Naslov članka/Article:

RAZISKOVALNE NALOGE IZ MATEMATIKE NA SREČANJU MLADIH RAZISKOVALCEV SLOVENIJE 2017

Avtor/Author:

dr. Borut Jurčič Zlobec

Matematika v šoli št. 2/2017, letnik 23

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2017

Spletna stran revije:

https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2017

dr. Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko Univerze v Ljubljani

Uvod

V letu 2017 je potekalo že 51. državno srečanje mladih raziskovalcev v Murski Soboti. Na končnem izboru za srebrna in zlata priznanja je bilo pred komisijo predstavljenih 12 raziskovalnih nalog. Komisijo so sestavljali Polona Repolusk, Mateja Grašič, Dominik Benkovič in Borut Jurčič Zlobec.

Iz prvega kroga je prispelo osemnajst nalog. Komisija je izbrala dvanajst nalog za srebrna in zlata priznanja. Te naloge so bile tudi predstavljene pred komisijo. Na koncu je komisija določila osem nalog za srebrno priznanje, štiri naloge pa so dobile zlato priznanje. Predstavljene naloge so bile naslednje:

Osnovne šole:

1. ZLATO *Včrtajmo kroge*: Nino Djordjević in Miha Mlinarič, mentor Jožef Senekovič, Osnovna šola Bojana Ilicha Maribor 2.

2. ZLATO *Kako lahko razdelimo trikotnik*: Tilen Komel, Bor Križaj in Dominik Uršič, mentorica Lucija Filipčič Križaj, Osnovna šola Komen.

3. SREBRNO *Kvadrati v pravokotniku*: Julija Vidmar in Lara Perko, mentor Jožef Senekovič, Osnovna šola Bojana Ilicha Maribor.

4. SREBRNO *Kitajsko množenje*: Jure Virtič in Metka Supej, mentor Jožef Senekovič, Osnovna šola Bojana Ilicha Maribor.

5. SREBRNO *Reuleauxov trikotnik*: Lea Strniša in Lara Stegnar, mentorica Alenka Repnik, Osnovna šola Borcev za severno mejo Maribor.

6. SREBRNO *Ploščine malo drugače*: Lara Vidic in Živa Jančar Bauman, mentorica dr. Lucija Željko, Osnovna šola Sostro.

Srednje šole:

1. ZLATO *Kombinatorična igra Catalanovih števil*: Martina Lokar in Tjaša Valič, mentor mag. Alojz Grahor, Škofijska gimnazija Vipava.

2. ZLATO *Jajčaste krivulje*: Neža Divjak in Miha Šalamun, mentorja Renata Hvala in doc. dr. Bojan Hvala, Prva gimnazija Maribor.

3. SREBRNO *Grupe kit*: Jernej Grlj, mentor Jaka Smrekar, Zavod sv. Stanislava za vzgojo, izobraževanje in kulturne dejavnosti.

4. SREBRNO *Sferična trigonometrija*: Jaka Bezjak, mentorica Simona Kokol, Gimnazija Ptuj.

5. SREBRNO *Ustvarjanje in 3D-vizualizacija fraktalov z Blenderjem*: David Mikek, mentor Nedeljko Grabant, Šolski center Velenje, Elektro in računalniška šola.

6. SREBRNO *Iskanje konsenza v pluralnem okolju*: Tjaša Gašperič, Rok Gornik in Zala Kogoj, mentorja Benjamin Tomažič in Matjaž Krnc, Zavod sv. Frančiška Saleškega za vzgojo, izobraževanje in kulturne dejavnosti.

Prevladovale so naloge z geometrijsko tematiko.

Predstavljenih je bilo sedem nalog iz geometrije, dve iz algebre, ena računalniška, ena kombinatorična in ena statistična.

