

Matematika v šoli

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2022, letnik 28

1

IZ TEORIJE V PRAKSO

Vrednotenje
matematičnega znanja
na splošni maturi

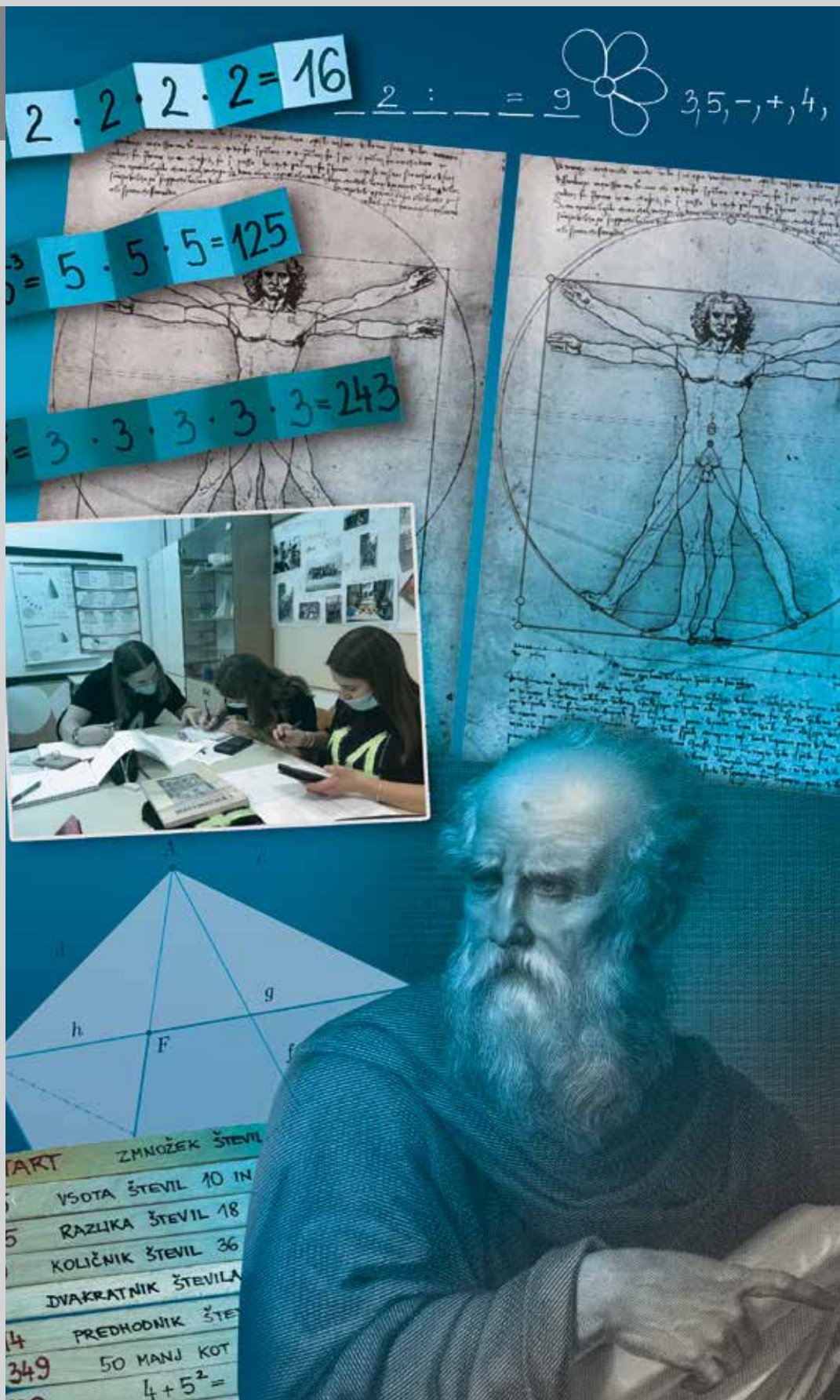
IZ RAZREDA

Logaritemska skala

Matematični maraton

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO

Vitruvijev človek



Zavod
Republike
Slovenije
za šolstvo

Matematika v šoli

2022, letnik 28

1

VSEBINA

mag. Mateja Sirnik

Pouk matematike kot spirala 1

IZ TEORIJE ZA PRAKSO

mag. Simona Pustavrh, Simona Vreš, ddr. Janez Žerovnik

Vrednotenje matematičnega znanja na splošni maturi 2

Lidija Pulko, mag. Melita Gorše Pihler

E-pouk matematike na daljavo v osnovni in srednji šoli 15

IZ RAZREDA

Peter Jenič

Razdalja med krajema na zemljevidu 24

Urška Krajnc

Uporaba digitalne tehnologije pri kombiniranem poučevanju matematike v različnih okoliščinah 28

Rok Lipnik

Obrestni račun v življenjskih situacijah z različnimi oblikami izpeljave pouka 31

Karolina Ivanec

Seminarska naloga iz geometrije v drugem letniku gimnazije 33

Andreja Pečovnik Mencinger

Sodelovalno nad piramide 37

Daniela Beroš, Milena Čulav Markičević, Zlatko Lobor, Ivana Martinić

Logaritemska skala 40

Jasmina Ducman

Učne težave pri matematiki 47

Nuša Cevzar

Matematični maraton 52

Alenka Močnik

Matematični potep z aplikacijo Actionbound 54

Inez Ceglar

Število π , obseg kroga in dan števila π 57

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO

dr. Borut Jurčič Zlobec

Vitruvijevega človeka 62



ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
 letnik XXVIII, številka 1, 2022

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
 Predstavniki: dr. Vinko Logaj

Odgovorna urednica: mag. Mateja Sirknik, Zavod RS za šolstvo
 Uredniški odbor:
 dr. Darja Antolin Drešar, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta,
 dr. Andreja Drobnič Vidic, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko,
 mag. Melita Gorše Pihler, Zavod RS za šolstvo,
 mag. Valentina Herbay, Ekonomska gimnazija in srednja šola Radovljica,
 Silva Kmetič,
 Sabina Kumer, Šolski center Krško – Sevnica,
 dr. Zlatan Magajna, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta,
 Lidija Pulko, Zavod RS za šolstvo,
 mag. Sonja Rajh, Zavod RS za šolstvo,
 Simona Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem,
 dr. Lucija Željko, Osnovna šola Dravljje,
 dr. Herremans Adriaan, Universiteit Antwerpen, Belgija,
 dr. Evgenia Sendova, Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian
 academy of Sciences, Bolgarija.

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj
 Prevod povzetkov v angleščino: Bumblebee, jezikovno svetovanje,
 Polonca Luznik, s. p.
 Urednica založbe: Andreja Nagode
 Oblikovanje: Simon Kajtna
 Fotografije: avtorji člankov
 Računalniški prelom: Design Demšar, d. o. o.
 Tisk: Present, d. o. o.
 Naklada: 500 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
 Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Kidričeva 53,
 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirknik@zrss.si
 Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana,
 faks: 01/30 05 199, e-naslov: založba@zrss.si
 Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične
 osebe, 8,50 € za študente, dijake in upokojece. Cena posamezne številke v prosti
 prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za
 kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v
 mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database,
 Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic
 System and Services (COBISS)



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav

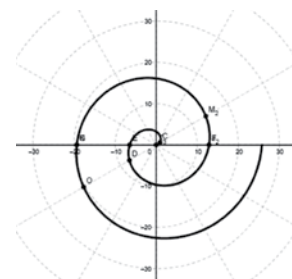
Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Pouk matematike kot spirala

Kaj je spirala? V Slovarju slovenskega knjižnega jezika je zapisano: »krivulja, ki se vrti okrog določenega mesta tako, da se stalno oddaljuje od njega ali se mu približuje«.

Ena od znanih spiral je Arhimedova spirala. Kako je definirana?

V ravnini naj bo poltrak, ki se vrti okrog svojega izhodišča, pritrjenega v izbrani točki. Poltrak se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω . Iz izhodišča po poltraku potuje točka s konstantno hitrostjo v v smeri poltraka. Spirala je sled, ki jo opiše opazovana točka.



Arhimedova spirala



Vir: <https://successvector.com/spirals-spiraling-into-change/>

Podobno se vrtimo okrog izbranega izhodišča pri pouku matematike. Npr. formalno algebraično reševanje linearnih enačb poučujemo v 9. razredu osnovne šole, prej pa se ukvarjamo z različnimi drugimi strategijami reševanja enačb. Prve korake v matematični svet enačb učenci naredijo že v 2. razredu, ko iščejo manjkajoče število v enakosti: $a \pm \square = b$, $\square \pm a = b$, v množici naravnih števil do 20, vključno s številom 0. Seveda pa so te enakosti prikazane na različne načine: od uporabe konkretnih do slikovnih reprezentacij. Že v predšolskem obdobju pa je lahko ravnotežna tehtnica didaktična igračka za ugotavljanje ravnotežja.



Vir: <https://www.montessori-official.com/products/wooden-balance-scale>

V srednji šoli pa je lahko enačba tudi razredni izziv:

Poišči vseh šest realnih rešitev enačbe:

$$(x^2 - 5x + 5)^{(x^2 - 11x + 30)} = 1.$$

Vir: <https://nrich.maths.org/11009>

Pri branju revije pogledajte skozi spiralo matematičnega znanja in zagotovo boste videli primer uporabe pri vašem poučevanju. Naj vam bodo pozno poletni in jesenski dnevi navdih, da v naravi opazite matematične zakonitosti.

mag. Mateja SIRNIK, odgovorna urednica

Mateja Sirknik

Vrednotenje matematičnega znanja na splošni maturi

mag. Simona Pustavrh
Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija

Simona Vreš
Šolski center Ravne na Koroškem, Gimnazija Ravne na Koroškem

ddr. Janez Žerovnik
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

Državna predmetna komisija za splošno maturo za matematiko

Izvleček

Predmetni izpitni katalog za splošno maturo 2021 – matematika določa na obeh ravneh zahtevnosti po dve izpitni poli, ki se razlikujeta v tem, da v prvi računalno ni dovoljen pripomoček, v drugi pa ga kandidati pri reševanju nalog lahko uporabljajo. V prispevku je obravnavana novost s stališča sestavljanja nalog in deloma tudi s stališča strategije priprave na maturo v novih okoliščinah. Predstavljena je klasifikacija maturitetnih nalog, ki temelji na dovoljenem žepnem računalu na splošni maturi. Klasifikacija se nekoliko razlikuje od drugih, saj je prilagojena ozkemu namenu in se med drugim omejuje na vpliv uporabe računalu in ni namenjena splošni analizi, ki upošteva uporabo katerekoli tehnologije. Klasifikacija je uporabljena za predstavitev primerov, ki pojasnjujejo nekaj značilnih lastnosti, ki so pomembne pri oblikovanju in vrednotenju nalog na maturi. Primeri vključujejo posebej izbrane naloge, ki so z ustrezno prilagojenima točkovnikoma primerne za obe izpitni poli.

Ključne besede: splošna matura, računalno, razvrstitev nalog, vrednotenje znanja

Mathematics Assessment in General Matura Examination

Abstract

The general matura exam catalogue for mathematics 2021 determines two parts of the matura examination paper at both levels of difficulty. In the first part, candidates are not allowed to use calculators, while in the second part calculators are permitted. This article looks at a novel approach to constructing exam tasks and, partly, the strategies for the matura exam preparation under the new circumstances. It also describes the task classification, based on the fact that calculators are now permitted for the matura exam. This classification somewhat differs from others in that it focuses on the impact of calculators being allowed, and should therefore not be used for general analysis, which considers the use of any technology. The classification describes specific and interesting examples, which are important when creating and evaluating matura exam tasks (e.g., specific tasks that can be used in both parts of the matura examination paper provided that the marking scale is adapted accordingly).

Keywords: general matura exam (baccalaureate examination), calculator, task classification, knowledge evaluation.

Uvod

Splošna matura je državni izpit, ki je hkrati zaključni izpit po programu gimnazije in pogoj za vpis na univerzitetni študij. Od ponovne uvedbe splošne mature leta 1995 je matematika obvezen maturitetni predmet, pri katerem lahko kandidati opravljajo izpit na dveh ravneh zahtevnosti, na osnovni in višji ravni. Maturitetni izpit iz matematike se do mature leta 2021 ni bistveno spreminjal, manjše spremembe so bile vpeljane le pri definiciji dovoljenega računalna na maturi.

Pomembne novosti, ki so stopile v veljavo leta 2021 pri ekster-nem (pisnem) delu mature iz matematike, so:

- (1) kandidati na osnovni in na višji ravni rešujejo dve izpitni poli (na prvi uporaba računalna ni dovoljena),
- (2) čas pisanja izpitnih pol je spremenjen (za vsako polo je na voljo 90 minut),
- (3) na osnovni ravni je uvedena nova kategorija kratkih nalog,
- (4) seznama formul, ki sta priložena izpitnim polam na osnovni in na višji ravni, sta razširjena in se razlikujeta.

Spremembe so natančno opredeljene v veljavnem predmetnem izpitnem katalogu [1], podroben opis sprememb s komentarji pa je v člankih [2] in [6].

Žal je prvo izvedbo splošne mature po predmetnem izpitnem katalogu [1], ki velja od leta 2021, močno zaznamovala pandemija virusa. Na nivoju celotne mature so bile zaradi razmer, v katerih je pouk dlje časa potekal na daljavo, odrejene prilagoditve mature. Ker bi bila matura 2021 prva, na kateri bi kandidati na izpitu iz matematike pisali polo brez računalna, je bila ena od pomembnih prilagoditev dovoljena uporaba računal na obeh polah. Prilagoditev je bila sprejeta zaradi precej velikega nelagodja pred pisanjem pole brez računalna, ki so ga izražali predstavniki bodočih maturantov in tudi nekateri učitelji.

Učni načrt za gimnazije [14] večkrat omenja uporabo IKT (informacijsko-komunikacijske tehnologije) pri pouku matematike, vendar je podrobneje ne opredeljuje. V svetu in tudi pri nas v zadnjih letih (in desetletjih) poteka sorazmerno živahna razprava o uporabi računal pri pouku matematike. Mnenja so zelo različna, od zagovarjanja neomejene uporabe računal pri pouku od osnovne šole naprej do svaril o škodljivosti kakršne koli uporabe tehnologije. Vročo debato so v svetu poimenovali »Math Wars« (ZDA), »Glaubekrieg« (Nemčija), za kratek uvod v problematiko in dodatne reference predlagamo na primer članek [12]. V tem prispevku se omejimo na trditev, da verjetno ni vprašanje »tehnologija – da ali ne?«, ampak je pravo vprašanje, kdaj in na kakšen način je uporaba tehnologije korak k bolj kakovostnemu pouku matematike. Slovenski maturanti tradicionalno pri maturi uporabljajo (žepno) računalno, po novem bodo pisali prvo polo brez in drugo z računalom.

V nadaljevanju najprej na kratko predstavimo definicijo t. i. maturitetnega računalna. Sledi kratek pregled klasifikacij nalog glede na njihovo občutljivost na uporabo tehnologije in predstavitev klasifikacije, ki smo jo definirali za naš namen. Sledi jedro prispevka, ki se osredotoča na primere nalog različnih tipov s komentarji. Večina primerov je iz starih matur, nekaj nalog pa je sestavljenih na novo ali so vzete iz zbirke [8], ki jo je predmetna

maturitetna komisija pripravila pred uvedbo novega modela mature. Sledi povzetek z nekaj zaključnimi ugotovitvami.

Matura in računal

Že od samega začetka mature leta 1995 je bila pri pisnem delu izpita iz matematike uporaba računalna dovoljena. V tem času je razvoj tehnologije izredno povečal zmogljivost »žepnih« računal, na tržišče pa vsako leto prihajajo nova računalna, ki uporabnikom ponujajo vedno nove možnosti uporabe. Tako so se na izpitnih polah vse pogostejše pojavljale naloge z navodilom, da je treba nalogo reševati brez uporabe računalna. Ugotoviti, ali je dijak takšno nalogo dejansko rešil brez uporabe računalna, je bilo težko, včasih povsem nemogoče, kar je bil eden izmed glavnih razlogov za vpeljavo dveh izpitnih pol pri maturitetnem izpitu iz matematike.

Veljavni učni načrt [14] med drugim večkrat omenja in celo podarja uporabo informacijsko-komunikacijske tehnologije, vendar podrobnosti ne opredeljuje. Učitelji so imeli na voljo številna strokovna spopolnjevanja s področja IKT, vključevali pa so se lahko tudi v projekte s tega področja. Kljub temu je praksa po šolah močno odvisna od različnih materialnih pogojev in samo-iniciativnosti ter iznajdljivosti pedagogov.

Računalno je na maturi pripomoček, ki ga je treba za vsako generacijo natančno definirati vsaj dve leti pred izvedbo mature, kar je ob hitrem razvoju tehnologije zelo težka naloga. Nenazadnje učni načrt iz razumljivih razlogov nikjer ne opredeli, kaj natančno je mišljeno s pojmom »uporaba informacijsko-komunikacijske tehnologije«, saj verjetno ni mišljena zgolj uporaba tako imenovanih (žepnih) računal. Vsekakor pa učni načrt predvideva, da kandidati na splošni maturi iz matematike obvladajo nekatere postopke reševanja nalog brez računalna, nekatere pa z računalom, saj je med splošnimi cilji/kompetencami zapisano, da morajo kandidati »spoznavati in uporabljati različne informacijsko-komunikacijske tehnologije (IKT) kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov« ter »presojati, kdaj je smiselno uporabiti določeno informacijsko-komunikacijsko tehnologijo in razviti kritični odnos do informacij na spletu.« To sta le dva izmed splošnih ciljev, na maturitetnem izpitu pa preverjamo še druge različne cilje.

Tako je dozorela odločitev o delitvi izpita na polo, ki se rešuje brez računalna, in polo, ki se rešuje z računalom. Ta sprememba bo, ko bo dejansko uveljavljena, delno rešila zagato; na poli brez računalna se bo lahko preverjalo tudi poznavanje elementarnih postopkov, kar zaradi dovoljene uporabe računalni ni bilo izvedljivo, na poli z računalom pa bi se lahko v prihodnosti na primeren način preverjalo tudi smiselna uporaba ostale sodobne tehnologije, ne le žepnih računal.

Ob tem se pojavi vprašanje, ali in kako se zaradi dovoljene uporabe potencialno zmogljivih računal spremeni pričakovana »jasno in korektno predstavljena pot do rezultata«. Ta je zagotovo lahko nekoliko drugačna na poli z računalom kot na poli brez računalna, pa tudi (delne) rešitve so lahko smiselno različno ovrednotene.

Pred leti je prišlo do dogovora, da je smiselno definirati računal, ki bi bilo primerno za uporabo na vseh maturitetnih izpitih splošne mature. Predlog je pripravila Državna predmetna komisija za matematiko. V dokumentu *Kaj je žepno računalno* [5] je definirano, katera računalna so dovoljena na splošni maturi, dodatno pa je v dokumentu *Kaj je simbolno računanje* [4] še kratka opredelitev, kaj pomeni v definiciji računalna prepovedano simbolno računanje. Oboje je skoraj nemogoče povsem natančno opredeliti, saj bi morali definiciji vnaprej predvideti novosti. Ker v nadaljevanju obravnavamo občutljivost nalog glede na uporabo računalna, je seveda pomembno, s kakšnimi računalni imamo opravka. Zato tu povzemamo definicijo [5]:

»Računalno je elektronsko računalno, ki omogoča delo z osnovnimi računskimi operacijami in ne podpira:

- možnosti komunikacije z okolico – »zunanji svetom«,
- shranjevanja podatkov iz okolice oziroma zunanjega sveta,
- shranjevanja predhodno naloženih podatkov,
- simbolnega računanja,
- programiranja novih funkcij,
- risanja grafov funkcij.«

V [4] je simbolno računanje opredeljeno kot »nenumerično računanje oziroma uporaba abstraktnih simbolov (spremenljivk x , y , ..., parametrov a , b , ...) v računanju.«

Simbolno računanje je torej računanje z algebrskimi izrazi, faktorizacija izrazov, računanje nedoločenih integralov in podobno, nesimbolno računanje pa je računanje z natančnimi ali približnimi konkretnimi števili.

Vse več modelov računal, ki ustrezajo definiciji dovoljenih računal na maturi, izvajajo določene numerične metode, ki sodijo med nesimbolno računanje. Pri sestavljanju nalog in njihovem vrednotenju je vsekakor dobro poznati zmogljivosti računal in slediti njihovem razvoju, saj se z vsako generacijo računal nabor metod podaljšuje. Navedimo nekaj metod, ki jih zmorejo današnja računalna (seznam metod temelji na računalu CASIO fx-991EX):

- računajo z natančnimi vrednostmi, npr. delno korenijo, izpišejo in računajo s točnimi vrednostmi kotnih funkcij, izračunajo vrednost logaritma pri poljubni pozitivni osnovi, ki ni enaka 1,
- računajo z ulomki in rezultat izpišejo v obliki okrajšanega ulomka,
- neskončno periodično decimalno število pretvorijo v obliko okrajšanega ulomka,
- računajo s kompleksnimi števili, izračunajo absolutno in konjugirano vrednost kompleksnega števila, določijo realno in imaginarno komponento kompleksnega števila (ali daljšega izraza s kompleksnimi števili),
- dano naravno število zapišejo kot produkt praštevilskih potenc,
- rešijo kvadratno enačbo in izračunajo koordinati temena kvadratne funkcije,
- rešijo sistem linearnih enačb (do vključno štirih enačb s štirimi neznankami),
- poiščejo približek rešitve enačbe z Newtonovo metodo,

- rešijo polinomske enačbe in neenačbe do vključno stopnje 4,
- izračunajo kot med vektorjema,
- izračunajo (tudi natančno) vrednost odvoda v dani točki, vrednost določenega integrala, vsoto končne vrste,
- omogočajo izračun koeficientov (nekaj ponujenih) modelov za modeliranje s funkcijami.

Vpliv tehnologije na sestavljanje in vrednotenje nalog

Razvrstitve nalog glede na vpliv tehnologije

V literaturi je zaslediti različne razvrstitve nalog glede na vpliv tehnologije na reševanje nalog [7]. Roškar in Lokar [13] sta izbrala nekaj maturitetnih nalog splošne mature in jih rešila s programi Mathematica, Derive in Matlab. Naloge sta nato razvrstila glede na razvrstitve različnih avtorjev. V nadaljevanju povzemamo nekaj razvrstitev matematičnih problemov v razrede/skupine glede na vpliv različnih tehnoloških pripomočkov in programov za simbolno računanje CAS (Computer Algebra System) na reševanje problemov, ki jih omenjata Roškar in Lokar [13] (prevodi v slovenski jezik so dobesedno povzeti po [13]). Ker se naša analiza in praksa sestavljanja maturitetnih nalog prilagaja uporabi predpisanih računal, v nadaljevanju predstavljamo klasifikacijo, prirejeno našemu namenu.

Jones in McCrae [7] razvrščata matematične probleme glede na vpliv tehnologije pri reševanju nalog v tri razrede:

- CNI (No impact) Ni vpliva: uporaba tehnoloških pripomočkov ne vpliva na potek reševanja.
- CIU (Have Impact, Unchanged) Vpliv: uporaba tehnoloških pripomočkov sicer vpliva na reševanje problema, vendar naloge zaradi tega ni treba spreminjati.
- CIO (Impact, Omitted) Trivializacija: Uporaba tehnologije vpliva na reševanje toliko, da moramo nalogo spremeniti.

Kutzler razvršča matematične naloge [7] glede na vlogo programov za simbolno računanje v procesu reševanja naloge (primarna ali sekundarna) in glede na potrebno predznanje pri uporabi programov za simbolno računanje za reševanje (rutinska ali napredna) v pet razredov:

- PR (Primary Routine) – Primarna rutinska uporaba programov za simbolno računanje: uporaba programov za simbolno računanje je vodilna dejavnost pri reševanju naloge, saj naloge brez pomoči tehnologije ne bi mogli rešiti. Potrebujemo osnovno znanje za uporabo programov za simbolno računanje.
- PA (Primary Advanced) – Primarna napredna uporaba programov za simbolno računanje: uporaba programov za simbolno računanje je vodilna dejavnost pri reševanju naloge, saj naloge brez pomoči tehnologije ne bi mogli rešiti. Potrebujemo napredno znanje za uporabo programov za simbolno računanje.
- SR (Secondary Routine) – Sekundarna rutinska uporaba programov za simbolno računanje: uporaba programov za simbolno računanje je stranskega pomena pri reševanju naloge, saj za rešitev naloge potrebujemo druge sposobnosti. Potre-

bujemo osnovno znanje za uporabo programov za simbolno računanje.

- SA (Secondary Advanced) – Sekundarna napredna uporaba programov za simbolno računanje: uporaba programov za simbolno računanje je stranskega pomena pri reševanju naloge, saj za rešitev naloge potrebujemo druge sposobnosti. Potrebujemo napredno znanje za uporabo programov za simbolno računanje.
- NC (No CAS) – Nesmiselna (nepomembna) uporaba programov za simbolno računanje: pri reševanju naloge nam uporaba programov za simbolno računanje ne pomaga.

Razvrstitev po Kokol-Voljč [10] razvršča naloge na podlagi vloge/pomena matematičnega problema pri preverjanju sposobnosti (v smislu razumevanja matematičnih pojmov) ter večšin (v smislu spretnosti pri izvajanju računov) v pet skupin:

- KO $\rightarrow$ Za tehnološke pripomočke neobčutljiva naloga: za rešitev je ključno razumevanje matematičnih pojmov. Uporaba tehnologije nudi le omejeno pomoč.
- KO? Za tehnološke pripomočke občutljiva naloga: brez tehnoloških pripomočkov je reševanje naloge naporno. Uporaba tehnoloških pripomočkov pri reševanju lahko spremeni pomen problema.
- KO! S tehnološkimi pripomočki razvrednotena naloga: naloga zahteva le uporabo znanja o računskih postopkih. Z uporabo tehnoloških pripomočkov se smiselnost naloge popolnoma izgubi.
- KO $\surd$ Naloga, ki preverja sposobnosti in veščine: Večji del reševanja zavzema prevod izrazov iz ene oblike v drugo z uporabo različnih matematičnih pravil. Za rešitev naloge je potrebna veščina uporabe transformacij v matematični svet, pri čemer je potrebno tudi znanje o sintaksah matematičnih izrazov. Z uporabo tehnoloških pripomočkov s problemom preverjamo znanje izbire in uporabe transformacij, saj brez tega uporaba tehnoloških pripomočkov ni mogoča.
- KO* Redka naloga: neobičajna naloga, ki jo lahko rešimo na več načinov. Reševanje zahteva ustvarjalnost, uporaba tehnoloških pripomočkov pa služi le kot orodje.

Mac Aogáin [11] razvršča naloge v štiri kategorije glede na težavnost naloge, če pri reševanju dovolimo uporabo tehnoloških pripomočkov.

- CT (CAS Trivial) – Trivialna naloga: naloga je rešljiva v dveh do treh korakih, zato z uporabo tehnoloških pripomočkov postane trivialna.
- CE (CAS Easy) – Enostavna naloga: z uporabo tehnoloških pripomočkov se naloga poenostavi.
- CD (CAS Difficult) – Težka naloga: uporaba tehnologije nudi le omejeno pomoč pri reševanju in ne zmanjša težavnosti.
- CP (CAS Proof) – Za tehnološke pripomočke neobčutljiva naloga: uporaba tehnoloških pripomočkov ne pripomore ali le minimalno pripomore k rešitvi.

Herget, Heugl, Kutzler in Lehmann [9] razvrstijo probleme glede na to, ali pri reševanju dovolimo uporabo tehnološkega pripomočka, ki omogoča simbolno računanje ali ne, v tri skupine:

- -T brez tehnologije: naloge, pri katerih za rešitev ne potrebujemo nikakršne pomoči tehnologije.

- +T s tehnologijo: naloge, kjer pri reševanju dovolimo uporabo zmogljivega računalnika oziroma tehnološkega pripomočka, ki omogoča simbolno računanje, saj je problem brez uporabe tehnologije težko rešljiv.
- ?T Vprašljivo: naloge, ki bi jih težko uvrstili v eno izmed prvih dveh skupin.

Vsaka razvrstitev je seveda za določen tip nalog in za določene tehnološke pripomočke bolj ali manj ustrezna. Poudariti je treba, da ni jasne meje med skupinami v posameznih razvrstitvah, saj so v realnosti naloge zvezno porazdeljene. Z izjemo Kutzlerjeve razvrstitve, ki je dvodimenzionalna, so ostale porazdelitve enodimenzionalne.

Razvrstitev nalog na splošni maturi iz matematike v štiri tipe oziroma skupine

Zaradi hitrega napredka tehnologije je pri sestavi maturitetnih nalog nujno razmisliti o vplivu dovoljene tehnologije na reševanje nalog in o vrednosti matematične naloge glede na dovoljene pripomočke pri maturitetnem izpitu, saj možnost uporabe računalnika vpliva tudi na vrednotenje nalog.

Zavedati se moramo, da npr. reševanje kvadratne enačbe vrednotimo drugače, če dovolimo uporabo računalnika. V tem primeru praviloma vrednotimo samo rešitev, ne pa postopka. Glede na to, da je na trgu veliko modelov različno zmogljivih računalnikov, je zelo težko ali nemogoče pravično vrednotiti postopke v primeru reševanja enačb z računalnikom, saj bi s tem kandidate, ki imajo manj zmogljiva računalnika, postavili v neenakovreden položaj. Če želimo preveriti, ali kandidat pozna postopek reševanja enačbe, mu uporabe računalnika ne moremo dovoliti. Leta 2021 so bile zato na osnovni ravni mature z namenom preverjanja osnovnega znanja uvedene tudi kratke naloge, s katerimi lahko preverjamo poznavanje osnovnih konceptov in obvladovanje osnovnih tehnik. Ker te naloge praviloma preverjajo samo en cilj, so tudi taksonomsko večinoma na nižji ravni in bodo torej po pričakovanjih dobro reševane.

Pri pregledu starih maturitetnih nalog lahko ugotovimo, da je pri nekaterih uporaba računalnika potrebna, pri večini pa uporaba računalnika ni potrebna. S pojavom novih funkcij na novejših zmogljivejših tipih računalnikov je vedno več primerov starih maturitetnih nalog, pri katerih bi uporaba računalnika povsem razvrednotila problem ali pa glede na različne zmogljivosti računalnikov kandidate postavila v neenakovreden položaj. Na tem mestu je treba izpostaviti, da je pri določenem tipu nalog uporaba računalnika lahko celo zavajajoča. Nazadnje med maturitetnimi nalogami najdemo veliko nalog, pri katerih uporaba računalnika ne vpliva na postopek reševanja in način vrednotenja, zaradi česar bi jih lahko uvrstili na obe izpitni poli.

Za analizo primernosti uvrstitve na posamezno polo na splošni maturi iz matematike bi lahko naloge razvrstili v skupine po katerikoli razvrstitvi, ki smo jih omenili v prejšnjem razdelku. Ker je trenutno na splošni maturi dovoljena uporaba žepnega računalnika (kot je opredeljeno v [5] in [4]), bomo v tem prispevku naloge razvrstili po naši klasifikaciji, ki je prirejena za uporabo dovoljenega žepnega računalnika in ne za drugo programsko opremo. Z morebitno nadgradnjo pa bi bila lahko primerna tudi za

uporabo drugih tehnoloških pripomočkov in programov za simbolno računanje.

Ker nas predvsem zanima sestavljanje in ocenjevanje nalog na splošni maturi po trenutno veljavnem predmetnem izpitnem katalogu [1], bomo v nadaljevanju opisali razvrstitev, ki je verjetno najbolj ustrezna našemu namenu. Definirali smo štiri tipe nalog, in sicer tako, da tip naloge najprej pove, za katero polo je naloga primerna (P1 - prvo, P2 - drugo ali P12 - za obe) in nadalje še, ali je treba glede na izbiro pole prilagoditi točkovnik (T):

1. Naloge tipa P12: Naloge, ki so neobčutljive na rabo računalna.
2. Naloge tipa P12T: Naloge, ki jih različno vrednotimo glede na rabo računalna.
3. Naloge tipa P1: Naloge, ki so z uporabo računalna razvrednotene.
4. Naloge tipa P2: Naloge, pri katerih potrebujemo računalno.

V nadaljevanju bomo navedene štiri tipe nalog podrobneje predstavili. Pri vsakem tipu nalog bomo izpostavili nekaj izbranih primerov. Naloge so večinoma izbrane iz preteklih maturitetnih izpitov, ki so objavljeni na spletni strani Državnega izpitnega centra [3]. Dodanih je nekaj nalog, ki smo jih sestavili na novo in še niso bile del izpita, ali kratkih nalog iz zbirke Matematika – Nekaj kratkih nalog na splošni maturi [8].

Pri nekaterih nalogah je v točkovniku uporabljen zapis *1, kar pomeni, da je točka postopkovna. Kandidat dobi postopkovno točko, če je svoje vmesne rezultate, ki so bili izračunani narobe, pravilno uporabil v postopku v nadaljevanju naloge. Točkovnike nalog iz starih izpitov smo ponekod dopolnili z namenom, da postanejo bolj razumljivi tudi bralcem, ki nimajo izkušnje z ocenjevanjem splošne mature.

Bralci bodo opazili tudi dva različna zapisa točkovnikov. Pri starejših nalogah so točke v stolpcu »Točke« razdeljene bolj podrobno, kot bo videti v primeru 11. Pri novejših nalogah je v stolpcu »Točke« zapisano skupno število točk, ki jih dobi kandidat za pravilno rešitev naloge ali del naloge, če je le-ta razdeljena v več delov. Razlika točk med točkami v stolpcu »Točke« in točkami v stolpcu »Dodatna navodila« so točke za pravilen rezultat.

Razvrstitev nalog na splošni maturi – primeri

Naloge tipa P12 – naloge, ki so neobčutljive na rabo računalna

Naloge, ki so neobčutljive na rabo računalna, so naloge, pri katerih je za rešitev ključno razumevanje matematičnih pojmov. Računalna v nobenem koraku reševanja nalog kandidatom niso v pomoč in jim ne olajšajo dela, saj menimo, da morebitni preizkus rezultata z računalom ne pomeni bistvene prednosti.

Take naloge lahko uvrstimo na obe izpitni poli in jih na obeh tudi enako vrednotimo. Oglejmo si dva primera.

Primer 1: (Splošna matura – avgust 2020, naloga 11)

Za funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ velja, da je $f(1) = 1$ in $f'(x) = 2x - 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Zapišite predpis funkcije f .

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
11	6	Zapisan predpis funkcije f npr. $f(x) = x^2 - x + 1$.	Zapis ali uporaba povezave z nedoločenim integralom, npr. napisan nastavek $\int (2x - 1) dx \dots$ 1 točka. Izračunan nedoločen integral, npr. $\int (2x - 1) dx = x^2 - x + C \dots (1 + 1 + 1)$ 3 točke. Upoštevanje pogoja $f(1) = 1 \dots$ *1 točka.

Pri reševanju primera 1 morajo kandidati poznati zvezo med odvodom in nedoločenim integralom, za kar dobijo 1 točko. Za pravilno izračunan nedoločen integral dobijo 3 točke; za vsak člen 1 točko, kar označuje oznaka $(1 + 1 + 1)$. Za upoštevanje pogoja $f(1) = 1$ prejmejo 1 točko, ki je postopkovna točka, in jo dobi kandidat tudi, če je nepravilno izračunal nedoločen integral in pravilno upošteval pogoj. Ena točko dobijo kandidati še za pravilen končni rezultat, torej za pravilno zapisano predpis funkcije. Ta točka ni zapisana posebej, saj je pravilno rešena naloga vredna 6 točk, v dodatnih navodilih pa je zapisano, kako kandidat prejme do pet točk, če je končen rezultat napačen.

Pri tej nalogi računalna, ki so dovoljena na maturi iz matematike, kandidatom niso v pomoč, saj ne omogočajo računanja nedoločenega integrala. Tako lahko nalogo uvrstimo na prvo ali drugo izpitno polo in jo na obeh tudi enako vrednotimo.

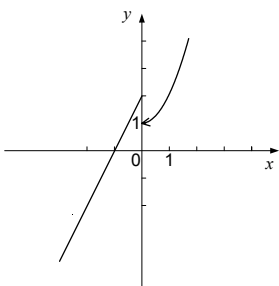
Primer 2: (Splošna matura – junij 2016, naloga 11)

Dana je funkcija s predpisom $f(x) = \begin{cases} x^2 + c; & x > 0 \\ 2x + 2; & x \leq 0 \end{cases}$

V koordinatni sistem narišite graf funkcije f za $c = 1$. V katerih točkah je funkcija zvezna?

Določite vrednost konstante c tako, da bo funkcija f zvezna za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
11	3	Narisan graf funkcije 	Vsaka veja po 1 točko, pravilno narisan graf v $x = 0$... 1 točka. Le narisani premica in parabola ... 1 točka.
	1	Funkcija je zvezna za vse x , razen za $x = 0$.	
	1	Funkcija je zvezna za $c = 2$.	
Skupaj	5		

Tudi pri primeru 2 računal, ki so dovoljena na maturi, naloge ne razvrstijo, ker ne omogočajo risanja grafov funkcij. Kandidati si lahko z računalom pomagajo tabelirati vrednosti funkcije, vendar to lahko naredijo tudi brez računal, pri tem pa ne porabijo veliko dodatnega časa. V drugem delu naloge je ključno razumevanje zveznosti funkcij, pri čemer računal ne pomaga. Tudi to nalogo lahko uvrstimo na obe izpitni poli z enakim točkovnikom.

Naloge tipa P12T – naloge, ki jih različno vrednotimo glede na rabo računal

Naloge, ki jih različno vrednotimo glede na uporabo ali neuporabo računal, so naloge, pri katerih uporaba računal pri reševanju kandidatom nudi pomoč. Nalogo lahko uvrstimo na obe izpitni poli, vendar se naloga glede na to, koliko uporaba računal vpliva na sam potek reševanja, vrednoti drugače, če je umeščena na izpitno polo z računalom, kot če je na izpitni poli brez računal.

