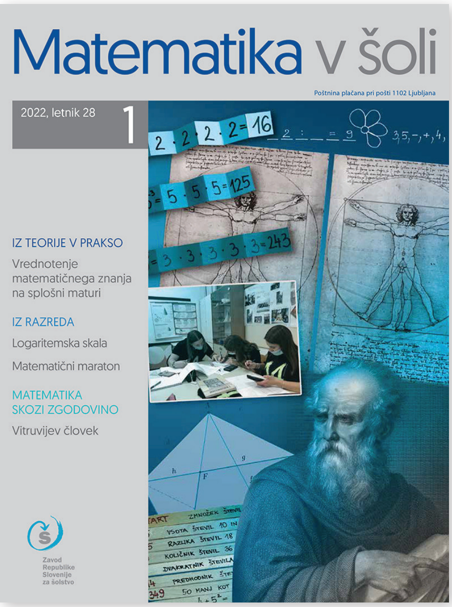
Naslov članka/Article: Vitruvijev človek

Avtor/Author: **Dr. Borut Jurčič Zlobec**

DOI:



Matematika v šoli št. 1/2022, letnik 28
ISSN 1318-010X
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2022

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Vitruvijev človek

Dr. Borut Jurčič Zlobec
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

1 Uvod

Kakšno je razmerje med premerom krožnice in stranico kvadrata na sloviti skici Leonarda da Vincija Vitruvijev človek? Odgovor na to vprašanje bomo poiskali v okoliščinah, v katerih je skica nastala. Da bi bolje razumeli okoliščine nastanka skice, si bomo med drugim pogledali njeno zgodovinsko ozadje.

2 Igralci v naši zgodbi

1. Pitagora se je rodil med letoma 580 in 569 in umrl 500 pred našim štetjem.

   Ustanovil je sekto, preko katere je širil svoje ideje. Zelo malo je znanega o njem neposredno, večinoma izvemo posredno preko njegovih naslednikov.

   Njegovi nasledniki (pitagorejci) so povsod videli naravna števila. Razmerja naravnih števil naj bi določala notranjo strukturo vesolja.

   Pitagora je že vedel, da je glasbeni ton posledica nihanja, na primer nihanja strune. Dolžina strune določa višino (frekvenco) tona. Vedel je, da so glasbeni toni, ki zvenijo hkrati in je razmerje njihovih frekvenc razmerje malih naravnih števil, ušesom prijetni.

   Pitagorejci so verjeli, da nebesna telesa zvenijo. Predstavljali so si, da ta zvenijo v tonih, katerih razmerje frekvenc so majhna naravna števila.

   Ta zven so imenovali harmonija sfer. Verjeli so, da se skrivnost sveta skriva v teh razmerjih.

2. Vitruvij se je rodil med letoma 80 in 70 in umrl pred letom 15 pred našim štetjem. Bil je rimski arhitekt in je poskušal prenesti razmerja, ki jih najdemo v naravi, v načrte za gradnjo. Posebej se je zanimal za razmerja, ki se skrivajo v dimenzijah človeškega telesa.

3. Luca Bartolomeo Pacioli se je rodil leta 1447 in umrl leta 1517. Bil je italijanski matematik in frančiškanski duhovnik. Prijateljeval je z Leonardom da Vincijem.

   Nas bo posebej zanimala njegova knjiga Divina proportione (napisana v Milanu v letih 1496–1498 in izdana v Benetkah leta 1509).

   Govori o božanskih razmerjih v geometriji in aritmetiki. Med drugim se ukvarja z razmerji, ki jih najdemo v pravilnih večkotnikih in platonskih poliedrih. Posebej ga je zanimal pravilni petkotnik, ki je bil zanj prava zakladnica. V pravilnem petkotniku je našel razmerje zlatega reza. Vendar mu ni nadel imena božansko razmerje, niti se ni spuščal v njegovo estetiko. Videti je, da so ga bolj zanimala razmerja pitagorejcev. Naslov knjige je treba razumeti bolj v smislu pitagorejcev, to je kot svet božanskih razmerij na splošno, ne pa da je knjigo posvetil enemu samemu razmerju.

3 Razmerje zlatega reza

Ker ima razmerje zlatega reza med umetniki in arhitekti močan mističen naboj, se vedno najdejo ljubitelji, ki povsod vidijo to razmerje.

V tridesetih letih, odkar sodelujem pri ocenjevanju raziskovalnih nalog iz matematike na srečanjih mladih raziskovalcev pod okriljem Zveze za tehnično kulturo, je bilo mnogo nalog na temo zlatega reza. Ni treba posebej poudarjati, da so mrzlično iskali razmerje povsod, kjer je in kjer ga ni.