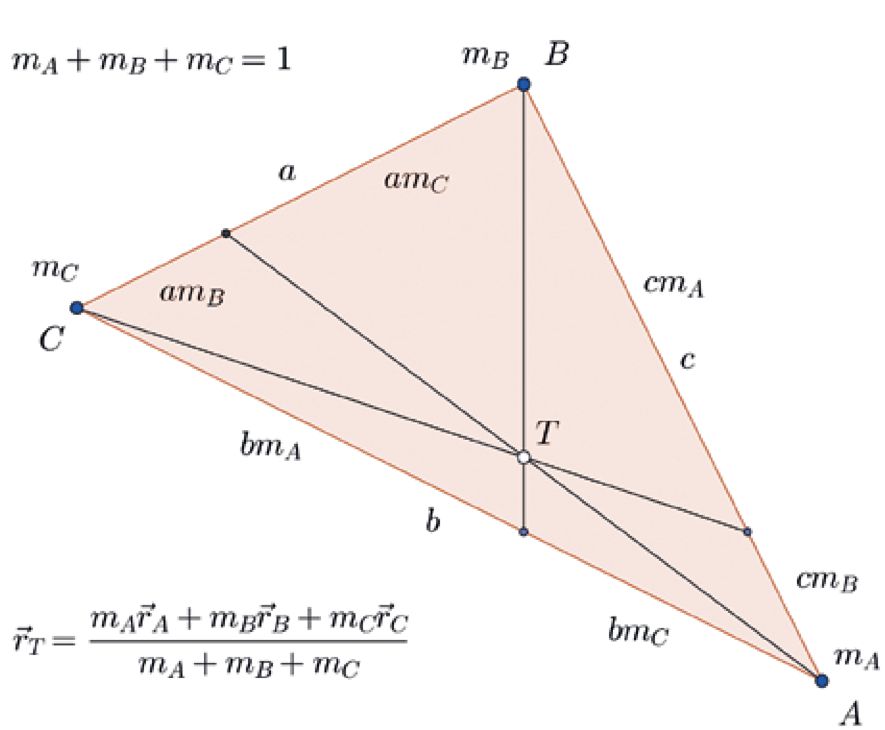
Kako lahko raziskovalne naloge še izboljšamo

1. Ponovila se je zgodba iz lanskega leta. Naloga *Kako lahko razdelimo trikotnik* je sicer dobila zlato priznanje, vendar pa bi lahko bila z malo truda, ali bolje rečeno, z veliko manj truda, kot je bilo vanjo vloženega, bolj prepričljiva in strokovna. Avtorji so posplošili pojem težiščnic v trikotniku tako, da so izbrane točke na stranicah trikotnika povezali z nasprotnim ogliščem in ugotavljali, v kakšnem razmerju morajo dane točke deliti stranice, da se bodo na koncu zveznice sekale v eni sami točki. Pri tem so avtorji pokazali, da obvladajo vektorski račun. Glede na to, da je naloga osnovnošolska, je to pomenljivo. Pri izračunih v nalogi so si pomagali s sistemom Mathematica. Obvladanje vektorskega računa in sistema Mathematica jim bo v nadaljnjem šolanju v veliko pomoč, zato lahko rečemo, da je raziskovalna naloga v polni meri dosegla svoj namen. Vendar pa bi lahko bil izračun pogoja, da se tri zgoraj omenjene zveznice srečajo v eni točki, mnogo krajši in bolj poučen kot pa tisti, ki je bil narejen v nalogi. V trikotniku lahko posplošimo težiščnice tako, da oglišča trikotnika obtežimo z različnimi utežmi. Če so vse tri uteži enake, potem dobimo običajno težišče trikotnika. Posplošene težiščnice dobimo tako, da razdelimo stranice v razmerju uteži v njenih krajiščih. Te se bodo vedno sekale v eni točki, to je v težišču sistema, kot prikazuje naslednja slika. Vzemimo, da je vsota mas enaka 1.

   Naj omenimo še nalogo *Ploščine malo drugače*, ki bi bila lahko z matematičnega vidika še bolj kakovostna.

2. V predstavljenih raziskovalnih nalogah se je že večkrat pojavil Pickardov izrek. To je izrek, ki nam pove, kako se lahko izračuna ploščina večkotnika s preštevanjem mrežnih točk, v katere je lik včrtan.

   Dana je pravokotna mreža točk. Vzemimo, da štiri sosednje točke tvorijo oglišča kvadrata ploščine 1. Večkotnik je včrtan tako, da se vsa oglišča nahajajo v točkah mreže. Na sliki je označen šestkotnik, njemu očrtani



pravokotnik in trikotnik, ki je nastal s prepolovitvijo pravokotnika po eni od diagonal.

