

Naslov članka/Article:

RAZISKOVALNE NALOGE IZ MATEMATIKE NA SREČANJU MLADIH RAZISKOVALCEV SLOVENIJE 2016

Avtor/Author:

Borut Jurčič Zlobec

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



Matematika v šoli št. 1/2017, letnik 23

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2017

Spletna stran revije:

<https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>

tematiko zlatega reza, verižnih ulomkov in Evklidovega algoritma, modulsko poštevanje, tri vrzeli in Fibonaccijevo zaporedje ter Fordove krožnice. Zelo zanimivi so Fareyevi nizi ulomkov, ki imajo lepo geometrijsko konstrukcijo in kopico ne navadnih lastnosti. Tako osmislijo seštevanje ulomkov, kjer iz ulomkov $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ dobimo ulomek $\frac{a+c}{b+d}$. Omenimo, da Fareyev niz $F(n)$, kjer je n naravno število, tvorijo okrajšani ulomki z intervala $[0,1]$, katerih imenovalci ne presegajo n . Na primer niz $F(4)$ sestavljajo števila $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1$. Računalniško podkovani učitelji se lahko pri krožkih in delavnicah lotijo tudi vizualizacije fraktalov, še posebej fraktalnih krivulj z uporabo t. i. želje grafike.

Zadnji vidik je vključevanje fraktalnih struktur in drugih primerov iz knjige pri pouku matematike kot motivacijskih primerov, zanimivosti ali primerov uporabe pri utrjevanju snovi. Skratka za popestritev raznih matematičnih vsebin pri pouku. Fraktali se lahko naravno vključijo k vsebinam, ki obravnavajo vzorce in zaporedja. Začetne konstrukcije fraktalov, kot sta Kochova snežinka ali trikotnik Sierpinskega, se lahko predstavijo pri vsebinah o geometrijskih likih, tematiki preštevanja objektov, računanju ploščin, ugotavljanju potenčnih povezav. V srednji šoli jih lahko naravno uporabimo pri obravnavi geometrijske vrste. Sama iteracija je kot zanimiv primer lahko uporabljena pri obravnavi odvoda in enačbe tangente.

Zanimivost. Ste vedeli, da je zaporedje 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ... (rekurzivno podano kot $a_0 = a_1 = 1$ in $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ za $n \geq 2$) z imenom Fibonaccijevo zaporedje poimenoval francoski matematik Lucas v 19. stoletju? Če v rekurziji za Fibonaccijevo zaporedje spremenimo začetno vrednost $a_0 = 2$, dobimo Lucasovo zaporedje 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ... Analiza pri štetju parov spirali pri borovih storžih je pokazala, da so v 95 % v Fibonaccijevem zaporedju, v 4 % v Lucasovem zaporedju in 1 % je neopredeljenih. Ne samo matematika, tudi narava očitno pozna statistične stopnje značilnosti! ■

Dominik Benkovič,
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2016

Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko Univerze v Ljubljani

Uvod

V letu 2016 je potekalo že 50. državno srečanje mladih raziskovalcev v Murski Soboti. Na končnem izboru za srebrna in zlata priznanja je bilo pred komisijo predstavljenih 10 raziskovalnih nalog. Komisija so sestavljali Polona Repolusk, Mateja Grašič, Dominik Benkovič in Borut Jurčič Zlobec. Komisija je izbrala šest nalog za srebrno priznanje, štiri naloge pa so dobile zlato priznanje.

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo zanimivih nalog. Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda jim bomo s tem dali kakšno idejo ali pa jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja seveda tudi zanje.

Predstavljene so bile štiri naloge iz teorije števil, tri geometrijske, dve iz diskretne matematike, ena iz kombinatorike.

Poleg zmagovitih nalog omenimo tudi nalogo, ki ni dosegla najvišjega priznanja, ki pa bi ga lahko, če bi mentor skrbneje usmerjal učence k matematičnemu razmišljanju.

Kako lahko raziskovalne naloge še izboljšamo

Tu bomo omenili nalogo z naslovom *Oddaljenosti in krivulje v ravnini*. Naloga govori o geometrijskem mestu točk, katerih vsota ali razlika razdalj od dveh danih točk je konstantna. V nalogi so problem posplošili tudi za primere, ko je eno od točk nadomestila premica oziroma krožnica. Pri tem so naleteli na krivulje drugega reda, elipso, hiperbolo in parabolo.