V to skupino bi tako uvrstili vse naloge, kjer morajo kandidati v postopku reševanja naloge npr. rešiti enačbo ali izračunati določeni integral, in naloga ne preverja cilja, ali kandidat zna npr. rešiti enačbo oziroma izračunati določeni integral. Če je osrednji cilj naloge rešiti enačbo ali izračunati določeni integral, potem naloga spada izključno na polo brez računal. Oglejmo si nekaj primerov.

Primer 3: (nova naloga)

Izračunajte, za katere vrednosti x so $x + 1$, $3x + 1$, $3x^2 - 1$ prvi trije zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Koliko členov naraščajočega aritmetičnega zaporedja je manjših od 5500?

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	5	$x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{3}$	Zapis ali uporaba zveze med zaporednimi členi aritmetičnega zaporedja ... 1 točka. Ureditev enačbe, npr. $3x^2 - 5x - 2 = 0$... 1 točka. Uporaba ali zapis formule za reševanje kvadratne enačbe ali razcep enačbe ... 1 točka.
	3	Od 5000 je manjših 1375 členov.	Le izračun prvega člena $a_1 = 3$ ali difference $d = 4$... 1 točka. Zapis neenačbe $4n - 1 < 5500$... *1 točka.
Skupaj	8		

Točkovnik primera 3 je pripravljen za nalogo na prvi izpitni poli brez računal. Kandidat mora poznati zvezo med zaporednimi členi aritmetičnega zaporedja, za kar dobi eno točko. Za urejanje kvadratne enačbe dobi eno točko. Kandidat dobi še točko za uporabo formule za reševanje kvadratne enačbe in po eno točko za vsako rešitev, kar ni zapisano med dodatnimi navodili. Prvi del naloge je tako ovrednoten s petimi točkami. V drugem delu naloge kandidat izračuna prvi člen zaporedja in diferenco, zapiše in reši neenačbo ter napiše odgovor, kar je ovrednoteno s tremi točkami. Naj omenimo še, da kandidat prejme 1 postopkovno točko za zapisano neenačbo z napačnim izračunom prvega člena ali difference.

Če bi nalogo uvrstili na polo z računalom, moramo upoštevati, da nekatera računal zmorejo rešiti kvadratno enačbo, če vnesemo njene koeficiente. Kandidati, ki takšnega računal nimajo, bi bili v nekoliko slabšem položaju, kljub temu da lahko enačbo rešijo brez računal po formuli. Točkovnik bi za drugo izpitno polo spremenili tako, da kandidati ne bi dobili točke za uporabo formule za reševanje kvadratne enačbe, zapisani rešitvi enačbe pa bi vrednotili z eno točko. Tako bi prvi del naloge vrednotili s 3 točkami, točkovnik drugega dela bi ostal nespremenjen. Celotna naloga bi bila vredna 6 točk.

Pri tovrstnih nalogah na drugi izpitni poli izhajamo iz predpostavke, da je kandidat, ki je kvadratno enačbo rešil z računalom, ravno tako kot kandidat, ki je nalogo rešil z uporabo formule brez računal ali pa je računal uporabil samo za preračunavanje rešitev, pokazal neko znanje oziroma spretnost. V konkretnem primeru ocenjujemo, da razlike v zmogljivosti računal niso bistvene oziroma niso tako velike, da naloge ne bi bilo mogoče uporabiti na maturi.

Primer 4: (Splošna matura – junij 2017, naloga 11)

Dani sta realni funkciji f in g s predpisoma
 $f(x) = x^2$ in $g(x) = 6 - x$. Izračunajte ploščino lika, ki ga omeujeta grafa funkcij f in g .

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
11	2	Izračunani abscisi presečišč grafov $x_1 = -3$ in $x_2 = 2$.	Le zapis enačbe $x^2 = 6 - x$... 1 točka.
	2	Zapis, npr. $\int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx$	Pravilno zapisani meji določenega integrala ... *1 točka. Pravilno zapisan integrand ... 1 točka. Upoštevamo tudi $\int_{-3}^2 (x^2 + x - 6) dx$.
	3	Rezultat $S = \frac{125}{6}$	Le izračun nedoločenega integrala (tudi brez C) $\int (6 - x - x^2) dx = 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$... 1 točka. Le pravilno vstavljene meje ... *1 točka.
Skupaj	7		

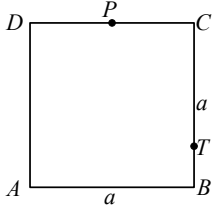
Točkovnik primera 4 je pripravljen za nalogo na izpitni poli brez računalu. Ker je kvadratna enačba zelo preprosta, kandidat ne dobi točk za postopek reševanja enačbe, temveč le dve točki za njeni rešitvi. Enačbo lahko reši z razstavljanjem ali z uporabo formule za reševanje kvadratne enačbe. Dve točki dobi kandidat za zapis določenega integrala, pri čemer dobi postopkovno točko za zapisani integracijski mej, četudi ju je izračunal napačno. Za računanje določenega integrala dobi kandidat 3 točke, pri čemer dobi eno točko za izračun nedoločenega integrala in eno točko za pravilno vstavljanje mej. Ta točka je postopkovna točka, kar pomeni, da jo dobi tudi, če je nedoločeni integral izračunal narobe. Tretjo točko dobi kandidat za izračunano vrednost določenega integrala in zapisano ploščino območja.

Naloga je primerna tudi za drugo polo s smiselno spremenjenim točkovnikom. Kandidat bi na enak način dobil prve štiri točke, pri čemer bi lahko kvadratno enačbo rešil z uporabo računalu ali brez. Od zadnjih treh točk bi kandidat dobil le 1 za zapisan rezultat $S = \frac{125}{6}$. Kandidat je določeni integral lahko izračunal z računalom ali brez, zato mu točke za izračun nedoločenega integrala in točke za pravilno vstavljene meje ne dodelimo. Na poli 2 bi celotno nalogo vrednotili s 5 točkami.

Primer 5: (Splošna matura – junij 2020, naloga 6)

V kvadratu z oglišči A, B, C, D in stranico dolžine a je točka P razpolovišče stranice CD . Točka T leži na stranici BC tako, da je $|BT| : |TC| = 1 : 3$. Narišite skico. Z vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ izrazite vektorja $\overrightarrow{AT}$ in $\overrightarrow{AP}$. Preverite, da je skalarni produkt vektorjev $\overrightarrow{AT}$ in $\overrightarrow{AP}$ enak $\frac{3}{4}a^2$.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
6	1	Skica 	
	1	Zapisan vektor $\overrightarrow{AT} = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$	
	1	Zapisan vektor $\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$	
		1. način	
	4	Izračunan skalarni produkt $\begin{aligned}\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{AP} &= \left(\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\vec{a}\vec{a} + \frac{9}{8}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}\vec{b} = \\ &= \frac{3}{4}a^2\end{aligned}$	Upoštevanje distributivnosti ... *1 točka. Upoštevanje $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ ali $\vec{b} \cdot \vec{b} = a^2$... 1 točka. Upoštevanje $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$... 1 točka.
		2. način	
	1	Zapis ali uporaba definicije skalarnega produkta, npr. $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{AP} \cdot \cos \varphi$	
	1	Izračunan kot φ npr. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \left(\arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{1}{2} \right)$	

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	1	Izračunani dolžini, npr. $ \overrightarrow{AT} = \frac{a\sqrt{17}}{4}, \overrightarrow{AP} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$	
	1	Izračunan skalarni produkt $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}a^2$	
Skupaj	7		Če kandidat rezultat zapiše s približnimi vrednostmi, npr. $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{AP} = 0,749a^2$, se mu zadnja točka ne dodeli.

V primeru 5 kandidat v prvem delu naloge izrazi vektorja v obliki linearne kombinacije danih vektorjev, v drugem delu pa izračuna njun skalarni produkt, za kar ima dve možnosti.

Prva možnost je, da izračuna produkt vektorjev, ki sta linearni kombinaciji danih vektorjev, in pri tem uporabi distributivnost množenja linearnih kombinacij vektorjev. Pri tem upošteva, da je skalarni produkt pravokotnih vektorjev enak 0. Kandidat dobi postopkovno točko, če je za napačno zapisani linearni kombinaciji vektorjev pravilno uporabil distributivnost množenja. Nalogo lahko reši brez uporabe računalnika, zato jo lahko uvrstimo na izpitno polo brez računalnika.

Druga možnost je, da si kandidat v drugem delu naloge pri reševanju lahko pomaga z računalom, če mu ga dovolimo. Najprej izračuna dolžini obeh vektorjev $\overrightarrow{AT}$ in $\overrightarrow{AP}$ (lahko brez računalnika) in kot med njima (z računalom). Po definiciji skalarnega produkta nato izračuna zahtevani skalarni produkt, pri čemer je natančnost rezultata odvisna od kandidata. Kandidat lahko vmesne rezultate zaokroži, kar vodi k ne dovolj natančnemu rezultatu. To pomeni, da je v tem primeru dovoljena uporaba računalnika lahko celo zavajajoča. Če je kandidat kljub uporabi računalnika dobil natančen rezultat, mu seveda dodelimo vse točke, sicer pa kljub pravilnemu postopku ne.

Če torej nalogo uvrstimo na polo z računalom, pričakujemo, da računalnik kandidatom služi le za trivialne izračune, saj jih v prvem delu naloge usmerimo, da izrazijo dana vektorja kot linearno kombinacijo baznih vektorjev in da bodo z uporabo distributivnosti in upoštevanjem pravokotnosti baznih vektorjev izračunali skalarni produkt.

Naloge tipa P1 – naloge, ki so z uporabo računalnika razvrednotene

Naloge brez računalnika so naloge, pri katerih je cilj uporaba računskih postopkov, poznavanje formul in podobno. S temi nalogami preverjamo tako razumevanje matematičnih pojmov kot

tudi veščine. Z uporabo računalnika taka naloga izgubi smisel in postane trivialna. V skrajnem primeru uporaba računalnika nalogo razvrednoti ali pa postavlja dijake z zmogljivejšimi računalniki v zelo privilegiran položaj.

Naloge brez računalnika omogočajo preverjanje pomembnih ciljev, ki jih na poli z dovoljenim računalom ne moremo preverjati. Vpeljava pole brez računalnika je zato prinesla dodano vrednost mature, saj lahko na ta način dijakom omogočimo, da pokažejo tudi osnovna znanja in razumevanje pojmov tako, da rešujejo preprostejše krajše naloge, ki bi jih uporaba računalnika razvrednotila. V času pisanja tega prispevka izkušnje s polami brez računalnika še nimamo, saj je bila za leto 2021 zaradi epidemiološke situacije sprejeta prilagoditev mature, da so dijaki na obeh polah lahko uporabljali računalnik. Pole so bile temu primerno prilagojene, tako da so bile prej omenjene naloge izločene in nadomeščene z drugimi. Za ilustracijo smo izbrali tri primere, ki jih najdemo v zbirki Matematika – Nekaj kratkih nalog na splošni maturi [8].

Primer 6: (Preizkus 1 brez računalnika, naloga 2)

Delno korenite in izračunajte $\sqrt{20} - \sqrt{80} + 3\sqrt{125}$.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	2	Rezultat $13\sqrt{5}$	Delno korenjenje $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \sqrt{80} = 4\sqrt{5},$ $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}, \dots$ 1 točka.

V primeru 6 je cilj naloge preveriti, ali kandidat obvlada delno korenjenje. Ker večina računalnikov izračuna vrednost izraza in rezultat delno koreniti, naloga ni primerna za izpitno polo z računalnikom.

Primer 7: (Preizkus 6 brez računalnika, naloga 4)

Rešite enačbo $2x^2 - 16x = -30$.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	3	$x_1 = 3, x_2 = -1$	Poenostavitev enačbe, npr. $2x^2 - 16x + 30 = 0$ 1 točka. Poenostavitev in razcep na linearne faktorje oziroma zapis ali uporaba formule za rešitvi kvadratne enačbe ali razcep tričlenika ... *1 točka.

Z nalogo v primeru 7 želimo preveriti, ali kandidati znajo rešiti kvadratno enačbo bodisi z razcepom bodisi z uporabo formule, zato uporaba računalnika ni primerna, saj večina računalniško reši kvadratno enačbo. Za poenostavitev enačbe dobi kandidat eno točko. Prav tako dobi eno točko za pravilen postopek reševanja enačbe, ki je postopkovna točka. Kandidat jo dobi, če napačno uredi kvadratno enačbo, a pravilno uporabi postopek njenega reševanja. Tretjo točko dobi za pravilno zapisani rešitvi enačbe. Nalogo bi uvrstili na izpitno polo brez računalnika.

Primer 8: (Preizkus 3 brez računalnika, naloga 4)

Naj bo $z = 2 - i$. Za dani z izračunajte $(\bar{z} + 1)^2$.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	3	$8 + 6i$	Zapis ali uporaba $\bar{z} = 2 + i$... 1 točka. Zapis ali uporaba $i^2 = -1$... 1 točka.

Cilj naloge v primeru 8 je računanje s kompleksnimi števili. Kandidat mora poznati konjugirano vrednost kompleksnega števila, za kar dobi eno točko, in $i^2 = -1$, za kar dobi eno točko. Za poenostavljanje izraza in kvadriranje dvočlenika ter zapis končnega rezultata dobi kandidat eno točko.

Če bi nalogo uvrstili na polo z računalom, bi jo popolnoma razvrednotili, saj zmogljivejša računalna računa s kompleksnimi števili. Kandidat bi le vnesel podatke (računalna imajo tudi ukaz za konjugirano vrednost) in dobil končen rezultat.

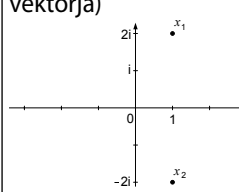
Poglejmo še primera nalog, ki postavljata dijake z zmogljivejšimi računalni v privilegiran položaj.

Primer 9: (Splošna matura – avgust 2013, naloga 3)

Rešite enačbo $x(x - 2) + 5 = 0$ in narišite rešitvi v dani kompleksni ravnini.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
3	3	Rešitvi enačbe, npr. $x_{1,2} = 1 \pm 2i$.	Zapis ali uporaba formule za reševanje kvadratne enačbe ... *1 točka. Ugotovitev $\sqrt{-16} = 4i$... 1 točka.

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	2	Rešitev v kompleksni ravnini (točki ali vektorja) 	Pravilno predstavljeni kompleksni števili ... (*1 + 1) 2 točki
Skupaj	5		

Cilj naloge v primeru 9 je zopet preveriti znanje reševanja kvadratne enačbe – tokrat enačbe, ki ima kompleksni rešitvi. Za zapis ali uporabo formule za reševanje kvadratne enačbe dobi kandidat 1 točko, ki je postopkovna. Kandidat jo dobi tudi, če je enačbo napačno uredil, koeficiente enačbe pa pravilno vstavil v formulo. Tretjo točko dobi za pravilno zapisani rešitvi enačbe. V drugem delu dobi kandidat po eno točko za vsako pravilno predstavljeno kompleksno število v kompleksni ravnini. Kandidat dobi postopkovno točko, če kvadratno enačbo napačno reši, napačni rešitvi pa pravilno predstavi v kompleksni ravnini.

Ker zmogljivejša računalna, ki so dovoljena na maturi, znajo računati s kompleksnimi števili, mora biti naloga v izpitni poli brez računalnika, sicer bi bili kandidati z manj zmogljivimi računalni v slabšem položaju. Naloga je ob uporabi računalnika skoraj popolnoma razvrednotena, saj jo je mogoče rešiti (prvi del) z uporabo računalnika brez znanja, kako se rešuje kvadratna enačba. Ker je drugi del naloge odvisen od rezultata prvega dela, so ti kandidati tudi pri reševanju drugega dela v bistveni prednosti pred kandidati, ki rešujejo kvadratno enačbo brez računalnika in se morda kljub poznavanju postopka pri reševanju zmotijo.

Primer 10: (Splošna matura – junij 2016, naloga 1)

Za poljubni naravni števili m in n označimo z $D(m, n)$ največji skupni delitelj teh dveh števil in z $v(m, n)$ njun najmanjši skupni večkratnik.

1.1 Razcepšte števil 45, 48 in 60 na prafaktorje.

1.2 Izračunajte $\left(\frac{D(45, 48)}{D(48, 60)} - \frac{D(11, 23)}{v(4, 10)}\right) \cdot v(5, 20)$.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
1.1	2	$45 = 3^2 \cdot 5$ $48 = 2^4 \cdot 3$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$	Le dva pravilna razcepa ... 1 točka. Upoštevamo tudi drugačen zapis prafaktorjev.

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
1.2	1	$D(48, 60) = 12$	Zapis posamezne vrednosti ali vstavljena vrednost v dani izraz.
	1	$D(45, 48) = 3$	
	1	$D(11, 23) = 1$	
	1	$v(4, 10) = 20$	
	1	$v(5, 20) = 20$	
	1	$\left(\frac{D(45, 48)}{D(48, 60)} - \frac{D(11, 23)}{v(4, 10)}\right) \cdot v(5, 20) = 4$	
Skupaj	8		

Naloga v primeru 10 ima več ciljev. V prvem delu kandidati zapisejo dana števila kot produkt praštevilskih potenc, kar zmorejo tudi nekoliko zmogljivejša računalna. Drugi del naloge, v katerem je treba izračunati največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik števil, bodo kandidati reševali brez računalna, saj računalna zaenkrat tega ne zmorejo. V tretjem delu naloge, ko je treba izračunati vrednost izraza, lahko kandidati zopet uporabijo računalno. Nalogo bi zaradi prvega in tretjega dela uvrstili na izpitno polo brez računalna, da bi vsem kandidatom zagotovili enake možnosti.

Za ilustracijo je bilo navedenih le nekaj primerov, pri katerih je pokazano, kako računalno bodisi razvrstimo naloge bodisi kandidate postavi v neenakovreden položaj. Omenimo še nekaj podobnih nalog, ki jih reši nekoliko bolj zmogljivo računalno ob vnosu podatkov (preverjeno na računalu CASIO fx-991EX):

Natančno izračunajte $0,8\bar{3} \cdot 0,12$.

Rešite sistem enačb $5x - 4y = 1$ in $3x + 2y = 5$.

Rešite enačbo $\log_2(x + 2) = 2$.

Rešite enačbo $3^{x-1} = 27 \cdot 9^x$.

Rešite neenačbo $x^2 - 2x - 3 < 0$.

Rešite enačbo $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$.

Rešite neenačbo $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 > 0$.

Dana je funkcija $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Izračunajte $f'(2)$.

Izračunajte $\int_3^3 (x^2 - 2) dx$.

Izračunajte $\sum_{i=1}^{10} (3i - 1)$.

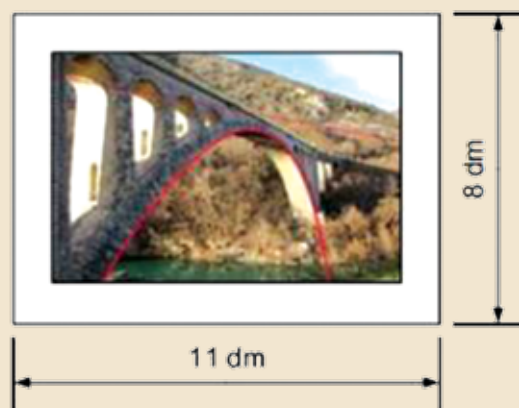
Naloge tipa P2 – naloge, pri katerih potrebujemo računalno

Naloge z računalom so naloge, pri katerih je računalno potrebno, saj je brez njega reševanje zahtevno in dolgotrajno ali pa naloge brez računalna sploh ne moremo rešiti. Najpogostejše so to naloge, kjer so zahtevani decimalni približki, naloge iz procentnega

računa, geometrijske naloge, ki jih rešimo z uporabo kotnih funkcij ... Tovrstne naloge so lahko izključno na poli z računalom.

Primer 11: (Splošna matura – junij 2014, naloga 12)

Zunanji rob okvira slike je pravokotnik dimenzij $11 \text{ dm} \times 8 \text{ dm}$. Okvir slike je ob vseh štirih robovih enako širok. Znotraj notranjega roba okvira je slika s ploščino $61,75 \text{ dm}^2$. Izračunajte širino okvira.



Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
12	1. način		
	1	Izbira širine roba za neznanko, npr. x	
	1	Zapis dolžine slike, npr. $11 - 2x$ ali $11 - y$	
	1	Zapis širine slike, npr. $8 - 2x$ ali $8 - y$	
	1	Zapis enačbe, npr. $(11 - 2x)(8 - 2x) = 61,75$	
	1	Urejena enačba, npr. $16x^2 - 152x + 105 = 0$	
	1	Zapis rešitev $x_1 = 8,75 \text{ dm}$, $x_2 = 0,75 \text{ dm}$	
	1	Izločena neustrezna rešitev $8,75 \text{ dm}$ ali zapisan odgovor	

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
	2. način		
1		Izbira širine roba za neznanko, npr. x	
1		Ploščina okvirja je $26,25 \text{ dm}^2$	
2		Zapis ploščine okvirja z neznanko, npr. $11 \cdot 2x + (8 - 2x) \cdot 2x$	Le en člen ... 1 točka.
1		Urejena enačba, npr. $4x^2 - 38x + 26,25 = 0$	
1		Zapis rešitev $x_1 = 8,75 \text{ dm}$, $x_2 = 0,75 \text{ dm}$	
1		Izložena neustrezna rešitev $8,75 \text{ dm}$ ali zapisan odgovor	
Skupaj	7		Če je kandidat nalogo pravilno rešil s poskušanjem, dobi vse točke.

Primer 11 je zanimiva problemska naloga, pri kateri lahko kandidati spretno rešijo kvadratno enačbo z računalom, če jim računalno to seveda omogoča, ali pa si z računalom pomagajo pri reševanju kvadratne enačbe, če se je lotijo po formuli. Ker je reševanje kvadratne enačbe rutinski postopek, kandidati z zmogljivejšim računalom niso v veliki prednosti. Pri reševanju po formuli je računalno v največjo pomoč pri računanju kvadratnega korena diskriminante. Nalogo bi vsekakor uvrstili na polo z računalom.

Primer 12: (Splošna matura – junij 2018, naloga 12)

Kurilno olje je mogoče naročiti v trgovini A ali v trgovini B. Doplačati je treba tudi prevoz. Cene za liter olja in za prevoz so podane v spodnji preglednici. Cena prevoza je v obeh trgovinah neodvisna od količine kupljenega olja in od razdalje.

	Trgovina A	Trgovina B
Cena za liter olja	0,811 €	0,795 €
Cena prevoza	36 €	51 €

Jure ima posodo za kurilno olje v obliki kvadra. Široka je 8 dm, dolga 17 dm in visoka 12,5 dm. Jure je izmeril, da olje v posodi sega do višine 3 dm. Dokupil bo toliko olja, da bo posoda polna do vrha.

V kateri od trgovin, A ali B, bo Jure kupil kurilno olje, da bo za olje s prevozom plačal manj? Koliko bo plačal? Zapišite odgovor.

Pri kateri količini olja bo za olje in prevoz skupaj plačal v obeh trgovinah enako? V kateri trgovini bo nakup olja cenejši za večje in v kateri za manjše količine olja?

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
12.1	2	Izračunana prostornina olja, ki ga mora Jure dokupiti, npr. $V = 1292 \ell$	Le uporaba formule za prostornino kvadra ... *1 točka.
	3	Odgovor, npr.: Jure bo kupil kurilno olje v trgovini B, plačal bo 1078,14 €	Le izračun cene za plačilo v trgovini A: 1083,81 € ... 1 točka. Le izračun cene za plačilo v trgovini B: 1078,14 € ... 1 točka.
12.2	1	Izračun ali ugotovitev mejne vrednosti, npr. 937,5 €	
	1	Odgovor: Nakup količine olja, manjše od 937,5 € je cenejši v trgovini A, večje od 937,5 € pa v trgovini B.	
Skupaj	7		

Problemska naloga v primeru 12 je sestavljena iz dveh delov, kjer morajo kandidati računati z decimalnimi števili. Postopkovno točko dobi kandidat, ki je uporabil napačne podatke za izračun količine olja, ki jo mora kupiti Jure, a je uporabil pravilno formulo za prostornino kvadra. Ker cilj naloge ni preverjati znanje računanja z decimalnimi števili, je smiselno, da kandidatom dovolimo uporabo računalu, zato bi nalogo uvrstili na polo z računalom.

Primer 13: (Splošna matura – junij 2019, naloga 6)

V trikotniku ABC stranica AB meri 6 cm. Kot $\alpha = \sphericalangle BAC$ meri 70° in kot $\gamma = \sphericalangle ACB$ meri 30° . Izračunajte dolžino stranice AC in ploščino trikotnika $\triangle ABC$. Rezultata zaokrožite na dve decimalni.

Točkovnik

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
6	1. način		
	4	Izračunan približek dolžine stranice AC , $ AC \doteq 11,82$ cm	Izračunan $\beta = 80^\circ \dots$ 1 točka. Zapis ali uporaba sinusnega izreka za izračun stranice $b = AC $, $\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} \dots$ *1 točka. Izračunan $b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{6 \cdot \sin 80^\circ}{\sin 30^\circ} \dots$ 1 točka.
	2	Izračunan približek ploščine trikotnika ABC , $S \doteq 33,31$ cm ²	Zapis ali uporaba formule, npr. $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha \dots$ *1 točka.
	2. način		
	4	Naj bo N nožišče višine na AC . Izračunan približek dolžine stranice AC , $ AC = AN + NC \doteq 11,82$ cm	Zapis ali uporaba $ AN = c \cdot \cos \alpha \dots$ 1 točka. Zapis ali uporaba $v_{AC} = c \cdot \sin \alpha \dots$ 1 točka.
	2	Izračunan približek ploščine trikotnika ABC , $S \doteq 33,31$ cm ²	Zapis ali uporaba formule, npr. $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha \dots$ *1 točka.
Skupaj	6		Če kandidat nikjer pri rezultatih ne zapiše enot, se mu odšteje 1 točka.

Primer 13 je standardna geometrijska naloga, pri kateri je cilj, da iz danih podatkov izračunajo dolžino stranice in ploščino trikotnika. Kandidati morajo izkazati geometrijsko predstavo in uporabo formul za razreševanje trikotnika. Postopkovne točke dobi kandidat, ki je uporabil pravilne formule, a je vstavil svoje predhodno napačno izračunane podatke. Kandidati naloge ne morejo rešiti brez uporabe računalu, zato bi jo uvrstili na izpitno polo z računalom.

Kljub temu moramo opozoriti na natančnost končnih rezultatov. Ker je oblika rezultata predpisana, se priznata le rezultata za pravilno dolžino stranice in pravilno ploščino trikotnika, ki sta zapisana v rešitvah. Pri popravljanju naloge je bilo opaziti predvsem dve vrsti napak.

Prva napaka je izvirala iz zaokroževanja vmesnih rezultatov. Kandidati so tudi vmesne rezultate zaokroževali na dve decimal-

ki, zato sta bila končna rezultata posledično napačna. Težavi se seveda lahko izognemo, če vmesne rezultate zapišemo z vsemi decimalkami, ki jih vrne računalu. Pravi način je seveda uporaba spomina v računalu.

Druga napaka pa je izvirala le iz napačno zaokroženega končnega rezultata. Kandidati so lahko vmesne rezultate zapisali točno, kot je predvideno v točkovniku, končen rezultat pa so zaokrožili narobe. Tako je bil rezultat napačen, če so dolžino stranice AC zaokrožili na 11,81 cm.

Kandidate je treba vsa leta izobraževanja in pred izpitom opozarjati na pravilen način reševanja podobnih nalog in na pravilno zaokroževanje rezultatov.

Zaključek

Informacijsko-komunikacijsko tehnologijo bodo maturanti kasneje uporabljali tudi pri opravljanju svojih poklicev, pa naj gre za poklic na družboslovnem, naravoslovnem, tehniškem ali kakem drugem področju. Pri mnogih poklicih si bodo s tako tehnologijo pomagali pri reševanju matematičnih problemov. Ker je zelo pomembno, da poleg uporabe take informacijsko-komunikacijske tehnologije zna uporabnik dobljene rezultate tudi kritično interpretirati, je prav, da se v gimnaziji dijak temeljito nauči osnov matematike, ki stoji za uporabo vsake take informacijsko-komunikacijske tehnologije.

Z maturitetnim izpitom iz matematike v prvi vrsti preverjamo osnovno znanje matematike, le v manjši meri pa tudi spretnost uporabe informacijsko-komunikacijske tehnologije pri matematiki. Pouk matematike, s težiščem na razumevanju osnovnih pojmov in konceptov brez uporabe računalu ter njegova nadgradnja s smiselno uporabo tehnologije (na primer) pri modeliranju praktičnih problemov, je verjetno pravi recept za uspeh.

Avtorji želimo, da bodo primeri s komentarji v tem članku in vzorčna izpitna pola, ki je objavljena na spletni strani Državnega izpitnega centra [3], učiteljem v pomoč pri pripravi primernih nalog za pripravo na maturitetni izpit. Verjamemo, da je pomembno, da se dijaki navadijo na reševanje nalog z računalni in brez računal, zato močno priporočamo sprotne preverjanje in ocenjevanje znanja s testi obeh vrst, z računalni in brez računal. Ponovno spomnimo, da je v nekaterih primerih smiselno glede na uporabo pripomočkov različno vrednotenje rešitev in da je temu prilagojeno treba tudi razumeti, da se pričakovani zapis rešitve, »jasno in korektno predstavljena pot do rezultata«, lahko nekoliko razlikuje.

Maturitetni izpit z dvema polama v prihodnosti omogoča večjo prilagodljivost na hitre spremembe tehnologije. Tu je treba poudariti že večkrat zapisano in povedano – maturitetni izpit je zaključek gimnazijskega programa, preverja vsebine in cilje, ki so definirani v učnem načrtu in ki jih bodoči maturanti spoznajo v štirih letih pouka na gimnaziji. Vsaka bistvena sprememba, na primer vpeljava nalog, ki bi na maturi preverjala netrivialno uporabo tehnologije, mora zato biti vpeljana postopoma in zelo premišljeno.

Zahvala

Razvrstitev in razmislek o točkovnikih za maturitetne naloge po novem katalogu je začela predmetna maturitetna komisija ob pripravi kataloga. Zahvaljujemo se Mateji Fošnarič, ki nam je odstopila gradivo, ki ga je pripravila v času svojega sodelovanja v komisiji. Člani predmetne komisije za matematiko, Alojz Grahor, Barbara Kušar, Peter Šemrl in Rok Škufca, so pregledali osnutek članka. Zahvaljujemo se jim za konstruktivne predloge in komentarje.

Viri

- [1] Banič I., Erker J., Fošnarič M., Grahor A., Levstek T., Škrlec M., Žerovnik J. (2019). *Predmetni izpitni katalog za splošno maturo 2021 – matematika*. Državni izpitni center, Ljubljana. (Dostopno na <https://www.ric.si/mma/m-mat-2021/2019082714564660/?m=1566910606>, 30. marec 2022)
- [2] Banič, I., Erker, J., Fošnarič, M., Grahor, A., Levstek, T., Škrlec, M., Žerovnik, J. (2019). Novosti na splošni maturi 2021 pri predmetu matematika. *Obzornik za matematiko in fiziko*, l. 66, št. 5, str. 161–171.
- [3] Državni izpitni center (Dostopno na: <https://www.ric.si/splosna-matura/predmeti/matematika/>, 30. marec 2022)
- [4] Državni izpitni center: *Kaj je simbolno računanje?* (Dostopno na <https://www.ric.si/mma/Kaj%20je%20simbolno%20racunan-je/2013030714080489/>, 30. marec 2022)
- [5] Državni izpitni center: *Kaj je žepno računalno?* (Dostopno na <https://www.ric.si/mma/Kaj%20je%20zepno%20racunalno%202015/2015050811441908/>, 30. marec 2022)
- [6] Erker, J., Fošnarič, M., Grahor, A., Levstek, T., Škrlec, M., Žerovnik, J.: Primerljivost izpitov na osnovni in višji ravni pri predmetu matematika na splošni maturi. *Obzornik za matematiko in fiziko*, 2020, letn. 67, št. 1, str. 1–11.
- [7] Flynn, P., McCrae, B.: *Issues in Assessing the Impact of CAS on Mathematics Examinations* (Dostopno na https://www.researchgate.net/publication/229000780_Issues_in_assessing_the_impact_of_CAS_on_mathematics_examinations, 2. marec 2022)
- [8] Grahor, A., Kušar, B., Pustavrh, S., Šemrl, P., Škufca, R., Vreš, S., Žerovnik, J. (2021). *MATEMATIKA Nekaj kratkih nalog na splošni maturi*; 1. izdaja - elektronsko gradivo. RIC, Ljubljana. (Dostopno na <https://www.ric.si/mma/zbirka-kratk-nalog-sm-matematika-2021-pdf/2021042916082181/?m=1619705301>, 2. marec 2022)
- [9] Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B., Lehmann, E.: Indispensable manual calculation skills in a CAS-invironment. V zborniku *Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy*, Portorož, Slovenia. (Dostopno na <https://atcm.mathandtech.org/EP/2000/ATCMP123/fullpaper.pdf>, 30. marec 2022)
- [10] Kokol-Voljč, V. (2000): Examination questions when using CAS for school mathematics teaching. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(1), str. 63–76. Kokol-Voljč, V. Exam questions when using CAS for school mathematics teaching (Dostopno na http://rfdz.ph-noe.ac.at/kongress/1999going/g_kokol.pdf, 2. marec 2022)
- [11] Mac Aogáin, E.: Assessment in the cas age: an Irish perspective. Exam Questions and Basic Skills in Technology Supported Mathematics Teaching. Zbornik *Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy, Portorož, Slovenia*. (Dostopno na https://www.researchgate.net/publication/229000780_Issues_in_assessing_the_impact_of_CAS_on_mathematics_examinations, 30. marec 2022)
- [12] Mao, Y., White, T., Sadler, P. M., Sonnert, G. (2017). The association of precollege use of calculators with student performance in college calculus, *Educ Stud Math* 94: 96–83. doi 10.1007/s10649-016-9714-7
- [13] Roškar, K., Lokar, M. (2007). Matura iz matematike v luči tehnologije = Final External Examination - Matura in the View of Technology. V: BOHANEK, Marko (ur.), et al. *Zbornik 10. mednarodne multikonference Informacijska družba - IS 2007, 8.-12. oktober 2007: zvezek A = Proceedings of the 10th International Multiconference Information Society - IS 2007, 8th-12th October 2007, Ljubljana, Slovenia: volume A*. Ljubljana: Institut »Jožef Stefan«, 2007. Str. 159. Informacijska družba. (Dostopno na <https://lokar.fmf.uni-lj.si/www/osebno/clanki/Vivid07/RoskarLokar.pdf>, 2. marec 2022)
- [14] Žakelj, A. idr. (2008). *UČNI načrt. Matematika*. [Elektronski vir]. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. (Dostopno na: http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2018/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf, 30. marec 2022)

E-pouk matematike na daljavo v osnovni in srednji šoli

Lidija Pulko in mag. Melita Gorše Pihler
Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Izvleček

Pouk na daljavo, s katerim smo bili soočeni zaradi težavnih epidemioloških razmer, je prinesel veliko izzivov, ki so povzročili tudi spremembo pri pristopih poučevanja matematike. V ta namen smo učitelje, ki poučujejo matematiko v osnovni šoli (6.–9. razred), in učitelje, ki poučujejo matematiko v srednješolskih programih, povprašali o uporabi digitalne tehnologije v obdobju pouka na daljavo. Anketo je izpolnilo 444 učiteljev matematike.

V članku predstavljamo analizo zbranih odgovorov o izbiri videokonferenčnega okolja za izvedbo pouka na daljavo, uporabi spletnih učilnic, ustvarjanju videoposnetkov za potrebe pouka matematike in vključevanju spletnih vprašalnikov v pouk matematike. Povzemamo zapise o izkušnjah učiteljev z uporabo digitalne tehnologije pri učencih s posebnimi potrebami, nadarjenih učencih in učencih tujcih. Navajamo tudi, kaj so učitelji po obdobju pouka na daljavo ohranili pri poučevanju v živo.

Ključne besede: pouk na daljavo, videokonferenčna okolja, spletne učilnice, videoposnetki z matematično vsebino, spletni vprašalniki

E-Learning Method for Teaching Mathematical Content in Primary and Secondary School via Distance Education

Abstract

Distance education, which we recently experienced as a result of the extreme epidemiological situation, presented several challenges, one of which was a different approach to mathematics instruction. To that end, primary (i.e., Years 6 to 9) and secondary school mathematics teachers were surveyed on their use of digital technology during the period of distance education. The questionnaire was completed by 444 participants.

This paper analyses the responses regarding their choice of videoconferencing environments, the use of online classrooms, the creation of mathematics videos, and the integration of online questionnaires in mathematics teaching. The article summarises the teachers' experiences with digital technology when working with special needs, gifted, and/or immigrant students. The final section focuses on the practices which the teachers have continued to use in face-to-face education after the period of distance education ended.

Keywords: distance education, videoconferencing environments, virtual classrooms, mathematics videos, online surveys.

Uvod

Le redki učenci¹ in učitelji v Sloveniji so imeli pred epidemijo covid-19 izkušnje s poučevanjem na daljavo. Pouk na daljavo, s katerim smo bili soočeni zaradi težavnih epidemioloških razmer, je prinesel veliko izzivov, ki so povzročili tudi spremembe pri pristopih poučevanja matematike. Razen didaktičnih prilagoditev izvedbe pouka so učitelji morali izbrati tudi primerno sode-

lovno okolje za izvajanje pouka na daljavo in uporabiti nova orodja za predstavitev in ponazoritev vsebin.