Pickardov izrek pravi, da je ploščina lika enaka $P = a + b/2 - 1$, kjer je a število notranjih točk v liku, medtem ko je b enako številu točk, ki ležijo na robu (na stranicah in v ogliščih) mnogokotnika. V našem primeru je ploščina pravokotnika enaka
$P = 10 \cdot 8 = 80 = 63 + 36/2 - 1$,
ploščina trikotnika je
$P = 80/2 = 40 = 31 + 20/2 - 1$
in ploščina šestkotnika enaka
$P = 44 - 9/2 - 1 = 47{,}5$ enot.

V nalogi je korektno izpeljana formula le za pravokotnik.

Za splošnejši večkotnik pa ni izpeljana. Hitro se vidi, da formula velja za pravokotni trikotnik, ki je polovica pravokotnika. Nato jo takoj posplošimo za pravokotni trapez, ki je sestavljen iz pravokotnika in pravokotnega trikotnika. Natančno izpeljavo prepuščam bralcem za vajo.

V raziskovalni nalogi je bilo rečeno, da sta avtorici oblikovali tudi like, katerih ploščine nista znali izračunati po formuli, ampak sta jo določili le s pomočjo štetja kvadratkov.

Tu sta bili nadobudni učenki prikrajšani za čudovito preprosto formulo, s pomočjo katere se da izračunati ploščina poljubnega večkotnika. Formula je napisana v sliki znotraj šestkotnika.

V nalogi najdemo še dve nerodnosti. Ko sta računali ploščino likov z luknjami, ki se med seboj ne dotikajo, sta empirično ugotovili, da je ploščina enaka $P = a + b/2 + (n - 1)$, kjer je n število lukenj. Dokaz je čisto preprost. Vzamemo lik, ignoriramo luknje in izračunamo ploščino s pomočjo Pickardovega izreka. Nato pa za vsako luknjo enako določimo ploščino in jih odštejemo od osnovnega lika. Sledimo natančno, kako se spreminjajo notranje točke v robne točke končnega lika.

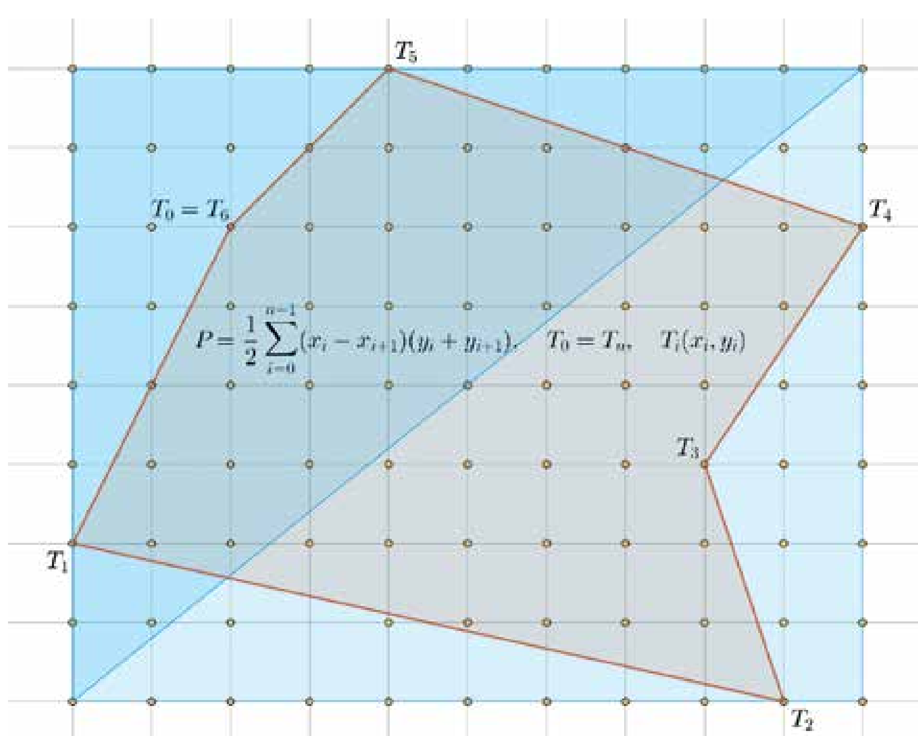
$P = a' + b'/2 - 1 - (a_1 + b_1/2 - 1) - \ldots$
$\ldots - (a_n + b_n/2 - 1) = a + b/2 + (n - 1)$

$a = a' - a_1 - \ldots - a_n - b_1 - \ldots - b_n$, $b =$
$= b' + b_1 + \ldots b_n$.

