Naslov članka/Article: **Rešujmo matematične probleme (2. del)**

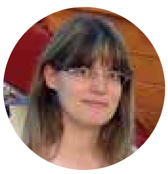
Avtor/Author: Silva Kmetič, Mag. Melita Gorše Pihler

DOI:

Razredni pouk št. 3/2018, letnik 20
ISSN 1408-7820
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2018

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/razredni-pouk/

Silva Kmetič,
upokojena svetovalka
Zavoda RS za šolstvo



Mag. Melita Gorše Pihler,
Zavod RS za šolstvo

Rešujmo matematične probleme (2. del)

V prvem delu prispevka (Razredni pouk, št. 2/2018) smo predstavili pomen zgodnjega razvoja problemskih znanj pri pouku matematike, vlogo učitelja in korake reševanja matematičnih problemov, kar smo ilustrirali s primeri. Prikazali smo tudi različne strategije oz. metode reševanja izbranega matematičnega problema. V nadaljevanju opisujemo, katere strategije so izbrali učenci pri reševanju treh matematičnih problemov.

1. primer matematičnega problema

Pika Nogavička in zlatniki (5. razred)

Kapitan Nogavička je Piki podaril zlatnike. Odločila se je, da bo nekaj zlatnikov obdržala zase, vse ostale pa bo razdelila Anici in Tomažu.

Pika je $\frac{3}{4}$ vseh zlatnikov obdržala zase;

$\frac{2}{3}$ preostalih zlatnikov je podarila Anici;

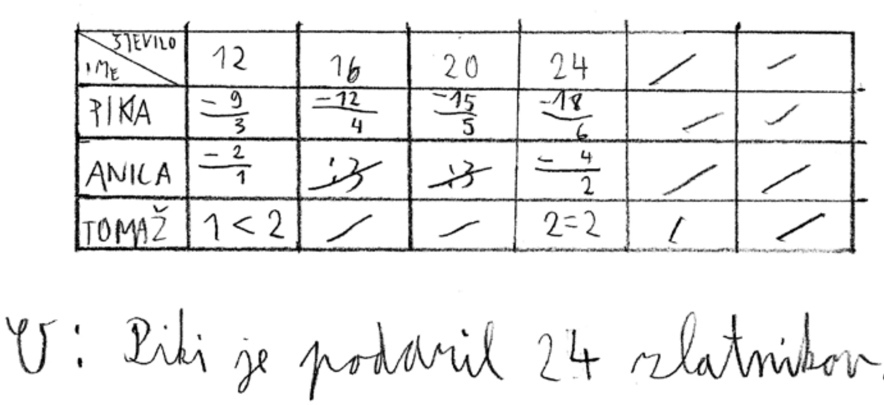
preostala 2 zlatnika je podarila Tomažu.

Koliko zlatnikov je kapitan Nogavička podaril Piki?

Učenec D je pri reševanju problema uporabil metodo postopnega približevanja (slika 1). Metoda postopnega približevanja ali metoda izboljšanih poskusov je niz poskusov, s katerimi pridemo do rešitve zastavljenega problema. V vsakem od poskusov se poskuša izboljšati približek. Pri vsakem naslednjem poskusu smo bliže pravilni rešitvi. Metoda je v našem primeru prikazana s preglednico, kamor se vpisujejo poskusi.

Koliko zlatnikov je kapitan Nogavička podaril Piki?

Učenci so se reševanja problema lotili na različne načine.

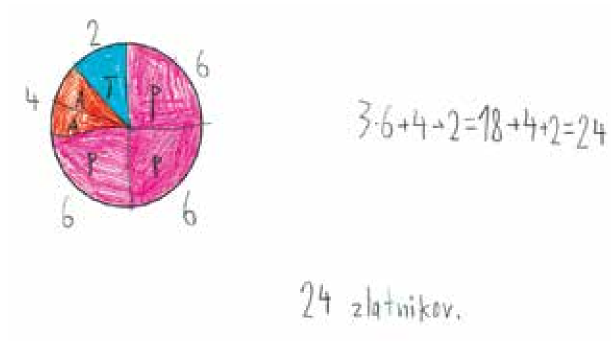


Slika 1: Reševanje problema Pika Nogavička in zlatniki (izdelek učenca D).