V ta namen smo učitelje, ki poučujejo matematiko v osnovni šoli (6.–9. razred), in učitelje, ki poučujejo matematiko v srednješolskih programih, povprašali o uporabi digitalne tehnologije v obdobju pouka na daljavo. Anketo je izpolnilo 444 učiteljev matematike. Anketiranje je potekalo v obdobju od junija do avgusta 2021, učitelji so vprašalnik izpolnjevali v spletnem okolju IKA.

1 V članku je termin učenci uporabljen za učence in dijake.

Učitelji so odgovarjali na vprašanja o:

- izbiri videokonferenčnega okolja,
- uporabi spletnih učilnic,
- ustvarjanju videoposnetkov za potrebe pouka matematike,
- vključevanju spletnih vprašalnikov v pouk matematike,
- izkušnjah z uporabo digitalne tehnologije pri delu z učenci s posebnimi potrebami, nadarjenimi učenci in učenci tujci.

Ob tem smo želeli ugotoviti, kaj po obdobju pouka na daljavo učitelji ohranjajo pri ponovnem poučevanju v živo. S tem namenom smo nekatera vprašanja zastavili s časovnega vidika (pred epidemijo, med epidemijo in pri pouku ponovno v živo) in jih še posebej povprašali, kaj vse od novo uvedenega v času pouka na daljavo so ohranili tudi pri ponovnem pouku v živo.

Izbira videokonferenčnega okolja

V šoli so učenci vključeni v dva pomembna socialna sistema: odnos z učitelji in odnos z vrstniki. V obdobju pouka na daljavo sta odnos z učiteljem in njegova podpora postala še pomembnejša. Učitelj mora zagotoviti, da ostanejo učenci, kljub fizični odsotnosti, aktivno vključeni v pouk. Pogoj za pouk na daljavo je vsem dosegljiv komunikacijski kanal, s katerim učitelj in učenec premostita svojo oddaljenost (Pečjak, S., 2021). Med različnimi komunikacijskimi kanali so mnogi učitelji izbirali videokonferenčno okolje.

Na vprašanje *Ali ste v obdobju pouka na daljavo izvajali videokonferenčno?* je večina učiteljev (74 %) odgovorila pritrdilno (Grafični prikaz 1).



Grafični prikaz 1: Delež učiteljev, ki so v obdobju pouka na daljavo izvajali videokonferenčno.

Pri vprašanju *V katerem videokonferenčnem okolju ste izvajali videokonferenčno?* so učitelji v največjem deležu (45 %) izbrali okolje Zoom in v nekoliko manjšem deležu (31 %) okolje MS Teams. Okolji Google Meet in Arnes Vox so izbrali v bistveno manjših deležih. Pri Drugo so učitelji navedli videokonferenčni okolji Jitsi Meet in Google Hangouts. Izbrali so lahko več videokonferenčnih okolij (Grafični prikaz 2).



Grafični prikaz 2: Delež odgovorov učiteljev o izbranem videokonferenčnem okolju.

Učitelji so v odgovorih na vprašanje *Katere so prednosti posameznega videokonferenčnega okolja?* za izbrano okolje izpostavili lastnosti okolja z različnih vidikov. V Preglednici 1 povzemamo prednosti in v Preglednici 2 izzive videokonferenčnih okolij MS Teams in ZOOM, ki sta bili izbrani v največjem deležu. V zgornjem delu vsake preglednice navajamo skupne prednosti/izzive, v nadaljevanju pa prednosti/izzive posameznega videokonferenčnega okolja. V oblačkih dodajamo izbrane odgovore učiteljev.

Na kakovost izvedbe pouka na daljavo razen prednosti in izzivov, ki jih pred učitelja postavljajo posamezna videokonferenčna okolja, vplivajo tudi drugi dejavniki, ki se pojavijo ne glede na izbiro videokonferenčnega okolja. Nekateri učitelji so navedli težave z internetno povezavo (največkrat pri učencih) in težave zaradi pomanjkljive opreme (npr. učenec nima kamere, učitelj nima grafične tablice ali drugega zaslona). Opisali so težave s preverjanjem dejanske prisotnosti, odzivnostjo, motiviranjem za pouk na daljavo in aktivnim sodelovanjem učencev.

Uporaba spletnih učilnic

Uporaba spletnih učilnic je bila priporočena že pred obdobjem izvajanja pouka na daljavo. V Smernicah za uporabo digitalne tehnologije pri predmetu matematika (Sirnik, 2021) so zapisani nameni uporabe spletnih učilnic:

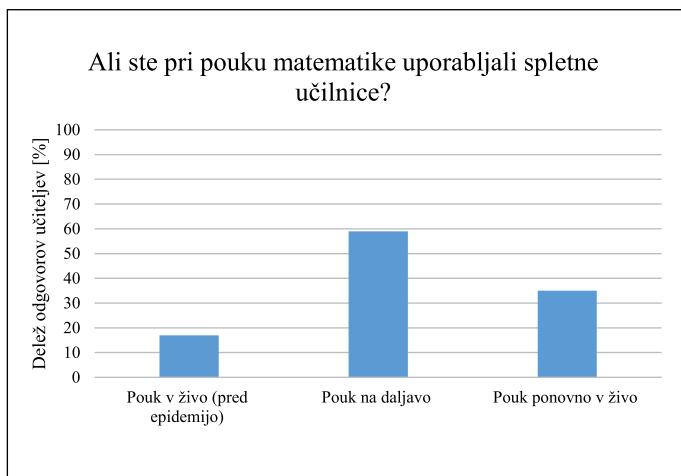
»Spletne učilnice (Moodle5) uporabljamo za:

- urejanje baze gradiv,
- oddajanje učnih gradiv in dokazil o učenju ter hranjenje le teh (npr. Delavnica, Naloga, Podatkovna zbirka, dejavnosti H5P in HotPot),
- preverjanje (pred)znanja (npr. Kviz, Vprašalnik, Možnosti ...),
- podajanje povratne informacije med učenci, med učenci in učiteljem (npr. Forum, Wiki),
- komunikacijo med udeleženci učnega procesa (npr. Klepetalnica, Forum, Wiki),
- skupno oblikovanje namenov učenja in kriterijev uspešnosti (npr. Wiki).« (Sirnik, 2021, str. 6).

Preglednica 1: Prednosti videokonferenčnih okolij MS Teams in ZOOM.

Skupne prednosti videokonferenčnih okolij MS Teams in ZOOM	
Učitelji so okolji MS Teams in ZOOM opisali kot pregledni, preprosti za uporabo (tako za učitelje kakor tudi za učence). Poudarili so njuno zanesljivo delovanje in enostavno dostopnost. Navajajo, da lahko učitelj z uporabo teh okolij izvede kakovostno razlago, vsebine lahko dobro ponazori, k temu lahko pripomore tudi možnost delitve zaslona, uporabe skupne bele table in priključitve grafične tablice. Učitelji so navedli, da je komunikacija z uporabo videokonferenčnega okolja boljša kakor le pisna komunikacija (npr. le z uporabo elektronske pošte ali spletne učilnice). Med izvajanjem pouka na daljavo okolji učitelju omogočata, da opazuje učence pri izvajanju dejavnosti. Učenci lahko znotraj videokonferenčnega okolja z učiteljem in med seboj sodelujejo. Učiteljem okolji omogočata delitev učencev v skupine in pripravo ter izvedbo kvizov. Učitelji kot prednost okolij izpostavljajo možnost snemanja izvedenega videokonferenčnega srečanja in možnost izklopa mikrofona udeleženca, ki moti. Videokonferenčni okolji opisujejo kot uporabni tudi za izvedbo individualne pomoči in drugih dejavnosti (npr. proslav, dnevov dejavnosti).	
Prednosti posameznega videokonferenčnega okolja	
MS Teams	ZOOM
Okolje MS Teams s svojimi orodji omogoča učiteljem in učencem nalaganje gradiv v skupne mape, uporabo digitalnega zvezka, dodeljevanje, oddajo in pregledovanje nalog, ob tem je učiteljem na voljo tudi statistika oddanih nalog. Učitelji so izpostavili tudi prednosti skupne šolske baze učencev, seznama udeležencev in preglednega koledarja. Sporočili so, da je omogočeno enostavno pošiljanje obvestil učencem tudi v času, ko videokonferenčno srečanje ne poteka. »Učencem lahko v okolju MS Teams dodelim naloge, ki jih rešijo in oddajo. V istem okolju naloge pregledam in učencem podam povratno informacijo. Prav tako lahko učencem naložim učno gradivo (ne potrebujem spletne učilnice). Takoj imam na razpolago seznam udeležencev videokonference.«	Za videokonferenčno okolje ZOOM so učitelji izpostavili vidnost vseh udeležencev na zaslonu in možnost posebnega načina deljenja videoposnetkov. »Meni se okolje ZOOM zelo obnese. Celotne razlage učnih ur sem naredila preko videokonferenc, učenci so aktivno sodelovali, imela sem takojšnjo povratno informacijo, skupaj smo ponavljali in utrjevali, način dela mi je blizu, tudi ustno spraševanje sem organizirala zelo dobro, tako da so bile ocene realne, kar se je kasneje pokazalo tudi po povratku v šolo.«

Zanimalo nas je, kako se je spreminjal delež učiteljev, ki so pri pouku matematike uporabljali spletne učilnice v obdobjih pouka v živo (pred epidemijo), pouka na daljavo in ponovnega pouka v živo.

**Grafični prikaz 3:** Delež učiteljev, ki so v posameznem obdobju uporabljali spletne učilnice.

Iz Grafičnega prikaza 3 je razvidno, da je med sodelujočimi učitelji v obdobju pouka v živo pred epidemijo zelo majhen delež učiteljev (17 %) pri pouku matematike uporabljal spletne učilnice. Ugotavljamo, da se je uporaba spletnih učilnic v obdobju pouka na daljavo izrazito povečala (na 59 %). Ob ponovni uvedbi pouka v živo se je nekoliko zmanjšala (na 35 %), vendar je opazno večja kot je bila v obdobju pouka v živo pred epidemijo.

Pri vprašanju *Za katere namene ste uporabljali spletne učilnice?* smo učiteljem ponudili namene, ki smo jih oblikovali na osnovi zapisov v Smernicah (Sirnik, 2021). Največji delež učiteljev (52 %) je izbral namen za oddajanje učnih gradiv in dokazil o učenju. V nekoliko manjših deležih so učitelji izbrali namene: za preverjanje (pred)znanja, za podajanje povratne informacije učitelja učencem, za hranjenje baze gradiv, za hranjenje oddanih učnih gradiv in dokazil o učenju, za komunikacijo med udeleženci učnega procesa in za urejanje baze gradiv. V najmanjših deležih sta bila izbrana namena za podajanje povratne informacije med učenci in za skupno oblikovanje namenov učenja in kriterijev uspešnosti. Pri Drugo so učitelji navedli: dodatna gradiva za utrjevanje, za podajanje snovi manjkajočim učencem (Grafični prikaz 4).

Preglednica 2: Izzivi videokonferenčnih okolij MS Teams in ZOOM.

Skupni izzivi videokonferenčnih okolij MS Teams in ZOOM	
Glede okolij MS Teams in ZOOM so učitelji izpostavili potrebo po omejevanju možnosti uporabnikom (npr. učencu onemogočiti možnost, da bi izklopil mikrofonski drugemu uporabniku) in željo po možnosti povezave dveh kamer z videokonferenčnim okoljem (npr. učitelj bi hkrati spremljal učenca in njegov zapis v zvezek). Sporočili so, da pogrešajo možnost blokade prikaza drugih oken na učenčevem računalniku v času spremljanja videokonference (še posebej v času ocenjevanja znanja). Zapisali so, da bi potrebovali več orodij za pouk matematike (npr. za zapisovanje matematičnih simbolov, za reševanje načrtovalnih nalog in podobno). Med izzivi so poudarili samoizobraževanje učiteljev o uporabi okolja (na šoli ni bilo organiziranega skupnega izobraževanja) in posledično težave ob uporabi skupne bele table, delitvi zaslona (npr. izbiranje med okni, ki jih želi učitelj deliti z učenci), delitvi učencev v skupine in prehajanju učitelja med skupinami.	
Izzivi posameznega videokonferenčnega okolja	
MS Teams	ZOOM
Učitelji so glede okolja MS Teams izpostavili težave z vključevanjem uporabnikov izven organizacije v videokonferenčno srečanje in omejene možnosti prikaza udeležencev na zaslonu. Sistem digitalnih zvezkov OneNote so opredelili kot nepregleden in navedli, da ob deljenju zaslona učitelju niso hkrati vidni udeleženci in klepet (učitelji so navedli, da bi za rešitev te težave potrebovali dva zaslona).	Učitelji so glede okolja ZOOM izrazili zaskrbljenost v povezavi z varnostjo videokonferenčnega okolja in zapisali, da bi za pouk matematike na daljavo v videokonferenčnem okolju potrebovali razen bele tudi karo tablo.

»MS Teams so nestabilni, ZOOM ne ponuja integracije s spletnimi učilnicami.«

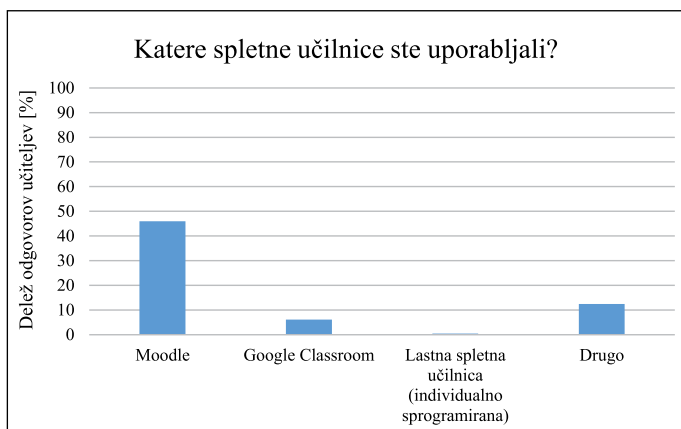
»MS Teams imajo več pridruženih možnosti (npr. možnost dodajanja gradiv), ZOOM je enostavnejši za uporabo in bolj stabilen.«

»V MS Teams ni toliko možnosti vdora gostov kot v ZOOM.«

Pri vprašanju *Katere spletne učilnice ste uporabljali?* so učitelji v največjem deležu (46 %) izbrali spletne učilnice Moodle. V bistveno manjšem deležu (6 %) so izbrali spletne učilnice Google Classroom. Le en učitelj je označil, da je uporabljal

lastno spletno učilnico (individualno sprogramirano). V izbiri Drugo so učitelji navedli spletne učilnice v okoljih: MS Teams, e-Asistent in Xooltime. Izbrali so lahko več spletnih učilnic (Grafični prikaz 5).

**Grafični prikaz 4:** Delež odgovorov učiteljev za posamezni namen uporabe spletne učilnice.



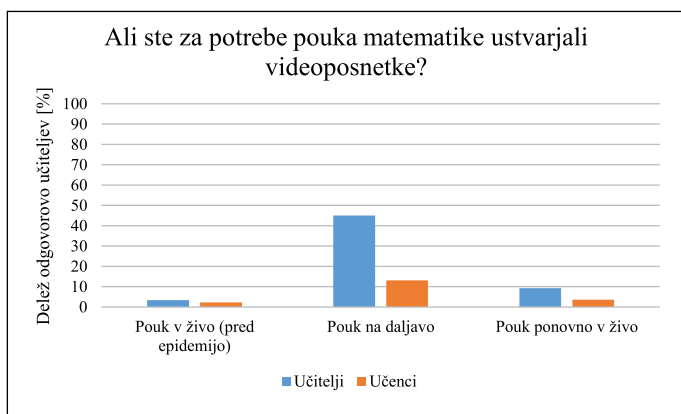
Grafčni prikaz 5: Delež odgovorov učiteljev o uporabi spletnih učilnic.

Uporaba videoposnetkov z matematično vsebino

Iz Grafčnega prikaza 6 sta za posamezno obdobje (pouk v živo pred epidemijo, pouk na daljavo, pouk ponovno v živo) razvidna delež učiteljev, ki so za potrebe pouka matematike ustvarjali videoposnetke z matematično vsebino, in delež učiteljev, katerih učenci so za potrebe pouka matematike ustvarjali videoposnetke.

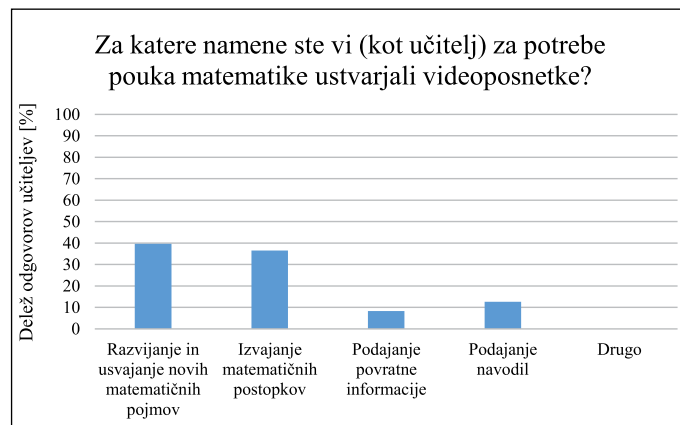
Učitelji so v zelo majhnem deležu (3 %) označili, da so v obdobju pouka v živo pred epidemijo za potrebe pouka matematike ustvarjali videoposnetke. Ugotavljamo, da se je ta delež v obdobju pouka na daljavo izrazito povečal (na 45 %). Ob ponovni uvedbi pouka v živo se je nekoliko zmanjšal (na 9 %), vendar je opazno večji kot je bil pri pouku v živo pred epidemijo. Pri deležih odgovorov učiteljev o tem, ali njihovi učenci ustvarjajo videoposnetke z matematično vsebino, opazimo podobno spreminjanje deležev po posameznih obdobjih, vendar so v vseh navedenih obdobjih deleži pri odgovorih, ki se nanašajo na učence, bistveno nižji v primerjavi z deleži pri odgovorih, ki se nanašajo na učitelje.

Med nameni, za katere so učitelji ustvarjali videoposnetke za potrebe pouka matematike, so učitelji v največjih deležih (40 % in 36 %) izbrali namena *razvijanje in usvajanje novih matematičnih*



Grafčni prikaz 6: Delež učiteljev, ki so v posameznem obdobju za potrebe pouka matematike ustvarjali videoposnetke.

pojmov in izvajanje matematičnih postopkov. V opazno manjših deležih so izbrali namena *podajanje navodil* in *podajanje povratne informacije* (Grafčni prikaz 7).



Grafčni prikaz 7: Delež odgovorov učiteljev za posamezni namen ustvarjanja videoposnetkov.

Učitelji so zapisali naslednje namene, za katere so njihovi učenci ustvarjali videoposnetke za potrebe pouka matematike:

- razlaga vsebin in postopkov reševanja nalog (npr. Pitagorov izrek, označevanje kotov, vrste kotov, načrtovanje v geometriji, lastnosti funkcij, risanje grafov funkcij, izpolnjevanje preglednic, obdelava podatkov),
- prikaz postopka izdelave izdelka in/ali predstavitev izdelka (npr. model piramide, modeli ulomkov),
- prikaz izvedbe praktične dejavnosti (npr. dokaz, da je 1 dm^3 enak 1 l),
- prikaz obogatitvenih dejavnosti ob rednih vsebinah (npr. intervju z znanim raziskovalcem, izdelava matematičnih voščilnic),
- predstavitev poročila, seminarske naloge, raziskovalne naloge ali projektnega dela,
- podajanje povratne informacije sošolcu ali učitelju.

Iz zapisov učiteljev je razvidno, da so njihovi učenci ustvarjali videoposnetke za različne namene. Nekateri so navedli, da so njihovi učenci ustvarjali videoposnetke v šoli v okviru dneva dejavnosti, drugi so navedli, da so jih učenci ustvarjali doma. Ob tem so učitelji zaznali povečano motivacijo do učenja matematike tako pri učencih, ki so videoposnetke ustvarjali, kot tudi pri njihovih sošolcih.

Vključevanje spletnih vprašalnikov

Uporaba spletnih vprašalnikov pri pouku matematike sega od preverjanja (pred)znanja učencev, vrednotenja znanja v posameznih fazah poučevanja in zbiranja povratnih informacij učencev do uporabe vprašalnikov za namen zbiranja podatkov pri sklopu o obdelavi podatkov.

V obdobju pouka na daljavo so se učitelji soočali z izzivom, kako poskrbeti, da učenci ne bodo le pasivni poslušalci, kar bi lahko

vplivalo tudi na zmanjšanje njihove motivacije za učenje matematike. Za namen povečanja aktivnosti učencev so nekateri učitelji v pouk matematike vključevali spletne vprašalnike.

Nekoliko manj kot polovica učiteljev (43 %) je na vprašanje *Ali ste v pouk matematike vključevali spletne vprašalnike?* odgovorila pritrdilno (Grafični prikaz 8).



Grafični prikaz 8: Delež učiteljev, ki so v pouk matematike vključevali spletne vprašalnike.

Pri vprašanju *Katere spletne vprašalnike ste ustvarjali vi in katere so ustvarjali vaši učenci?* so učitelji v največjih deležih (od 22 % do 24 %) izbrali aplikacije: *IKA*, *Googlovi obrazci* in *Kahoot*. V opazno manjših deležih so izbrali aplikacije: *Mentimeter*, *ThatQuiz*, *Quizizz* in *Goformative*. Pri *Drugo* so učitelji navedli:

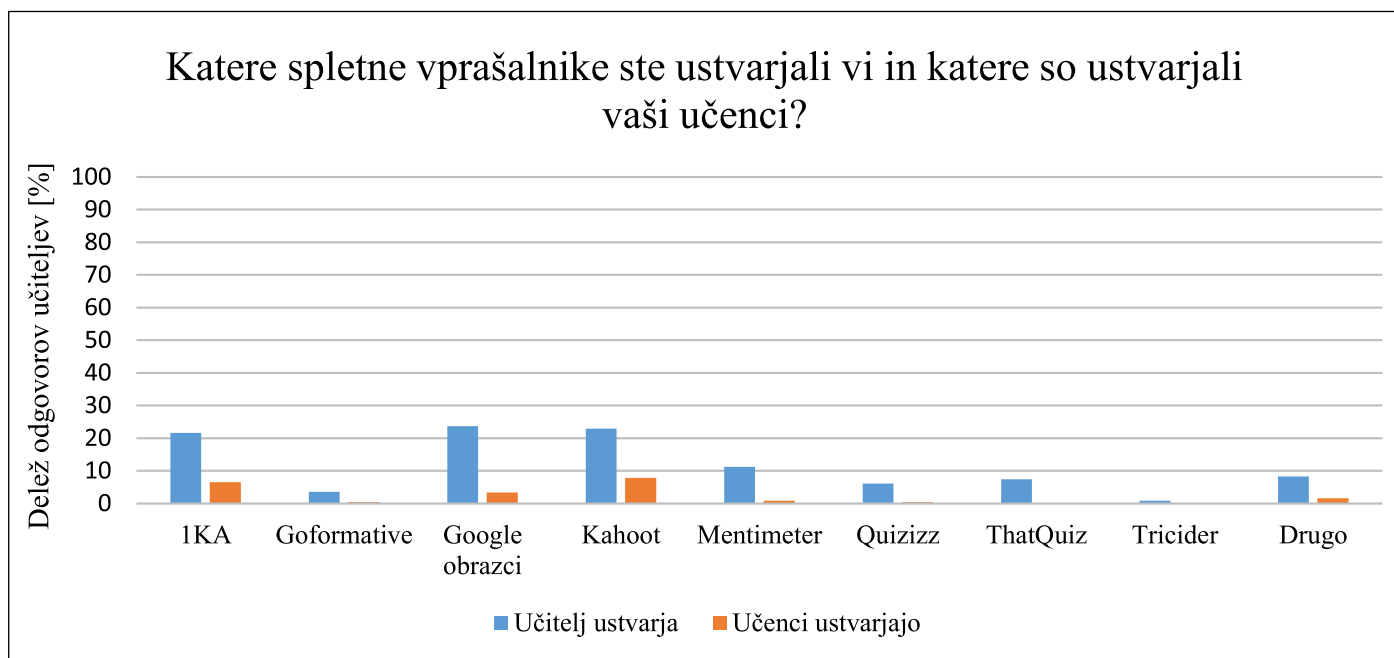
Nearpod, Desmos, Socrative, ThingLink, Liveworksheets, Slido, Testportal, Padlet, Plickers, Office Forms, kvizi in vprašalniki v spletni učilnici Moodle, H5P (Grafični prikaz 9).

Uporaba digitalne tehnologije pri učencih s posebnimi potrebami, nadarjenih učencih in učencih tujcih

Učenci s posebnimi potrebami

Izkušnje učiteljev z uporabo digitalne tehnologije pri učencih s posebnimi potrebami v obdobju pouka na daljavo so bile raznolike. Nekateri učitelji so zapisali, da so učenci s posebnimi potrebami na področju digitalne tehnologije potrebna znanja hitro usvojili, so bili pa manj motivirani v primerjavi z ostalimi učenci, naloge so slabše opravljali, potrebovali so več spodbude za delo. Drugi učitelji so navedli težave, ki so jih imeli ti učenci z uporabo digitalne tehnologije: težave pri iskanju naloženega gradiva, pri oddajanju nalog ... Menijo, da je bila uporaba digitalne tehnologije za nekatere učence s posebnimi potrebami moteča, težje so se osredotočili na delo kot sicer.

Prav tako se razlikujejo mnenja učiteljev o tem, kako uspešni so bili učenci s posebnimi potrebami pri pouku na daljavo v primerjavi z uspešnostjo pri pouku v živo. Nekateri učitelji so zapisali, da so bili določeni učenci s posebnimi potrebami, ki so se sicer pri pouku v šoli težko umirili in delali, pri pouku na daljavo učinkovitejši bolj kot sicer. V obdobju pouka na daljavo so si bolje organizirali čas in opravili več nalog in zadolžitev kot v šoli. Drugi navajajo drugačne izkušnje, in sicer da učenci s posebnimi potrebami, ki sicer pri pouku v šoli redno in zelo pridno delajo, niso pravočasno oddajali nalog, zamujali so na videokonferenca, delo na daljavo so jim oteževali moteči dejavniki v njihovem domačem okolju, pravijo, da »so se nekateri popolnoma izgubili«.



Grafični prikaz 9: Delež odgovorov učiteljev o uporabi spletnih vprašalnikov.

Učitelji so zapisali tudi, da je digitalna tehnologija omogočala večjo možnost individualne obravnave učencev s posebnimi potrebami. Za izvedbo dodatne strokovne pomoči so učitelji izkoristili možnost individualnih videoklicev. V zapisih je bilo postavljeno tudi, da so ti učenci praviloma potrebovali več časa, da so se prilagodili novemu načinu dela. V oblačkih dodajamo izbrana zapisa učiteljev.

»Naloge iz delovnega zvezka in učbenika sem preoblikovala v digitalno obliko, tako da je bila velikost pisave večja in na voljo je bilo več prostora za pisanje odgovorov. Učenka je lahko naloge reševala direktno na računalnik in mi jih nato poslala.«

»Učenci so bili zelo pasivni, potrebovali so individualno razlago učitelja, nekateri tudi po vsaki uri v živo. Bili so zelo nesamostojni in so potrebovali sprotno spremljanje in pomoč.«

Nadarjeni učenci

Učitelji so zapisali, da imajo pri nadarjenih učencih dobre izkušnje z uporabo digitalne tehnologije pri pouku na daljavo: z digitalno tehnologijo so bili zelo spretni, hitri in so jo radi uporabljali, s pridom so uporabljali različna orodja in komunikacijske kanale. Ti učenci so lahko s pomočjo digitalne tehnologije več stvari samostojno pogledali, jih raziskali, sami opazili zakonitosti, pravila, ni bilo potrebe po dodatnih navodilih. Zaradi pouka na daljavo pri njih razumevanje ni bilo slabše kot je sicer pri pouku v živo. Posamezni učitelji so sporočili, da so jim bili nadarjeni učenci v pomoč pri uporabi tehnologije, od njih so dobili uporabne ideje za poenostavitev svojega dela.

Nekateri učitelji so navedli, da so bili nadarjeni učenci pri pouku na daljavo zelo uspešni, aktivno so sodelovali, naloge so zelo hitro opravili, sledili so razlagi in tudi kasneje izkazali odlično znanje. Prednost pred poukom v živo je bila, da so si čas sami razporejali. Drugi učitelji so sporočili, da v obdobju pouka na daljavo ni bilo opaziti razlik med delom nadarjenih v primerjavi z ostalimi učenci.

Učitelji so kot prednost pouka na daljavo izpostavili, da so nadarjene učence lažje poučevali individualno in jim omogočili dostop do dodatnih gradiv različne zahtevnosti in vsebine.

»Nadarjeni učenci so bili večji dela, vse so naredili zelo hitro in zelo radi sprejeli kakšen dodaten izziv, npr. uporabo nove aplikacije.«

»Nadarjeni učenci pri uporabi digitalne tehnologije niso imeli težav. Svoje znanje so lahko tako še dodatno nadgradili.«

Učenci tujci

Z uporabo digitalne tehnologije pri učencih tujcih v obdobju pouka na daljavo so nekateri učitelji navedli dobre izkušnje. Opisali so, da so bili učenci tujci zelo spretni pri uporabi digitalne tehnologije, digitalna tehnologija jim je pomagala pri usvajanju in utrjevanju znanja, pri delu so se znašli, matematična gradiva so lahko poiskali tudi v maternem jeziku ali pa so si pomagali s spletnim prevajalnikom.

Nekateri učitelji so zapisali, da pri delu z učenci tujci ni bilo posebnosti. Če so se uspeli povezati v spletno videokonferenco, ni bilo zaznati težav, v ničemer niso odstopali od ostalih učencev.

Drugi učitelji so zapisali, da je bilo delo z učenci tujci v obdobju pouka na daljavo oteženo zaradi neodzivnosti nekaterih učencev in velikih težav pri razumevanju navodil. Ti učenci so imeli težave z uporabo posamezne digitalne tehnologije, in sicer predvsem zaradi nerazumevanja jezika, prav tako so se pojavljale velike težave z razumevanjem vsebin pri pouku matematike, še posebej pri geometriji.

»Učenci tujci so se veselili programov, pri katerih so lahko nastavili svoj materni jezik. Na tak način so nekateri hitreje napredovali, druge pa je popolnoma zmedlo, da so na tabli videli napise v drugem (slovenskem) jeziku.«

»Digitalna tehnologija pri delu s tujci je bila v prvi vrsti dobrodošla za razumevanje in komunikacijo (prevajalniki).«

Kaj smo iz obdobja pouka na daljavo ohranili in kaj smo v tem obdobju pridobili

Pred pojavom epidemije covid-19 so potekala številna izobraževanja učiteljev za uporabo digitalne tehnologije pri pouku matematike. Med tovrstnimi izobraževanji so le redka učiteljem nudila možnosti izkusiti sodelovanje na daljavo. Nepričakovane razmere so od učiteljev zahtevale hitre prilagoditve. Le redki so lahko v izvajanje pouka na daljavo prenesli znanja iz lastne sodelovalne in izobraževalne prakse.

Navedli smo, kako so učitelji z izbiro komunikacijskih kanalov premostili fizično razdaljo, kako so izkoristili možnosti spletnih učilnic ter kako so z videoposnetki in vključevanjem spletnih vprašalnikov povečali motivacijo in aktivnost učencev. Zanimalo nas je tudi, uporabo česa so učitelji od novo uvedenega v času pouka na daljavo ohranili. Povzemamo zbrane odgovore učiteljev na vprašanje *Kaj od tega, kar ste na novo uvedli pri pouku na daljavo, ste ohranili tudi pri pouku ponovno v živo?*

Učitelji so pri pouku matematike ohranili uporabo:

- videokonferenčnih okolij (npr. za sodelovanje med razredi),
- elektronske pošte za komunikacijo med učiteljem in učenci,
- digitalnih zvezkov (npr. za oblikovanje kriterijev uspešnosti in sprotno spremljanje dela učencev),
- grafične tablice,
- pametnega telefona,
- spletnih učilnic (npr. učitelj objavi in arhivira gradivo, učenci oddajo naloge in izdelke ter prejmejo povratno informacijo učitelja),
- elektronskih učnih gradiv (npr. za prikaz apletov iz i-učbenika),
- videoposnetkov z matematično vsebino (lahko so namenjeni samostojnemu delu učencev v šoli ali učencem, ki so odsotni),
- spletnih kvizov in drugih spletnih aplikacij (npr. za utrjevanje in preverjanje znanja).

Zaključek

Z oblikovanim vprašalnikom smo želeli ugotoviti, kako so učitelji prilagodili pristop poučevanja matematike v obdobju pouka na daljavo in kako se pristopi poučevanja matematike od obdobja pouka na daljavo dalje razlikujejo od pristopov, ki so jih učitelji uporabljali pred obdobjem pouka na daljavo. Pri tem smo se osredotočili predvsem na uporabo digitalne tehnologije.

Učitelji so v svojih odgovorih sporočali, da so na izvedbo pouka na daljavo v povezavi z uporabo videokonferenčnega okolja pozitivno vplivale naslednje okoliščine:

- na šoli je bilo za učitelje organizirano usposabljanje za uporabo izbranega videokonferenčnega okolja,
- učitelji so v sodelovanju z računalnikarjem – organizatorjem informacijskih dejavnosti ob začetku izvajanja pouka na daljavo usposobili učence za uporabo izbranega videokonferenčnega okolja,
- isto videokonferenčno okolje so uporabljali vsi učitelji in učenci na šoli.

Spletne učilnice je v obdobju pouka na daljavo uporabljala nekoliko več kot polovica učiteljev matematike. Uporabo spletnih učilnic so, sicer v nekoliko manjšem deležu kakor v obdobju pouka na daljavo, ohranili tudi v obdobju ponovnega pouka v živo.

Glede ustvarjanja videoposnetkov z matematično vsebino smo ugotovili, da:

- so učitelji za potrebe pouka matematike v večjem deležu ustvarjali videoposnetke kot njihovi učenci (tako v obdobju pouka na daljavo kot tudi v obdobju pouka v živo pred in po obdobju pouka na daljavo),
- se je delež učiteljev, ki so za potrebe pouka matematike ustvarjali videoposnetke, v obdobju pouka na daljavo izrazil povečal; v obdobju pouka ponovno v živo se je ta delež zmanjšal, vendar je bil opazno večji kot v obdobju pouka v živo pred epidemijo,
- se je delež učiteljev, katerih učenci so za potrebe pouka matematike ustvarjali videoposnetke, v obdobju pouka na daljavo izrazil povečal; v obdobju pouka ponovno v živo se je ta delež zmanjšal, vendar je bil opazno večji kot v obdobju pouka v živo pred epidemijo.

Nekoliko manj kot polovica učiteljev je pri pouku matematike uporabljala spletne vprašalnike. Le nekateri med njimi so pouk organizirali na tak način, da so bili učenci aktivno vključeni v ustvarjanje spletnega vprašalnika, s čimer so učitelji spodbujali tudi medvrstniško sodelovanje.

Izkušnje učiteljev matematike z uporabo digitalne tehnologije pri učencih s posebnimi potrebami, nadarjenimi učenci in učenci tujci v obdobju pouka na daljavo so bile raznolike. Učitelji so zapisali, da je digitalna tehnologija omogočala večjo možnost individualizacije in diferenciacije, ki jo ti učenci še posebej potrebujejo. Nadarjeni učenci so se večinoma novega načina dela hitro navadili in izkazali samostojnost pri opravljanju nalog. Učencem tujcem je pomagala možnost uporabe prevajalnika. Za nekatere učence s posebnimi potrebami je bila uporaba digitalne tehnologije moteča, težje so se osredotočili na delo kot sicer.

Predstavljena analiza naj bralcu pomaga pri razširitvi nabora idej za vključevanje različnih dejavnosti z uporabo digitalne tehnologije v pouk matematike glede na način izvedbe pouka (pouk v živo, pouk na daljavo, pouk za del učencev v živo in del učencev na daljavo). Morda bo v svoj pouk vključil kakšno dejavnost s katerim od spletnih vprašalnikov, ki jih doslej še ni uporabljal, morda bo vključil dejavnost, pri kateri bodo tudi njegovi učenci posneli kak videoposnetek za potrebe pouka matematike, morda pa bo uporabil videokonferenčno okolje z namenom vključevanja odstotnih učencev v pouk ali z namenom povezovanja (tudi medpredmetnega) med oddelki.

Učitelji in učenci so v obdobju pouka na daljavo hitreje in v nepričakovanem obsegu pridobili in nadgradili kompetence uporabe digitalne tehnologije, ki jih bodo s pridom uporabljali še naprej pri pouku v živo, kakor tudi pri morebitnih spremenljivih okoliščinah v prihodnosti.

Literatura

Pečjak, S. (1. 12. 2021). *International Electronic Journal of Elementary Education*. Pridobljeno iz www.iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/1627/553

Sirnik, M., Jerneja, B. (2021). *Smernice za uporabo digitalne tehnologije pri predmetu matematika*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

V rubriki *Iz razreda* je predstavljenih pet primerov izvedbe pouka matematike v različnih okoliščinah, dva osnovnošolska in trije srednješolski primeri. Pri vseh primerih avtorji opisujejo, kako so v pouk smiselno vključili digitalno tehnologijo: spletno okolje MS Teams, spletno učilnico (priprava in izvedba aktivnosti Delavnica), lastne videoposnetke z matematično vsebino, program dinamične geometrije, svetovni splet ... Digitalna tehnologija je uporabljena za namen izvedbe vrstniškega vrednotenja, oblikovanja kriterijev uspešnosti, sodelovalnega dela učencev, samostojnega raziskovanja ... Vse opisane primere lahko prilagodimo glede na okoliščine: v primeru pouka v živo ali pouka na daljavo, pa tudi, če je istočasno nekaj učencev v živo in nekaj na daljavo.

Iz digitalne bralnice ZRSŠ

www.zrss.si/digitalna-bralnica/

V digitalni bralnici lahko prelistate najrazličnejše strokovne publikacije: monografije in priročnike, ter druge publikacije, ki so izšle na Zavodu RS za šolstvo in so vam BREZPLAČNO dosegljive tudi v PDF obliki.