Druga nerodnost je v primeru sestavljenih likov, ki se stikajo v enem oglišču.

Takoj se vidi, brez empiričnih izračunov, ki so bili narejeni, kako obravnavati oglišča, ki so skupna več delom. Sestavne dele obravnavamo ločeno in na koncu seštejemo ploščine.

3. Naslednja stvar, na katero sem že večkrat opozoril, izvira iz navodil, kako mora biti sestavljena raziskovalna naloga in kaj loči raziskovalno nalogo od seminarske. Navodila so za naloge iz matematike popolnoma neuporabna. Zaradi upoštevanja teh navodil se raziskovalci in mentorji včasih znajdejo



v malodane smešnih situacijah. V navodilih piše, da morajo raziskovalci napisati hipoteze, ki naj bi jih njihova raziskovalna naloga ovrgla oziroma potrdila. V matematiki se reče, da bomo v nalogi izpeljali dokaz Pickovega izreka, ne pa da zapišemo med hipoteze, da predpostavimo, da Pickov izrek velja. Seveda velja, saj ga je Adolf Josef Pick dokazal že pred 120 leti. Hipoteze in njihovo preverjanje pa naravnost spodbujajo anketne raziskovalne naloge, ki so v matematiki nezaželene. Skoraj vsako leto pride nekaj takih nalog, kljub našim naporom nas na lokalnih izborih ne upoštevajo.

Naj omenimo še dva primera bolj ali manj posrečenih hipotez, ki smo jih našli v nalogah:

a. Predpostavljam, da Pitagorovega izreka ni izumil Pitagora, temveč ena od prejšnjih civilizacij.
b. Predpostavljam, da se je dedek odločil napisati članek o tej temi, ker se je zelo zanimal za zgodovino.

Seveda pa se glavna pripomba tiče anketnih nalog. Praviloma so nekakovostne, kar se tiče statističnih obdelav, kar je tudi razumljivo glede na predznanje, ki ga imajo avtorji, in matematično nezanimive. Naj omenimo eno od ponesrečenih anketnih vprašanj v eni od nalog.

Vprašanje: Kje se pri matematiki srečujemo z neskončnostjo?

Izbira odgovorov:

1. Aritmetika
2. Geometrija
3. Nikjer v matematiki
4. Aritmetika, geometrija
5. Aritmetika, geometrija, nikjer v matematiki

Primer ne potrebuje komentarja.

Kratek pregled nalog, ki so dosegle zlata priznanja

1. Včrtajmo kroge

Predstavimo nalogo s povzetkom in zaključkom.

Vemo, da lahko v kvadrat včrtamo krog tako, da se dotika vseh stranic kvadrata. Primer takega problema je razporeditev pločevink, kjer pločevinke z okroglim dnom razporedimo tako, da je ploščina ploskve, na kateri stojijo, čim manjša. V raziskovalni nalogi nas je zanimalo, kako v enakostranični trikotnik in kvadrat včrtamo en krog in več. Pri tem morajo biti polmeri vseh krogov enaki. Kakšna je razporeditev krogov in polmeri krogov v odvisnosti od dolžine stranice enakostraničnega trikotnika in kvadrata, da pokrijejo največjo možno ploščino izbranega lika? Ta problem se imenuje pakiranje krogov, v angleščini circle packing.

V raziskovalni nalogi smo v kvadrat in enakostranični trikotnik včrtali skladne kroge z največjim možnim polmerom. Raziskali smo možnosti glede na število in razporeditev krogov. Krogi so se v večini primerov dotikali med seboj ali s stranicami kvadrata oziroma enakostraničnega trikotnika. Za enakostranični trikotnik smo ugotovili, če vanj včrtamo trikotniško število (1, 3, 6, 10, 15 ...) krogov, polmer kroga izrazimo z dolžino stranice trikotnika, kjer n predstavlja zaporedno trikotniško število.