Učenec D je najprej preveril, ali bi lahko bilo število vseh zlatnikov 12. Izračunal je, da je v tem primeru Pika obdržala zase 9 zlatnikov, torej so ostali 3 zlatniki. To je v preglednici prikazal z zapisom $\frac{-9}{3}$. Nato je izračunal, koliko zlatnikov je podarila Anici. V tem primeru je Anici podarila 2 zlatnika, torej je ostal za Tomaža 1 zlatnik. To je v preglednici prikazal z zapisom $\frac{-2}{1}$. Ker je v besedilu problema navedeno, da je Pika Tomažu podarila 2 zlatnika, je učenec D ugotovil, da je število vseh zlatnikov večje. Naslednje število, ki ga je preizkusil, je število 16. (Ker je Pika obdržala $\frac{3}{4}$ vseh zlatnikov, je učenec vedel, da je število vseh zlatnikov večkratnik števila 4.) Izračunal je, da Pika obdrži 12 zlatnikov. Ostanejo 4 zlatniki, torej Pika Anici ne bi mogla dati $\frac{2}{3}$ preostalih zlatnikov. Zato število vseh zlatnikov ni 16. Do podobne ugotovitve je prišel, ko je preizkusil, ali je začetno število zlatnikov 20. Zato je preizkusil, ali je število vseh zlatnikov 24, in ugotovil, da v tem primeru Pika obdrži 18 zlatnikov, 4 zlatnike podari Anici in 2 zlatnika Tomažu, kar se ujema s podatki naloge. Zato je učenec D sklepal, da je Kapitan Nogavička Piki podaril 24 zlatnikov. Iz zapisa (slika 1), ki je na prvi pogled nejasen, vidimo, da učenec zlahka sledi svoji ideji reševanja in ga pri odštevanju ne motijo črte tabele. V posameznem okenčku preglednice je del procesa odštevanja in ne samo rezultat. Učenec z vidika zapisa na nematematičen, spontan način »dokazuje«, da izbira števila ni oz. je rešitev. Pravilen zapis s procesom reševanja prikazuje preglednica 1.

Vprašanja učitelja, ki spodbujajo povezovanje znanja po rešenem problemu: Zakaj si poskušal z 12, 16, 20 in 24? Zakaj lahko delimo 12 in 24 s 3, 16 in 20 pa ne? Koliko zlatnikov je razdelila Pika? Kolikšen delež zlatnikov je razdelila Pika? Kako pa bi na delitev zlatnikov vplivala sprememba podatka: Tomaž dobi 3 zlatnike?

Učenec E je problem rešil z grafično-aritmetično metodo (slika 2). Grafično-aritmetična metoda ponazori matematični problem s slikovnim gradivom, ki pomaga učencem pri razumevanju problema in jih vodi na poti do rešitve (Rajh, 2015, str. 43).



Slika 2: Reševanje problema Pika Nogavička in zlatniki (izdelek učenca E).

Učenec E si je pri reševanju problema pomagal s krogom, ki predstavlja število vseh zlatnikov. Krog je razdelil na 4 enake dele. Pobarval je 3, ki predstavljajo delež zlatnikov, ki jih je Pika obdržala zase. Preostali del kroga je razdelil na 3 enake dele in ugotovil, da en od teh delov predstavlja 2 zlatnika, ki ju je Pika podarila Tomažu. Na osnovi tega je sklepal, da je Pika Anici podarila 4 zlatnike. Ugotovil je, da $\frac{1}{4}$ kroga predstavlja 6 zlatnikov, torej cel krog predstavlja 24 zlatnikov. Zato je število vseh zlatnikov 24. Na sliki opazimo domiselno simbolno sporočanje, pravilno zapisan številski izraz, ki dokazuje pravilnost sklepanja in računanja, ter kratek odgovor na vprašanje.

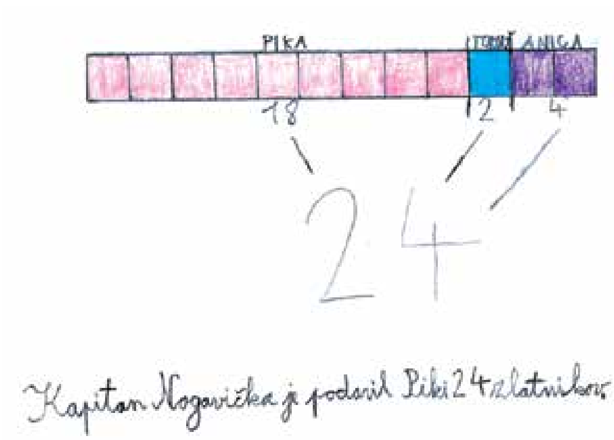
Vprašanja učitelja, ki spodbujajo povezovanje znanja po rešenem problemu: Preveri rešitev po besedilu problema. Kolikšen delež zlatnikov je razdelila Pika?