Uporaba digitalne tehnologije pri matematiki

Z izobraževanjem na daljavo so postali učenci bistveno bolj večji uporabe informacijsko-komunikacijske tehnologije. Načini učenja in poučevanja matematike, ki so bili pred tem v večji meri prisotni na predmetnih študijskih srečanjih, seminarjih in delavnicah za učitelje, so v zadnjih treh šolskih letih realnost v razredu. Izziv, s katerim sem se kot učitelj matematike srečal, je, kako uspešno združiti poučevanje in učenje brez uporabe digitalne tehnologije in poučevanje in učenje s podporo digitalne tehnologije, vse z namenom učenca matematiko približati tako, da bi jo dobro razumeli.

Na šoli uporabljamo odprtokodno okolje Moodle, znotraj katerega pripravljam in urejam spletne učilnice pri matematiki tako, da sledijo sklopom v učnem načrtu ter omogočajo učencu in meni formativno spremljanje učnega procesa. Elementi formativnega spremljanja ter posledično dejavnosti v spletni učilnici so urejeni po spodaj opisani strukturi:

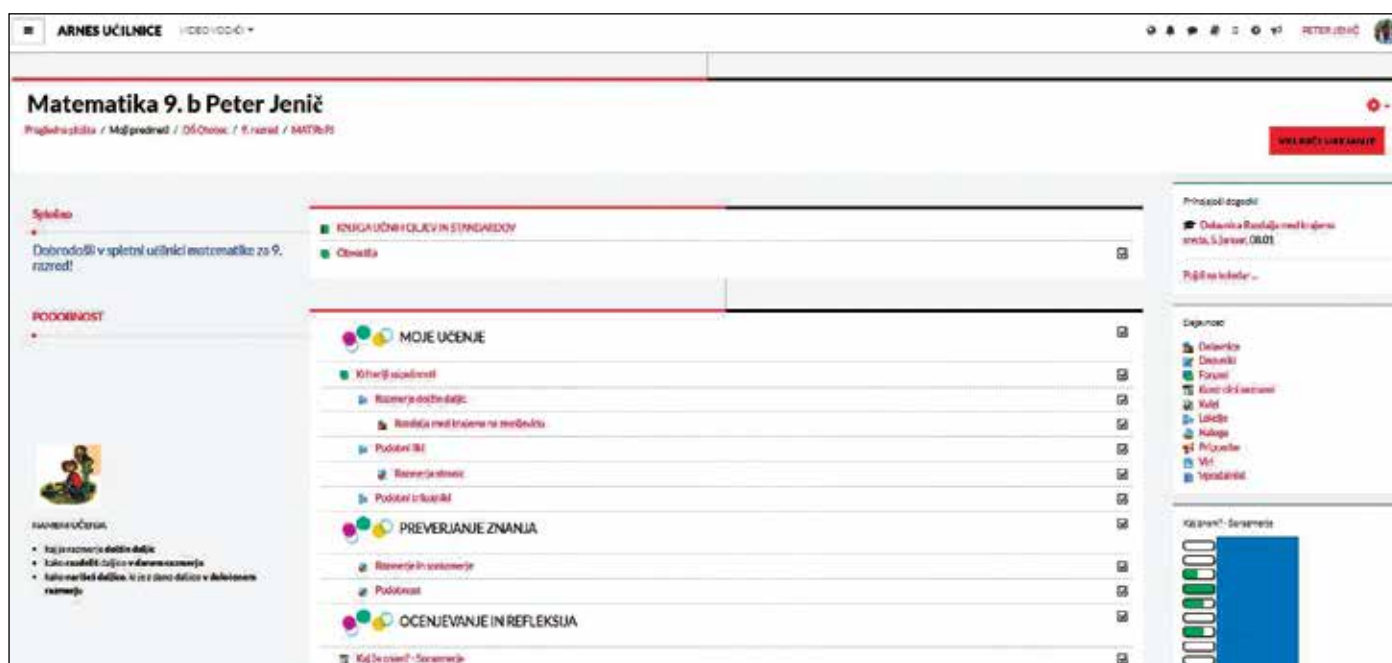
1. Ugotavljanje predznanja
2. Oblikovanje namenov učenja ter kriterijev uspešnosti
3. Proces učenja – dokazi o učenju

4. Povratne informacije
5. Vrstniško sodelovanje in vrednotenje
6. Preverjanje znanja ter samovrednotenje

Vsebina se uvršča v deveti razred osnovne šole k sklopu Odstotni račun ter premo in obratno sorazmerje.

- učenec izračuna neznani člen sorazmerja,
- prepozna odnose med količinami in jih uporablja v problem-skih situacijah,
- uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja,
- uporablja informacijsko-komunikacijsko tehnologijo pri reševanju problemov,
- kritično vrednoti informacije na spletu in drugje.

Učenec izmeri razdaljo med dvema krajema na zemljevidu in z izračunom neznanega člena sorazmerja ugotovi razdaljo med



Slika 1: Spletna učilnica pri matematiki v 9. razredu.

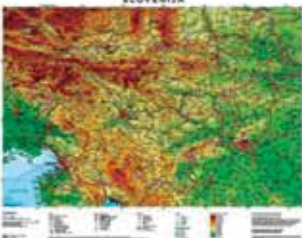
ARNES UČILNICE VIDEO VODIČ

Razdalja med krajema na zemljevidu

Faza nastavitve

Faza nastavitve	Faza izbire	Faza vrednotenja	Faza ocenjevanja	Zbiranje
✓ Izberite kraj in obliko zemljevida ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun	✓ Izberite kraj A in B ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun	✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun	✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun	✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun ✓ Izberite vrstico za izračun

Opis



Pri tej aktivnosti boš uporabil sorazmerje pri izračunu razdalje med krajema na zemljevidu po tvoji izbiri. Dodeljeni ti bosta tudi naključni dve nalogi sošolcev, ki jih boš pregledal in po enostavnih kriterijih ovrednotil.

Slika 2: Opis aktivnosti v Delavnici.

krajema v naravi. Poišče naj katerikoli zemljevid v fizični obliki. Izbere si naj dva kraja na tem zemljevidu in z vrvico po cesti izmeri razdaljo med njima (enostavnejša možnost je z vrvico izmeriti zračno razdaljo). Nato naj z uporabo sorazmerja izračuna razdaljo med krajema v naravi. Svoj izračun preveri na elektronskem zemljevidu. Možnosti za to je več: bodisi vnese kraja v aplikacijo, ki izračuna pot samodejno (Najdi.si zemljevidi, Via-Michelin ipd.), bodisi določi razdaljo od točke do točke (Google maps). Kot zaključek naj učenec svoje delo dokumentira s fotografijo napete vrvice na zemljevidu, izračuna poti v zvezku in razdaljo med krajema na ekranu. Fotografijo naj nato kot dokaz o učenju naloži v Delavnico.

V fazi nastavitve Delavnice pripravimo kratek opis dejavnosti (Slika 2), navodila za oddajo (Slika 3) ter obrazec za vrednotenje (Slika 4).

Ko učenci oddajo zgoraj opisano nalogo, preklpimo Delavnico v fazo vrednotenja. V tem delu se učencem dodelijo izdelki sošolcev, ki jih po vnaprej določenih merilih ovrednotijo (Slika 4 in 5). Dodelitev je lahko samodejna ali ročna. Po lastnih izkušnjah je bolj zanimivo, da učencem računalnik naključno dodeli izdelke, vendar lahko iz učno pedagoških razlogov dodelitve opravimo sami. Prav tako lahko nastavimo, koliko izdelkov naj posamezni učenec ovrednoti.

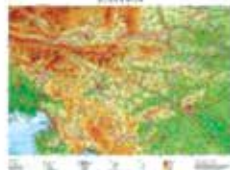
Z učenci smo oblikovali tri kriterije uspešnosti:

1. V nalogi je fotografija zemljevida z vrvico med krajema.
2. V oddani nalogi je izračun razdalje s sorazmerjem.
3. Zapisan komentar, kaj bi pohvalili oziroma kaj pogršamo.

V nastavitvah lahko ponudimo več možnosti ocenjevalne lestvice (Slika 6). Lahko določimo točke, ki jih učenci dodelijo za posamezni vidik, lahko pa izberemo lestvico, kjer je paleta možnosti zelo široka; od da/ne, opravil/ni opravil, do odlično, prav

Navodila za oddajo

1. Vzemite katerikoli **zemljevid v fizični obliki**.



2. Poiščite dva kraja A in B ter **z vrvico izmeri razdaljo** med njima po cesti.
3. V zvezek za matematiko napišite **NALOGA: izračun razdalje na zemljevidu**
4. S sorazmerjem **izračunaj razdaljo** med tema krajema v naravi.
5. **Razdaljo preveri** na elektronskem zemljevidu (Google maps, Najdi.si zemljevidi)



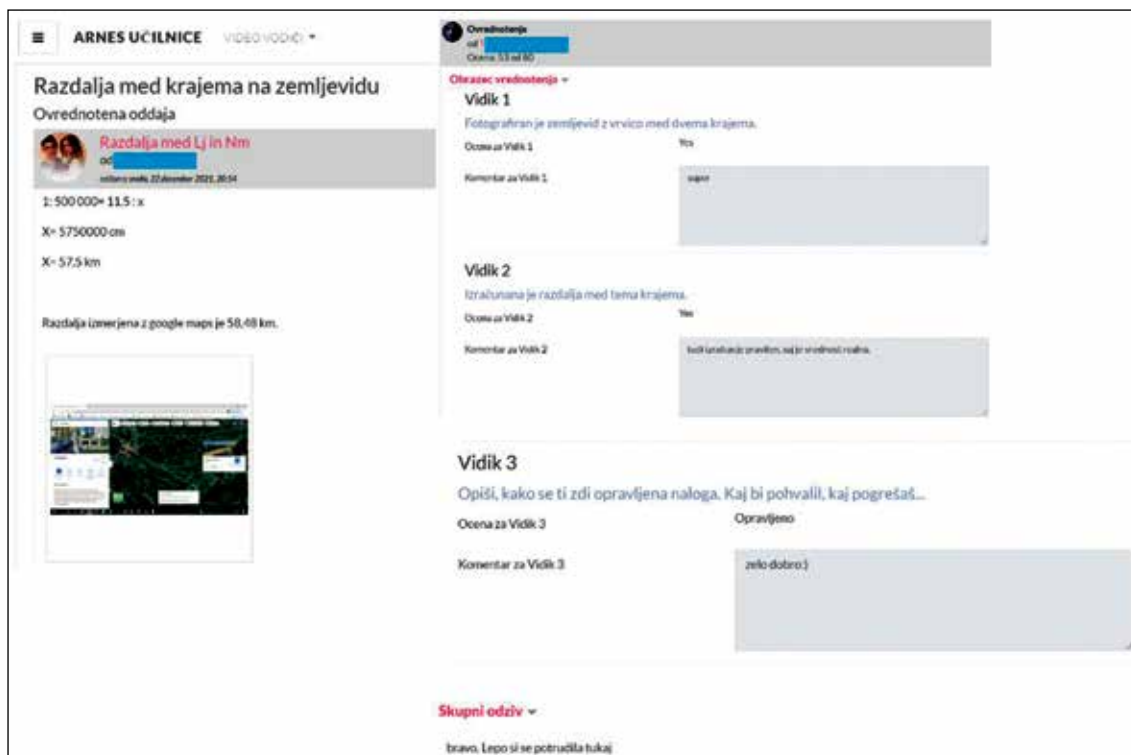
6. **Fotografiraj:**
 - napeto vrvico po cesti med krajema A in B
 - izračun poti v zvezku
 - razdaljo med krajema na ekranu

Ovrednoti nalogi dveh sošolcev

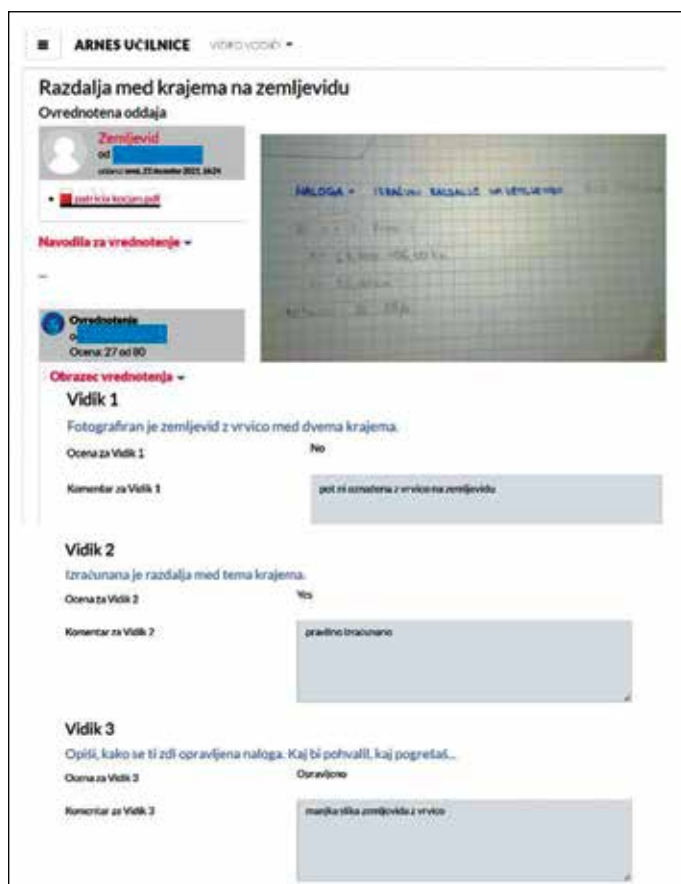
Slika 3: Navodila za oddajo naloge.

dobro in tako naprej ter zelo zanimiva tristopenjska lestvica zadostno/dobro/odlično!

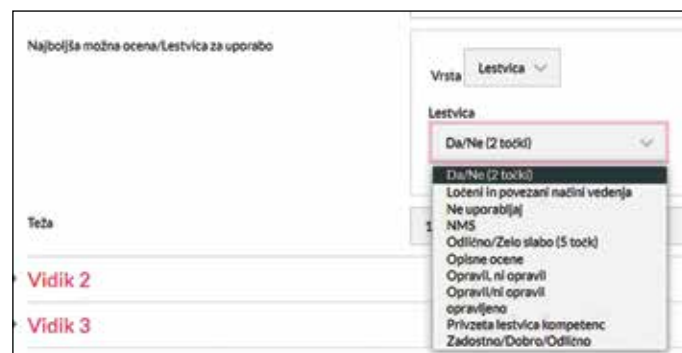
Ko učenci končajo z vrednotenjem, lahko preklpimo Delavnico v fazo ocenjevanja, kjer aplikacija sešteje točke, ki so jih učen-



Slika 4: Primer ovrednotene naloge ter obrazec za vrednotenje.



Slika 5: Primer kritičnega vrednotenja oddane naloge.



Slika 6: Ocenjevalne lestvice.

in smo ob začetku Delavnic kategorizirali, nam aplikacija po zaključku prikaže skupno oceno v redovalnici (Slika 8).

Izvedba delavnice je potekala pri pouku v živo. V primeru pouka na daljavo bi dejavnost potekala zelo podobno, le predstavitev navodil in oblikovanje kriterijev uspešnosti bi potekala na videosrečanju. V primeru pouka, kjer je nekaj učencev prisotnih v šoli in hkrati nekaj na daljavo, bi dejavnost izvedli z uporabo aplikacije Forum, kamor bi učenci vpisali svoje predloge kriterijev uspešnosti in jih kasneje vključili v merila vrednotenja.

Izvedbi delavnice se običajno namenita dve pedagoški uri, pri čemer prvo za opis, navodila, namene učenja ter kriterije uspešnosti, drugo za evalvacijo dejavnosti. Če so učenci takega dela že vajeni, se porabi le en del učne ure, ostali čas lahko poljubno razporedimo drugače.

Način učenja z medvrstniškim vrednotenjem ter z uporabo digitalne tehnologije na začetku ni enostaven, saj se morajo učenci na tako delo privaditi. Sam sem imel kup poskusov, pri katerih je nastalo več težav kot je bilo pozitivnega učnega učinka. Vendar

ci pridobili z oddajo naloge in z vrednotenjem (Slika 7). Vsak pridobi skupno oceno, ki je končna ocena za opravljeno nalogo. Če imamo v spletnih učilnicah Moodle nastavljeno redovalnico

Poročilo o ocenah delavnice

Ime / Priimek	Obljuba	Edinice sprejemstva	Projeto ocene	Ocena za udeležbo (od 0 do 20)	Podlaga ocene	Ocena za udeležbo (od 20)
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	27	[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	-	[redacted]	-
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	-	[redacted]	-
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	40	[redacted]	20
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	27	[redacted]	20
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	27	[redacted]	-
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	27	[redacted]	20
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	-	[redacted]	20
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	53	[redacted]	20
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	53	[redacted]	20

Slika 7: Poročilo o delavnici.

ARNES UČILNICE VIDEO VODIČ

MATHEM
Sodelujoči
Znanje
Ocene
Izjave
PODOBNOŠT
SOKRA/MKUL
RAZMISLI KULČIN
ENABE IN NE ENABE
SOKRA/MKUL IN
PODOBNOŠT
GEOMETRIJSKI
ELEMENTI V
PROSTORU
PRIZMA

Ime / Priimek	Kaj vse že vem o enačbah? (...)	Kaj vse že vem o enačbah? (...)	Enačbe z oklepaji 2 (odloži)	Enačbe z oklepaji 2 (ovredn...)
[redacted]	50,67	20,00	55,50	40,00
[redacted]	26,67	-	36,00	40,00
[redacted]	0,00	20,00	52,50	40,00
[redacted]	40,00	-	43,50	40,00
[redacted]	0,00	-	36,00	40,00
[redacted]	64,00	20,00	43,50	40,00
[redacted]	0,00	-	51,00	40,00

Slika 8: Redovalnica in končna ocena.

je z vztrajnim delom tudi moja praksa priprave vsebin z digitalno tehnologijo toliko napredovala, da je sedaj zares lahko v podporo učenju in poučevanju matematike na naši šoli.

Za pomoč pri nastavitvi dejavnosti Delavnica v spletni učilnici si lahko pomagamo z videovodičem:
<https://video.arnes.si/watch/m03bklkv12kn>

Na voljo imamo tudi videovodiče za ostale dejavnosti v spletni učilnici:
<https://resitve.sio.si/arnes-ucilnice-uporabniski-vodic-in-videovodici/>

Vir

Žakelj, A. idr. (2008). *UČNI načrt. Matematika*. [Elektronski vir]. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. (Dostopno na: http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2018/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf, 30. marec 2022)

Uporaba digitalne tehnologije pri kombiniranem poučevanju matematike v različnih okoliščinah

Urška Krajnc
Osnovna šola Radlje ob Dravi

Izvleček

V času izobraževanja na daljavo je bila uporaba digitalne tehnologije nujna, saj brez nje poučevanja na daljavo ne bi bilo mogoče izvajati. Komunikacija med učenci in učitelji je v tem času potekala v okviru različnih digitalnih učnih okolij, eno izmed njih je tudi MS Teams, ki omogoča učinkovito poučevanje tudi zahtevnejših matematičnih učnih vsebin v različnih okoliščinah (pouk poteka v šoli za vse učence, vsi učenci se izobražujejo na daljavo, pouk, pri katerem je nekaj učencev prisotnih v šoli, preostali učenci pa se pouka udeležijo na daljavo).

Učitelj s kombiniranjem različnih oblik dela pri pouku (individualno, v parih, delo v skupinah) doseže aktivno sodelovanje vseh učencev. Pri zahtevnejših učnih vsebinah pa je smiselno pouk nadgraditi še z vnaprej pripravljenimi videorazlagami, ki si jih učenci lahko po potrebi večkrat ogledajo.

Inovativni učni pristopi in kombinirano poučevanje omogočajo, da učenci dosegajo boljše učne rezultate v primerjavi s tradicionalnimi oblikami poučevanja.

Ključne besede: digitalna tehnologija, inovativni učni pristopi, kombinirano poučevanje, učno okolje MS Teams, videorazlaga

Application of Digital Technology in Hybrid Teaching of Mathematics Instruction in Different Contexts

Abstract

The use of digital technology during the pandemic was critical since distance education could not have been implemented without it. Various digital learning environments, such as MS Teams, were used to facilitate teacher-student communication during this time. The aforesaid platform allows for effective teaching of even the most complex mathematical content in a changing context (i.e., face-to-face, online, or hybrid teaching).

The teacher combines different types of classroom work (individual, pair, or group work) to ensure that all the students participate actively. For more complex subjects, it is useful to supplement the lessons with pre-recorded video explanations, which can be played multiple times if necessary. Innovative teaching approaches and hybrid teaching allow students to achieve better learning outcomes than traditional instructional methods.

Keywords: digital technology, innovative teaching approaches, hybrid teaching, MS Teams learning environment, video explanation.

1 Uvod

Za kombinirano poučevanje ne obstaja enotna definicija. V povezavi s tem se uporablja veliko različnih terminov, npr. *e-učenje/poučevanje*, *uporaba IKT*, *spletno učenje/poučevanje*, *učenje/poučevanje online* in podobno (Godnič Vinčič 2021).

Sangrà, Vlachopoulos in Cabrera (2012) so e-učenje definirali kot »pristop k poučevanju in učenju, ki predstavlja ves ali del uporabljenega modela izobraževanja in vključuje rabo elektrons-

kih medijev, naprav ter orodij, ki omogočajo boljši dostop do učenja, komunikacije in interakcije ter do njihovih spoznanj in znanj« (str. 152).

Ta definicija je zelo podrobna in izčrpna, vendar preveč poudarja način izvedbe pouka, zato je bolj priporočljiva uporaba termina *kombinirano poučevanje* (Godnič Vinčič 2021).

Graham (2006) ga definira na izvedbeni ravni kot kombinacijo klasičnega poučevanja z elementi spletnega učenja. Pri tem

ni natančno določeno, kaj vse se lahko kombinira (npr. različne spletne tehnologije, sinhrona ali asinhrona izvedba, različni pedagoški pristopi ali različni fokusi poučevanja kot npr. na učitelja ali učenca osredinjeno poučevanje). Prav tako ni natančno določen delež pouka v razredu v klasični izvedbi oziroma delež pouka v spletni izvedbi oziroma sočasnost obojega.

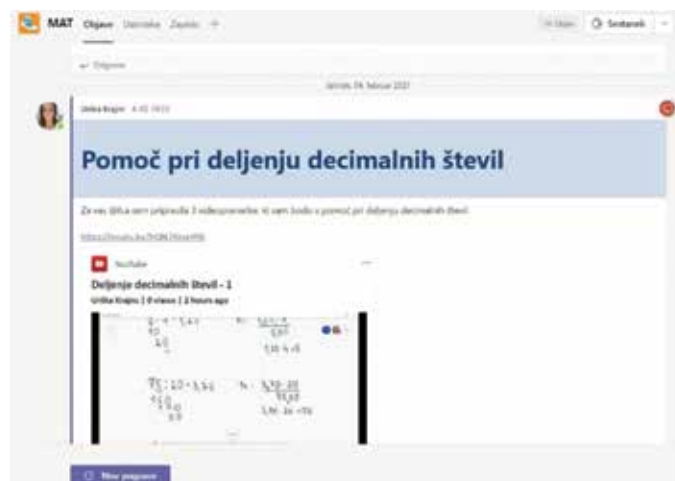
Za uspešno izvajanje kombiniranega poučevanja pa je potrebna ustrezna digitalna pismenost tako učenca kot učitelja. Opredeljena je kot posameznikova temeljna zmožnost, da se znajde v digitalnem svetu. Digitalno pismeni posameznik pozna in uporablja digitalne aparature in pripomočke, razume zakonitosti digitalnega socialnega okolja in se znajde v njem (Javrh in drugi, 2018).

2 Raziskovanje lastne poučevalne prakse in ugotovitve

V svoji raziskavi sem spremljala uspešnost učencev šestega razreda pri tematskem sklopu deljenje decimalnih števil, ki sodi med zahtevnejše učne vsebine. Primerjala sem učne dosežke učencev šestega razreda iz leta 2019, ko je pouk potekal v šoli, pri obravnavi učne vsebine pa sem uporabljala frontalno učno obliko, z dosežki učencev šestega razreda v letih 2020 in 2021, ko je pouk potekal na daljavo oziroma v kombinirani obliki. V letih 2020 in 2021 sem pri pouku uporabljala spletno učno okolje MS Teams, pri poučevanju pa sem uporabljala različne oblike dela ter videorazlage.

V letu 2020 je v času obravnavane učne vsebine pouk za vse učence potekal na daljavo. Na začetku ure sem vzpostavila povezavo z učenci prek videoklica. Najprej so učenci reševali kviz (v Formsu), s pomočjo katerega sem preverila predznanje učencev o deljenju naravnih števil. Znanje je bilo zadovoljivo, zato sem jih razdelila v heterogene skupine po štiri (sobe v MS Teams). Učenci so sami določili vodjo skupine, ki je lahko delil zaslon z ostalimi člani skupine. Nato so učenci rešili preprosto nalogo iz vsakdanjega življenja, in sicer kako 5 € pravično razdeliti med 4 člane skupine. Vse skupine so bile pri reševanju naloge uspešne, svoje ugotovitve pa so učenci zapisali v digitalni zvezek One Note. V nadaljevanju ure sem z uporabo aplikacije Whiteboard in deljenjem zaslona skupaj z učenci rešila še nekaj primerov deljenja decimalnih števil. Učenci so si snov in pravila zapisovali v zvezke. Nato so učenci do konca šolske ure individualno reševali naloge. V MS Teams sem jim naložila še videorazlago deljenja decimalnih števil. Če so učenci imeli pri reševanju nalog težave, so si lahko ogledali omenjeni videoposnetek. Videorazlago so si lahko učenci po potrebi večkrat ogledali, prav tako je pomagala učencem, ki so to učno uro pri pouku manjkali. Rešene naloge v zvezkih so učenci fotografirali in slike prilepili v zvezek One Note ter oddali svojo nalogo v pregled učitelju. Ob pregledu oddanih nalog sem učencem zapisala kratko povratno informacijo. Obravnavo učne snovi sem naslednjo uro prilagodila glede na izkazano znanje učencev. V primeru, da je večina učencev imela težave z določeno nalogo, sem to nalogo naslednjo učno uro učencem ponovno razložila. Utrjevanje deljenja decimalnih števil je potekalo v homogenih skupinah na različnih zahtevnostnih ravneh. Naloge sem učencem naložila v zvezek One Note. Če je katera skupina potrebovala pomoč, je to zapisala v klepet. Pridružila sem se tej skupini (sobi) in skupaj smo rešili težavo.

Po končani obravnavi deljenja decimalnih števil sem znanje preverila z uporabo preverjanja v Formsu. Tako sem ugotovila, ali učenci potrebujejo še več utrjevanja oziroma, da je znanje dobro in smo lahko nadaljevali z novo učno snovjo.



Slika 1: Video razlaga deljenja decimalnih števil.

V letu 2021 je pri obravnavi omenjene učne snovi potekal kombiniran pouk, del učencev se je izobraževal v šoli, del pa na daljavo. Učno uro sem izvedla na podoben način kot prejšnje leto. Na začetku ure so se učencem v razredu preko videoklica pridružili še učenci, ki so se izobraževali na daljavo. Predznanje sem preverila z uporabo kviza, ki so ga učenci v šoli rešili z uporabo pametnega telefona, učenci, ki so se šolali na daljavo, pa s pomočjo računalnika. Tudi delo v heterogenih skupinah je potekalo podobno kot prejšnje leto. Posebej sem v skupine razdelila učence, ki so bili v šoli in posebej učence, ki so pouku sledili na daljavo. Učenci v šoli so svoje ugotovitve zapisali v zvezek, učenci, ki so bili prisotni prek videopovezave pa v zvezek One Note. Tudi poročanje skupin je potekalo sočasno. Pri frontalnem delu učne ure sem delila zaslon z učenci v učilnici prek projektorja z ostalimi pa prek Teamsa. Pri individualnem delu so si lahko učenci, ki so delali na daljavo, pomagali z videorazlago, ki sem jo naložila v MS Teams, svoje reševanje v zvezku so slikali in sliko naložili v zvezek One Note. Podobno kot prejšnje leto sem naloge pregledala in učencem podala povratno informacijo v pisni obliki. Učencem, ki so bili v šoli, sem pri individualnem delu pomagala v razredu in jim podala ustno povratno informacijo. Tudi njim sem omogočila dostop do videorazlage učne snovi, zato so si jo doma lahko po potrebi večkrat ogledali. Utrjevanje deljenja decimalnih števil je potekalo sočasno v šoli in na daljavo v homogenih skupinah na različnih zahtevnostnih ravneh. Naloge sem vsem učencem naložila v zvezek One Note. Tudi tokrat sem po končani obravnavi deljenja decimalnih števil znanje preverila s pomočjo preverjanja v Formsu za vse učence.

Sočasno poučevanje v razredu in na daljavo je za učitelja zelo naporeno in zahtevno. V primeru tehničnih težav je dobro, da učitelj pripravi učno gradivo tako, da lahko učenci delo popolnoma samostojno opravijo. V tem primeru so videorazlage učne snovi z dodatnimi pisnimi navodili za delo zelo dobra izbira.

Spodnja preglednica prikazuje dosežke učencev šestega razreda pri pisnem ocenjevanju v letih 2019, 2020 in 2021.

Kot je razvidno iz tabele, so bili učenci v letu 2020 pri deljenju decimalnih števil kar za 25,99 % uspešnejši kot v letu 2019, v letu 2021 pa za 19,45 % uspešnejši kot leta 2019.

Preglednica 1: Dosežki učencev pri pisnem ocenjevanju znanja.

Leto	Uspešnost pri nalogi o deljenju decimalnih števil	Uspešnost pri vseh nalogah v pisnem ocenjevanju znanja decimalnih števil
2019	52,30 %	68,54 %
2020	78,29 %	71,14 %
2021	71,75 %	71,15 %

Zaključek

Ugotovila sem, da inovativni učni pristopi in kombinirano poučevanje omogočajo, da učenci dosegajo boljše učne rezultate v primerjavi s tradicionalnimi oblikami poučevanja, saj so bili dosežki učencev v letih 2020 in 2021 bistveno boljši od dosežkov učencev leta 2019. Aktivno vključevanje učencev v pouk namreč omogoča, da učenci sooblikujejo potek pouka, kar poveča njihovo motivacijo za učenje in doseganje višje ravni znanja.

Opisani primer je mogoče še nadgraditi in uporabiti tudi, ko pouk za vse učence poteka v šoli, videorazlage učne snovi pa so primerne tudi za obrnjeno poučevanje. Učenci si videorazlago učne snovi ogledajo doma, v šoli pa učno snov utrjujejo v obliki individualnega dela oziroma dela v skupinah.

Literatura

- Godnič Vinčič, Š. (2021). *Predlog izhodišč za oblikovanje strategije Univerze na Primorskem za kombinirano učenje in poučevanje*. Univerza na primorskem. Pridobljeno: 25. 2. 2021 s [Predlogizhodišč za oblikovanje strategije UP za kombinirano učenje in poučevanje.pdf](#)
- Graham, Charles R. (2006). Blending learning systems: Definition, current trends, and future directions. V *The handbook of blended learning: Global perspectives, local designs*, (ur.) Curtis J. Bonk in Charles R. Graham, 3–21. San Francisco: John Wiley.
- Javrh, P. (ur.). (2018). *Digitalna pismenost*. Ljubljana: Andragoški center Slovenije. Pridobljeno: 25. 4. 2020 s <https://www.dlib.si/stream/URN:NBN:SI:DOC-NKZPZO9Q/80497777-6718-41ff-99a2-b186288f388f/PDF>
- Sangrà, Albert, Dimitrios Vlachopoulos in Nati Cabrera. (2012). Building an Inclusive Definition of E-Learning: An Approach to the Conceptual Framework. *The International Review of Research in Open and Distance Learning* 13 (2): 145–59.

Obrestni račun v življenjskih situacijah z različnimi oblikami izpeljave pouka

Rok Lipnik
Gimnazija Celje – Center

Izvleček

Obrestni račun v življenju pogosto srečamo – težko kupimo avtomobil, stanovanje ali hišo, ne da bi najeli kredit ali lizing. Za dijake je tema zanimiva, vendar jih dostikrat matematični pristop oddalji od življenjske uporabnosti. V predstavljenem primeru so dijaki v skupinah pri pouku na daljavo reševali naključno dodeljen resničen problem iz obrestnega računa. Problemi so bili odprte narave in dijaki so sami našli mnogo ustvarjalnih rešitev in pristopov reševanja. Dejavnost se je obnesla kot motivacijsko-povezovalna, saj so s sodelovanjem v skupini krepili tudi sodelovanje. Predstavljeni so tudi drugačni pristopi k obravnavi teme glede na oblike izvajanja pouka (kombinirano, na daljavo ali v šoli).

Ključne besede: obrestni račun, digitalna tehnologija

Various Lesson Delivery Modes for Relating Interest Rates to Real-Life Situations

Abstract

In our lifetime, we frequently come across interest rates – it is becoming increasingly difficult to buy a house, a flat, or even a car without taking out a loan or a lease. Whereas students find this content appealing, the mathematical approach often distracts them from real-world applications. In this case, students collaborated in online groups to solve randomly assigned real-life tasks in an interest-bearing account. The problems were open-ended and the students could propose a variety of creative solutions as well as problem-solving approaches. By emphasising group cooperation, the activity increased motivation and strengthened the bonds among the students. In conclusion, the article provides recommendations on other approaches to the topic – depending on the mode of delivery (i.e., hybrid, online, or face-to-face).

Keywords: interest rates, digital technology.

Obrestni račun je med matematičnimi vsebinami ena od širše uporabljenih v vsakdanjem življenju – skoraj gotovo se enkrat v času svojega življenja srečamo s kreditom, obročnim plačilom, naložbo, rento, lizingom ... En od problemov obrestnega računa je, da je teoretična podlaga iz geometrijskega zaporedja, zato se s to vsebino dijaki praviloma srečajo v 4. letniku, pogosto pa naloge iz zbirke, učbenikov in elektronskih virov niso aktualizirane ali dijakom na pogled realne. S pravimi pristopi lahko obrestni račun dijakom približamo, osmislimo in prispevamo k uporabnosti znanja.

Predstavil bom primer skupinskega dela na temo obrestnega računa. Dejavnost sem izvedel v času pouka na daljavo, kjer so se dijaki sprva spoznali z osnovami obrestnega računa – pripravljene so imeli posnetke s H5p aktivnostmi za preverjanje sprotne usvojenega znanja na temo navadnega in obrestnega obrestovanja, obročnih vplačil in izplačil ter amortizacijskega načrta. Po treh šolskih urah samostojnega dela s posnetki in nalogami iz interaktivnega učbenika Vega 4 (Vir 1) smo imeli skupno vide-

okonferenčno uro, kjer so dijaki zastavljali vprašanja, jaz pa sem preverjal usvojeno znanje. Nato smo se dogovorili o kriterijih uspešnosti.

Zastavili smo naslednje kriterije uspešnosti

Uspešen bom, ko:

- ločim navadno in obrestno obrestovanje,
- izračunam pripisane obresti oz. končen znesek,
- računam s konformno ali relativno obrestno mero,
- računam z obročnimi vplačili in izplačili,
- pripravim amortizacijski načrt.

Zadnjo, peto šolsko uro v tednu pa smo se lotili skupinskega dela. Dogovorili smo se o delitvi v skupine – razdeljeni so bili v naključne skupine z orodjem Random Team Generator (Vir 2,

primer <https://tinyurl.com/nakljucneskupine>), vsaki skupini sem nato z orodjem List Randomizer (Vir 3, primer <https://tinyurl.com/delitevنالog>) dodelil naključno nalogo. Zakaj popolnoma naključno? V času pouka na daljavo sem spodbujal dijake, da med sabo sodelujejo, si pomagajo in tudi skupaj rešujejo naloge. Izkazalo se je, da so skupine ves čas enake in med sabo sodelujejo isti dijaki. Pri delu v razredu skupine zlahka premešamo z ustvarjanjem novih skupin in sedežnih redov, pri pouku na daljavo težko vplivamo na to, kako in koliko med sabo sodelujejo, zato sem to dejavnost izkoristil za krepitev sodelovanja v oddelku. Dogovorili smo se, da v vsaki skupini določijo tri vloge – iskalec informacij, pripravljalec predstavitev in koordinator dela, vsi pa morajo sodelovati pri izračunih. V spletni učilnici so imeli objavljen povzetek s skupinami in nalogami za vsako skupino.

Naloge, ki so jih dijaki reševali, so bile odprte to te mere, da niso bili določeni vsi podatki, saj so morali dijaki sami preveriti aktualno ponudbo bank oz. posojilnic in se odločiti za eno izmed njih ter svojo odločitev utemeljiti. Reševali so naslednje primere:

1. Kredit za obnovo stanovanja v višini 15.000 €. Doba odplačevanja naj bo 6 let.
2. Potrošniški kredit v višini 8.000 €. Doba odplačevanja naj bo 5 let.
3. Stanovanjski kredit za 3-sobno stanovanje v Celju. Doba odplačevanja naj bo 15 let.
4. Lizing za nov avtomobil Renault Twingo Electric. Doba odplačevanja naj bo 7 let.
5. Lizing za nov avtomobil BMW X5. Doba odplačevanja naj bo 7 let.
6. Kredit za obnovo stanovanja v višini 20.000 €. Doba odplačevanja naj bo 5 let.
7. Stanovanjski kredit za hišo v Celju. Doba odplačevanja naj bo 20 let.
8. Stanovanjski kredit za 3-sobno stanovanje v Ljubljani. Doba odplačevanja naj bo 15 let.
9. Potrošniški kredit za nakup in vgradnjo toplotne črpalke ZRAK-VODA. Doba odplačevanja naj bo 4 leta.
10. Stanovanjski kredit za hišo v Ljubljani. Doba odplačevanja naj bo 20 let.