Najbolj opiše ta odnos umetnikov in arhitektov do zlatega reza naslednji zapis:

Zlato razmerje pomeni vrata za razumevanje življenja. To razmerje imenujemo tudi božansko razmerje, ker predstavlja vrata v globlje razumevanje lepote, čudežnosti in duhovnosti življenja. Je skoraj neverjetno, da ima eno samo število *tolikšen vpliv v naravi,* človeški *zgodovini, znanosti, umetnosti in vsemirju v celoti.*

Ta zapis je, kot da bi ga prepisali od pitagorejcev, le da so oni govorili o racionalnih razmerjih, medtem ko je razmerje zlatega reza iracionalno število.

Ne samo to, razmerje zlatega reza je v nekem smislu celo najbolj iracionalno število od vseh iracionalnih števil. V kakšnem smislu je to število najbolj iracionalno, bomo zvedeli v nadaljevanju. Še več, pitagorejci so bili tako zaverovani v svoja racionalna razmerja, da je bila prava blasfemija, ko je eden od pripadnikov skupine, Hipas, povedal svetu, da je dokazal, da diagonala kvadrata ni v racionalnem razmerju s stranico tega kvadrata. To je povzročilo tako jezo med pitagorejci, da so Hipasa vrgli s čolna in je utonil.

Te zgodbe ne omenjajo sodobniki Hipasa, tako da je njena verodostojnost vprašljiva, vendar pa kaže na strogo disciplino znotraj skupine pitagorejcev, ki pa ni vprašljiva.

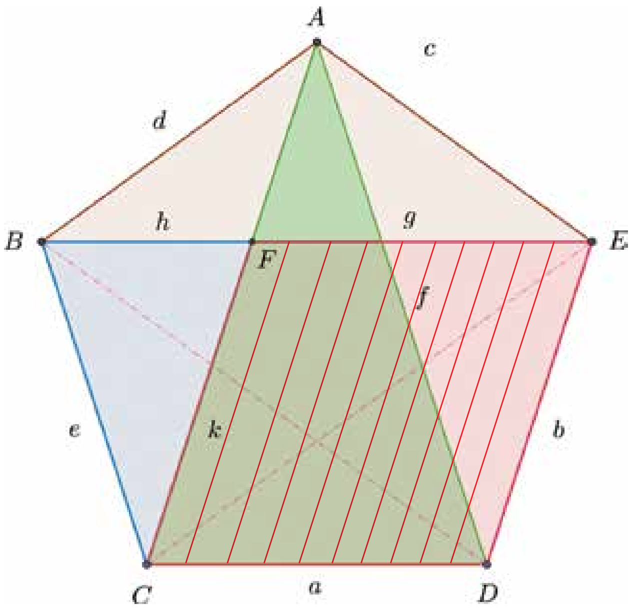
Dolžina diagonale kvadrata s stranico 1 je $\sqrt{2}$. Dokaz, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število, je preprost. Je lep primer matematičnega dokaza tipa *Reductio ad absurdum*.

Predpostavimo, da obstajata dve tuji (brez skupnih deliteljev) naravni števili m in n, da je

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}, \rightarrow m^2 = 2n^2, \rightarrow m = 2k, \rightarrow 4k^2 = 2n^2, \rightarrow 2k^2 = n^2.$$

Nujno mora biti m sodo število in od tod sledi, da je n liho število. Kvadrat lihega števila je vedno liho število. Vendar, če je m sodo število, je m^2 gotovo deljivo s 4, zato lahko enačbo delimo z 2. Na levi imamo še vedno sodo število, medtem ko je število na desni liho. To pa pripelje v protislovje. Torej $\sqrt{2}$ ni mogoče zapisati v obliki ulomka.

3.1 Zlati rez in pravilni petkotnik



Ker je v zvezi z Vitruvijem in ob da Vincijevi skici toliko govora o zlatem rezu, si bomo od blizu pogledali, kaj je Paciolija toliko privlačilo v razmerjih, ki jih najdemo v petkotniku. Na sliki je pravilni petkotnik, v katerem so vrisane diagonale in označeni trije liki znotraj petkotnika, ki nas bodo zanimali. Najprej poglejmo dva trikotnika, modri trikotnik (*B, C, F*) in zeleni trikotnik (*A, C, D*). Trikotnika sta podobna in enakokraka. Naslednji lik je rdeč romb (*C, D, E, F*). Stranice romba *(a, b, g, k)* so enako dolge kot stranice petkotnika. Daljica *g* je vzporedna s stranico petkotnika *a*, stranica petkotnika *b* je vzporedna z daljico *k*. Kraka modrega trikotnika sta enako dolga kot stranica petkotnika. Dolžina osnovnice modrega trikotnika je enaka dolžini diagonale minus dolžini stranice petkotnika. Tako imamo pripravljeno vse, kar potrebujemo za zadnje dejanje.