Preglednica 1: Pravilen zapis procesa reševanja.

IME \ ŠTEVILO PODARJENIH ZLATNIKOV	12	16	20	24	Opombe: Večkratniki števila 4 zaradi podatka.
Pika	9	12	15	18	$\frac{3}{4}$ podarjenih zlatnikov
Anica in Tomaž	12 − 9 3	16 − 12 4	20 − 15 5	24 − 18 6	Število zlatnikov za Anico in Tomaža
Anica	2	~~4 : 3~~	~~5 : 3~~	4	Število zlatnikov za Anico
Tomaž	3 − 2 1	/	/	6 − 4 2	Število zlatnikov za Tomaža
Preizkus	1 < 2	/	/	2 = 2 in 4 = 2 · 2	Rezultat mora ustrezati dvema pogojema: Tomaž ima 2 zlatnika, Anica pa dvakrat toliko.

Primerjaj z ulomki Aničin in Tomažev delež zlatnikov. Kateri podatek v problemu ti je razkril, koliko zlatnikov je dobila Anica?

Učenec F je pri reševanju problema uporabil podporo, to je pravokotnik, ki je bil že razdeljen na 12 enakih delov (slika 3). Pravokotnik predstavlja število vseh zlatnikov. Učenec je uspešno uporabil podporo in pobarval 9 kvadratkov (roza), ki predstavljajo del zlatnikov, ki jih je Pika obdržala zase. Od preostalih treh kvadratkov je pobarval 2 (vijolično), ki predstavljata delež zlatnikov, ki jih je Pika podarila Anici. Ugotovil je, da 1 kvadratek (moder) predstavlja del zlatnikov, ki jih je Pika podarila Tomažu. Zelo pomembna je implicitna ugotovitev učenca, da 1 kvadratek predstavlja 2 zlatnika. Torej 12 kvadratkov predstavlja 24 zlatnikov. Zato je število vseh zlatnikov 24.



Slika 3: Reševanje problema Pika Nogavička in zlatniki (izdelek učenca F).

Vprašanja učitelja, ki spodbujajo povezovanje znanja po rešenem problemu: Zakaj je pravokotnik razdeljen na 12 enakih delov? Koliko zlatnikov je razdelila Pika? Kolikšen delež zlatnikov je razdelila Pika? Preveri rešitev po besedilu problema.

Intervencije učitelja na začetku in med reševanjem

Če se učenec ne zna samostojno lotiti reševanja problema, preverimo, kako razume problem, z vprašanji, npr.:

a) Kaj veš?

b) Kdo je dobil največ zlatnikov?

c) Kolikšen delež zlatnikov je Pika razdelila?

d) Koliko zlatnikov je dobil Tomaž?

e) Kolikšen delež preostanka predstavljata dva zlatnika?

f) Ali lahko iz podatkov sklepaš o lastnostih števila zlatnikov?

g) Izmisli si neko število zlatnikov in ga poskušaj razdeliti na enak način kot Pika.

h) Kaj predstavlja število vseh zlatnikov?

i) Ponazori način razdeljevanja zlatnikov.

Če se učenec kljub dodatnim vprašanjem ne zna lotiti problema, mu lahko ponudimo pripomoček, npr. krog ali pravokotnik, s katerim si pomaga pri reševanju. Če ima težave kljub pripomočku (krogu ali pravokotniku), mu je lahko v pomoč lik, razdeljen na smiselno število enakih delov.

Problem bi lahko diferencirali tudi tako, da bi odvzeli (primer A) ali dodali (primer B) podatek v besedilu problema. Poenostavljen problem (primer A) bi lahko reševali tudi učenci 4. razreda. Pripomoček bi v tem primeru lahko bil lik, razdeljen na 4 enake dele.

Kapitan Nogavička je Piki podaril zlatnike. Odločila se je, da bo nekaj zlatnikov obdržala zase, vse ostale pa bo podarila Anici.

Pika je $\frac{3}{4}$ vseh zlatnikov obdržala zase in 2 zlatnika podarila Anici.

Koliko zlatnikov je kapitan Nogavička podaril Piki?