Tudi za skupinsko delo smo pripravili kriterije uspešnosti:

Uspešni bomo, ko:

- enakovredno prispevamo k skupinskemu izdelku,
- predstavimo več različnih izračunov in jih med sabo primerjamo,
- pripravimo predstavitev rešitve problema,
- uporabimo znanje obrestnega računa v resničnem primeru.

Skupine so se dela lotile različno, v vseh skupinah so svoje izdelke oddali in jih nato predstavili svojim sošolcem.

Dijaki pri reševanju niso gledali le osnovnega problema, ampak so razmišljali tudi o dodatnih stroških (recimo prenova in redni stroški vzdrževanja stanovanja; vodenje računa ...). Svoje delo so predstavili na različne načine – predstavitev stanovanja v imenu nepremičninske agencije, primerjali so različne finančne instrumente (lizing in kredit) ali si sami zastavili še dodatna vprašanja in o problemu razmišljali na različne načine.

Primer izdelka

»Družina Wechsel se je odločila za prenovu stanovanja. S predračunom so ugotovili, da jim samo z lastnimi prihranki stanovanja ne bo uspelo prenoviti, zato so se odločili za kredit v višini 15.000 €. Odločili so se, da ga morajo odplačati v šestih letih. Različne banke ponujajo različne obrestne mere. ABANKA ima obrestno mero 3,20 % (letna kapitalizacija), NLB 2,15 % (letna kapitalizacija) in NKBM 2,40 % (letna kapitalizacija).

- a) Koliko bi znašal mesečni obrok pri posamezni banki, če morajo obrok plačati vsak mesec (plačujejo pa 6 let)? Kaj pa, če bi odplačali v 6 obrokih (letni obrok)? Kdaj bo mesečni obrok najmanjši?
- b) Za katero banko se bodo odločili, če se želijo čim manj zadolžiti?
- c) Družino zanima, koliko privarčuje, če bi namesto kredita 6 let varčevali denar na banki, tako da se jim obrestuje po enaki obrestni meri kot se obrestuje kredit na izbrani banki. Koliko bi morali devati na varčevalni račun v banki, da bi privarčevali 15.000 € v 6 letih?
- č) Razmišljali so, da bi se v primeru kredita lahko rešili obresti tako, da del kredita položijo na varčevalni račun (če privzamemo da je obrestna mera enaka). Koliko bi morali odtegniti od kreditnega zneska pri ABANKI in položiti na varčevalni račun (enaka obrestna mera), da v 6 letih ne bi plačali nič obresti? Koliko jim še ostane za obnovo stanovanja?«

Dijaki so orodja in tehnologije izbirali sami – nekateri so se dobili na Messengerju, drugi na Teams, tretji po telefonu ... vsi pa so pripravili tudi predstavitev. V dejavnosti so uživali, na koncu so svoje delo predstavili vsem sošolcem in tako pokazali svoj način dela ter ugotovitve. Utrdili so znanje obrestnega računa, ki smo ga sicer v celoti obravnavali na daljavo.

Kako bi podobno dejavnost izvedli v drugačnih okoliščinah?

Kadar pouk poteka v celoti v šoli, bi se dejavnosti lotil s telefoni oz. tabličnimi računalniki, s pomočjo katerih bi dijaki raziskali možnosti in pripravili izračune ter predstavitev. Vpogled v delo skupine bi bil za učitelja lažji, saj bi delo lahko sproti spremljal. Večji poudarek bi lahko bil tudi na predstavitvi, saj bi potekala v živo in ne le preko ekrana oz. kamere. Dijaki bi lahko ponudbe poiskali tudi v živo na bankah/avtohišah/...

Kadar pouk poteka z nekaj učenci v šoli, preostali pa se pouka udeležujejo na daljavo, bi v dejavnosti poskrbel za sodelovanje obeh skupin dijakov tako, da bi bil v vsaki skupini vsaj en dijak na šoli in vsaj en dijak na daljavo, tako da bi lahko sodelovali vsi. Ključno bi bilo, da dobijo dijaki, ki so na daljavo, možnost za sodelovanje pri vseh etapah dejavnosti, kar bi dosegel z jasno določenimi vlogami v skupini.

Viri in literatura

<http://iucbeniki.si/vega4/376/index12.html> (15. 6. 2021)

<https://www.randomlists.com/team-generator> (15. 6. 2021)

<https://www.randomlists.com/list-randomizer> (15. 6. 2021)

Seminarska naloga iz geometrije v drugem letniku gimnazije

Karolina Ivanec
Gimnazija Jožeta Plečnika, Ljubljana

Izvleček

V članku je predstavljeno dijakovo samostojno raziskovanje geometrijskih konstrukcij na papirju in s pomočjo programa za dinamično geometrijo Geogebra. Vsak dijak je dobil navodilo za izdelavo seminarske naloge, ki je vsebovalo navodila o obliki seminarske naloge, nalogo iz teorije ter deset konstrukcijskih nalog. Konstrukcij so se lotili na klasičen način (šestilo, ravnilo in svinčnik) in s pomočjo računalniškega programa Geogebra. Pri klasičnem načinu so predstavili skico, potek reševanja in narisano konstrukcijo. S programom Geogebra so konstrukcijo tudi oblikovali. Vključili so tudi opis konstrukcije. Poročilo so napisali v urejevalniku besedil, vnesli optično prebrane slike konstrukcij, ki so jih naredili s šestilom in ravnilom ter dodali slike iz Geogebre. Nato so poročilo oddali v spletno učilnico. Rezultate se preveri v spletni učilnici, kjer dobijo dijaki tudi povratno informacijo. Večina dijakov nalogo uspešno opravi. Največ težav imajo z vstavljanjem slik in reševanjem v Geogebri. Problem jim delajo tudi konstrukcije, ki imajo dve možni rešitvi. Mnenja dijakov o uporabi programa Geogebra so različna. Nekateri imajo rajši konstrukcije s programom za dinamično geometrijo, drugi pa raje uporabljajo papir in geometrijsko orodje. Nalogo so delali še v času pred epidemijo, vendar je primerna tudi za delo na daljavo ali v času hibridnega pouka.

Ključne besede: seminarska naloga, konstrukcije likov, programi in aplikacije za dinamično geometrijo, iskanje po spletu, samostojno delo

Geometry Seminar Paper in Second Year Grammar School

Abstract

This paper introduces students' autonomous exploration of geometric constructions on paper using the dynamic geometry software Geogebra. The students were provided with instructions on how to structure the seminar paper, a theory assignment, and ten construction problems. The constructions were completed with the traditional tools (i.e., a pair of compasses, a straightedge, and a pencil) as well as the Geogebra computer program. To present the sketch, the problem-solving process, and the construction drawing, the students adopted the classical method. The Geogebra assisted them in designing the construction. A description of the construction was also included. The students used a word processor to write a report, to which they added scanned images of the ruler-and-compass constructions, and the Geogebra images. Finally, the reports were submitted to the online classroom, where they were evaluated, and where the students received feedback. The majority of the assignments were successfully completed.

While it appears that students have the most difficulty with inserting pictures and solving problems in Geogebra, they also struggle with constructions with two alternatives. Their attitude to Geogebra is ambivalent. Some of them prefer constructions with dynamic geometry software, and others prefer paper and geometry tools. Even though the assignment was carried out in the pre-epidemic days, it is perfectly suitable for distance and hybrid education.

Keywords: seminar paper, geometric construction, dynamic geometry programmes, and applications, browsing the Internet, independent work.

1 Uvod

V drugem letniku gimnazije se pri geometriji konstruira geometrijske like s pomočjo geometrijskega orodja. V učnem načrtu je priporočilo, da se jih načrtuje tudi s programi za dinamično geometrijo. Dijaki so načrtovanje geometrijskih likov spoznali že v sedmem razredu osnovne šole in je to za njih ponovitev. Poznavanje programov za dinamično geometrijo pa je zelo različno. Dijaki so dobili navodila za izdelavo naloge v spletni učilnici. Iz učbenikov, zvezka in s pomočjo iskanja po spletu so obnovili ali na novo pridobili znanje o načrtovanju v geometriji. Ravno tako so preko spleta poiskali navodila o uporabi dinamičnega programa za geometrijo Geogebra. Čas za izdelavo naloge je bil od konca oktobra 2019 pa do januarja 2020, torej še pred epidemijo. Ker je delo potekalo kot domače delo, je še bolj primerno za delo na daljavo, morda malo manj v času hibridnega pouka. Navodila in dodatna pomoč se izvaja preko videokonferenc, spletnih učilnic in elektronske pošte. V tem primeru je dovolj en teden časa, kjer so vse ure matematike namenjene izdelavi seminarske naloge.

2 Geometrijska seminarska naloga

Seminarsko nalogo delajo dijaki 2. f razreda, v katerem je 25 dijakov. Dijaki so vključeni v projekt Inovativna pedagogika 1:1 in pri pouku uporabljajo tablice, kar pa ni pogoj za izdelavo seminarske naloge. V spletni učilnici dobijo navodila za izdelavo seminarske naloge, ki jim predpišejo obliko poročila, deset geometrijskih nalog, ki jih morajo opraviti in način oddaje. Za izdelavo naloge imajo dva meseca. Izdelati jo morajo samostojno, doma, na voljo pa imajo konzultacije. Kako bodo opravili to nalogo, je prepuščeno dijakom samim.

Seminarska naloga je zahtevala:

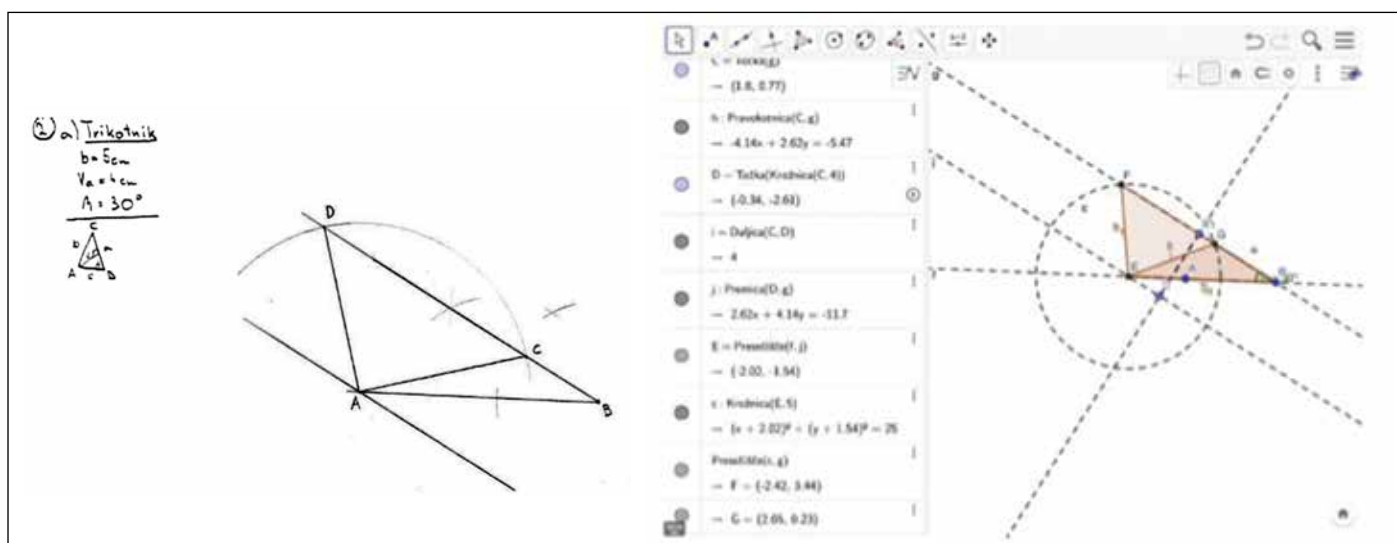
- izdelavo poročila v urejevalniku besedil s kazalom, vstavljanjem slik iz Geogebre in vstavljanje optično prebranih slik konstrukcij z geometrijskim orodjem ter navedbo virov;
- optično prebiranje in shranjevanje slik konstrukcij z geometrijskim orodjem;

- izdelavo in shranjevanje konstrukcij s programom Geogebra;
- iskanje in uporabo podatkov s spleta;
- pretvoriti zapis v Wordovi datoteki v pdf datoteko in oddajo poročila v spletno učilnico.

Predznanje dijakov ugotovim z vprašalnikom. Izidi vprašalnika pred opravljeno nalogo so: pet dijakov še ne zna urediti besedila z urejevalnikom besedil in vstaviti sliko iz drugega programa, trije dijaki ne znajo shraniti dokumenta na tablici, 8 dijakov je poznalo kakšen program za dinamično geometrijo (vsi od teh Geogebro), le en dijak pa jo zna tudi uporabljati. Da znajo oddajati matematične naloge preko elektronske pošte, je trdilo 20 dijakov, preko spletne učilnice pa 15 dijakov.

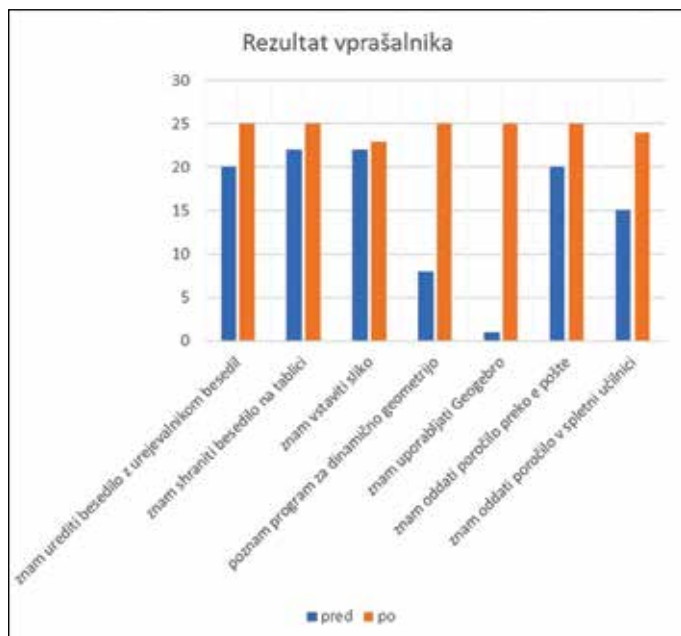
Rezultati

Izidi vprašalnika po opravljeni nalogi so: vsi dijaki znajo urediti besedilo z urejevalnikom besedil in vstaviti sliko iz drugega programa, dva dijaka še ne znata shraniti dokumenta na tablici, vsi poznajo kakšen program za dinamično geometrijo (vsi Geogebro) in jo tudi uporabljati. Vsi znajo oddati matematične naloge preko elektronske pošte, en dijak pa še ne zna oddati v spletni učilnici. Primerjavo med predhodnim stanjem in stanjem po opravljeni nalogi prikazuje graf 1. Povsod se vidi napredek, predvsem v poznavanju programov za dinamično geometrijo in uporabo Geogebre. Po pregledu poročil ugotovim, da ena dijakinja ni oddala poročila. Vsi dijaki, ki so poročilo oddali, so poiskali pravilne informacije na spletu, izdelali konstrukcije s šestilom in ravnilom in v Geogebri, optično prebrali narisane konstrukcije, izdelali kazalo in navedli vire. Res pa je, da so njihovi izdelki na različnih ravneh. Nekateri so naredili le osnovo (konstrukcijo), najboljši pa so se držali navodil, dodali so potek konstrukcije v Geogebri, risali pomožne črte s črtkano črto in pobarvali končni lik. Problem je ostal še pri prikazu konstrukcij v Geogebri, vstavljanju slik in pretvarjanju dokumenta v pdf zapis. Rezultate prikazuje preglednica 1. Z vprašalnikom ugotovim mnenje dijakov o projektni nalogi. Večini dijakom se zdi taka projektna naloga koristna, saj s tem pridobivajo izkušnje za delanje seminarskih nalog tudi za prihodnje izobraževanje. Bolje se seznanijo z ureje-



Slika 1: Primer optično prebrane konstrukcije in izdelka v Geogebri.

valniki besedil, vseh jim je, da se tudi individualno učijo uporabljati programe na računalniku. Naučijo se uporabljati matematične aplikacije in s tem tudi poglobijo svoje znanje matematike. Trije dijaki mislijo, da tega znanja ne bodo nikoli potrebovali.



Graf 1: Rezultati vprašalnika.

Preglednica 1: Število dijakov, ki je opravilo določeno dejavnost.

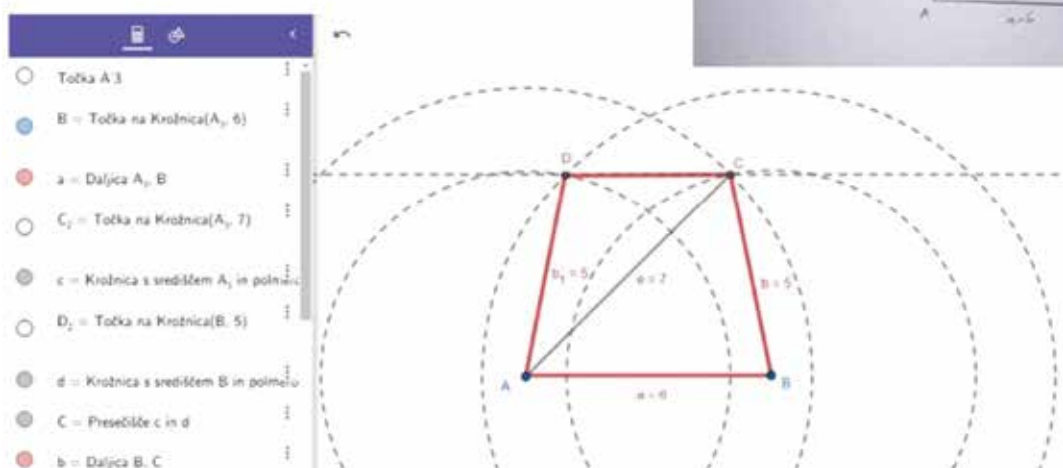
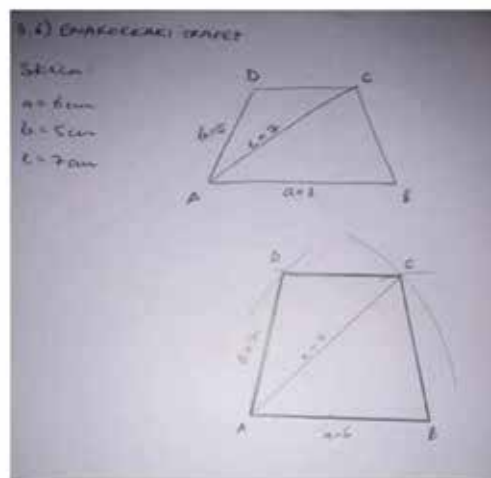
Dejavnost	Število dijakov, ki so opravili to dejavnost Vseh dijakov je 25.
Oddaja poročila v spletno učilnico	23
Pravilnost poiskanih informacij	24
Izdelava konstrukcij v Geogebri	24
Prikaz poteka konstrukcij	8
Optično branje oziroma fotografiranje	24
Izdelava poročila:	
• kazalo	24
• vrstni red	16
• vstavljanje slik	22
Pretvarjanje dokumenta v pdf zapis	15

3.6 Enakokraki trapez

Podatki: $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $e = 7$ cm

Potek:

- Narišemo dolžino stranice a in njeni krajišči označimo s točkama A in B .
- V šestilo vzamemo dolžino stranice b , najprej ga zapičimo v točko A in načrtamo krožni lok v smeri točke C , nato ga zapičimo v točko B in načrtamo krožni lok v smeri točke D .
- V šestilo vzamemo dolžino diagonale e in ponovimo 2. postopek.
- Presečišči krožnih lokov označimo s točkama D in C .
- Povežemo točki B in C ter D in C .



Slika 2: Primer optično prebrane konstrukcije in izdelka v Geogebri.

Zaključek

Po opravljeni seminarski se pokaže, da imajo dijaki težave s pisanjem poročila, z vstavljanjem slik in z učenjem uporabe programa za dinamično geometrijo. Z lahkoto pa poiščejo podatke na spletu, največ jih je uporabilo spletni učbenik Vega 2. Naučili so se shranjevati datoteke. Nekateri ugotovijo, da je lažje konstruirati s pomočjo programa za dinamično geometrijo, ostalim je še vedno bližje načrtovanje z geometrijskim orodjem. Dijaki so sposobni s pomočjo spleta pridobiti veliko znanja, znajo pa si tudi pomagati med seboj. V drugem letniku se še niso srečali z izdelavo poročil in jim zato tehnične zadeve povzročajo težave, vendar pa so po končani nalogi vsekakor tudi to izboljšali.

Uporabljeni viri

Učni načrt za gimnazijo, matematika. (2008). http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2019/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf (7. 3. 2020)

Geogebra. <https://www.geogebra.org/classic> (7. 3. 2020)

Iz digitalne bralnice ZRSŠ

www.zrss.si/strokovne-resitve/digitalna-bralnica

Dve leti po izidu lahko prelistate tudi **strokovne revije**, ki so izšle pri Zavodu RS za šolstvo in so vam BREZPLAČNO dosegljive tudi v PDF obliki. Prijetno strokovno branje vam želimo.



Sodelovalno nad piramide

Andreja Pečovnik Mencinger
Srednja šola za gostinstvo in turizem Maribor

Izvleček

V prispevku predstavimo eno od metod aktivnega učenja, in sicer sodelovalno delo, na primeru raziskovanja posameznih vrst piramid, s poudarkom na uporabi Pitagorovega izreka v piramidah. Dijaki v skupinah sami pridobivajo nova znanja, učitelj pa je v vlogi usmerjevalca oziroma mentorja. Povzeta je primerjava med sodelovalnim delom v času pouka na daljavo in v živo.

Ključne besede: piramide, sodelovalno delo, pouk na daljavo

Grasping Pyramids Together

Abstract

This paper covers an active learning method, specifically, collaborative work. Exploring different types of pyramids with a focus on the application of the Pythagorean theorem is used as an example. While students work in groups to acquire new knowledge autonomously, the teacher acts as their guide or mentor. A comparison is also drawn between collaborative work in distance education and face-to-face lessons.

Keywords: pyramids, collaborative work, distance education.

Uvod

S sodelovalnim delom sem se prvič spoprijela, ko smo na šoli v okviru projekta Creative Classroom na inovativen način uvajali uporabo tablic pri pouku matematike. Učni scenarij za obravnavo vsebin iz prostorske geometrije, ki je nastal v okviru omenjenega projekta, je doživel že mnogo različic in različni modeli pouka v zadnjih dveh letih so bili ponovno dobro izhodišče za prevetritev obstoječega scenarija.

Geometrija v prostoru predstavlja tematski sklop, ki zajema vsebine, s katerimi se učenci seznanijo že v osnovni šoli. Posledično je treba njihovo predznanje diagnosticirati in na osnovi pridobljenih rezultatov znanje nadgraditi.

Pri diagnosticiranju predznanja v letošnjem šolskem letu smo ugotovili precejšnje pomanjkljivosti v znanju v primerjavi s prejšnjimi leti, kar bi bilo lahko moč pripisati izvajanju pouka na daljavo. Veliko dijakov ni ločilo prizme od piramide in tudi v splošnem so bile njihove prostorske predstave zelo okrnjene. Nekateri dijaki niso ločevali likov od teles. Zato je bilo treba več ur pouka nameniti poznavanju osnovnih pojmov.

Piramide sodelovalno na daljavo

V šolskem letu 2020/21 smo obravnavali geometrijo v prostoru v času dolgotrajnega pouka na daljavo. Pouk smo na šoli izvajali

s pomočjo orodja MS Teams, ki omogoča izvedbo videokonferenčnega pouka, komunikacijo s posamezniki, skupinami oz. celotnim razredom. Prav tako smo v okolju MS Teams pripenjali različna gradiva, dijakom dodeljevali naloge in komentirali oz. vrednotili njihove izdelke. Poleg okolja MS Teams sem pri pouku matematike uporabljala tudi spletno učilnico Moodle, ki se mi je zdela bolj primerna za izvajanje kvizov od orodja Forms v MS Teams, saj omogoča večji nabor raznolikih tipov vprašanj.

Pri usvajanju piramid smo se razdelili v skupine. Okolje MS Teams ponuja dva različna načina dela v skupinah, in sicer omogoča vodjem skupin, da sami ustvarijo videokonferenčno srečanje in znotraj tega dijaki sodelujejo, ali pa učitelj ustvari sobe, znotraj katerih so razporejeni dijaki, ki sodelujejo.

Pri tvorbi skupin določimo vodje skupin, ki si nato izmenično izberejo svoje člane. Sestavimo heterogene skupine. Glede na predviden način sodelovalnega dela je bilo v našem primeru v vsaki skupini od štiri do pet članov.

Dejavnost je trajala dve šolski uri. Na začetku prve šolske ure smo se razdelili v skupine in se seznaniли z navodili za sodelovalno delo. V nadaljevanju so dijaki po skupinah raziskovali posamezne vrste piramid ter pripravili gradivo za predstavitev. V ta namen smo uporabili aplikacijo Google Drive, ki omogoča skupno rabo. Vodja skupine je bil zadolžen za ustvarjanje dokumenta, omogočanje skupne rabe vsem članom skupine in učitelju. Vsak dijak je predstavil svoj del predstavitve. Učitelj je bil v vlogi mentorja ves čas na voljo skupinam.

Navodila za delo v skupinah:

S sošolci v skupini raziščite lastnosti določene vrste **pokončne piramide**. Razdelite si vloge.

- S programom GeoGebra 3D izdelajte model in mrežo telesa,
- raziščite uporabo Pitagorovega izreka v dodeljeni piramidi,
- izpeljite formuli za izračun površine in prostornine dodeljene piramide,
- rešite nalogo in
- pripravite predstavitev.

1. skupina – enakoroba tristrana piramida

Naloga: Površina enakorobe tristrane piramide meri $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Izračunaj višino in prostornino piramide.

2. skupina – pravilna tristrana piramida

Naloga: Pravilna tristrana piramida ima višino dolgo 15 cm in višino stranske ploskve dolžine 20 cm. Izračunaj površino in prostornino piramide.

3. skupina – pravilna štiristrana piramida

Naloga: Pravilna štiristrana piramida ima višino dolžine 8 cm in stranski rob dolžine 10 cm. Izračunaj površino in prostornino piramide.

4. skupina – enakoroba pravilna štiristrana piramida

Naloga: Prostornina enakorobe pravilne štiristrane piramide meri $9\sqrt{2} \text{ cm}^3$. Izračunaj stransko višino in površino piramide.

5. skupina – štiristrana piramida, ki ima za osnovno ploskev pravokotnik

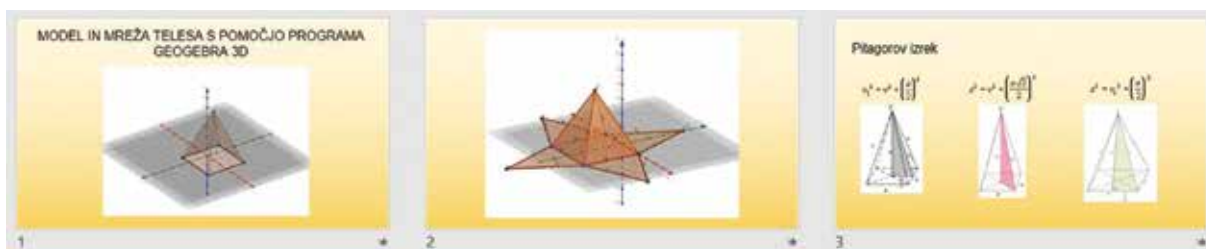
Naloga: Štiristrana piramida, katere osnovna ploskev je pravokotnik, ima osnovna robova dolga 4 cm in 2 cm, stranski rob pa meri 4 cm. Izračunaj površino in prostornino.

Dijaki so bili z uporabo programa GeoGebra predhodno seznanjeni. Običajno je to dejavnost prevzel dijak, ki je bolj vešč dela z računalnikom. Prva šolska ura skupinskega dela je potekala v smislu delitve nalog in iskanja informacij po spletu. Kljub temu da si je bilo treba delo v skupinah razdeliti, je bilo zelo pomembno sodelovanje med člani skupine, saj je pri reševanju naloge in izpeljavi formul potrebno tudi znanje Pitagorovega izreka. Pri sodelovanju so bile nekatere skupine bolj uspešne od drugih, kar je bilo zelo očitno pri izdelavi predstavitev in pri sami predstavitvi gradiv. Dogovorili smo se, da v primeru kakšnih nejasnosti pri reševanju nalog ali izpeljavi formul učitelju preko klepeta posredujejo posnetke svojih izdelkov.

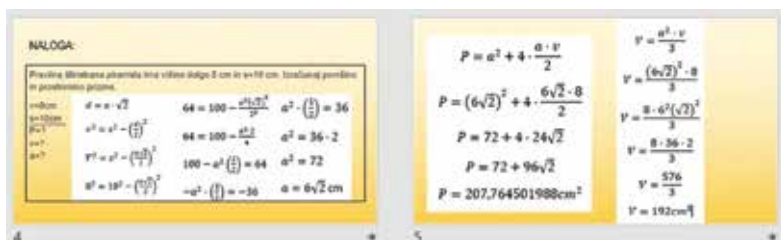
Vse skupine niso opravile svoje naloge, nekatere skupine so za pripravo predstavitve potrebovale dodaten čas in so to opravile izven časa pouka.

Piramide sodelovalno kombinirano v šoli in na daljavo

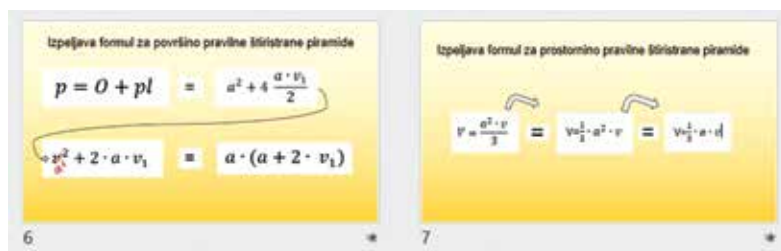
V šolskem letu 2021/22 smo isto dejavnost izpeljali v šoli. Ker pa je nekaj dijakov zaradi karantene moralo ostati doma, smo tiste, ki so to želeli, vključili v sodelovalno delo tako, da smo v uvodnem delu ure videokonferenčno podali navodila za delo. Imeli smo eno t. i. mešano skupino. Dogovorili smo se, da lahko v tej skupini dijaki med uro po potrebi komunicirajo preko svojih kanalov. Ves čas pouka smo imeli vklopljeno videokonferenčno srečanje, ki so ga dijaki lahko izkoristili za morebitna vprašanja učitelju. Izdelke, ki so nastajali med uro, so dijaki posneli in preko klepeta posredovali učitelju. Učitelj je videokonferenčno podal komentarje na izdelke. Skupine so svoje delo dokončale doma in nato predstavile v šoli.



Slika 1



Slika 2



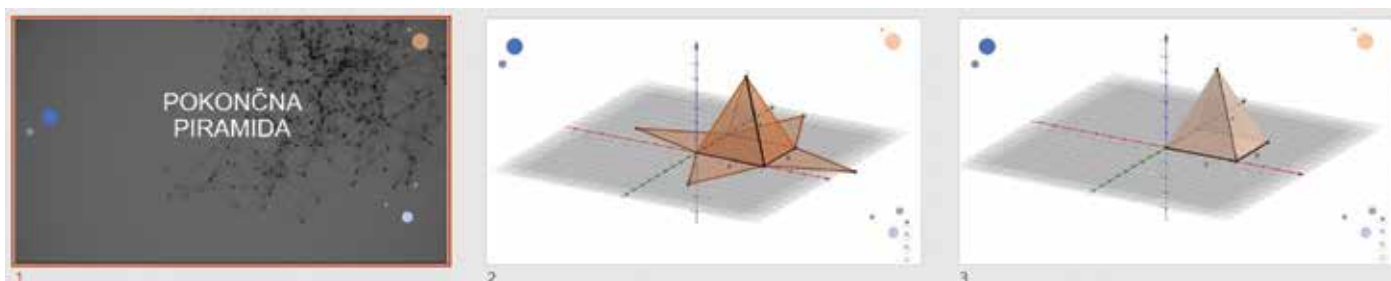
Slika 3

Predstavitve dijakov sem prenesla iz aplikacije Google Drive in jih shranila v programu PowerPoint. S pomočjo grafične tablice sem vnesla popravke, kjer je bilo potrebno in končne verzije naložila kot učno gradivo med datoteke v okolje MS Teams.

Iz predstavitev dijakov je bilo zelo dobro razvidno, ali so člani skupine med sabo sodelovali ali pa je vsak opravil svoje delo in se ni povezoval z drugimi člani skupine.

Kljub temu da je bilo predznanje letošnjih dijakov slabše od predznanja lanskih dijakov, so nastale večinoma bolj kakovostne predstavitve, saj so dijaki v živo bolj učinkovito sodelovali in si tudi lažje pomagali med sabo.

Na slikah 1, 2 in 3 vidimo predstavitev skupine, ki je raziskovala pravilno štiristrano piramido. Člani skupine so izjemno dobro sodelovali in pripravili odlično predstavitev.



Slika 4



Slika 5

Na slikah 4 in 5 vidimo predstavitev skupine, kjer ni prišlo do pravega sodelovanja, kar je razvidno iz napak pri predstavitvi.

Zaključek

Primerjava med omenjenima izvedbama sodelovalnega dela je pokazala, da je takšno obliko dela možno izvesti v živo in na daljavo, vendar je zavzetost dijakov za delo pri pouku v živo bistveno večja, prav tako je večja interaktivnost med dijaki. Ker je pri pouku v živo učitelj fizično prisoten, se dijaki pogosteje obračajo nanj z vprašanji in mentorstvo učitelja pride bolj do izraza. Pri obeh izvedbah so zelo pomembne koordinacijske sposobnosti vodje skupine, ki pa pri izvedbi na daljavo še bolj izstopajo. Ker je delo podprto z računalniško opremo, je kakovost predstavitev korelirala tudi z veščostjo rabe računalnika (program GeoGebra, urejevalnik enačb ipd.)

Viri

- Ferk Savec, V. (2012). Aktivni pouk: Pot do kakovostnega znanja naravoslovja. *Zbornik prispevkov NAMA – Poti do kakovostnega znanja naravoslovja in matematike*, str. 36–41.
- Ilc Rutar, Z. (2005). *Spodbujanje aktivne vloge učenca v razredu*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- Peklaj, C. (2001). *Sodelovalno učenje ali Kdaj več glav več ve*. Ljubljana: DZS.
- Pirc, M. (2007). Pouk fizike s sodelovalnim učenjem. *Fizika v šoli*, 12, str. 65–71. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Logaritemska skala

Daniela Beroš, Milena Čulav Markičević, Zlatko Lobor, Ivana Martinić
V. gimnazija, Zagreb

Ena izmed dejavnosti učiteljev, članov mednarodnega projekta TIME (Teachers' Inquiry in Mathematics Education), je bila načrtovati učno uro, omogočiti spremljavo izvedbe, opraviti njeno analizo in v izmenjavi mnenj učiteljev, ki so spremljali izvedbo, iskati možnosti za izboljšave. Izbrali smo vsebino *Logaritemska skala*, kot uvod v vsebine o logaritemski funkciji, obravnavane v tretjem letniku po eksponentni funkciji.

Več o projektu TIME najdete na spletni strani projekta: <https://time-project.eu/>.

Motivacija in cilji

Po potresu z magnitudo 5,5 po Richterjevi lestvici, ki je 22. marca 2020 stresel Zagreb, smo prepoznali problem nerazumevanja logaritemske skale. Glavnemu potresnemu sunku so sledili šibkejši, ki so imeli različne jakosti. Prebivalce so enako vznemirili potresni sunki z magnitudo 4 in tisti z magnitudo 3. Izkazalo se je nerazumevanje, da potres z magnitudo manjšo za ena, pomeni potres, ki je približno 32-krat šibkejši, medtem ko je potres z magnitudo manjšo za dva približno 1000-krat šibkejši in podobno naprej. Zvezo ponazarja obrazec za magnitudo potresa M po Richterju: $M = \frac{2}{3}(\log E - 4,8)$, kjer je E količina sproščene energije pri potresu. Opazimo, da je zveza logaritemska in ne linearna, kakršnih smo vajeni.

Rihterjeva lestvica v slovenščini

Moč potresa in njegovi učinki:

Manj kot 3,5 – v glavnem se potresa ne čuti, zaznajo pa ga instrumenti;

- 3,5–3,9 – rahlo nihanje, ki ga zaznajo le občutljivi ljudje;
- 4,0–4,4 – tresenje, kot ga povzroči tovornjak;
- 4,5–4,9 – tresenje povzroča nihanje višjih predmetov;
- 5,0–5,4 – drevesa šelestijo, zazvonijo cerkveni zvonovi;
- 5,5–5,9 – pokanje sten, odpada omet;
- 6,0–6,4 – promet obstane, podirajo se dimniki;
- 6,5–6,9 – slabo grajene stavbe se podrejo;
- 7,0–7,4 – zemlja razpoka, podre se večina stavb, plinovodi, električni vodi in vodovodi so poškodovani;
- 7,5–7,9 – stoji le vsaka 10. hiša, plinovodi, električni vodi in vodovodi so skoraj popolnoma uničeni;
- Več kot 8 – popolno uničenje, tla so vzvalovana in razpokana.

