nekaterih primerih smiselno glede na uporabo pripomočkov različno vrednotenje rešitev in da je temu prilagojeno treba tudi razumeti, da se pričakovani zapis rešitve, »jasno in korektno predstavljena pot do rezultata«, lahko nekoliko razlikuje.

Maturitetni izpit z dvema polama v prihodnosti omogoča večjo prilagodljivost na hitre spremembe tehnologije. Tu je treba poudariti že večkrat zapisano in povedano – maturitetni izpit je zaključek gimnazijskega programa, preverja vsebine in cilje, ki so definirani v učnem načrtu in ki jih bodoči maturanti spoznavajo v štirih letih pouka na gimnaziji. Vsaka bistvena sprememba, na primer vpeljava nalog, ki bi na maturi preverjala netrivialno uporabo tehnologije, mora zato biti vpeljana postopoma in zelo premišljeno.

Zahvala

Razvrstitev in razmislek o točkovnikih za maturitetne naloge po novem katalogu je začela predmetna maturitetna komisija ob pripravi kataloga. Zahvaljujemo se Mateji Fošnarič, ki nam je odstopila gradivo, ki ga je pripravila v času svojega sodelovanja v komisiji. Člani predmetne komisije za matematiko, Alojz Grahor, Barbara Kušar, Peter Šemrl in Rok Škufca, so pregledali osnutek članka. Zahvaljujemo se jim za konstruktivne predloge in komentarje.

Viri

[1] Banič I., Erker J., Fošnarič M., Grahor A., Levstek T., Škrlec M., Žerovnik J. (2019). *Predmetni izpitni katalog za splošno maturo 2021 – matematika.* Državni izpitni center, Ljubljana. (Dostopno na

https://www.ric.si/mma/m-mat-2021/2019082714564660/?m=1566910606, 30. marec 2022)

[2] Banič, I., Erker, J., Fošnarič, M., Grahor, A., Levstek, T., Škrlec, M., Žerovnik, J. (2019). Novosti na splošni maturi 2021 pri predmetu matematika. *Obzornik za matematiko in fiziko*, l. 66, št. 5, str. 161–171.

[3] Državni izpitni center (Dostopno na: https://www.ric.si/splosna-matura/predmeti/matematika/, 30. marec 2022)

[4] Državni izpitni center: *Kaj je simbolno računanje?* (Dostopno na https://www.ric.si/mma/Kaj%20je%20simbolno%20racunanje/2013030714080489/, 30. marec 2022)

[5] Državni izpitni center: *Kaj je žepno računalo?* (Dostopno na https://www.ric.si/mma/Kaj%20je%20zepno%20racunalo%20 2015/2015050811441908/, 30. marec 2022)

[6] Erker, J., Fošnarič, M., Grahor, A., Levstek, T., Škrlec, M., Žerovnik, J.: Primerljivost izpitov na osnovni in višji ravni pri predmetu matematika na splošni maturi. *Obzornik za matematiko in fiziko,* 2020, letn. 67, št. 1, str. 1–11.

[7] Flynn, P., McCrae, B.: *Issues in Assessing the Impact of CAS on Mathematics Examinations* (Dostopno na https://www.researchgate.net/publication/229000780_Issues_in_assessing_the_impact_of_CAS_on_mathematics_examinations, 2. marec 2022)

[8] Grahor, A., Kušar, B., Pustavrh, S., Šemrl, P., Škufca, R., Vreš, S., Žerovnik, J. (2021). *MATEMATIKA Nekaj kratkih nalog na splošni maturi;* 1. izdaja - elektronsko gradivo. RIC, Ljubljana. (Dostopno na https://www.ric.si/mma/zbirka-kratkih-nalog-sm-matematika-2021-pdf/2021042916082181/?m=1619705301, 2. marec 2022)

[9] Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B., Lehmann, E.: Indispensable manual calculation skills in a CAS-invironment. V zborniku *Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy*, Portorož, Slovenia. (Dostopno na https://atcm.mathandtech.org/EP/2000/ATCMP123/fullpaper.pdf, 30. marec 2022)

[10] Kokol-Voljč, V. (2000): Examination questions when using CAS for school mathematics teaching. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(1), str. 63–76. Kokol-Voljč, V. Exam questions when using CAS for school mathematics teaching (Dostopno na http://rfdz.ph-noe.ac.at/kongress/1999goesing/g_kokol.pdf, 2. marec 2022)

[11] Mac Aogáin, E.: Assessment in the cas age: an Irish perspective. Exam Questions and Basic Skills in Technology Supported Mathematics Teaching. Zbornik *Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy, Portorož, Slovenia*. (Dostopno na https://www.researchgate.net/publication/229000780_Issues_in_assessing_the_impact_of_CAS_on_mathematics_examinations, 30. marec 2022)

[12] Mao, Y., White, T., Sadler, P. M., Sonnert, G. (2017). The association of precollege use of calculators with student performance in college calculus, *Educ Stud Math 94*: 96–83. doi 10.1007/s10649-016-9714-7

[13] Roškar, K., Lokar, M. (2007). Matura iz matematike v luči tehnologije = Final External Examination - Matura in the View of Technology. V: BOHANEC, Marko (ur.), et al. *Zbornik 10. mednarodne multikonference Informacijska družba - IS 2007, 8.-12. oktober 2007: zvezek A = Proceedings of the 10th International Multiconference Information Society - IS 2007, 8th-12th October 2007, Ljubljana, Slovenia: volume A*. Ljubljana: Institut »Jožef Stefan«, 2007. Str. 159. Informacijska družba. (Dostopno na https://lokar.fmf.uni-lj.si/www/osebno/clanki/Vivid07/RoskarLokar.pdf, 2. marec 2022)

[14] Žakelj, A. idr. (2008). *UČNI načrt. Matematika.* [Elektronski vir]. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. (Dostopno na: http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2018/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf, 30. marec 2022)