V trikotnik lahko včrtamo tudi druga števila krogov, kot so samo trikotniška števila (recimo štiri ali sedem krogov). Če pa v trikotnik včrtamo en krog manj, kot je poljubno trikotniško število, vedno ostane prostor še za dodaten enako velik krog.

V nalogi je bilo uporabljeno orodje GeoGebra. Avtorja sta naredila mnogo slik in izračunov. Naloga je oblikovno zelo skrbno narejena.

2. Kako lahko razdelimo trikotnik

Predstavimo nalogo z njenim povzetkom.

Znano je, da se težiščnice v trikotniku delijo v razmerju 2 : 1. Raziskovali smo, v kakšnem razmerju se delijo daljice, če stranic trikotnika ne razdelimo na dva, pač pa na tri ali več enakih delov. Ugotavljali smo tudi, v kakšnem razmerju moramo razdeliti stranice, da se daljice iz vseh treh oglišč sekajo v eni točki.

Pri risanju z GeoGebro smo opazili zanimivo lastnost: če povečujemo število daljic v trikotniku, se ne povečuje vedno tudi število njihovih presečišč. Podobno velja tudi za število vseh likov, na katere te daljice razdelijo začetni trikotnik. Iskanje razloga za to lastnost nas je pripeljalo do splošnega pravila za število vseh presečišč in likov v trikotniku. Ko smo želeli to pravilo uporabiti pri velikem številu daljic, se je izkazalo, da zahteva veliko računanja, zato smo si pomagali s sistemom Mathematica.

Čeprav smo sprva želeli raziskovati daljice le v trikotniku, smo na koncu začeli razmišljati širše in ugotavljati pravila tudi za število presečišč in likov v poljubnih večkotnikih.

3. Kombinatorična igra Catalanovih števil

V povzetku naloge je zapisano:
V nalogi obravnavamo Catalanova števila. Švicarski matematik Leonhard Euler je raziskal problem, na koliko načinov lahko razdelimo konveksni večkotnik na trikotnike z nesekajočimi se diagonalami: trikotnik na en način, štirikotnik na dva načina, petkotnik na pet načinov, šestkotnik na 14 načinov... Tako je dobil zaporedje števil 1, 2, 5, 14, 42, 132 ... Števila so kasneje poimenovali Catalanova števila po belgijskem matematiku Catalanu, ki je poleg mnogih drugih nadaljeval raziskave na tem področju. Do sedaj je bilo odkritih veliko primerov iz matematike in drugih področij, kjer se pojavijo Catalanova števila. V nalogi predstavimo osnovne že znane primere, izpeljemo eksplicitno in rekurzivni formuli ter pokažemo glavni metodi dokazovanja, da gre za Catalanova števila. Temeljni cilj naloge pa je opisati nove primere množic matematičnih in drugih objektov ter dokazati, da so njihove moči Catalanova števila.

4. Jajčaste krivulje

V literaturi obstaja več metod, kako narisati krivuljo, ki spominja na obliko ptičjega jajca. Pri večini teh metod gre za spretno sestavljene običajne krožne loke. Posebej zanimiva pa je povsem drugačna metoda, pri kateri jajčaste krivulje dobimo kot slike elips s pomočjo preslikave, ki je matematiki dobro poznana in se imenuje inverzija. Pri tem velika polos elipse leži na premici skozi središče krožnice inverzije. V raziskovalni nalogi obravnavamo na ta način dobljene jajčaste krivulje v odvisnosti od začetnih parametrov: abscise središča in obeh polosi elipse. Različne oblike ptičjih jajc bomo poskušali opisati s karakterističnimi količinami, te količine pa potem realizirati z izbiro ustreznih začetnih parametrov.