Vir: https://sl.wikipedia.org/wiki/Richterjeva_potresna_lestvica

1	mikro	ljudi ga ne ožjete, bilješe ga vamo seizmografi
2	manjši	ljudi ga mogu ožjeti (one iznad 3,0 najčešće ožjete); rijetko uzrokuje šteto
3		
4	lagani	ljudi u zatvorenom prostoru ožjete trešaju i čuju zvukove pomicanja pokućstva, ljudi na otvorenom ga ne ožjete, mala je vjerojatnost nastanka štete
5	umjereni	svi ljudi ga ožjete, a uzrokuje šteto na slabijim građevinama
6	jaki	ljudi ga ožjete i na udaljenostima od nekoliko stotina kilometara od epicentra, uzrokuje manje štete na kvalitetnim građevinama
7	veliki	nanosi šteto većini građevina na udaljenosti 250 km od epicentra
8		
9	razarajući	razara većinu građevina udaljenih 1000 km od epicentra, mijenja se izgled Zemljine površine
10	epski	nije nikad zabilježen

Slika 1: Magnitude potresa po Richterjevi lestvici. (vir: <https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=70926>, ozadje slike: tear by Guilhem from the Noun Project)

Drugo aktualno področje je bila pandemija covid-19. Mediji so prikazovali raznovrstne podatke, pri katerih so bile uporabljene različne lestvice, kar lahko zavaja, če grafov ne beremo pozorno in natančno. Graf eksponentne rasti, za katerega uporabimo linearno skalo, ne bo deloval tako zastrašujoče, če za prikaz uporabimo logaritemsko lestvico. Zaradi tega smo pri dijakih želeli ozvesti, kako pomembno je, da pred oblikovanjem zaključkov namenimo pozornost enotam na koordinatnih oseh. Eksponentna in logaritemska funkcija sta v kurikulumu navedeni v tretjem letniku srednje šole, zato smo se odločili, da sistem linearnega razmišljanja v nelinearnem svetu vnesemo v te vsebine in s tem razširimo dosedanje vlogo logaritemske funkcije kot inverzne k eksponentni funkciji. Cilj učne ure je *Uporaba logaritemske lestvice*, z razširjenimi cilji: *Razumevanje različnih grafičnih prikazov istih podatkov, Izbiira ustreznega grafičnega prikaza in Reševanje problemov iz vsakdanjega življenja.*

Načrtovali smo samostojno dejavnost dijakov. S tega vidika nas je kot »učitelje raziskovalce lastne poučevalne prakse« zanimalo, ali nam bo s premišljeno izbiro gradiv uspelo dijake pripeljati do samostojnega zaključka, da so potrebne tudi nelinearne lestvice in kako pomembno je pozorno branje grafov.

Potek dejavnosti

Predviden čas dejavnosti je bil 80–90 minut. Razred smo razdelili v osem skupin s tremi člani v vsaki skupini (želeno stanje). Vsaka skupina je prejela preglednico s podatki (dve skupini

imata enake podatke) in prazen list velikosti A3. Dijaki so imeli nalogo prikazati podatke v koordinatnem sistemu. Da bi se dijaki seznanili z različnimi primeri uporabe logaritmske skale oziroma logaritma, o katerem se bodo učili v nadaljevanju, smo izbrali štiri različna področja.

V preglednici so podatki o skupnem številu okuženih v Italiji v času karantene pomladi 2020.

Datum (2020)	Skupno število okuženih
17. 2.	3
24. 2.	229
2. 3.	2038
9. 3.	9179
16. 3.	27997
23. 3.	63941
30. 3.	101723
9. 4.	143612
16. 4.	168932
23. 4.	189957

Podatke prikažite v pravokotnem koordinatnem sistemu.

V preglednici so podatki o koncentraciji vodikovih ionov med fermentacijo kefirja, dodanega v mleko.

Čas (v urah)	Koncentracija vodikovih ionov (mol/L)
0	0.000000095
4	0.000000240
8	0.000000437
12	0.000000912
16	0.000001995
20	0.000015488
24	0.000028840
28	0.000114815
32	0.000354813
36	0.001584893

Podatke prikažite v pravokotnem koordinatnem sistemu.

V preglednici so podatki o zvočnem tlaku v 20 minutah koncerta v juliju 2020.

Čas meritve (9.7.2020)	Zvočni tlak (μPa)
22:17	2907.568771
22:19	493776.021
22:21	275124.9621
22:23	6645.535704
22:25	911024.3723
22:27	643472.5065
22:29	101281.4699
22:31	1075300.866
22:33	1782501.876
22:35	23228.97228

Podatke prikažite v pravokotnem koordinatnem sistemu.

V preglednici so podatki o količini sproščene energije v potresih v Zagrebu od 22. 3. 2020 do 26. 3. 2020.

Zaporedna številka potresa	Sproščena energija (J)
1.	7943300000000
2.	1995300000000
3.	22387002541
4.	5623400000
5.	1000000000
6.	1412500000
7.	1995300000
8.	22387591200
9.	3981100000
10.	31623000

Podatke prikažite v pravokotnem koordinatnem sistemu.

Slika 2: Tabele s podatki.

Ker smo želeli uporabiti dejanske podatke, smo uporabili naslednje vire:

- covid: spletna stran Italy Coronavirus: <https://www.worldometers.info/coronavirus/country/italy/>;
- kefir: članek Observation of Lactic Acid Bacteria and Yeast Populations During Fermentation and Cold Storage in Cow's, Ewe's and Goat's Milk Kefirs: https://www.researchgate.net/publication/289069040_Observation_of_Lactic_Acid_Bacteria_and_Yeast_Populations_During_Fermentation_and_Cold_Storage_in_Cow's_Ewe's_and_Goat's_Milk_Kefirs;
- hrup: Zavod za istraživanje i razvoj sigurnosti: <https://zag.zirs.hr/>;
- potresi: spletna stran LastQuake: <https://m.emsc.eu/>.

Pričakovali smo, da bodo dijaki za izdelavo grafa potrebovali več časa, saj bodo za izbiro ustreznega prikaza usklajevali mnenja. Zato smo temu delu namenili 30 minut. Predstavniki skupine je nato ostalim predstavil delo skupine, pri tem je navedel vrsto podatkov, ki so jih imeli na voljo, navedel probleme, na katere so naleteli, in opisal, kako so te probleme rešili. Učitelj ni komentiral opravljenega dela posamezne skupine, da ne bi vplival na predstavitev nadaljnjih skupin in na način razmišljanja v nadaljnjih, drugi fazi dela. Narisani grafi, ki so jih izdelale skupine, so bili izobešeni, da so dijaki lahko opazovali različne prikaze istih podatkov.

V drugi fazi dela je vsaka skupina prejela dva grafična prikaza podatkov z istega področja kakor v prvi fazi (eden izmed prikazov je imel na ordinatni osi linearno in drugi logaritemsko skalo) ter tri vprašanja, s pomočjo katerih bi se dijaki odločili, kateri prikaz je primernejši. Dijaki so prejeli navodilo, da pripravijo kratko predstavitev, v kateri podajo odgovore na vprašanja:

Kaj lahko iz danih grafov zaključite? Katere zaključke lažje oblikujete iz levega in katere iz desnega grafa? Kateri graf vam nudi ustreznejše informacije?

Grafi so bili vstavljeni tudi v pripravljeno PowerPoint predstavitev, da bi dijaki nazorneje predstavili vsebino in argumentirali svoje zaključke. Pomembno je, da so vsi dijaki videli vse grafe, in tako aktivno sodelovali v razpravi.

Zaključna razprava je potekala plenarno. Pričakovali smo, da bodo dijaki uvideli potrebo po logaritemski lestvici in da bodo ugotovili, da sta koristna oba grafa, uporaba posameznega je odvisna od konteksta. Pomembno je bilo, da je učitelj dijake pozorno poslušal, slišal njihove komentarje in jim sledil. Učitelj je ponovil najboljše zaključke dijakov, po potrebi jih je dopolnil. Dejavnost smo zaključili s formulami za »stopnjo kislosti«, »raven hrupa« in »magnitudo potresa« (Slika 3), prikazanih na predstavitvi ob izjavi *Razmišljamo linearno, vendar naša čutila delujejo na logaritemski skali*.

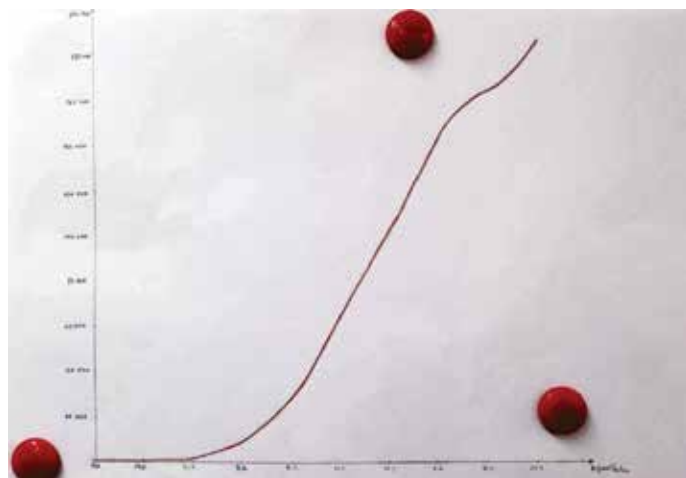
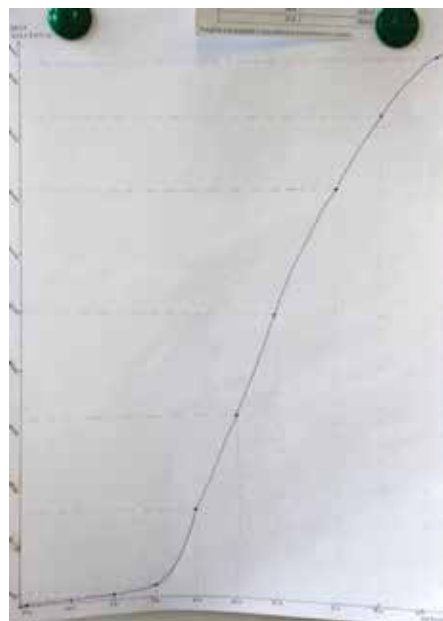
$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log[H^+] \\ \text{dB} &= 20 \log \frac{P}{P_0} \\ M &= \frac{2}{3} (\log E - 4.8) \end{aligned}$$

Slika 3: Primeri logaritemskih zvez.

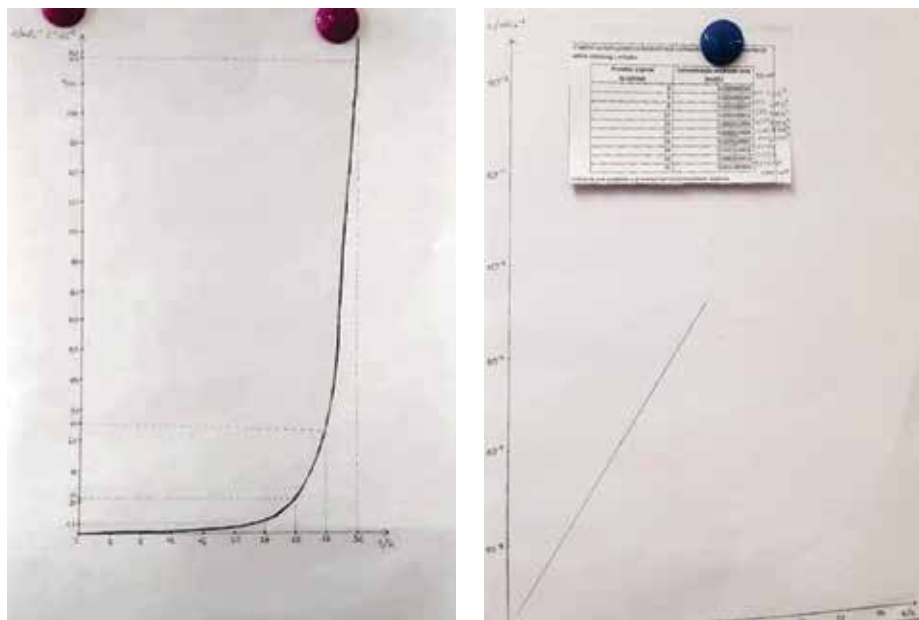
Dijaki so bili tako motivirani, da se naučijo vse o oznaki *log*, ki se pojavlja v obrazcih. Vedeli so, da so koristni logaritmi, kar je spodbujalo njihovo radovednost. Skupine, ki so samostojno odkrile logaritemske skale, so bile ponosne na svoj uspeh.

Spremljanje učne ure

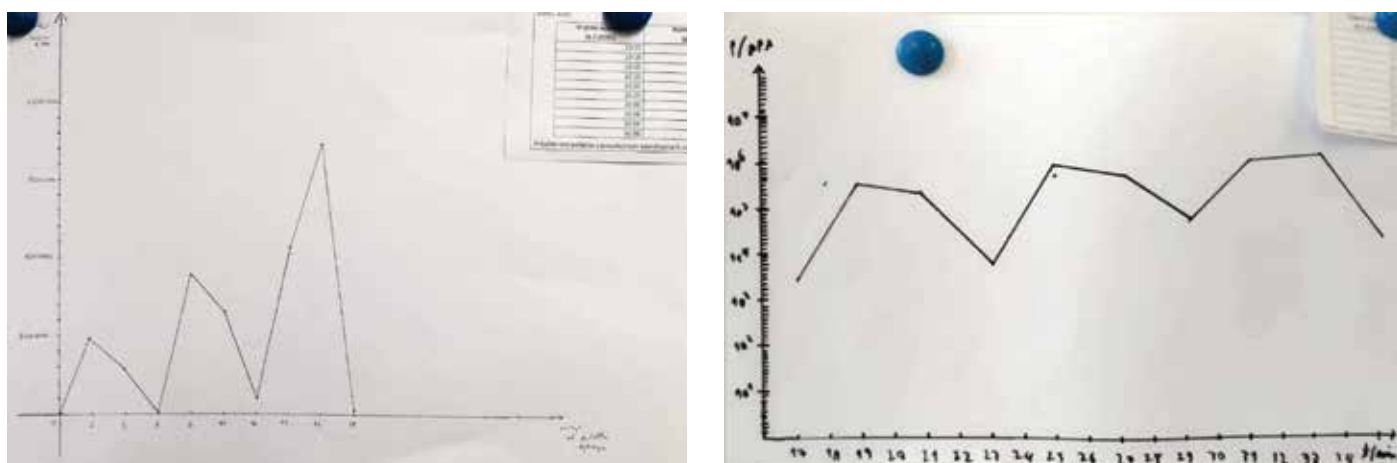
V začetku prve faze so dijaki v skupinah risali koordinatne sisteme po običajni poti – papir so postavili v vodoravno lego – izhodišče so postavili v središče lista, osi so poimenovali *x* in *y*, na oseh so izbrali enaki enoti, merilo je bilo linearno. Ob pogledu na podatke so naleteli na problem. Ugotovili so, da so vse vrednosti pozitivne in potrebujejo le prvi kvadrant. Izhodišče so premaknili v levi spodnji kot lista. Nekatere skupine so list obrnile v navpično lego. Problem, ki so mu namenili največ razmisleka, je razporeditev vseh podatkov vzdolž *y*-osi (odvisno, ali so podatki zelo majhni, tj. kefir, ali zelo veliki, tj. moč potresa), nekateri so oblikovali oznake osi s potencami števila 10.



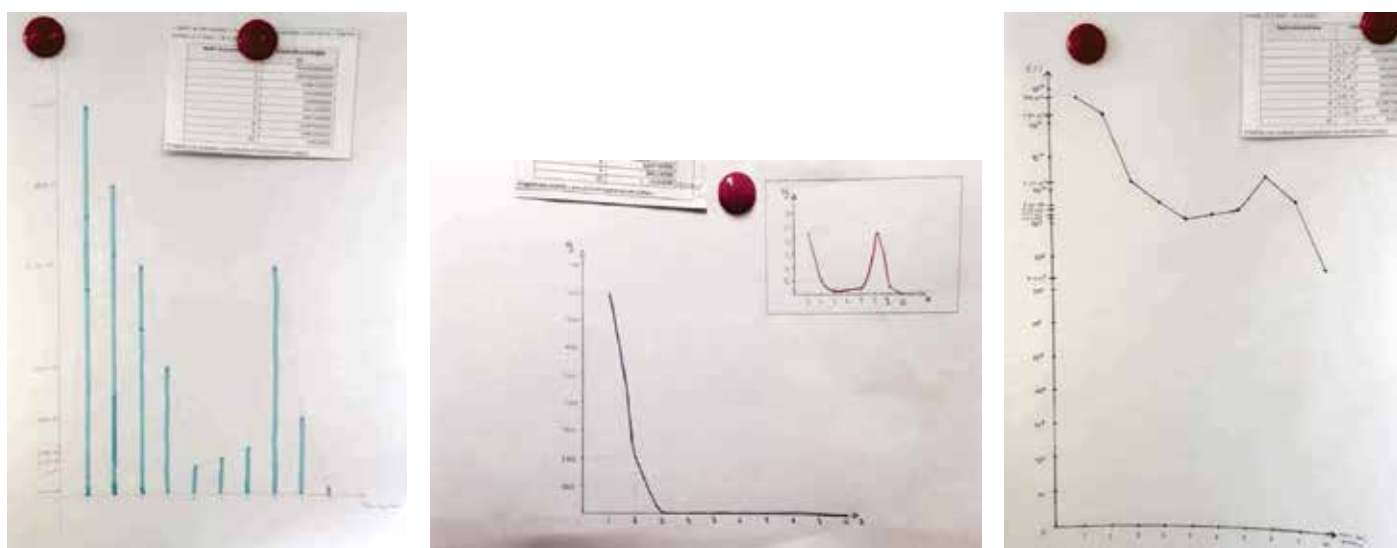
Slika 4: Primera izdelkov dijakov – covid.



Slika 5: Primera izdelkov dijakov – kefir. Ena izmed skupin je izpostavila, da je vrednost 150 cm nad listom.



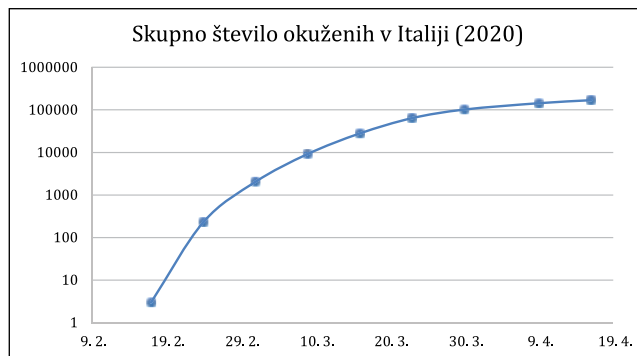
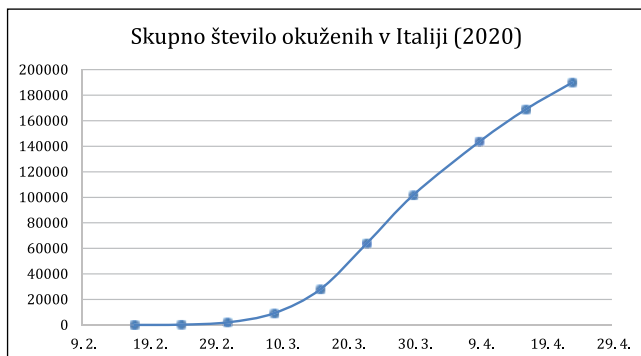
Slika 6: Primera izdelkov dijakov – raven hrupa.



Slika 7: Primeri izdelkov dijakov – potres. Nekatere skupine so ugotovile in se odločile, da graf potresa ni zvezen temveč diskreten. Ena izmed skupin je del grafa povečala.



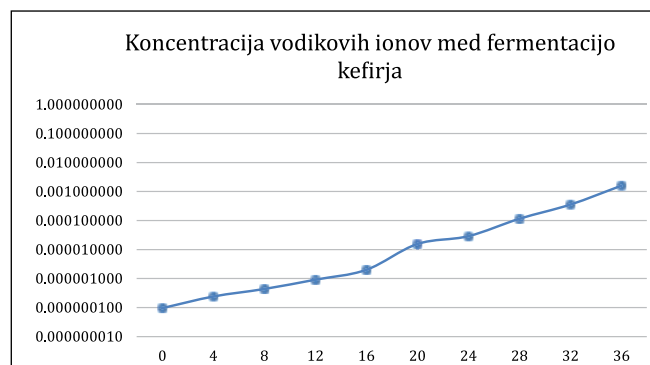
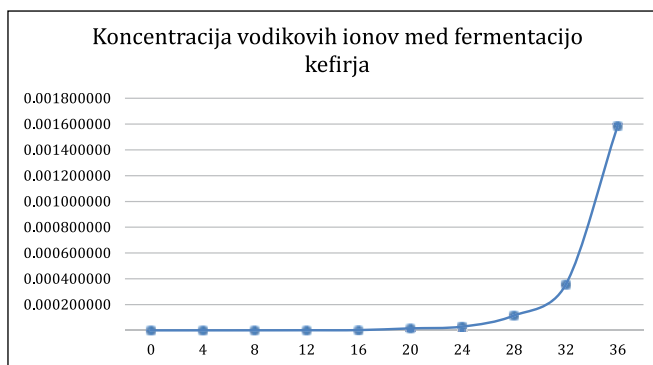
COVID-19 V ITALIJI



V skupini odgovorite na naslednja vprašanja.

1. Ocenite število okuženih na dan 30. 4. 2020.
2. Na katerem časovnem intervalu je sprememba števila bolnikov največja?
3. Kdaj se rast števila bolnikov upočasni?

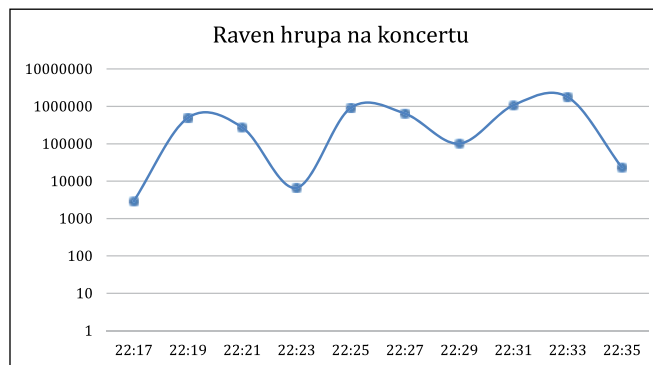
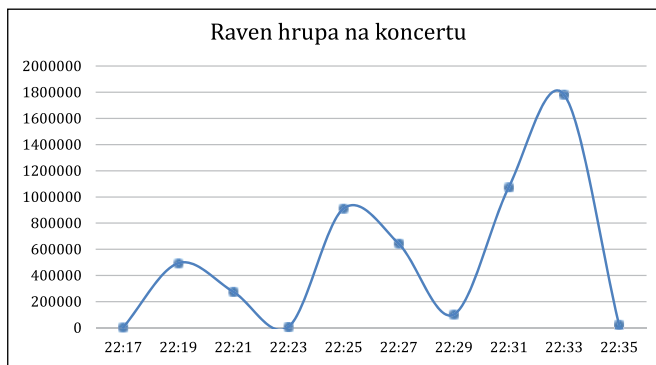
FERMENTACIJA KEFIRJA



V skupini odgovorite na naslednja vprašanja.

1. Ocenite koncentracijo vodikovih ionov v 40. uri.
2. Na katerem časovnem intervalu je sprememba koncentracije vodikovih ionov največja?
3. Koncentracije vodikovih ionov nad 0,003 preprečujejo fermentacijo, kefirne grudice se lahko razgradijo in se pojavijo druge nezaželene bakterije. Koliko časa preteče od začetka fermentacije kefirja do možne zastrupitve?

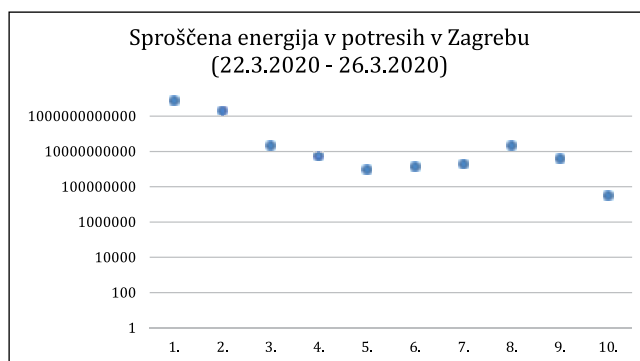
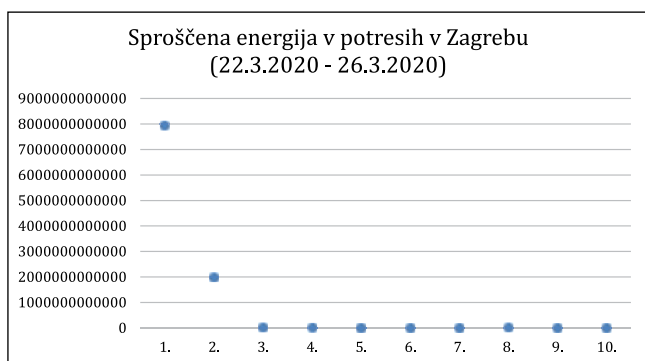
HRUP NA KONCERTU



V skupini odgovorite na naslednja vprašanja.

1. Raven normalnega pogovora je približno 6500 µPa. Ali lahko med koncertom v določenih časovnih intervalih poteka normalen pogovor?
2. Na katerem časovnem intervalu je sprememba ravni hrupa največja?
3. Dolgotrajna izpostavljenost hrupu nad 200000 µPa lahko povzroči poškodbe sluha. Kako dolgo so bili obiskovalci izpostavljeni taki ravni hrupa?

POTRESI V ZAGREBU



V skupini odgovorite na naslednja vprašanja.

1. V katerem potresnem sunku se je sprostil več energije: v 5. ali 8.?
2. Katera zaporedna potresna sunka se najbolj razlikujeta v količini sproščene energije?
3. Večina ljudi bo zaznala potres, pri katerem je količina sproščene energije večja od 63095730000 J. Katere od potresnih sunkov je zaznala večina prebivalcev?

V drugi fazi so dijaki razpravljali o vprašanjih na listih. Pomembni zaključki po predstavitvi odgovorov skupin so bili:

- Oba grafa sta uporabna, odvisno, katere informacije želimo.
- Linearna skala nam daje boljšo sliko podatkov, vendar je težko vnesti vse podatke.
- Logaritemska skala reši problem vnašanja podatkov različnih velikosti v isti graf, vendar lahko zavaja.
- Na linearni skali vidimo absolutno spremembo, na logaritemski vidimo hitrost spreminjanja podatkov.
- Zelo moramo paziti na zapis ob oseh.

Dejavnost je bila izvedena v treh različnih oddelkih. Po vsaki izvedbi smo zbrali povratne informacije dijakov. Navajamo nekatere:

- *Naučil sem se, da moram več pozornosti nameniti osem v grafu. Prav tako sem se naučil, da je to pravzaprav uporabno v življenju.*
- *Presenetilo me je, kako se razlikujejo grafi, ki imajo različne razporeditve vrednosti na ordinatni si.*
- *Presenetilo me je, kako lahko manipuliramo s podatki, če jih grafično prikazemo.*

- *Naučil sem se razlike med logaritemsko in linearno skalo, o »naravnosti« prve in o koristnosti druge.*
- *Naučil sem se, da lahko podatke prikazemo na različne načine z uporabo več skal in grafov in da ima vsaka metoda svoje prednosti v branju potrebnih informacij.*
- *Naučil sem se bolje risati in brati grafe, paziti na zapise ob oseh, ne gledati le števil, prvič sem videl grafe z logaritemsko skalo in jih primerjal z normalnimi. Zabaval sem se ...*

Ob branju komentarjev dijakov smo vedeli, da smo dosegli zastavljeni cilj dejavnosti.

Poudarimo, da dijaki potrebujejo najmanj 30 minut za prvo fazo, 10 do 15 minut zadostuje za drugo fazo. Zagotovo je treba omogočiti dovolj časa za predstavitve, razpravo in formulacije, ki jih oblikuje učitelj. Učitelj morala poskrbeti, da dijaki predstavijo le, kar se od njih zahteva in ne celotnega dela. Pomembno je spodbujati dijake, da oblikujejo individualno povratno informacijo, tako razmišljajo in ubesedijo, kar so se naučili. Izražanje z besedami poveča pomnjenje. Za ustrezno grafično prikazovanje dijakom potrebujejo ustrezna pisala in veliko ravnilo.

Razprava in zaključki

V timu smo prvič skupaj zasnovali dejavnost, odločili smo se za vzvraten pristop – nismo začeli z vsebino, ki jo moramo podati dijakom, temveč smo izhajali iz poslanstva šole. Z upoštevanjem splošnih ciljev, ki jih želimo vpletati v pouku matematike in z izbiro tem, ki so dijakom in/ali nam izziv, smo izbrali vsebino. Izvedli smo mnogo srečanj članov tima, veliko smo raziskovali izbrano področje in kar nekajkrat spremenili koncept dejavnosti.

Upali smo, da smo gradivo pripravili dovolj dobro in da bo delo učitelja v času izvedbe delavnice minimalno. Pred prvo izvedbo nismo vedeli, kaj pričakovati, kar je bilo vznemirljivo. Zdi se, da smo dobro izbrali cilj dejavnosti.

Dejavnost je bila zelo uspešna, dijaki so uspeli odkriti logaritemsko skalo, opaziti pomen pozornega branja grafov in razumeti uporabnost logaritma – matematika je s tem postala uporabna. V zaključni fazi je učitelj moral le reči »Da, prav imate,« saj so dijaki povedali vse, kar je bilo pričakovano.

Vprašanje, ali je dejavnost dijakom pomagala, da bolje razumejo pojem logaritma, ostaja odprto. Raziskujemo naprej.

Delo v projektu je privedlo do več razprav o matematiki, o njenih in naših ciljih, ciljih dijakov in ciljih učiteljev. S skupnim delom smo dosegli, da se uspeh množi, neuspeh pa deli.

Viri

<https://time-project.eu/> (marec 2022)

<https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=70926> (marec 2022)

<https://www.worldometers.info/coronavirus/country/italy/> (marec 2022)

https://www.researchgate.net/publication/289069040_Observation_of_Lactic_Acid_Bacteria_and_Yeast_Populations_During_Fermentation_and_Cold_Storage_in_Cow's_Ewe's_and_Goat's_Milk_Kefirs (marec 2022)

Zavod za istraživanje i razvoj sigurnosti: <https://zag.zirs.hr/> (marec 2022)

LastQuake: <https://m.emsc.eu/> (marec 2022)

Učne težave pri matematiki

Jasmina Ducman
Osnovna šola dr. Ljudevita Pivka

Izvleček

Učne težave pri matematiki so lahko posledica učenčevih splošnih učnih težav ali specifičnih učnih težav. Za splošne učne težave je značilno, da so prisotne tudi pri ostalih šolskih predmetih, medtem ko so specifične učne težave povezane s skritimi primanjkljaji, saj se tak učenec ne razlikuje od vrstnikov, dokler ni v situaciji, ko mora brati, pisati ali pri matematiki – računati. V članku sta opisani obe podskupini specifičnih učnih težav pri matematiki – specifične aritmetične učne težave ter diskalkulija, predstavljene pa so tudi nekatere dejavnosti in didaktični pripomočki, ki so nastali na podlagi prepletanja dodatne strokovne pomoči in matematike v osnovni šoli.

Ključne besede: matematika, splošne učne težave, specifične učne težave, didaktični pripomočki, dodatna strokovna pomoč

Mathematical Learning Difficulties

Abstract

Mathematical learning difficulties may be a result of general or specific learning difficulties. Whereas students with general learning difficulties have problems across all areas of the school curriculum, specific learning difficulties are not manifested until the student is forced to read, write, or do calculations. This article describes two subgroups of specific learning difficulties in mathematics, namely, specific arithmetic learning difficulties and dyscalculia. It then goes on to present several activities and didactic tools that have been developed through the interplay between SEN support and mathematics in primary school.

Keywords: mathematics, general learning difficulties, specific learning disabilities, didactic tools, special education services.

Učenci s specifičnimi učnimi težavami pri matematiki

Učenci s specifičnimi aritmetičnimi učnimi težavami dosegajo pomembno nižje rezultate kot vrstniki in imajo težave pri obvladovanju osnovnih aritmetičnih sposobnosti ter spretnosti seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja. Glede na kognitivne in nevrološke primanjkljaje jih delimo na tri podskupine. Lahko so povezane s slabšim semantičnim spominom, kar se pri učencih odraža kot težave pri priklicu aritmetičnih dejstev iz dolgotrajnega spomina (npr. težave s hitrim priklicem rezultata poštevanke, seštevanja in odštevanja z enomestnimi števili). Pojavljajo se lahko v obliki aritmetičnih proceduralnih težav, kar opazimo, ko učenci uporabljajo manj razvite in nepopolne aritmetične postopke (npr. težave

pri sposojanju in prenašanju desetic pri pisnem seštevanju, postopek pisnega deljenja). Povezujejo pa se lahko tudi z vizualno-prostorskimi težavami, kar se kaže kot npr. šibka orientacija na številski črti, težave pri podpisovanju v pisnih računih, težave pri postavljanju decimalne vejice, obračanje števk v dvomestnih številih, težave z določanjem predhodnika in naslednika ipd. (Bregar Golobič, 2008).

Pri diskalkuliji so, za razliko od specifičnih aritmetičnih učnih težav, težave prisotne na širšem področju, zato predstavlja kompleksnejši problem. Učenci imajo kljub normalni inteligentnosti velike težave pri učenju matematike, ki se kažejo na področju matematičnega konceptualnega (pojmovnega), deklarativnega (obvladovanje aritmetičnih dejstev) in proceduralnega znanja (obvladovanje aritmetičnih postopkov). Ti učenci šibkeje obvladajo

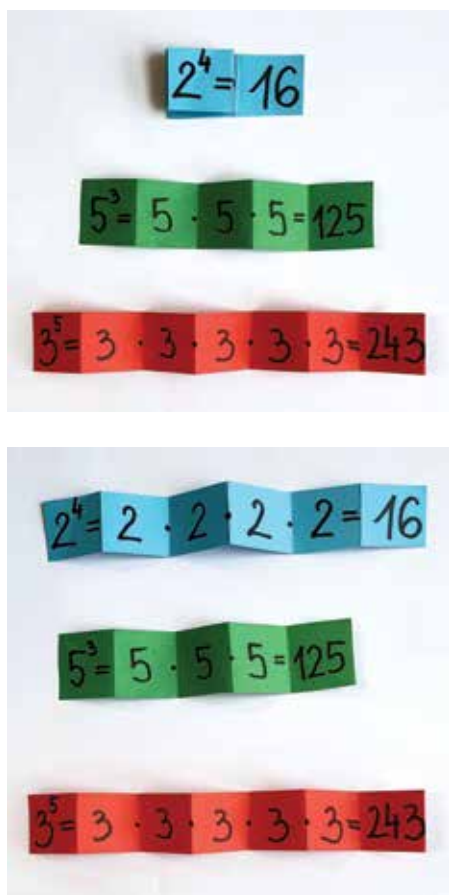
že predpogoje za učenje aritmetike (štetje, mestne vrednosti, velikostni odnosi ipd.) in uporabljajo razvojno manj razvite strategije reševanja aritmetičnih problemov, zato probleme rešujejo počasi in manj točno (Bregar Golobič, 2008).

Pri delu z učenci z učnimi težavami je bistveno, da jim omogočimo več vaj, več časa, drugačen metodični postopek, veliko ponazoril ter individualno pomoč, da lahko utrdijo tisto, kar so se naučili v razredu. V nadaljevanju članka so predstavljene različne dejavnosti in didaktični pripomočki pri delu z njimi.

Potenca na traku

Veliko učencev z učnimi težavami dela pri računanju vrednosti potence pogosto napako, saj osnovo potence pomnoži z njeno

stopnjo. S tem didaktičnim pripomočkom, ki je interaktivne narave, jim postane postopek računanja nazornejši. Trak papirja preložimo tako, kot pri zlaganju v harmoniko. Poskrbimo, da ga preložimo tolikokrat, da imamo dovolj prostora, da potenco zapišemo kot produkt enakih faktorjev in njeno vrednost. Didaktični pripomoček omogoča ponazoritev računanja potence v krajši ali razširjeni obliki. Za učence, ki imajo težave tudi z branjem zapisa potence, lahko na hrbtno stran traku zapišemo tudi besedno oporo za branje potenc.

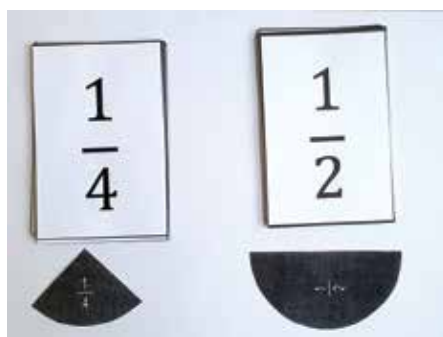


Slika 1: Potenca na traku.

Dvoboj ulomkov

Učenci z učnimi težavami šibkeje razumevajo pomen imenovalca in števca v ulomku, zato potrebujejo na tem področju več utrjevanja. S pomočjo predstavljene igre pa ne utrjujejo le znanja o ulomkih, ampak razvijajo tudi socialne veščine. Gre za hitro, dinamično ter med učenci priljubljeno igro, ki se odvija po zgledu igre s kartami, imenovane Vojna. Učitelj pripravi kartice z različnimi ulomki. Igra poteka

v paru. Učenca premešata kartice in jih obrnjene navzdol enakomerno razdelita med seboj. Nato oba hkrati obrneta vrhno kartico s svojega kupa. Tisti igralec, ki ima na svoji kartici ulomek z večjo vrednostjo, pobere obe kartici in ju doda na dno svojega kupa kartic. V primeru izenačenja, kadar sta ulomka obeh igralcev enaka, sledi dvoboj ulomkov, kar pomeni, da morata oba igralca hkrati s svojega kupa izvleči tri kartice in jih obrniti navzdol. Učenca nato obrneta le tretjo kartico, ki je odločilna pri tem, kdo pobere vse kartice. Igra se zaključi, ko poteče omejeni čas ali ko enemu izmed igralcev zmanjka kartic. Več kart ko pripravimo, daljša bo igra in več bo utrjevanja in vaje. Kadar je učenec negotov pri primerjanju dveh ulomkov in pri tem nima ustrezne strategije, mu lahko ponudimo oporo v obliki didaktičnega materiala, s katerim dane ulomke konkretno ponazorimo in tako lažje primerjamo.