Primer A: Poenostavljen problem.

Kapitan Nogavička je Piki podaril zlatnike. Odločila se je, da bo nekaj zlatnikov obdržala zase, vse ostale pa bo razdelila Anici, Tomažu in Ficku.

Pika je $\frac{1}{4}$ vseh zlatnikov obdržala zase;

$\frac{2}{3}$ preostalih zlatnikov je podarila Anici;

$\frac{2}{3}$ preostalih zlatnikov je podarila Ficku;

preostala 2 zlatnika je podarila Tomažu.

Koliko zlatnikov je kapitan Nogavička podaril Piki?

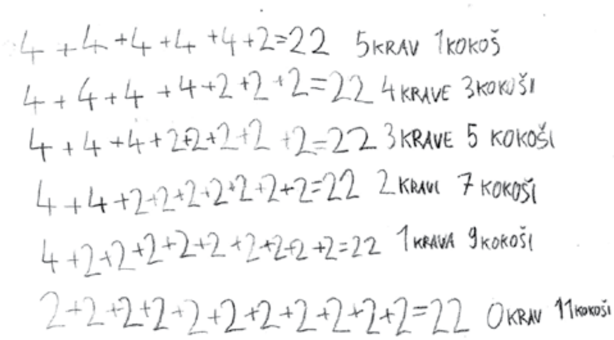
Primer B: Zahtevnejši problem.

2. primer matematičnega problema

Kokoši in krave (2.–5. razred)

Na kmetiji imajo kokoši in krave. Vse kokoši in krave imajo skupaj 22 nog. Koliko je kokoši in koliko krav?

Učenec G je problem rešil z aritmetično metodo (slika 4). Navedel je matematično vse možne rešitve. Njegovi sošolci so spodbudili razmišljanje o tem, ali je tudi zadnja navedena možnost (0 krav, 11 kokoši) smiselna rešitev, saj je v besedilu naloge navedeno, da imajo na kmetiji kokoši **in** krave.



Slika 4: Reševanje problema Kokoši in krave (izdelek učenca G).

Učenec H je isti problem rešil z metodo iskanja vzorcev (Sambolić Beganović, 2015). Upošteval je: če število krav zmanjšamo za 1, se število kokoši poveča za 2, ker je $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ (slika 5).

Slika 5: Reševanje problema Kokoši in krave (izdelek učenca H).

Učenec računske operacije, npr. $5 \cdot 4 + 2 = 20 + 2$, izvaja in zapisuje ločeno, kar ne vpliva na konsistenco njegovega sklepanja.

Intervencije učitelja

Učenci so reševali problem z več možnimi rešitvami. Nekateri so se zadovoljili takoj, ko so našli eno od možnih rešitev. Drugi so prenehali z reševanjem, ko so našli dve možni rešitvi. V taki situaciji učitelj učence spodbudi, npr.:

Primerjajte vaše ugotovitve.

Katera rešitev je pravilna?

Koliko rešitev ima problem?

Poiščite vse možne rešitve danega problema.

Analizirajmo nalogo:

Podatki

Skupno število nog je 22.

Skriti podatki

Vsaka kokoš ima 2 nogi.

Vsaka krava ima 4 noge.

Odnosi/povezave

Število nog je vedno sodo število.

Vprašanja

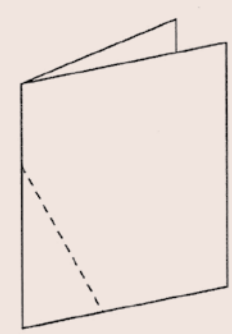
Koliko je kokoši in koliko krav?

Ali je več možnosti?

3. primer problemske naloge

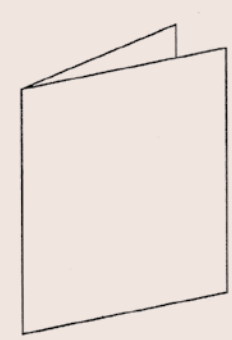
Izreži kvadrat (5. razred)

Petra je kos papirja v obliki pravokotnika prepognila na polovico, kot kaže simbolna slika 6. Ko je po črtkani črti odrezala košček in papir razprla, je dobila trikotnik. Kako naj reže drugi list, da bo dobila kvadrat z obsegom 24 cm? Pri reševanju uporabi predlogo za reševanje (slika 7). (Problem je prirejen po Timss 2011.)