Namen raziskovalne naloge je bil raziskati oblike in lastnosti jajc ter risanje le-teh z inverzijo. Med delom pa se je pojavilo novo območje raziskovanja, konstruiranje jajc s krožnimi loki. Delo je večinoma potekalo gladko. Težave pa so se pojavile proti koncu, pri načrtovanju risanja jajc, saj sva ugotovila, da je ta postopek precej omejen. Definicije za lastnosti jajc (podolgovatost, asimetričnost in topost), številske vrednosti (maksimumi, minimumi in povprečne vrednosti lastnosti) sva povzela iz literature in izpeljala formule za količine, povezane z jajci, nastalimi s pomočjo inverzije.

Večina najinega dela je temeljila na podlagi uporabe programa GeoGebra, ki nama je pomagal pri risanju grafov in konstrukciji jajc. S pomočjo GeoGebre sva prišla tudi do nekaterih, za nadaljevaje potrebnih vrednosti. Obravnavana tema je še vedno precej odprta za nadaljnje raziskovanje. Raziskovali bi lahko še druge metode risanja jajc, s katerimi bi lahko ustvarili več kombinacij vrednosti parametrov. Skratka, našli bi metodo, ki bi bila še bolj učinkovita in univerzalna, kot je bila naša.

Avtorja sta pokazala spretnost pri načrtovanju z orodjem GeoGebro. Oblikovno je bila naloga zelo dobro narejena, tako da si zasluži najvišje priznanje.

Za konec še v razmislek. Morda je jajce hruškaste oblike zato, ker hruškasta oblika zagotavlja, da se jajce na poševni polici ne odkotali predaleč, ker prej zavije.

Kako je naravni izbor vplival na obliko jajca?

Zaključek

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo zanimivih nalog.

Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda jim bomo s tem dali kakšno idejo ali pa jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja seveda tudi zanje.

Nekatere naloge smo tudi kritično pretresli, predvsem, da opozorimo na napake. Upamo, da se bodo mentorji in raziskovalci v prihodnje tem napakam izogibali.

Hitro in zanesljivo računanje – Tekmuj sam s seboj, časom in sošolci

Alen Divjak
Osnovna šola Litija

Tekmovanje *Hitro in zanesljivo računanje* je aktivnost, s pomočjo katere učenci osvojijo in izpilijo hitrost in zanesljivost računanja v seštevanju, odštevanju, množenju, deljenju, iskanju neznanega števila in primerjavi. Tekmovalci so razdeljeni v več starostnih skupin, štiri so namenjene osnovnošolcem, ena srednješolcem in ena odraslim. Tekmovanje poteka v treh fazah: v prvi fazi so trije krogi tekmovanja v šolski računalniški učilnici na vsaki šoli, ki tekmuje. Sledi druga faza, državni finale, kjer se zberejo najboljši in se v živo v enournem tekmovanju pomerijo na eni od šol. Tretja faza pa je meddržavno tekmovanje. Tekmovanje *Hitro in zanesljivo računanje* je bilo dvanajst let pod okriljem Zavoda RS za šolstvo. Na Osnovni šoli Litija smo se odločili, da stopimo skupaj in prevzamemo organizacijo tekmovanja ter s tem nadaljujemo tradicijo. Na spletni strani si.miksike.eu je objavljen nov pravilnik tekmovanja in razpis s časovnim razporedom. Preko elektronske pošte smo nagovorili 452 osnovnih šol. Tekmovanje je bilo le 14 dni po povabilu. Med 5. in 16. decembrom se je odvil prvi krog računanja. Rezultat je bil prijetno presenečenje: 2540 tekmovalcev. Tekmovanje je potekalo brez zapletov. Sledila sta še dva kroga, v januarju in februarju, prav tako brez posebnosti in zapletov. Rezultat tekmovanja v prvi fazi: tekmovanja se je udeležilo 2900 osnovnošolk in osnovnošolcev iz 121 različnih osnovnih šol. V prvem letu smo se osredotočili na tekmovanje osnovnošolcev, zato je bila med srednješolci slabša zastopanost. Tekmovanja se je udeležilo zgolj 19 srednješolk in srednješolcev. Sledila je priprava državnega finala: sobota, 4. marec 2017, za nekatere takoj po zimskih počitnicah. Na državno tekmovanje iz hitrega iz zanesljivega računanja je bilo povabljenih 74 tekmovalk