Naloga je bila skrbno narejena. Učenci so pokazali, da obvladajo programsko orodje Geogebra. Motilo je edino to, da niso opazili, da je mogoče en problem prevesti na drugega tako, da ni treba vedno znova ponavljati celotnega izračuna. Na primer,

geometrijsko mesto točk, ki so enako oddaljene od krožnice in točke lahko prevedemo na geometrijsko mesto točk, katerih razlika razdalj od dane točke in središča krožnice je enaka polmeru krožnice, če točka leži zunaj krožnice, in katerih vsota razdalj je enaka polmeru krožnice, ko se točka nahaja znotraj krožnice.

Podobno bi lahko pojem razlike razdalj od točke in premice prevedli na enako oddaljenost od točke in primerno izbrane njej vzporedne premice.

Naloge, ki so dosegle zlata priznanja

Najvišja priznanja so dosegle štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski.

1. **Paposova veriga v arbelosu**
Avtorica: Tijana Gajanović
Mentor: Vesna Harej
Šola: OŠ Dravljje, Ljubljana

2. Magični kvadrati

Avtorica: Ida Vavpetič

Mentor: Igor Prešern

Šola: OŠ Riharda Jakopiča, Ljubljana

3. Origamika

Avtorji: Sara Maraž, Tjaš Božič, Miha Torkar

Mentor: Alojz Grahor

Šola: Škofijska gimnazija Vipava

4. Večkotniška Mersenova števila

Avtor: Tim Salecl Žižek

Mentor: Andreja Hočevar

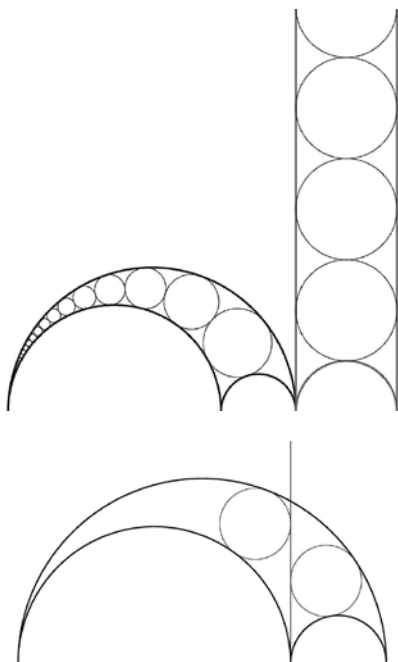
Šola: Gimnazija Poljane, Ljubljana

Kratek pregled nalog, ki so dosegla zlata priznanja

Paposova veriga v arbelosu

V raziskovalni nalogi se je avtorica ukvarjala z geometrijskim likom, ki se imenuje arbelos, kar po grško pomeni čevljarški nož. Ta lik sta poznala že grška matematika Arhimed in Papos Aleksandrijski.

Arbelos je lik, omejen s tremi polkrožnimi loki, tako da je premer največjega enak vsoti premerov manjših dveh polkrožnih lokov. Avtorica je pregledala več zanimivih krožnic, ki so vrtane v arbelos. Med drugim je govorila o Arhimedovih dvojčkih, Paposovi verigi, Apolonijevi, Bankoffovi in Schochovi krožnici. Konstrukcije je narisala s programskim orodjem Geogebra.



Slika 1: Zgoraj je prikazana Paposova veriga, spodaj pa Arhimedova dvojčka

Zanimivo je, da je polmer Arhimedovih dvojčkov enak $ab/(a+b)$, kjer sta a in b polmera manjših krožnic arbelosa. Slika 1 na levi prikazuje Paposovo verigo in inverzijo verige preko primerno izbrane krožnice.

Naloga je opremljena z mnogo lepo izdelanimi risbami s pomočjo programskega orodja Geogebra.