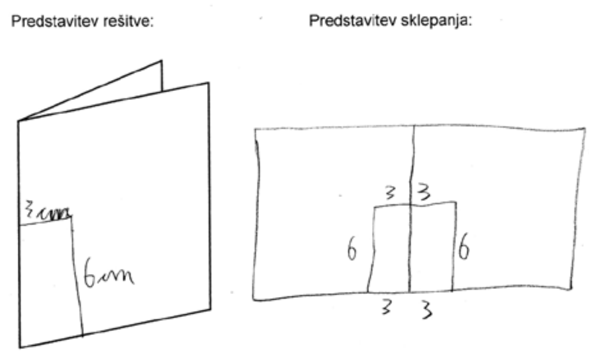
Slika 6: Prepognjen kos papirja

Predstavitev rešitve: Predstavitev sklepanja:



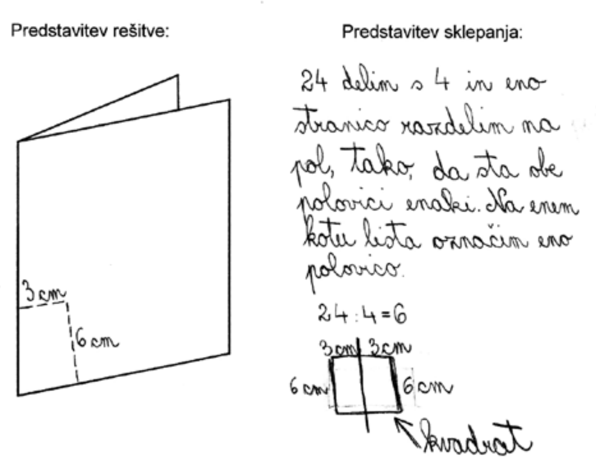
Slika 7: Predloga za reševanje problema Izreži kvadrat.

Učenec I je problem rešil, kot je prikazano na sliki 8. Svoje sklepanje je predstavil na razprtem listu papirja.



Slika 8: Reševanje problema Izreži kvadrat (izdelek učenca I).

Učenec J je problem rešil, kot je prikazano na sliki 9.



Slika 9: Reševanje problema Izreži kvadrat (izdelek učenca J).

Geometrijski problemi so nekoliko drugačni. V našem primeru sliko ponujamo, lahko pa predlagamo, da učenec izvede problem na konkretnem modelu, najprej uvodno, ki nas popelje v geometrijsko situacijo; v nadaljevanju mora vedeti, kaj je obseg kvadrata in upoštevati simetrijo po prepogibu lista. Problem lahko reši tudi s »konca«: Nariše kvadrat z obsegom 24 cm, ga prepogne po polovici ...

Intervencije učitelja

Če se učenec ne zna samostojno lotiti reševanja problema, z vprašanji preverimo, ali razume problem, npr.:

a) Kateri lik dobimo, če po črtkani črti odrežemo košček in papir razpremo?

b) Kateri lik želimo dobiti?

c) Bomo lahko dobili lik v obliki kvadrata, če bomo naredili le en rez?

d) Koliko zarez moramo narediti, da bomo dobili lik v obliki kvadrata?

e) Kako morata potekati ti dve zarezi? Nariši ju.

f) Kateri lik dobimo, če list v obliki kvadrata preložimo na pol?

g) Kolikšen mora biti obseg dobljenega kvadrata?

Učenec lahko ima težave s predstavitvijo rešitve, ker je prepognjen list, na katerem mora predstaviti svojo rešitev, manjši od prepognjenega lista v naravni velikosti. Zato učencu povemo, naj ne meri. Rešitev naj le skicira: nariše naj, kako potekata črti, po katerih bi morali odrezati list, in ob njiju zapiše, koliko cm naj bosta dolgi.

Če učenec kljub intervencijam učitelja pri reševanju problema obtiči, mu ponudimo list papirja v obliki pravokotnika, s katerim si pomaga pri reševanju. Podobno naredimo, če učenec problem reši narobe: ponudimo mu list papirja v obliki pravokotnika in ga spodbudimo, naj preveri pravilnost svoje rešitve. Tako ima možnost sam ugotoviti, da njegova rešitev ni pravilna, in napako popraviti.