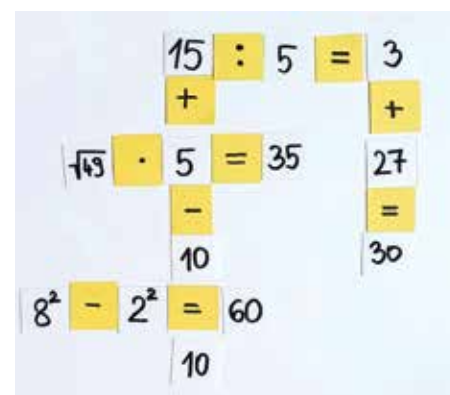


Slika 2: Dvoboj ulomkov.

Matematična križanka

Matematična križanka omogoča učencem vajo v utrjevanju osnovnih aritmetičnih operacij, ki predstavljajo temelj znanja pri računanju. Od učencev zahteva razmišljanje in spretnost sestavljanja številskih izrazov. Pripravimo dva enaka kompleta matematičnih križank, ki ju razdelimo dvema učencema. Vsak komplet je sestavljen iz nabora ploščic, na katerih so napisana števila in računski znaki, pri čemer so ploščice s števili in ploščice z računskimi znaki različnih barv. V vsak komplet lahko dodamo tudi nekaj praznih ploščic, ki jih med izvajanjem dejavnosti učenec lahko izkoristi kot posebno in dodatno ugodnost, saj mu pri sestavljanju izrazov zapolnijo manjkajoča števila ali računske znake. Zmagovalec dejavnosti postane tisti učenec, ki v krajšem času porabi vse ploščice iz svojega kompleta tako, da po

vzoru križanke sestavi pravilne številске izraze.



Slika 3: Matematična križanka.

Zaokroževanje števil

Igra poteka v paru, zanj pa potrebujemo igralno predlogo v obliki preglednice s števili, igralne kocke ter več znakov (gumb, žetonov ipd.) dveh različnih barv. V našem primeru so učenci zaokroževali trimestna števila na najbližjo desetico, zato je na igralni predlogi nabor števil, ki predstavlja možne izide pri zaokroževanju trimestnih števil na desetice, dodatno pa je nabor omejen le na tista števila, ki jih je mogoče sestaviti s tremi igralnimi kockami. Cilj igre je biti prvi igralec, ki sestavi štiri v vrsto, pri čemer so dovoljene vse možne smeri – vodoravno, navpično in poševno. Igro prične igralec, ki vrže višje število pik na kocki, nato pa vrže vse tri igralne kocke hkrati. Iz praktičnega razloga lahko učencem ponudimo posodico,

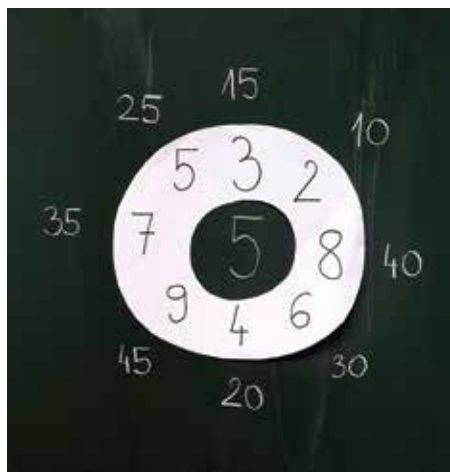


Slika 4: Zaokroževanje števil.

namenjeno metu kock, da se te ne razletijo in kotalijo okrog. Igralec nato iz vrženih pik sestavi število, pri čemer lahko kocke postavi v poljubni vrstni red npr. če vrže 3, 1 in 5, lahko sestavi število 315, 351, 135, 153, 531 in 513. Učenec lahko taktizira in izbere katerokoli izmed teh števil ter ga zaokroži na najbližjo desetico, pri čemer upošteva pravila zaokroževanja. Svoj znak postavi na zaokroženo število na igralni predlogi, razen v primeru, ko na tem mestu že stoji nasprotnikov znak.

Matematični krof

Poštevanke povzročajo težave mnogim učencem, zato je tudi v višjih razredih njeno ponavljanje in utrjevanje smiselno. Igra omogoča kratko in zabavno ponovitev poštevanke, zato jo je mogoče enostavno in kadarkoli vključiti v pouk matematike. Iz papirja izdelamo krožni kolobar in nanj zapišemo števila od 1 do 10 v naključnem vrstnem redu. Nato ga pritrdimo na tablo in v sredino zapišemo število za utrjevanje poljubne poštevanke. Učenec ima nato minuto časa, da reši vse račune. Rezultate piše na tablo ob rob kolobarja. Z zamenjavo števil v sredini učencem omogočimo nove primere za vajo. Igra je lahko namenjena samo enemu igralcu (ki tekmuje sam s sabo glede na omejeni čas) ali pa več igralcem, ki tekmujejo med seboj (Solis, 2018).



Slika 5: Matematični krof.

Naj o zmagovalcu odločijo karte

Dejavnost v obliki kviza oz. tekmovanja je primerna za ponavljanje in utrjevanje

učne snovi. Učence razdelimo v skupine, pri čemer je najbolje, da oblikujemo približno pet skupin. Pripravimo pet stolov, vsak stol pa predstavlja določeno skupino. Učencem lahko tudi omogočimo, da za svojo skupino izberejo ime. Vsaka skupina pošlje na stol po enega predstavnika. Učitelj nato vsem učencem postavi vprašanje. Na vprašanje lahko odgovarja le tisti učenec na stolu, ki prvi dvigne roko. Če odgovori pravilno, iz posode izžreba kartico, na kateri so navodila glede točkovanja, nato pa jo vrne nazaj v posodo. Kadar učenec odgovori napačno, dobijo možnost odgovarjanja na vprašanje še preostali predstavniki skupin. Velik preobrat igre je velikokrat v tem, da ni nujno, da skupina v primeru pravilnega odgovora pridobi točke, saj je v precejšnji meri odvisna od sreče in navodil na karticah npr. izberite skupino, ki izgubi vse točke, vsem ostalim skupinam se podvojijo točke ipd. (Ellison, 2019).



Slika 6: Naj o zmagovalcu odločijo karte.

Poišči me

Dejavnost je preprosta in ponuja veliko možnosti za medsebojno sodelovanje, gibanje in razmišljanje. Primerna je za ponavljanje in utrjevanje učne snovi. Učence razdelimo v približno pet skupin. Za vsako skupino potrebujemo set enakih kartic, na katere zapišemo vprašanja in odgovore, izraze in rezultate ter definicije

in opise definicij iz izbrane učne snovi. Pri tem upoštevamo, da naredimo k vsaki kartici ustrezen par. Vsaka skupina izbere svojega predstavnika. Ta dobi set kartic, jih dobro premeša ter razporedi na dovolj velikem prostoru npr. mizi ali tleh. Naloga članov vsake skupine je, da medsebojno sodelujejo in urejajo kartice tako, da za vsako vprašanje poiščejo odgovor, za vsak izraz rezultat ter za vsako definicijo njeno razlago. Ko skupina konča z delom, je naloga predstavnika, da pregleda, ali so kartice res pravilno urejene. Skupina, ki prva konča z delom in pri tem nima nobene napačne odgovora, zmaga (Jackson, 2018).

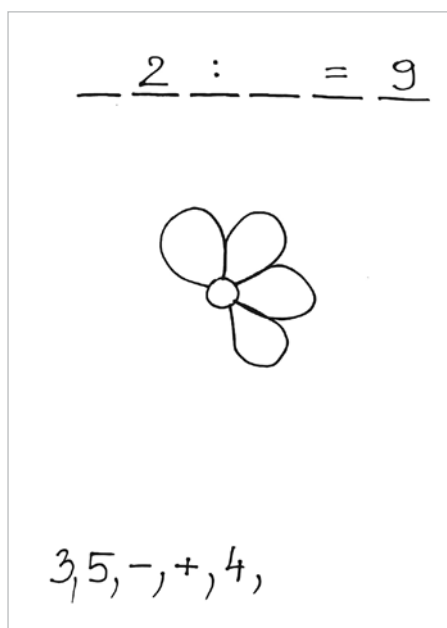
Različica zgoraj opisane dejavnosti, ki ponuja še več medsebojnega sodelovanja in gibanja, je zasnovana tako, da se razred razdeli v dve skupini. Vsak učenec dobi svojo kartico. Dejavnost izvedemo v dovolj velikem prostoru, ki omogoča, da se lahko obe skupini gibljeta tako, da se posamezniki lahko srečujejo v parih. Lahko jo izvedemo tudi zunaj na prostem. Cilj vsake skupine je, da se njeni člani premikajo, iščejo, srečujejo in pogovarjajo z ostalimi učenci tako, da čim prej najdejo učenca s kartico, ki ustreza njegovi. Če imamo liho število učencev, poskrbimo, da je ena kartica podvojena, na kar tisto skupino tudi opozorimo, saj se bo zgodilo, da bodo namesto enega para imeli tri kartice, od česar bosta dve enaki. Ko skupine končajo, preverimo, ali so njihovi pari pravilni. Zmaga ekipa, ki ima vse prav (Jackson, 2018).

Pravilno, napačno, popravi

Naredimo približno 20 trditvev o vsebini iz obravnavane učne snovi, od tega polovico pravilnih in polovico napačnih. Število trditvev lahko učitelj po svoji presoji prilagaja zmoglostim svojih učencev. Trditve razdelimo posameznemu učencu, paru ali skupini, odvisno od željene oblike dela. Njihova naloga je, da dane trditve razdelijo na pravilne in napačne. Učitelj nato preveri, ali so učenci trditve ustrezno ločili, nato pa učence spodbuja k temu, da mu razložijo, zakaj je neka trditev napačna in jo popravijo. Učenci lahko tudi sami napišejo nekaj pravilnih in napačnih trditvev, nato pa si jih izmenjajo z drugim učencem ter razvrstijo in popravijo (Marley, 2019).

Matematične vislice

Gre za matematično različico besedne igre Vislice. Namesto risanja vislic lahko uporabimo risanje vzgojno primernejše ideje npr. predmeta, ki se ga nariše v nekaj korakih. Pravila igre so enaka kot pri besedni različici, vendar je razlika v tem, da se v tej različici namesto črk (oz. besed) uporabljajo števila in računski znaki (oz. številski izrazi). Račune lahko izberemo glede na predznanje in zmožnosti učencev. Učenci izmenično ugibajo številke in matematične znake. Zmagovalec je tisti, ki pravilno ugotovi izraz oz. tisti, ki ugotovi zadnjo manjkajočo številko ali matematični znak (Brown, 2015).

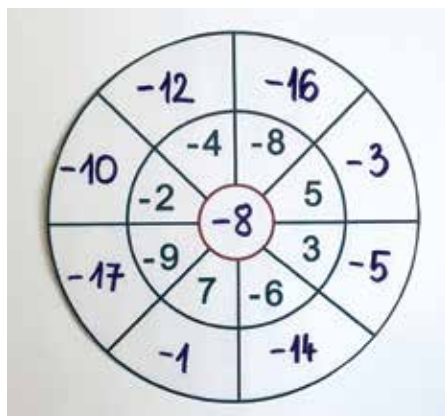


Slika 7: Matematične vislice.

Tarča

Učencem je ta dejavnost je všeč, vajo pa lahko spremenimo tudi v tekmovanje. V želji, da se izognemo delovnim listom, lahko učencem ponudimo predloge za utrjevanje seštevanja in odštevanja pozitivnih in negativnih celih števil. Po želji jih lahko plastificiramo in jih s tem naredimo priročne za utrjevanje z različnimi števili. Učenci potrebujejo v tem primeru še piši-briši flomaster in krpico za brisanje. Učitelj pove število, ki si ga učenci zapišejo v sredino kroga, kar predstavlja znak za začetek tekmovanja. Ob koncu reševanja ali preteku določenega časa, skupaj z njimi preveri pravilne rezultate. Učenec, ki ima

največ pravih rešitev, si prisluži točko, kar lahko učitelj vodi in beleži v posebni preglednici (Bernal, 2016).



Slika 8: Tarča.

Množenje enočlenikov

Igra omogoča utrjevanje pravila za množenje enočlenika z enočlenikom. Učenci spoznajo, da morajo pri tem množiti koeficiente med seboj in spremenljivke med seboj ter da je rezultat tudi enočlenik. Potrebujemo igralno ploščo, igralno kocko, figurice ter kartice z različnimi enočleniki, ki jih postavimo na sredino igralne plošče. Vsi igralci postavijo svoje figurice na začetno polje. Z igro začne učenec, ki vrže večje število pik na kocki. Vsakič, ko se kateri igralec prestavi na določeno polje, je njegova naloga, da s kupa izbere vrhno kartico z enočlenikom, nato pa pomnoži oba enočlenika, enočlenik na kartici z enočlenikom na polju, kjer ima figurico. Igralec lahko igro nadaljuje še z enim metom igralne kocke, kadar enočlenika pravilno zmnoži. V primeru, da izračuna napačno, pa je na vrsti naslednji igralec. Zmagovalec igre je igralec, ki prvi ponovno prispe na začetno polje.



Slika 9: Množenje enočlenikov.

Paličice

Gre za dejavnost, pri kateri lahko utrjujemo različne učne vsebine, težavnost pa zlahka prilagajamo zmognostim učencev. Za izvedbo dejavnosti potrebujemo paličice. Na prvo paličico zapišemo *start* na levi strani in prvi primer (številski izraz, matematični pojem ipd.). Na levo stran druge paličice zapišemo odgovor oz. rezultat prvega izraza ter novi izraz na desno. Na tak način nadaljujemo tako dolgo, dokler ne pripravimo toliko paličic, kot jih želimo. Na zadnjo paličico zapišemo konec. Paličice pomešamo, damo učencu, nato pa jih uredi v pravi vrstni red. Omenjena dejavnost je lahko samostojna ali pa predstavlja le eno izmed delovnih postaj (Collins, 2014).



Slika 10: Paličice.

Pripomočke za opisane dejavnosti lahko pri pouku izdelujejo učenci tudi sami, tako kot je predstavljeno v priročniku Ugotavljanje matematičnega znanja (https://www.zrss.si/pdf/ugotavljanje_matematicnega_znanja.pdf) v poglavju Didaktične igre.

Zaključek

Nekatere predstavljene dejavnosti so se izvedle s celotnim oddelkom, v katerega je vključen učenec z učnimi težavami, vendar je bilo pred tem smiselno določene učne vsebine bolj usmerjeno ponoviti in utrditi pri individualnem delu. Tekmovanje in omejevanje časa je za te učence lahko precej neprijetno, če pa jih na to ciljno in vsebinsko pripravimo, pa lahko s tem ustvarimo priložnost, da učenca pozitivno sprejemajo tudi učenčevi vrstniki v oddelku. Pri delu z učenci z učnimi težavami je pomembno, da smo zmožni opaziti njihov najmanjši napredek, kar predstavlja majhne, vendar zelo pomembne korake pri učenju. Dodatna strokovna pomoč omogoča, da učencu v precejšnji meri prilagodimo učne metode, ki zanj predstavljajo optimalen razvoj in napredek. Učenci z učnimi težavami morajo za razliko od svojih vrstnikov v učenje vlagati pomembno več truda in časa, naloga šolskih strokovnih delavcev pa je, da jim poleg pomoči na učnem področju nudimo tudi ustrezno podporo pri razvijanju njihove pozitivne samopodobe.

Literatura

- Bernal, J. (2016). *Integer fluency circles*. Dostopno na: <http://mymathimagination.blogspot.com/2016/03/integer-fluency-circles-im-from-texas.html?spref=pi> (5. 4. 2022)
- Bregar Golobič, K. (ur.) (2008). *Navodila za prilagojeno izvajanje programa osnovne šole z dodatno strokovno pomočjo za otroke s primanjkljaji na posameznih področjih učenja*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Brown, T. (2015). *5 favorite math games*. Dostopno na: <http://fungames4learning.blogspot.com/2015/05/5-favorite-math-games.html> (5. 4. 2022)
- Collins, J. (2014). *Mental math game*. Dostopno na: <http://lessonplandiva.com/2014/03/mental-math-game-2.html> (5. 4. 2022)
- Ellison, K. (2019). *Review game: Let the cards decide*. Dostopno na: <https://www.mrseteachesmath.com/2019/07/review-game-let-cards-decide.html> (3. 4. 2022)
- Jackson, M. (2018). *Card-Match up race – version 1*. Dostopno na: http://hopefullyhome.com/6-review-games-your-students-will-love/?utm_medium=social&utm_source=pinterest&utm_campaign=tailwind_tribes&utm_content=tribes&utm_term=482958240_17077840_262453 (3. 4. 2022)
- Jackson, M. (2018). *Card-Match up race – version 2*. Dostopno na: http://hopefullyhome.com/6-review-games-your-students-will-love/?utm_medium=social&utm_source=pinterest&utm_campaign=tailwind_tribes&utm_content=tribes&utm_term=482958240_17077840_262453 (3. 4. 2022)
- Marley, S. (2019). *True, false, fix: A social studies review game*. Dostopno na: <https://stephanieshistorystore.com/2017/03/27/true-false-fix-a-social-studies-review-game/> (3. 4. 2022)
- Solis, K. (2018). *Donut math: a fun way to practise multiplication facts*. Dostopno na: <https://www.allabout3rdgrade.com/2016/11/donut-math-fun-way-to-practice.html> (2. 4. 2022)

Matematični maraton

Nuša Cevzar

Gimnazija in ekonomska srednja šola Trbovlje

Na Gimnaziji in ekonomski srednji šoli Trbovlje (GESŠ) smo v soboto, 9. oktobra 2021, organizirali že 14. matematični maraton. Da, čisto zares maraton, saj gre za preizkušnjo matematične vzdržljivosti, ki pa ni tekmovalne narave. Namenjen je vsem dijakom GESŠ, ne le nadarjenim matematikom. Včasih pa so nanj povabljeni tudi osnovnošolci.

Idejna pobudnica matematičnega maratona je profesorica matematike Majda Škrinar Majdič, ki je s pomočjo svojih matematičnih kolegov prvi maraton organizirala leta 2005. Namen je bil počastiti takratno 60-letnico Gimnazije Trbovlje in popularizirati matematiko med dijaki. Vendar ni ostalo le pri enem maratonu, saj ga od leta 2005 naprej aktiv matematikov GESŠ organizira skoraj vsako leto. Postal je tradicionalen in je prepoznaven znak naše gimnazije. Lansko šolsko leto (2020/21) je zaradi slabih epidemioloških razmer potekal le z nekaj dijaki na daljavo preko videokonference. V letošnjem šolskem letu pa smo ga ob upoštevanju vseh epidemioloških ukrepov lahko vseeno izvedli v šoli, a je bil zaradi ukrepov izpeljan v precej okrnjeni obliki.

Kako se je vse skupaj začelo?

Glavno vodilo matematičnega maratona je bilo 12-urno ukvarjanje z matematiko na eno od oktobrskih sobot. Ker je bila udeležba dijakov na maratonih velika, učiteljev matematike pa malo, so za pomoč pri izvedbi kmalu pridobili bivše dijakke – študente matematike in naravoslovja. Maratonci so 12 ur reševali matematične naloge, ki so si jih lahko sami izbrali in prinesli s seboj, jih poiskali v matematičnih učbenikih ali pa reševali naloge, ki so jim jih vnaprej pripravili profesorji. Zapuščanje šole v času maratona ni bilo dovoljeno, če je kdo zapustil šolo pred osmo uro zvečer, pač ni končal maratona in ni mogel sodelovati pri žrebanju nagrad, za katere so poskrbeli donatorji.

Kako je danes?

Sama sem letošnje šolsko leto pri organizaciji maratona sodelovala prvič. Profesorici Majda Škrinar Majdič in Irena Gregorčič Kovačič sta imeli že do septembra natančno izdelan načrt, kaj je za matematični maraton treba pripraviti in priskrbeti. Tako smo dijakke že na začetku šolskega leta obvestili o datumu matematičnega maratona in pobrali prijavnice. Dijakke, vsaj prvošolce, smo hkrati morali seznaniti, da gre za vzdržljivostno učenje matematike in ne za tekmovalno, kdo je boljši. Dijaki se na maratonski vzdržljivostni preizkušnji učijo vsebin, ki smo jih pri pouku od začetka šolskega leta do maratona uspeli predelati. Ob koncu maratona dijakki namreč pišejo preverjanje znanja, ki je podobno pisnemu preizkusu znanja. Prav zaradi tega se dijakki radi udeležijo maratona, da se več ur pripravljajo na prihajajoči redni pisni

preizkus znanja in na koncu učenja preverijo, koliko že znajo in kje morajo svoje znanje še izpopolniti.



Slika 1: Dijakinje prvih letnikov vneto rešujejo naloge, ki smo jim jih pripravili za 14. matematični maraton.

Zaradi upoštevanja ukrepov proti širjenju virusa Covid-19, je bil letos maraton za dijakke precej krajši kot ponavadi. Prijavilo se je 121 dijakov, ki smo jih razdelili v dve skupini. Za prvo polovico dijakov je matematični maraton potekal od 8. do 13. ure, za drugo polovico pa od 13. do 18. ure. Na začetku so dijakki dobili majice, ki jim jih je razdelila ravnateljica Jelena Keršnik. Dijaki so bili razdeljeni v učilnice po razredih, kjer so skoraj štiri ure

Za koliko odstotkov se spremeni ploščina trikotnika, če eno stranico trikotnika povečamo za 30 %, drugo stranico zmanjšamo za 30 %, kot, ki ga oklepata stranici, pa ostane nespremenjen?

Rešitev:

$$S_1 = \frac{a \cdot b \sin \gamma}{2}$$

$$S_2 = \frac{1,3a \cdot 0,7b \sin \gamma}{2}$$

$$S_2 = 0,91 \cdot \frac{a \cdot b \sin \gamma}{2}$$

$$S_2 = 0,91 \cdot S_1$$

Ploščina trikotnika se zmanjša za 9 %.

Slika 2: Primer naloge, ki je marsikateremu dijaku delala težave na 14. matematičnem maratonu.

(če odštejemo vmesni čas za malico) reševali naloge, ki smo jim jih za ta dan pripravili učitelji. Le redki so si sami poiskali dodatne naloge v svojih zbirkah vaj in učbenikih ter raje reševali že pripravljene naloge. Dijaki so imeli z reševanjem nekaterih nalog, ki smo jih pripravili, kar nekaj težav. Primer takšne naloge prikazuje slika 2. Dijakom bi bila naloga precej lažja, če bi bili dolžini stranic trikotnika podani. Ker pa je pri nalogi le podatek za koliko se povečata, dijaki niso vedeli, kako bi izračunali novo ploščino.

Pri reševanju so si lahko dijaki ves čas med seboj pomagali, izmenjevali ideje in različne postopke reševanja. Za pomoč so lahko prosili učitelje matematike ali bivše dijake in študente matematike, ki so tudi letos z veseljem pomagali pri izvedbi učnega maratona. Zadnja ura je bila namenjena pisnemu preverjanju znanja. Dijaki so povratno informacijo o uspešnosti pri preverjanju dobili pri pouku matematike. Kljub omejitvam nam je letos matematični maraton uspelo dobro izpeljati.

Primer pisne naloge 4. e
Matematični maraton
9. 10. 2021

1. Določi taka števila A, B in C, da bosta $p(x) = 2x^2 + 2x$ in $q(x) = (Ax + B)(x - 1) + Cx + 2B - 1$ enaka.
2. Določi polinom druge stopnje, da je $p(1) = 2, p(-2) = -10, p(2) = -6$.
3. Določi polinom p, ki da pri deljenju s polinomom $q(x) = x^3 + x^2 + 2$ količnik $k(x) = -x + 2$ in ostanek $r(x) = x^2 - 1$.
4. S Hornerjevim algoritmom pokaži, da je -1 dvakratna ničla polinoma $p(x) = 3x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 12x - 4$.
5. Nariši graf polinoma:
$$p(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^3 - x^2$$
6. Reši neenačbo:
$$-9x^3 \geq 12x^2 - 11x + 2$$

naloga	1	2	3	4	5	6	Skupaj
točke	4	6	4	4	6	6	30

Slika 3: Primer pisnega preverjanja znanja za dijake 4. letnika programa ekonomski tehnik.

Zaključek

Članice aktiva matematikov ugotavljajo, da letos ni bilo tistega pravega utripa maratona, kot v prejšnjih letih, ko je bil to celodnevni dogodek tudi za dijake, ne le za profesorje. Letos so do konca zdržali prav vsi dijaki, kar se v preteklih letih, ko je maraton trajal 12 ur, ni nikoli zgodilo. Po več urah učenja se opazi, kdo ima boljšo učno kondicijo. Sama sem letos že po štirih urah opazila, da so bili nekateri dijaki precej utrujeni, saj se niso mogli več osredotočiti in reševati nalog, drugi dijaki pa bi z lahkoto zmogli še več.

Zame je to bil prvi matematični maraton in upam, da ne zadnji. Dijaki od takšnega dne odnesejo veliko znanja, kar se pozna pri znanju dijakov. Ker so tudi odzivi dijakov pozitivni, se splača tradicijo matematičnega maratona na GESS ohranjati in tudi v prihodnje spodbujati učno vzdržljivost na tako zanimiv in družaben način.

Matematični potep z aplikacijo Actionbound

Alenka Močnik
Srednja šola Veno Pilon Ajdovščina, Slovenija

Izvleček

V prispevku je predstavljena uporaba aplikacije Actionbound pri pouku matematike. Dijaki v manjših skupinah rešujejo matematične naloge, opravljajo domiselne izzive ter pri tem raziskujejo domači kraj s pomočjo svojih pametnih telefonov. Take aplikacije služijo kot pripomoček za obogatitev pouka, spoznavanje kraja ter krepitev digitalnih kompetenc dijakov in učiteljev. Digitalno tehnologijo lahko uporabimo pri različnih predmetnih področjih za raznolike dejavnosti v osnovni ali srednji šoli. Nedvomno pa je treba biti previden pri uporabi informacijsko-komunikacijske tehnologije pri pouku. Pozornost dijakov je v trenutku preusmerjena v ekrane pametnih telefonov, pri čemer lahko ne dosežemo zadanih ciljev učne ure. Izvedba takih ur mora biti primerno načrtovana, dijaki pa morajo biti pri dejavnosti aktivni.

Ključne besede: matematika, digitalna pismenost, delo v skupinah, spoznavanje kraja

Math-oriented treasure hunt with the Actionbound application

Abstract

The article presents the use of the Actionbound application in mathematics lessons. Students work in small groups where they with the use of their smartphones solve math problems, meet imaginative challenges, and explore their hometown. Such applications serve as a tool to enhance lessons, get to know students' local town and improve both students' and teachers' digital competencies. Digital technology can be used in a variety of subject areas for a variety of primary or secondary school activities. Undoubtedly, care must be taken when using information and communication technology in teaching. Namely, students' attention is instantly diverted to their smartphones, and the set goals of the lesson may easily not be achieved. The realization of such classes must be well planned, whereas students' active participation must be carefully thought out.

Keywords: mathematics, digital literacy, team working, discovering town's landmarks

Uvod

Sodobne poučevalne prakse so pri pouku vsakodnevno prisotne. Pritegniti dijake ter jih motivirati, da k uram radi prihajajo in da od povedanega odnesejo čim več, je vsakič, ko učitelj stopi v razred, svojevrsten izziv. Motivacija je med najpomembnejšimi psihološkimi procesi. Deluje v interakciji in se spreminja ter omogoča človeku njegovo enkratnost in neponovljivost. Je proces izzivanja, usmerjanja in uravnavanja človekove dejavnosti k cilju oziroma zadovoljitvi potrebe, ki je bila izvor motivacije (Macuh, 2009).

Poleg tega je v času epidemije prisotno tudi poučevanje na daljavo, pri katerem misli hitro odtavajo drugam. Prav zaradi hitrih sprememb in nenehnega prilagajanja pouka glede na globalne dogodke skušamo pri poučevanju uporabljati inovativne metode in oblike dela. Uporaba različnih aplikacij s pomočjo pametnih telefonov omogoča, da je pouk razgiban in so pri tem dijaki dejavni. Tokrat je bila pri pouku matematike uporabljena aplikacija Actionbound. Dijaki v manjših skupinah rešujejo matematične naloge ter pri tem raziskujejo domači kraj z uporabo svojih pa-

metnih telefonov. Take dejavnosti izvajamo proti koncu šolskega leta, ko je pouk zaradi izvedbe mature precej prilagojen. Pri tem so prisotne temeljne zmožnosti v sodobnem svetu, in sicer: sporazumevanje v maternem jeziku, uporaba aplikacije v tujem jeziku, matematične kompetence, digitalna pismenost, samoiniciativnost in socialne in državljanske kompetence. Pri izvedbi pa se dijaki družijo in krepijo dobre medsebojne odnose.

Vloga učitelja v sodobnem učnem procesu

Zaradi nenehne izpostavljenosti sodobni tehnologiji ter vseprisotnosti pametnih telefonov današnji dijaki potrebujejo sodobnejše pristope podajanja učne snovi. Učitelji jim skušamo omogočiti, da so pri pouku čim bolj aktivni, da potrebne informacije pridobivajo samostojno ter da razvijajo veščine, potrebne za vseživljenjsko učenje. Pri iskanju informacij preko spleta morajo znati presoditi, ali so viri verodostojni. S tem krepijo kritično mišljenje ter samovrednotenje. Pomembno je, da za svoje delo prejmejo sprotno povratno informacijo, saj jih spodbudi k nadaljnjemu raziskovanju.

Učitelji moramo pri svojem delu ponujati inovativne pristope in ustvarjalne dejavnosti. Medpredmetno povezovanje in timsko poučevanje omogočata izmenjevanje izkušenj med učitelji ter krepitev dobrih medsebojnih odnosov. Reševanje avtentičnih matematičnih problemov, povezanih s kulturno dediščino kraja, so dobrodošla sprememba pri pouku, ki pretežno poteka v šolskih učilnicah.

Digitalno tehnologijo v razredu je treba vključevati ustrezno in premišljeno. Informacijsko-komunikacijsko tehnologijo lahko uporabljamo kot (Kmetič, 2008):

- sredstvo za ustvarjanje, simuliranje in modeliranje realnih in učnih situacij,
- samo učni pripomoček,
- metodo dela,
- komunikacijsko sredstvo,
- sredstvo za spremljanje in preverjanje znanja.

Izvedba dejavnosti

Actionbound je brezplačna interaktivna spletna aplikacija, ki je lahko v pomoč učitelju za dejavnosti na terenu. Dijaki se postavijo v vlogo lovcev in rešujejo posamezne naloge z uporabo mobilne naprave (pametnega telefona oz. tabličnega računalnika). Z njeno pomočjo odkrivajo skrivnosti in zanimivosti okolja, hkrati pa so naloge sestavljene tako, da se dijaki med reševanjem gibajo (hoja, tek). Aplikacija je zato odlična za medpredmetno povezovanje.

Za pripravo nalog v spletnem okolju Actionbound potrebujemo svoj uporabniški račun, ki ga pridobimo na spletni strani <https://en.actionbound.com>. Potem določimo lokacije, ki jo morajo dijaki poiskati in na katerih ustvarimo naloge ali dejavnosti, ki jih je treba opraviti (Slika 1). Izbiramo lahko med kvizom (vpis besedila, izbirni tip vprašanja, ocena vrednosti ali razvrščanje) ali tako imenovano misijo (nalaganje fotografije/sebka, videoposnetka, zvočnega posnetka ali vpis besedila). Vprašanja so bila zastavljena s področja matematike. Načrtovano je bilo, da bo dejavnost izvedena v eni šolski uri ob koncu šolskega leta, ko so ure nekoliko bolj sproščene in poskušamo izvesti dejavnosti na prostem, saj je pouk prilagojen zaradi izvedbe mature, ki poteka na šoli.



Slika 1: Navodila za nalogo.

Pred izvedbo dejavnosti je bil potek učne ure preizkušen na terenu, saj je bilo treba preveriti natančnost lokacij, pravilnost odgovorov, delovanje aplikacije in odpraviti pomanjkljivosti.

Pri izvedbi dejavnosti v razredu je bila najprej dijakom predstavljena aplikacija Actionbound ter kratek opis poteka učne ure. Nato so se dijaki razdelili v manjše skupine. Pri skupinskem delu obstaja skupinska soodvisnost, ki bo v večini primerov pripeljala do boljših ali vsaj enakih dosežkov kot individualno učenje. Obstaja pa tudi možnost, da bo pripeljalo do slabših rezultatov kot individualno učenje. To se zgodi, kadar pride do razpršitve odgovornosti pri delu v skupini. V sodelovalnih skupinah obstaja možnost, da so posamezni dijaki nagrajeni, čeprav niso vložili veliko dela v skupno nalogo. Druga možnost pa je, da posamezni člani skupine niso nagrajeni sorazmerno s svojim prispevkom. Uspeh skupine je tako odvisen od ustreznega prispevka vsakega njenega člana. Obvladovanje socialnih veščin je nujno za dokončanje neke naloge. Učna situacija pri sodelovalnem učenju je taka, da dijaki nimajo druge izbire, kot da so uspešni vsi ali nihče in kot tako jo morajo dijaki tudi zaznavati. Cilj je skupinski in ga lahko dosežejo le, ko ga doseže vsak dijak v skupini. To situacijo lepo ponazarja finski izrek: »Vsi so v istem čolnu, vsi plavajo ali utonejo skupaj.« (Kranjc, 2002).

M. Kolar (2000, str. 25) navaja, da so ključni elementi sodelovalnega učenja: delo v majhnih skupinah, pozitivna soodvisnost, posameznikova odgovornost, ustreznost struktura nalog, razvoj socialnih spretnosti in analiza procesov v skupini.

Dijaki za uporabo aplikacije ne potrebujejo uporabniških računov. Za opravljanje nalog je potrebno, da si eden od udeležencev v skupini aplikacijo predhodno naloži na mobilni telefon oz. tablični računalnik iz spletne trgovine (Google Play oziroma App Store). Na svojem pametnem telefonu mora vključiti prenos podatkov in lokacijo. Za opravljanje nalog, ki jih predhodno pripravimo učitelji, potrebujejo QR-kodo, zato v mobilni aplikaciji izberejo možnost Scan code. Ko poskenirajo QR-kodo, je treba klikniti na Start Bound.

Vse skupine so začele z izzivi in nalogami pred šolo, kamor so se morali tudi vrniti, ko so vse zastavljene naloge opravili. Skupine



Slika 2: Namig za iskanje lokacije v Ajdovščini.

dijakov so bile na teren poslane z nekaj minutnim razmikom. Pri posameznih izzivih so morali biti iznajdljivi in izvirni. Aplikacija deluje tako, da mora sodelujoča ekipa najprej opraviti prvo nalogo, šele nato dobi naslednji izziv. Na ta način so dijaki ves čas v pričakovanju, kaj sledi. Pri tem so morali čim hitreje do naslednje lokacije in nenazadnje do cilja. Pozorno je bilo treba prebrati navodila, da so na odgovore odgovarjali pravilno. Navodila za uporabo aplikacije so podana v angleškem jeziku, kar omogoča krepitev sporazumevanja v tujem jeziku. Pri iskanju informacij so si lahko pomagali s spletnim brskalnikom, za dobre fotografije in video posnetke pa je bila potrebna izvirnost in ustvarjalnost. Naloge so zastavljene medpredmetno glede na lokacijo, kjer se skupina nahaja (Slika 2).

Učitelj lahko spremlja sodelujoče skupine na daljavo. V aplikaciji je namreč vidno, katere lokacije je posamezna skupina obiskala, koliko časa so potrebovali za posamezno nalogo, katere izzive so opravili ter kako uspešni so bili pri tem.

Kadar so se vsi vrnili v učilnico, smo skupaj pogledali delo posameznih skupin. Zmagovalna ekipa je bila tista, ki je najhitreje opravila z vsemi izzivi ter je bila pri posnetih fotografijah in videoposnetkih najbolj izvirna. Poskrbljeno je bilo, da so vsi sodelujoči prispevali svoj delež pri skupinskem delu ter da je zmagovalna ekipa prejela sladko presenečenje.

Z dijaki smo se pogovorili, kaj jim je bilo pri tovrstni dejavnosti všeč in zakaj so se pri izvedbi pojavile težave ter kako so jih reševali. Nekateri za prednost navajajo navodila aplikacije v angleškem jeziku, za druge pa je bila to slabost. Pri skeniranju QR kode so imeli nekateri težave, ki smo jih hitro razrešili, da so lahko pričeli z raziskovanjem.

Kadar pripravljamo navodila/naloge za dijake, se moramo postaviti v njihovo vlogo in pripraviti zares jasna, enoumna in razumljiva navodila. Vrednotenje nalog je mogoče samo za nekatere izzive (Quiz, Find spot, Find code) ne pa za vse npr. Mission. Te tipe lahko preverimo samo na spletni strani Actionbound (v zavihku Details pregledamo Results).

Zaključek

Aplikacija je uporabna za raziskovanje kraja, kjer lokacije povežemo z nalogami in izzivi različnih predmetnih področij. Tako dejavnost lahko uporabimo tudi pri izvedbi ekskurzije, ki poteka izven kraja šolanja. Ker je izvedba dejavnosti na prostem, mora imeti tisti dijak na svojem telefonu vklopljene mobilne podatke. Aplikacija je prosto dostopna in je možnost uporabe že izdelanih predlog, ki se nahajajo v arhivu. V primeru, da sami izdelamo dejavnost, pa je treba vložiti precej časa in truda. Preveriti moramo natančnost določenih lokacij, da sodelujoče skupine ne porabijo preveč časa pri iskanju le teh. Čeprav dogajanja na terenu ne moremo nadzirati, ker skupine same iščejo lokacije, lahko delo spremljamo na daljavo. Rezultati so v aplikaciji na koncu dejavnosti zbrani pregledno, razvrstimo pa jih lahko glede na več kriterijev (čas in točke).