Magični kvadrati

V povzetku naloge je med drugim zapisano:

V nalogi sem raziskovala magične kvadrate. Ogledala sem si zgodovino magičnih kvadratov in znana odkritja na tem področju. Raziskala sem osnovne lastnosti magičnega kvadrata in števil, ki jih vsebuje. Posvetila sem se lastnostim, ki so mi omogočile lažje štetje magičnih kvadratov. Izvedela sem, s kakšnimi posebnimi magičnimi kvadrati se matematiki ukvarjajo in kakšne probleme so si zastavili. Zelo me je

zanimal magični kvadrat iz popolnih kvadratov. (Vavpetič I., 2016)

Avtorica je v svoji nalogi uporabljala programsko orodje Mathematica.

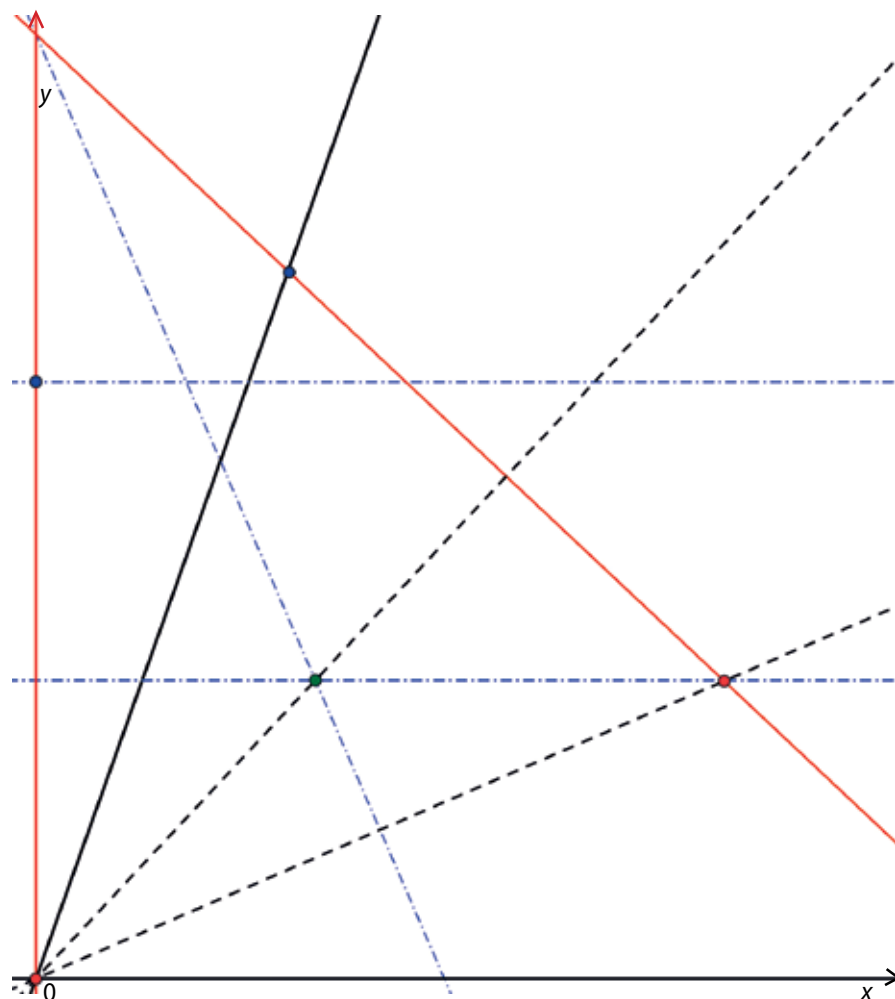
Med drugim je s pomočjo tega orodja iskala magične kvadrate reda 3×3 . Ugotavljala je naraščanje števila le-teh v odvisnosti od njihovega sredinskega števila.

V nalogi je avtorica pokazala, da obvlada programsko orodje Mathematica. Njen jezik je matematično korekten in tekoč. Naloga je lep izdelek.

Origamika

Nalogo predstavimo kar z njenim povzetkom.

Origami je japonska umetnost zgibanja papirja. Posebna oblika origamija je matematični origami, pri katerem prepogibamo list papirja (model ravnine) in proučujemo matematične lastnosti objektov v ravnini,



Slika 2: Trisekcija kota

ki pri tem nastanejo (točke, premice). Kazuo Haga je matematični origami poimenoval *origamics*, v nalogi pa predlagamo pojem *origamika*. Dokazano je, da je matematični origami močnejše orodje, kot sta neoznačeno ravnilo in šestilo.