Sklep

Stopnja razrednega pouka je za razvoj matematičnega mišljenja zelo pomembna. Pripravljamo osnovo za pravilno razumevanje abstraktnih matematičnih pojmov in odnosov. Vemo, da je prehiter preskok faze konkretne ravni razlog, da nekateri otroci abstraktnih pojmov ne razumejo in jih uporabljajo le mehanično, na spominskem nivoju, dokler so ti pač dosegljivi. Z vpeljavo matematične vsebine naloga učitelja še ni končana, prav tako ne z reševanjem rutinskih matematičnih nalog. Ker otroci pri reševanju matematičnih problemov razvijajo matematično mišljenje in se veliko naučijo tudi o osnovnih pojmih in odnosih med njimi, naj se pogosto srečujejo z njimi. O reševanju problemov naj sproščeno razpravljajo, ne smejo se bati ali sramovati napačnih odgovorov. Ob tem se moramo zavedati, da otroci, ki imajo matematiko radi, uživajo pri reševanju problemov zaradi estetskih značilnosti matematike, kot so pravila, vzorci, red, ne pa zato, ker bi se zavedali, da so matematična znanja zanje koristna.

Učiteljeva naloga je učencem dati možnost razvoja problemskih in procesnih znanj ter ustvariti in pripraviti v razredu varno vzdušje. Naj bo učenje matematike učenje iz napak brez zadrege. Za učence naj bo njihov odgovor osebna last. Zato naj se zavedajo svojega mnenja, svoje rešitve, svojega znanja in svojih napak. To pa je za učitelja velik izziv.

Viri in literatura:

Cotič, M. (1999). Matematični problemi v osnovni šoli: Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Japelj Pavešić, B. (2012). *Matematične naloge raziskave TIMSS*. Ljubljana: Pedagoški inštitut.

Kmetič, S. (2015). Metode reševanja besedilnih in problemskih nalog. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 5–13.

Kmetič, S. (2016). Od besed k pojmom in strategijam pri razvoju matematične pismenosti. V M. Suban in drugi (ur.), *3. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike, KUPM 2016: zbornik izbranih prispevkov* (str. 47–63). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno 16. 5. 2018 s spletne strani: https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2016/.

Kmetič, S., Gorše Pihler, M. (2018). Rešujem matematične probleme, 1. del. *Razredni pouk*, let. 20, št. 2, str.

Kreger Silverman, L. (2002). The Power of Images. V *Upside-Down Brilliance: The Visual-Spatial Learners*. Denver: DeLeon Publishing. Pridobljeno 24. 5. 2018 s spletne strani: http://www.visualspatial.org/files/power.pdf.

Magajna, Z. (2003). Problemi, problemsko znanje in problemski pristop pri pouku matematike. *Matematika v šoli*, 10 (3-4), str. 129–138.

Matematika 4. E-učbenik za matematiko v 4. razredu osnovne šole. (2014). Pridobljeno 24. 5. 2018 s spletne strani http://eucbeniki.sio.si/mat4/index.html.

Mršnik, S., Novak, L. (2015). Samorefleksivno mišljenje in formativno spremljanje pri reševanju matematičnih problemov. V S. Kmetič in drugi (ur.), *2. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike, KUPM 2014: zbornik prispevkov* (str. 117–132). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno 22. 5. 2018 s spletne strani: https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2014/.

Orton, A., Frobisher, L. (1996): *Insights into Teaching Mathmetatics*. London: Cassel.

Pečjak, S. (1999): *Osnove psihologije branja*. Ljubljana: Filozofska fakulteta.

Polya, G. (1985): *Kako rešujemo matematične probleme*. Ljubljana: DMFA Slovenije.

Rajh, S. (2015): Grafično aritmetična metoda. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 42–49.

Rajh, S. (2015): Metoda reševanja nazaj. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 31–41.

Sambolić Beganović, A. (2015): Metoda iskanja vzorcev. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 50–55.

Schoenfeld, A. H. (1992): Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. V Grouws, D. (ur.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (str. 334–370), New York: MacMillan.

Sirnik, M. (2015): Metoda napačne predpostavke. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 14–23.

Suban, M. (2015): Metoda postopnega približevanja. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 24–30.

Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika. (2011). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno 25. 5. 2018 s spletne strani: http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf.

Wittmann, E. C. (2012): Practicing basic skillls in a productive way. V S. Kmetič in drugi (ur.), *1. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike, KUPM 2012: zbornik prispevkov* (str. 658–666). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno 12. 3. 2014 s spletne strani: http://www.zrss.si/pdf/zbornikpovzetkovkupm2012.pdf.