Izrek 1. *Točka F razdeli diagonalo na dve daljici h in g. Razmerje dolžine diagonale proti dolžini daljice g je enako razmerju dolžine daljice g proti dolžini daljice h. Tega ni težko razbrati iz vsega povedanega, zato prepustimo bralcu, da postavi piko na i.*

Če označimo dolžine kar z oznakami daljic, potem lahko zapišemo:

$$f : g = g : h, \;\rightarrow\; f = g + h.$$

Od tod je:

$$\frac{g+h}{g} = \frac{g}{h}.$$

Vzemimo, da je dolžina stranice enaka 1, torej $g = 1$, označimo dolžino diagonale f z x, potem dobimo naslednjo enačbo

$$x = \frac{1}{x-1}, \rightarrow x - 1 = \frac{1}{x}, \rightarrow x = 1 + \frac{1}{x}.$$

3.2 Verižni ulomki

Če zaporedno vstavljamo
$x = 1 + 1/x, \rightarrow x = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + \ldots)))$,

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}},$$

dobimo neskončni verižni ulomek za razmerje zlatega reza. Vsi koeficienti so enaki 1.

Če ulomek prekinemo na nekem mestu, dobimo racionalno število, ki ga imenujemo konvergent. Povejmo brez dokaza:

Izrek 2. *Konvergent je najboljši racionalni približek danemu iracionalnemu številu z imenovalcem, enakim ali manjšim od imenovalca konvergenta.*

Velik člen v verižnem ulomku pomeni, da se je konvergent, ki vsebuje člene do vključno velikega člena, močno približal končni vrednosti.

Če so vsi koeficienti enaki 1, pa pomeni, da se dano število z najboljšimi racionalnimi približki izogiba kot je le mogoče samemu številu, konvergenca konvergentov je najslabša možna, to pa je razlog, da je razmerje zlatega reza najbolj iracionalno število od vseh iracionalnih števil. Ta lastnost zlatega reza je ključna, da se ta pojavlja v naravi.

3.3 Fibonaccijevo zaporedje

Fibonaccijevo zaporedje je definirano kot:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Prvih nekaj členov zaporedja:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Rešimo enačbo za zlati rez iterativno. Izberemo začetni približek $x_0 = 1$,

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n},$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1\\
x_1 &= 1 + \frac{1}{1} = 2\\
x_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}\\
x_3 &= 1 + \frac{2}{3} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}\\
&\vdots\\
x_n &= \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n}.
\end{aligned}$$

V posameznih iteracijah dobimo zaporedje kvocientov dveh zaporednih Fibonaccijevih števil. Z drugimi besedami, konvergenti razmerja zlatega reza so kvocienti dveh sosednjih členov Fibonaccijevega zaporedja.

4 Da Vincijeva slika Vitruvijevega človeka

Poleg skice je napisano besedilo v značilni da Vincijevi zrcalni pisavi.

Besedilo je v dveh delih, prvi je nad in drugi je pod sliko. Zgornji del parafrazira Vitruvija:

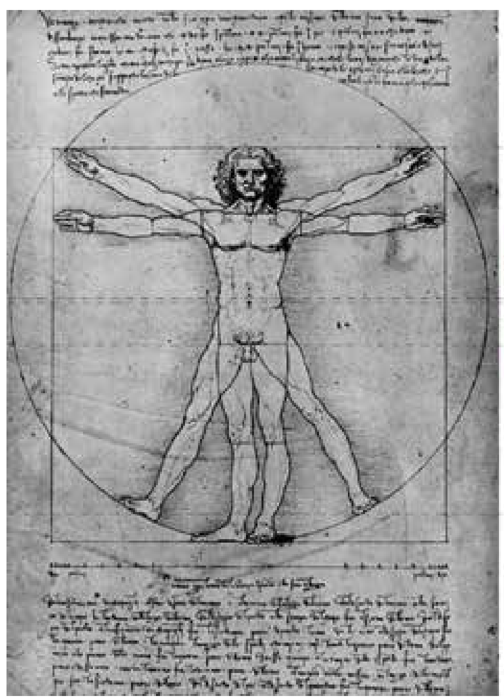
Vitruvij je bil arhitekt in v svojem delu o arhitekturi navaja, da je dimenzije človeka Narava določila takole:

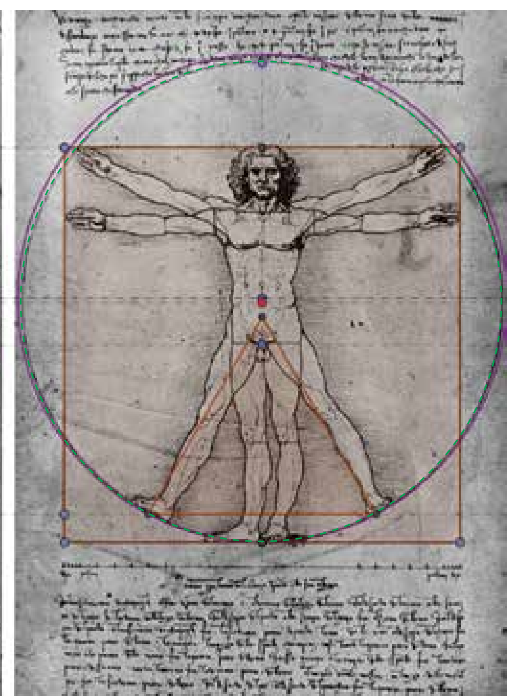
Ena dlan meri štiri prste, stopalo meri štiri dlani, komolec šest dlani, višina človeka štiri komolce, korak razkrečenih nog meri štiri komolce, kar je enako višini človeka, ki meri 24 dlani. Te mere je Vitruvij upo rabljal v svojih gradbenih načrtih.

Največja širina ramen je četrtina višine človeka; od prsnih bradavic do vrha glave je četrtina višine človeka; razdalja od komolca do konice prstov na roki je četrtina višine človeka; razdalja od komolca do pazduhe je osmina višine človeka; dolžina dlani je desetina višine človeka; koren penisa je na polovici višine človeka; stopalo meri sedmino višine človeka; od stopala do kolena je četrtina višine človeka; od spodnjega dela kolena do korena penisa je četrtina višine človeka; razdalji od podbradka do nosu in od obrvi do linije las sta enaki dolžini ušes in eni tretjini obraza.

Točke, ki določajo ta razmerja, so na risbi označene s črtami. Pod risbo je črta, katere dolžina je enaka stranici kvadrata in je razdeljena na štiri komolce, od katerih sta zunanja dva razdeljena na šest dlani, pri dveh je zapisano zrcalno besedilo »dlan«; skrajni dve dlani sta razdeljeni na štiri prste, na vsaki je označeno »prsti«.

Na spodnji sliki je konstrukcija nad sliko narejena v programu geogebra. Program najdete na naslovu https://www.geogebra.org/m/wfm9eykt.





Če razkrečite noge tako, da se vaša glava spusti za eno štirinajstino vaše višine, in dvignete roke, da se vaši iztegnjeni prsti dvignejo do višine vrha vaše glave, se bo v središču iztegnjenih udov nahajal popek, medtem ko bo prostor med nogami tvoril enakostranični trikotnik.

Spodnji del besedila opisuje naslednja razmerja:

Dolžina iztegnjenih rok je enaka višini človeka; od linije las do spodnjega dela brade je desetina človekove višine; od podbradka do vrha glave je osmina višine človeka; od prsi do vrha glave je šestina višine človeka; od vrhnjega dela prsnega koša do linije las je sedmina človekove višine.

Zaključek

Pogosto se trdi, da je razmerje stranice kvadrata in polmera krožnice na sliki v zlatem rezu.

Vendar pa ob sliki besedilo govori, da je Vitruvij poznal pitagorejsko filozofijo narave in ji je tudi sledil. To pomeni, da so zanj bila zanimiva racionalna razmerja, ki naj bi skrivala v sebi naravne zakonitosti. Nič o zlatem rezu ni napisano. V besedilu manjka podatek o višini popka. To pa pusti priprta vrata za spekulacije. Podroben pogled na sliko nam razkrije, da je da Vinci tudi v tem primeru upošteval razmerja majhnih celih števil in določil velikost premera krožnice 17 enot. Torej 17/14 višine človeka. Ta mera se popolnoma ujema s sliko. Videti je, da konstrukcija slike temelji na tej predpostavki. Na sliki je središče da Vincijeve krožnice označeno z modro piko, medtem ko je središče rdeče krožnice, katere polmer je v zlatem razmerju s stranico kvadrata, označeno z rdečo piko. Čez da Vincijevo krožnico na sliki je konstruirana črtkana zelena krožnica. Obe krožnici se prekrijeta natančno do debeline črte, ravno tako natančno se popek nahaja v središču te krožnice. Zlata krožnica je večja krožnica na desni sliki.