Tako je bil na primer s prepogibanjem papirja rešen problem podvojitve kocke in problem razdelitve kota na tretjine, saj je s prepogibanjem papirja mogoče rešiti ku-bično enačbo. Cilj raziskovalne naloge je postaviti in dokazati čim več matematičnih hipotez (matematičnih izzivov), ki izvirajo iz prepogibanja lika enakostraničnega trikotnika. V nalogi je raziskanih in dokazanih preko trideset matematičnih izzivov. (Maraž, S., Božič, T., Torkar, M., 2016)

Med drugim so avtorji tudi pokazali, da obvladajo programsko orodje Geogebra. Naloga si zasluži vse priznanje.

Kot zanimivost bomo razložili konstrukcijo trisekcije kota s pomočjo origamike. S šestilom in neoznačenim ravnilom takšna konstrukcija ni mogoča.

Na kratko opišimo konstrukcijo, ki je prikazana na sliki 2. Kraka kota sta označena s polnima črnima črtama. Papir prepognemo tako, da dobimo dve vzporednici z osjo x . Nastala vzporedna pasova morata imeti enako širino. Na osi y je označeno presečišče z gornjo vzporednico osi x z modro barvo, medtem ko je koordinatno izhodišče označeno z rdečo barvo.

Nato prepognemo papir po poševni modri črti tako, da se modra in rdeča točka na osi y pokrijeta s točkama enake barve na poševni rdeči črti, ki predstavlja položaj osi y po pregibu. Rdeča točka na poševni rdeči črti leži na presečišču le-te s spodnjo vzporednico osi x , medtem ko leži modra točka na poševnem kraku kota. Tretja (zeleno) točka je presečišče pregiba (poševna modra črta) s spodnjo vzporednico, torej s tisto, ki je bližje osi x . Naredimo še dva pregiba, kjer črti pregiba vsebujeta koordinatno izhodišče in eno od dveh točk (zeleno oziroma rdečo).

Mersennova in večkotniška števila

Formula za n -to s -kotniško število.

$$P(n, s) = \frac{n^2(s-2) - n(s-4)}{2}$$

Mersennova števila so števila oblike $M(n) = 2^n - 1$. Mersennova praštevila pa so praštevila oblike $P = 2^p - 1$, v tem primeru je tudi p praštevilo.

Na primer število 15 je večkotniško število za ($s = 3$, $n = 5$) in Mersennovo število za ($m = 4$).

Avtor je opazoval rešitve enačbe

$$2^m - 1 = \frac{n^2(s-2) - n(s-4)}{2}$$

za naravna števila m , n in s .

V literaturi je našel Ramanujan-Nagellovo enačbo, to je enačbo oblike

$$x^2 + D = AB^y,$$

kjer so A , B , D znana cela števila, medtem ko sta x , y neznanki. Za enačbo se ve, da je število celoštevilčnih parov njenih rešitev (x, y) končno.

Ugotovil je, da je tudi njegova enačba $2^m - 1 = \frac{n^2(s-2) - n(s-4)}{2}$ tega tipa za

$$x = 2(s-2)n - s + 4$$

$$y = m + 3$$

$$D = -s^2 + 16s - 31$$

$$A = s - 2$$

$$B = 2$$

V nadaljevanju je avtor dokazal zanimive izreke, kot je na primer, da obstajata le dve trikotniški Mersennovi števili in da kvadratna Mersennova števila ne obstajajo.

Naloga je tudi oblikovno lep izdelek. Narejena je s pomočjo orodja LaTeX, ki je namenjeno urejanju matematičnih besedil.



Slika 3: Na sliki so prikazana trikotniška števila (vir Wikipedija).

Zaključek

Vsakoletna objava recenzije zanimivih nalog ima dva namena: prvič, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, in drugič, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda bo kdo našel spodbudo oziroma idejo za svojo raziskovalno nalogo. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja tudi zanje. ■

Viri in literatura

Maraž, S., Božič, T., Torkar, M. (2016). *Origamika*. Raziskovalna naloga iz matematike.

Vavpetič, I. (2016). *Magični kvadrati*. Raziskovalna naloga iz matematike.