Ker je uporaba digitalne tehnologije pogosto zelo pozitivna motivacija za dijake, lahko s premišljeno in dobro zasnovano uporabo omogočimo uspešnejše učenje. Tudi sicer učenje preko iger, tekmovanj ali kvizov omogoča večjo vnemo pri poslušalcih. Kadar pa digitalno tehnologijo dijakom ponudimo na terenu, kjer se lahko prosto gibljejo in raziskujejo pa je zagnanost za delo še toliko večja. Pozorni moramo biti, da je učna ura z uporabo digitalne tehnologije dobro zasnovana ter da so dijaki skozi celotno dejavnost aktivni.

Viri in literatura

- Kmetič, S. (2008). Vloga računalniške tehnologije pri pouku matematike. *Vzgoja in izobraževanje*, 39 (5), 52–58.
- Kranjc, T. (2002). Sodelovalno učenje kot odgovor globalizacije. *Vzgoja in izobraževanje*, 38 (1), 80–83.
- Kolar, M. (2000). Sodelovalno učenje v šolah. *Vzgoja in izobraževanje*, 31 (4), 52–58.
- Macuh, B. (2009). *Kako motivirati sebe in učence za aktiven pouk*. Dostopno na: <http://www.solski-razgledi.com/e-srprispevek.asp?ID=177> (9. 2. 2022).
- Učni načrt. *Matematika. Splošna, klasična in strokovna gimnazija*. (2008). Dostopno na http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2010/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf (9. 2. 2022).

Število π , obseg kroga in dan števila π

Inez Ceglar
Osnovna šola Vič, Ljubljana

Izvleček

V članku je predstavljena obravnava vsebine Krog, natančnejše povezavo med številom π (pi) in obsegom kroga. Prestavi konkreten primer, kako lahko učenci na raziskovalen način spoznajo število π . V nadaljevanju članka sledi tudi predstavitev delavnic ob praznovanju dneva π . Članek zaključim z refleksijo učne ure in delavnic.

Ključne besede: krog, število π

Number π , Circumference of Circle, and Pi Day

Abstract

This article introduces the exploration of the circle, in particular the relationship between the number pi and the circumference of a circle. A concrete example of how students can learn about the number π in an exploratory manner is provided. Next, workshops in honour of Pi Day are presented. In conclusion, the author reflects on the lesson and the workshops.

Keywords: circle, number π

Uvod

Krog je prav poseben geometrijski lik in ima zato med njimi posebno mesto. Poznali so ga že v davnini. Dokaz zanj so arheologi našli v sledih prebivališč s krožnim tlorisom. Take vrste gradnja se je ohranila do danes, uporabljajo jo še nekatera plemena v Afriki.

Krog pa od nekdaj buri duhove tudi matematikom. Najbolj znana je problematika kvadrature kroga, ki raziskuje, ali je mogoče samo s šestilom in ravnilom konstruirati kvadrat, ki je ploščinsko enak krogu s polmerom 1. Matematiki so dokazali, da naloge ni mogoče rešiti. Pred dva tisoč leti si je Arhimed zamislil postopek, po katerem lahko izračunamo ploščino kroga s poljubno natančnostjo.

Zakaj lahko ploščino kroga izračunamo le s poljubno natančnostjo in kakšno povezavo ima ploščina s številom π , je lahko zanimiva tema za izvedbo učne ure (lahko tudi več ur), ki je malo drugačna od običajnih. V obilici vsebin, ki jih moramo učitelji predelati in z učenci utrditi, vedno znova zmanjkuje časa za drugačnost in eksperimentiranje. In če si kdaj v letni razporeditvi učne snovi za osmi razred privoščim učno uro izpeljati malo drugače, je to vsekakor v poglavju o krogu. Učno snov pa z učenci nadgradimo pri dodatnem pouku matematike, kjer z različnimi delavnicami praznujemo dan števila π .

Preverjanje predznanja

Učitelji matematike vedno preverimo predznanje, saj so matematični koncepti med seboj prepleteni in povezani, zato vsako

poglavje zahteva tudi določeno predznanje. Če se izkaže, da učenci nečesa ne znajo oziroma so pozabili, poskrbimo za to, da predznanje dopolnijo, saj brez dobrih temeljev enostavno ne gre. Za usvajanje novega znanja o krogu je nujno predznanje o osnovnih geometrijskih pojmi, povezanih s krogom in formule za ploščine in obsege geometrijskih likov, saj omenjeno poglavje vsebuje tudi obravnavo izračunov obsegov in ploščin sestavljenih geometrijskih likov.

Znanje sem preverila z naslednjimi dejavnostmi.

Preverjanje predznanja z uporabo igralnih kart

Učenci so se razdelili v pare. Vsak par je dobil komplet igralnih kart, na katerih so bili različni osnovni geometrijski pojmi, vezani na krog, in obrazci za računanje obsegov in ploščin osnovnih geometrijskih likov (priloga IGRALNE KARTE). Učenca sta karte dobro premešala in si jih razdelila. Če je kateri učenec dobil par (par je predstavljal opis pojma in ustrezna slika), ga je odložil na stran. Učenec, ki je imel v roki največ kart, je karte obrnil proti soigralcu tako da je ta lahko videl hrbtno stran kart. Vsak je izvlekel eno karto in preveril v svojem kupu kart, ali ima par. Če je imel par, je lahko obe karti odložil na mizo. Igra je potekala, dokler enem izmed igralcev ni ostala v roki samo ena karta, in sicer karta s simbolom števila π (pi). Ta igralec je igro tudi izgubil. Med igro sta se učenca lahko pogovarjala, sodelovala in preverjala pravilnost rešitev drug drugega ter podajala komentarje in usmeritve. Sama sem dogajanje opazovala. Na kocu igre smo

se z učenci še skupaj sprehodili skozi pojme, opisane na kartah. Za dodatno utrditev znanja so morali učenci za domačo nalogo napisati še definicije osnovnih geometrijskih pojmov, omenjenih na kartah, obrazce za izračun obsega in ploščine geometrijskih likov pa izpisati v tabelo, za katere obliko smo se skupaj dogovorili (Preglednica 1).

Preglednica 1: Obsegi in ploščine geometrijskih likov.

Lik	Skica z označenimi stranicami	Obseg	Ploščina
Pravokotnik			
Kvadrat			
Trikotnik			
Trapez			
Paralelo-gram			
Romb			
Deltoid			

Predstavitev poglavja in prav posebna domača naloga

Na začetku vsakega poglavja se z učenci pogovarjam, kaj se bomo v poglavju učili in kakšni bodo učni cilji in vsebine, ki jih bodo morali osvojiti (Preglednica 2). Poskusimo uzavestiti namene učenja naslednjih matematičnih ur.

Preglednica 2: Operativni cilji in vsebine.

Operativni cilji in vsebine	- Razumejo pomen števila π, - izračunajo obseg in ploščino kroga z uporabo obrazcev, - izračunajo dolžino krožnega loka in ploščino krožnega izseka z uporabo obrazcev, - razumejo in uporabljajo dolžino krožnega loka kot del dolžine krožnice ter ploščino krožnega izseka kot del ploščine kroga, - rešijo besedilne naloge v povezavi s krogom (z računalom in brez njega).
------------------------------------	---

Sledilo pa je navodilo za prav posebno domačo nalogo, s pomočjo katere bodo naslednjo šolsko uro osvojili pojma števila π , obsega kroga in njune povezave. Doma so morali poiskati vsaj en lonc ali kozarec okrogle oblike. Zelo natančno so morali izmeriti njegov obseg in premer. Pogovorili smo se o različnih metodah merjenja obsega (šiviljski meter, nit, razni trakovi ...) in tudi premera. Nekateri učenci so se spomnili metode za iskanje središča kroga (simetrali dveh poljubnih tetiv se zmeraj sekata v središču kroga), ker bi na ta način lahko natančno narisali premer kroga in ga tudi izmerili. Sama sem jim svetovala, naj vzamejo večji lonc, ker bodo tako napake pri meritvah manjše.

Število π in obseg kroga

Morda najbolj znamenito matematično število nato skupaj z učenci in njihovimi meritvami spoznamo na raziskovalen način. Skupaj sestavimo spodnjo tabelo, kamor vpišemo meritve, ki so jih učenci naredili za domačo nalogo.

Preglednica 3: Število π in obseg kroga.

Ime	Obseg: o (cm)	Premer: d (cm)	
Maša	20	6,3	3,1746031746...
Martin	38	12	3,1666666666...
Kaja	47,5	15,3	3,1045751634...
Naja	76,5	23,5	3,2553191498...
Maj	67	15	4,4666666666...
Peter	78	24,5	3,1836734694...
Natalija	56,5	18	3,1388888888...
Bor	69	22	3,1363636363...
Sara	28	9	3,1111111111...

Sledi analiza vpisanih podatkov. Ker je poglavje, ki smo ga ravno obravnavali premo in obratno sorazmerje, učenci hitro opazijo, da ima krog z dvakrat, trikrat ... večjim premerom dvakrat, trikrat ... večji obseg. Torej sta obseg kroga in njegov premer premo sorazmerni količini. Učenci so predlagali računanje količnika med obsegom kroga in premerom kroga.

Zato je količnik med obsegom kroga o in premerom kroga d konstanten in za vse kroge enak. Pa je res? Zakaj iz naše tabele to ni čisto razvidno? Učenci ugotovijo, da so pri meritvah delali napake. Četudi so se še tako trudili natančno izmeriti obe količini, seveda ni šlo. Ugotovijo tudi, da je pravi količnik verjetno malo več kot 3 in verjetno ima neskončno decimalk. Nekateri učenci vedo, za ostale pojasnimo: količnik med obsegom kroga in premerom kroga je zanimivo število, ker ni niti celo število, niti ulomek, temveč število z neskončnim številom decimalk brez periodičnega zapisa. Drugače povedano deljenje $o : d$ se nikoli ne konča. Ta količnik je enak številu, ki ga zapišemo z grško črko π .

Kot zanimivost povem, da je danes znanih 31.415.926.535.897 decimalk tega števila. Pridobila jih je Emma Haruka Iwao, zaposlena pri Googlu, s pomočjo Googlevega računalnika v oblaku. To je najnatančnejša vrednost števila π . Pred tem je bilo znanih 22 bilijonov decimalk tega števila. To je torej skoraj devet bilijonov decimalk več ko je znašal prejšnji rekord, ki ga je novembra 2016 dosegel Peter Trueb. Število marsikoga zaposluje v prostem času, nekateri se učijo decimalke na pamet, drugi pa jih izračunavajo. Emma Haruka Iwao je nad številom navdušena že od malih nog in že razmišlja, da bi morda presegla lastni rekord in pridobila še kakšno decimalno mesto. Za izračun je potrebovala 170 terabajtov podatkov, 25 virtualnih računalnikov in 121 dni.

Seveda bosta za naše potrebe zadostovala dva približka $3,14$ in $\frac{22}{7}$.

Obseg kroga

Dejstvo, da je količnik med obsegom kroga in premerom kroga konstanten, pa nas preko premisleka vodi tudi do obrazca za obseg kroga $o = \pi \cdot d$ oziroma če upoštevamo $d = 2r$ sledi $o = 2\pi r$. Poudarimo, da na ta način z uporabo približka izračunamo obseg kroga le približno.

Dan števila π

Dan števila π je praznik, s katerim vsako leto 14. marca obeležujemo matematično konstanto π (pi). V ameriškem formatu datumov je namreč 14. marec zapisan kot 3/14, kar so prve tri števke števila pi. Praznika so se spomnili navdušenci nad matematiko v Združenih državah Amerike, ki so začeli na ta dan prirejati proslave, na katerih jedo pite (po besedni igri, angleška beseda za pito – *pie* se izgovarja enako kot pi) in tekmujejo v pomnjenju števila pi. Praznovanje je razširjeno v glavnem na univerzah, posebej slovesno pa ga prirejajo v univerzitetnem mestu Princeton, kjer je dolgo časa prebival slavní fizik Albert Einstein, po naključju rojen prav na 14. marec. Iz ZDA se je potem praznovanje razširilo še drugam po svetu. V začetku marca prirejajo tekmovanje v pomnjenju števila π tudi na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani.

Tudi sama sem z učenci pri dodatnem pouku organizirala dan števila π . Nismo ravno pekli pit, izmed dejavnosti sem izbrala tiste, ki so malo bolj izobraževalno naravnane in jih je lahko izvesti v razredu v okviru dodatnega pouka iz matematike.



Slika 1: Veriga decimalnk števila π .

Tako kot število π so tudi papirne verige lahko neskončne ... v času dejavnosti, dolžini in zabavi. Z učenci smo naredili verigo iz barvnega papirja, pri čemer smo uporabili za vsako izmed 10 števil svojo barvo. Tako vsaka barva v verigi predstavlja eno število. Na primer: število ena je zelene barve, število 2 roza barve, število 3 vijoličaste barve ...

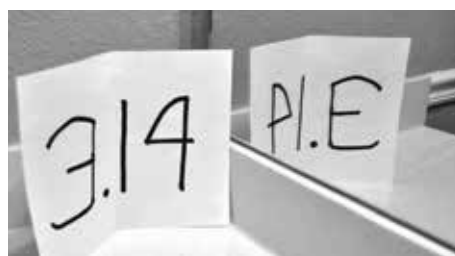


Slika 2: Silhueta π – nebotičnikov.

Število π smo tudi narisali. Učencem sem razdelila papir in barvice. S pomočjo bločnega diagrama so za vsako števko števila π , od leve proti desni, narisali nebotičnik. Prvi nebotičnik je bil visok tri kvadratke oziroma tri centimetre, drugi nebotičnik en kvadratok oziroma centimeter, tretji nebotičnik štiri kvadratke oziroma štiri centimetre ... Končni izdelek je izgledal kot obris nebotičnikov kakšnega svetovnega velemera.

Tekmovanje v sestavljanju besed, ki se začnejo na pi

Učenci so dobili tudi tekmovalno nalogo. V treh minutah so se morali spomniti čim več besed, ki se začnejo na črki pi. Na primer: PIta, PIsmonoša, PIca, PIngvin, PIvo, PILates ...Pripravljeni, pozor, zdaj!



Slika 3: Skrivnost števila π .

V Združenih državah Amerike se število π izgovarja enako kot angleška beseda za pito – pie. Če število 3,14 napišemo na list papirja in pogledamo v ogledalo, dobimo ravno zapis pie, kar smo z učenci tudi preizkusili.

Z učenci smo natisnili zgornjo sestavljanjo (<https://teachbeside-me.com/printable-pi-puzzle-pi-day/>) in jo nalepili na karton. Če so učenci želeli, so jo najprej pobarvali. Nato smo jo razrezali na koščke in jih nato poskušali sestaviti skupaj, tako da smo si zapomnili decimalke števila π .



Slika 4: Sestavljanica.

Zaključek

Vsekakor so malo drugače izpeljane ure in dejavna udeležba učencev v njih nadgradnja storilnostno naravnane pouka tako za učitelja, še zlasti pa za učence. Že med poukom sem učence pridobila in vzpodbudila njihovo radovednost, saj so mi sami v naslednjih učnih urah pripovedovali o zanimivostih števila π , ki so jih sami izbrskali na spletu. Tudi dejavnosti pri dodatnem pouku iz matematike so bile zanje zanimive, v prihodnje so se nam pri podobnih delavnicah hoteli pridružiti tudi učenci, ki dodatnega pouka ne obiskujejo. Vsekakor je vreden razmislek, da bi omenjene delavnice razširila še s kakšno dejavnostjo in jih mogoče širši skupini učencev ponudila v obliki naravoslovnega dne.

Prav je, da učitelji delamo spremembe in poskušamo. To je mogoče le, če se tudi sami ves čas učimo, preizkušamo, načrtujemo in izvajamo nove dejavnosti in na koncu naredimo samorefleksijo ter sprejemamo povratne informacije. Vsak učitelj sam lahko najde nove poti in načine, kako pouk narediti zanimivejši in pritegniti učence, saj je le tako lahko uspešen pri poučevanju.

Viri

Strnad, M., Štuklek M., Kurillo D., Žakelj A. (2005). *Presečišče 8*. Ljubljana: DZS.

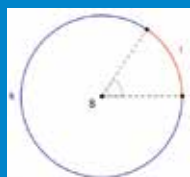
<https://www.delo.si/novice/znanoteh/znanih-31-bilijonov-cifer-stevila-pi-161007.html>, (dostop: 21. 4. 2020).

https://sl.wikipedia.org/wiki/Dan_pi (dostop: 21. 4. 2020)

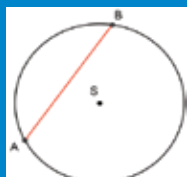
Žakelj, A. idr. (2008). *UČNI načrt. Matematika*. [Elektronski vir]. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. (Dostopno na: http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2018/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf, marec 2022)



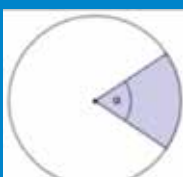
Krožni lok



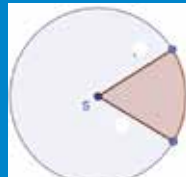
Tetiva



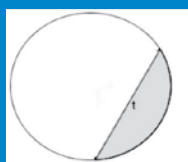
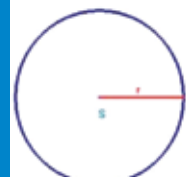
Središčni kot



Krožni izsek



Polmer

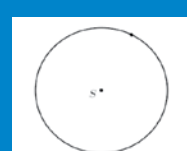
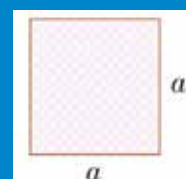


Krožni odsek

Krog

Krožnica

Kvadrat



Paralelogram



$$o = 4a$$

$$p = av = \frac{ef}{2}$$

Pravokotnik



$$o = a + b + c + d$$

$$p = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

$$o = 4a$$

$$p = a^2$$

$$o = 2a + 2b$$

$$p = ab$$

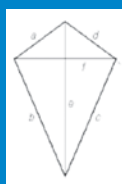
$$o = 2a + 2b$$

$$p = av_a = bv_b$$

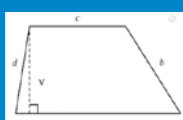
$$o = 2a + 2b$$

$$p = \frac{ef}{2}$$

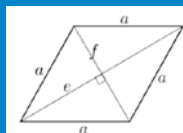
Deltoid



Trapez



Romb



π

Vitruvijev človek

Dr. Borut Jurčič Zlobec
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

1 Uvod

Kakšno je razmerje med premerom krožnice in stranico kvadrata na sloviti skici Leonarda da Vincija Vitruvijev človek? Odgovor na to vprašanje bomo poiskali v okoliščinah, v katerih je skica nastala. Da bi bolje razumeli okoliščine nastanka skice, si bomo med drugim pogledali njeno zgodovinsko ozadje.

2 Igralci v naši zgodbi

1. Pitagora se je rodil med letoma 580 in 569 in umrl 500 pred našim štetjem.

Ustanovil je sekto, preko katere je širil svoje ideje. Zelo malo je znanega o njem neposredno, večinoma izvemo posredno preko njegovih naslednikov.

Njegovi nasledniki (pitagorejci) so povsod videli naravna števila. Razmerja naravnih števil naj bi določala notranjo strukturo vesolja.

Pitagora je že vedel, da je glasbeni ton posledica nihanja, na primer nihanja strune. Dolžina strune določa višino (frekvenco) tona. Vedel je, da so glasbeni toni, ki zvenijo hkrati in je razmerje njihovih frekvenc razmerje malih naravnih števil, ušesom prijetni.

Pitagorejci so verjeli, da nebesna telesa zvenijo. Predstavljali so si, da ta zvenijo v tonih, katerih razmerje frekvenc so majhna naravna števila.

Ta zven so imenovali harmonija sfer. Verjeli so, da se skrivnost sveta skriva v teh razmerjih.

2. Vitruvij se je rodil med letoma 80 in 70 in umrl pred letom 15 pred našim štetjem. Bil je rimski arhitekt in je poskušal prenesti razmerja, ki jih najdemo v naravi, v načrte za gradnjo. Posebej se je zanimal za razmerja, ki se skrivajo v dimenzijah človeškega telesa.

3. Luca Bartolomeo Pacioli se je rodil leta 1447 in umrl leta 1517. Bil je italijanski matematik in frančiškanski duhovnik. Prijateljaval je z Leonardom da Vincijem.

Nas bo posebej zanimala njegova knjiga *Divina proportione* (napisana v Milanu v letih 1496–1498 in izdana v Benetkah leta 1509).

Govori o božanskih razmerjih v geometriji in aritmetiki. Med drugim se ukvarja z razmerji, ki jih najdemo v pravilnih večkotnikih in platonskih poliedrih. Posebej ga je zanimal pravilni petkotnik, ki je bil zanj prava zakladnica. V pravilnem petkotniku je našel razmerje zlatega reza. Vendar mu ni nadel imena božansko razmerje, niti se ni spuščal v njegovo estetiko. Videti je, da so ga bolj zanimala razmerja pitagorejcev. Naslov knjige je treba razumeti bolj v smislu pitagorejcev, to

je kot svet božanskih razmerij na splošno, ne pa da je knjigo posvetil enemu samemu razmerju.

3 Razmerje zlatega reza

Ker ima razmerje zlatega reza med umetniki in arhitekti močan mističen naboj, se vedno najdejo ljubitelji, ki povsod vidijo to razmerje.

V tridesetih letih, odkar sodelujem pri ocenjevanju raziskovalnih nalog iz matematike na srečanjih mladih raziskovalcev pod okriljem Zveze za tehnično kulturo, je bilo mnogo nalog na temo zlatega reza. Ni treba posebej poudarjati, da so mrzlično iskali razmerje povsod, kjer je in kjer ga ni.

Najbolj opiše ta odnos umetnikov in arhitektov do zlatega reza naslednji zapis:

Zlato razmerje pomeni vrata za razumevanje življenja. To razmerje imenujemo tudi božansko razmerje, ker predstavlja vrata v globlje razumevanje lepote, čudežnosti in duhovnosti življenja. Je skoraj neverjetno, da ima eno samo število tolikšen vpliv v naravi, človeški zgodovini, znanosti, umetnosti in vsemirju v celoti.

Ta zapis je, kot da bi ga prepisali od pitagorejcev, le da so oni govorili o racionalnih razmerjih, medtem ko je razmerje zlatega reza iracionalno število.

Ne samo to, razmerje zlatega reza je v nekem smislu celo najbolj iracionalno število od vseh iracionalnih števil. V kakšnem smislu je to število najbolj iracionalno, bomo zvedeli v nadaljevanju. Še več, pitagorejci so bili tako zaverovani v svoja racionalna razmerja, da je bila prava blasfemija, ko je eden od pripadnikov skupine, Hipas, povedal svetu, da je dokazal, da diagonalna kvadrata ni v racionalnem razmerju s stranico tega kvadrata. To je povzročilo tako jezo med pitagorejci, da so Hipasa vrgli s čolna in je utonil.

Te zgodbe ne omenjajo sodobniki Hipasa, tako da je njena verodostojnost vprašljiva, vendar pa kaže na strogo disciplino znotraj skupine pitagorejcev, ki pa ni vprašljiva.

Dolžina diagonale kvadrata s stranico 1 je $\sqrt{2}$. Dokaz, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število, je preprost. Je lep primer matematičnega dokaza tipa *Reductio ad absurdum*.

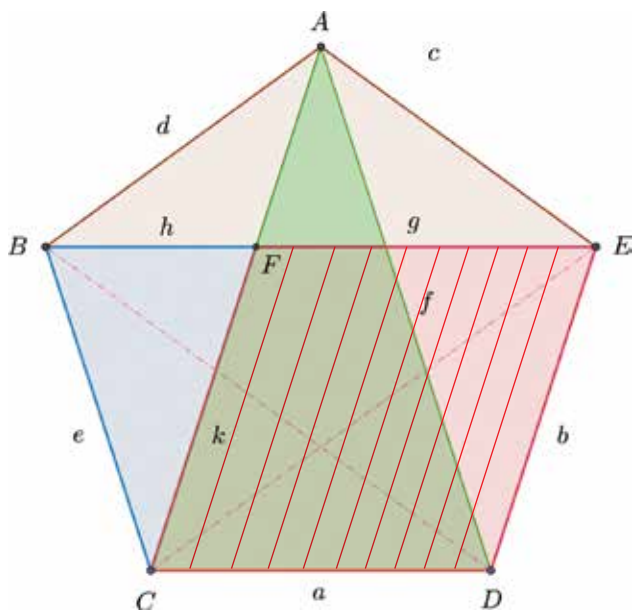
Predpostavimo, da obstajata dve tuji (brez skupnih deliteljev) naravni števili m in n , da je

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}, \rightarrow m^2 = 2n^2, \rightarrow m = 2k, \rightarrow 4k^2 = 2n^2, \rightarrow 2k^2 = n^2.$$

Nujno mora biti m sodo število in od tod sledi, da je n liho število. Kvadrat lihega števila je vedno liho število. Vendar, če je m sodo število, je m^2 gotovo deljivo s 4, zato lahko enačbo delimo z 2. Na levi imamo še vedno sodo število, medtem ko je število

na desni liho. To pa pripelje v protislovje. Torej $\sqrt{2}$ ni mogoče zapisati v obliki ulomka.

3.1 Zlati rez in pravilni petkotnik



Ker je v zvezi z Vitruvijem in ob da Vincijski skici toliko govora o zlatega rezu, si bomo od blizu pogledali, kaj je Paciolijska točka. Na sliki je pravilni petkotnik, v katerem so vrisane diagonale in označeni trije liki znotraj petkotnika, ki nas bodo zanimali. Najprej pogledajmo dva trikotnika, modri trikotnik (B, C, F) in zeleni trikotnik (A, C, D). Trikotnika sta podobna in enakokraka. Naslednji lik je rdeč romb (C, D, E, F). Stranice romba (a, b, g, k) so enako dolge kot stranice petkotnika. Daljica g je vzporedna s stranico petkotnika a, stranica petkotnika b je vzporedna z daljico k. Kraka modrega trikotnika sta enako dolga kot stranica petkotnika. Dolžina osnovnice modrega trikotnika je enaka dolžini diagonale minus dolžini stranice petkotnika. Tako imamo pripravljeno vse, kar potrebujemo za zadnje dejanje.

Izrek 1. Točka F razdeli diagonalo na dve daljici h in g. Razmerje dolžine diagonale proti dolžini daljice g je enako razmerju dolžine daljice g proti dolžini daljice h. Tega ni težko razbrati iz vsega povedanega, zato prepustimo bralcu, da postavi piko na i.

Če označimo dolžine kar z oznakami daljic, potem lahko zapišemo:

$$f : g = g : h, \rightarrow f = g + h.$$

Od tod je:

$$\frac{g+h}{g} = \frac{g}{h}.$$

Vzemimo, da je dolžina stranice enaka 1, torej $g = 1$, označimo dolžino diagonale f z x , potem dobimo naslednjo enačbo

$$x = \frac{1}{x-1}, \rightarrow x-1 = \frac{1}{x}, \rightarrow x = 1 + \frac{1}{x}.$$

3.2 Verižni ulomki

Če zaporedno vstavljamo

$$x = 1 + 1/x, \rightarrow x = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + \dots))),$$

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

dobimo neskončni verižni ulomek za razmerje zatega reza. Vsi koeficienti so enaki 1.

Če ulomek prekinemo na nekem mestu, dobimo racionalno število, ki ga imenujemo konvergent. Povejmo brez dokaza:

Izrek 2. Konvergent je najboljši racionalni približek danemu iracionalnemu številu z imenovalcem, enakim ali manjšim od imenovalca konvergenta.

Velik člen v verižnem ulomku pomeni, da se je konvergent, ki vsebuje člene do vključno velikega člena, močno približal končni vrednosti.

Če so vsi koeficienti enaki 1, pa pomeni, da se dano število z najboljšimi racionalnimi približki izogiba kot je le mogoče samemu številu, konvergenca konvergentov je najslabša možna, to pa je razlog, da je razmerje zatega reza najbolj iracionalno število od vseh iracionalnih števil. Ta lastnost zatega reza je ključna, da se ta pojavlja v naravi.

3.3 Fibonaccijevo zaporedje

Fibonaccijevo zaporedje je definirano kot:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Prvih nekaj členov zaporedja:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Rešimo enačbo za zlati rez iterativno. Izberemo začetni približek $x_0 = 1$,

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n},$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

V posameznih iteracijah dobimo zaporedje kvocientov dveh zaporednih Fibonaccijevih števil. Z drugimi besedami, konvergenti

razmerja zlatega reza so kvocienti dveh sosednjih členov Fibonaccijevega zaporedja.

4 Da Vincijeva slika Vitruvijevega človeka

Poleg skice je napisano besedilo v značilni da Vincijevi zrcalni pisavi.

Besedilo je v dveh delih, prvi je nad in drugi je pod sliko. Zgornji del parafrazira Vitruvija:

Vitruvij je bil arhitekt in v svojem delu o arhitekturi navaja, da je dimenzije človeka Narava določila takole:

Ena dlani meri štiri prste, stopalo meri štiri dlani, komolec šest dlani, višina človeka štiri komolce, korak razkrcenih nog meri štiri komolce, kar je enako višini človeka, ki meri 24 dlani. Te mere je Vitruvij upo rabljal v svojih gradbenih načrtih.

Če razkrcite noge tako, da se vaša glava spusti za eno štirinajstino vaše višine, in dvignete roke, da se vaši iztegnjeni prsti dvignejo do višine vrha vaše glave, se bo v središču iztegnjenih udov nahajal popek, medtem ko bo prostor med nogami tvoril enakostranični trikotnik.

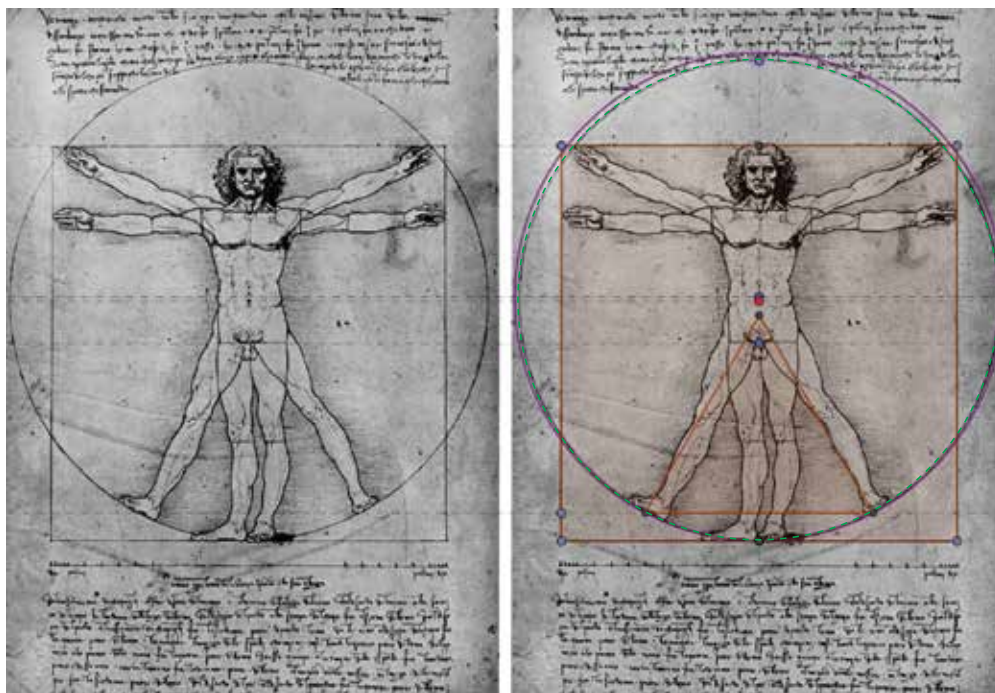
Spodnji del besedila opisuje naslednja razmerja:

Dolžina iztegnjenih rok je enaka višini človeka; od linije las do spodnjega dela brade je desetina človekove višine; od podbradka do vrha glave je osmina višine človeka; od prsi do vrha glave je šestina višine človeka; od vrhnjega dela prsnega koša do linije las je sedmina človekove višine.

Največja širina ramen je četrtnina višine človeka; od prsnih bradavic do vrha glave je četrtnina višine človeka; razdalja od komolca do konice prstov na roki je četrtnina višine človeka; razdalja od komolca do pazduhe je osmina višine človeka; dolžina dlani je desetina višine človeka; koren penisa je na polovici višine človeka; stopalo meri sedmino višine človeka; od stopala do kolena je četrtnina višine človeka; od spodnjega dela kolena do korena penisa je četrtnina višine človeka; razdalji od podbradka do nosu in od obrvi do linije las sta enaki dolžini ušes in eni tretjini obraza.

Točke, ki določajo ta razmerja, so na risbi označene s črtami. Pod risbo je črta, katere dolžina je enaka stranici kvadrata in je razdeljena na štiri komolce, od katerih sta zunanja dva razdeljena na šest dlani, pri dveh je zapisano zrcalno besedilo »dlan«; skrajni dve dlani sta razdeljeni na štiri prste, na vsaki je označeno »prsti«.

Na spodnji sliki je konstrukcija nad sliko narejena v programu geogebra. Program najdete na naslovu <https://www.geogebra.org/m/wfm9eykt>.



Zaključek

Pogosto se trdi, da je razmerje stranice kvadrata in polmera krožnice na sliki v zlatem rezu.

Vendar pa ob sliki besedilo govori, da je Vitruvij poznal pitagorejsko filozofijo narave in ji je tudi sledil. To pomeni, da so zanj bila zanimiva racionalna razmerja, ki naj bi skrivala v sebi naravne zakonitosti. Nič o zlatem rezu ni napisano. V besedilu manjka podatek o višini popka. To pa pusti priprta vrata za spekulacije. Podroben pogled na sliko nam razkrije, da je da Vinci tudi v tem primeru upošteval razmerja majhnih celih števil in določil velikost premera krožnice 17 enot. Torej 17/14 višine človeka. Ta mera se popolnoma ujema s sliko. Videti je, da konstrukcija slike temelji na tej predpostavki. Na sliki je središče da Vincijeve krožnice označeno z modro piko, medtem ko je središče rdeče krožnice, katere polmer je v zlatem razmerju s stranico kvadrata, označeno z rdečo piko. Čez da Vincijevo krožnico na sliki je konstruirana črtkana zelena krožnica. Obe krožnici se prekrijeta natančno do debeline črte, ravno tako natančno se popek nahaja v središču te krožnice. Zlata krožnica je večja krožnica na desni sliki.

Mathematics in school

1 2022 Volume 28

CONTENTS

Mateja Sirnik

A Spiral Approach in Teaching Mathematics 1

FROM THE THEORY FOR PRACTICE

Simona Pustavrh, Simona Vreš, Janez Žerovnik

Mathematics Assessment in General Matura Examination 2

Lidija Pulko, Melita Gorše Pihler

E-Learning Method for Teaching Mathematical Content in Primary and Secondary School via Distance Education 15

FROM THE CLASSROOM

Peter Jenič

Distance Between Two Places on Map 24

Urška Krajnc

Application of Digital Technology in Hybrid Teaching of Mathematics Instruction in Different Contexts 28

Rok Lipnik

Various Lesson Delivery Modes for Relating Interest Rates to Real-Life Situations 31

Karolina Ivanec

Geometry Seminar Paper in Second Year Grammar School 33

Andreja Pečovnik Mencinger

Grasping Pyramids Together 37

Daniela Beroš, Milena Čulav Markičević, Zlatko Lobor, Ivana Martinić

Logarithmic Scale 40

Jasmina Ducman

Mathematical Learning Difficulties 47

Nuša Cevzar

Mathematical Marathon 52

Alenka Močnik

Mathematics-Oriented Treasure Hunt with Actionbound Application 54

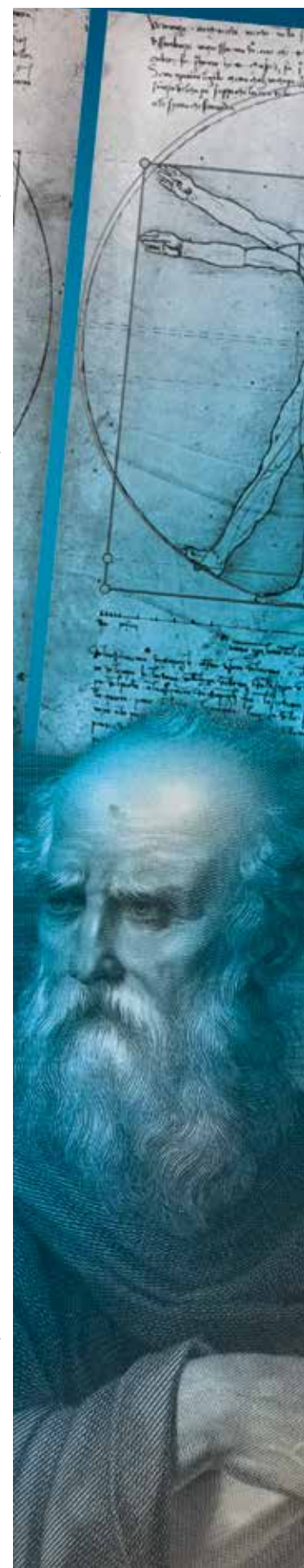
Inez Ceglar

Number π , Circumference of Circle, and Pi Day 57

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO

dr. Borut Jurčič Zlobec

Vitruvian Man 62



IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO



Kažipot Vzgoja in izobraževanje za trajnostni razvoj (VITR za 2030) ima pomemben cilj: **povečati prispevek vzgoje in izobraževanja h gradnji pravičnejšega in bolj trajnostnega sveta.**

Pričujoča publikacija opredeljuje

- nujne izzive, s katerimi se sooča naš planet,
- ter predstavi področja delovanja ter priporočila za nadaljnje korake pri odzivanju nanje s pomočjo vzgoje in izobraževanja.

Slovenski prevod publikacije sta založila UNESCO in Slovenska nacionalna komisija za UNESCO, izdal pa Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Publikacijo najdete v digitalni bralnici na spletni strani ZRSŠ.



Cilj izobraževanja za trajnostni razvoj je krepitev znanja, ozaveščenosti in ukrepanja za:

