

Naslov članka/Article:

RAZISKOVALNE NALOGE IZ MATEMATIKE NA SREČANJU MLADIH RAZISKOVALCEV SLOVENIJE 2015

Avtor/Author:

Borut Jurčič Zlobec

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



Matematika v šoli št. 3-4/2016, letnik 22

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2016

Spletna stran revije:

<https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>



Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2015

Borut Jurčič Zlobec
Univerza v Ljubljani
Fakulteta za
elektrotehniko

α Uvod

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je čim zgodnejše uvajanje mladih v znanost in popularizacija znanosti ter tehnike, odkrivanje nadarjenih učencev in dijakov na posameznih področjih in spodbujanje k poglobljanju njihovega znanja in raziskovalni dejavnosti.

V letu 2015 je potekalo že 49. državno srečanje v Murski Soboti. Na končnem izboru v tekmovanju za srebrna in zlata priznanja je bilo pred komisijo predstavljenih 12 raziskovalnih nalog. Komisijo so sestavljali Polona Pavlič, Janja Jerebic, Dominik Benkovič in Borut Jurčič Zlobec. Komisija je izbrala šest nalog za srebrno priznanje, šest nalog pa je dobilo zlato priznanje.

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo zanimivih nalog. Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda jim bomo s tem dali kakšno idejo ali pa jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja seveda tudi zanje.

Po temah so naloge, ki so bile predstavljene, štiri geometrijske, tri iz teorije iger, tri iz teorije števil, ena iz obdelave slik in ena statistična.

β Kako lahko raziskovalne naloge izboljšamo

Preden se posvetimo zmagovitim nalogam, bi rad omenil, kaj bi se dalo izboljšati, da bi tudi naloge, ki niso prejele najvišjih priznanj, lahko dobile boljše ocene. Navedel bom enega od primerov, ki se jim lahko v prihodnje izognemo z malo več matematičnega razmišljanja.

Moč matematike je v tem, da se obrne od posebnega k splošnemu, v abstrakciji. Algebrske strukture se razkrijejo šele potem, ko nas konkretna števila ne zanimajo več in jih nadomestimo s črkami, ki smo jih v šoli imenovali obča števila. Distributivnega zakona $a(b + c) = ab + ac$ ne bomo zaznali, če imamo opravka s konkretnimi števili. V konkretnih primerih bomo prezgodaj sesteli števila b in c , da bi opazili distributivnost. To opazimo le, če nas nekaj zadrži, da računa ne zaključimo prezgodaj. To so pa ravno obča števila. Vrednosti vstavimo šele čisto na koncu, vmes pa uživamo v algebrskih strukturah.

Naloga: Enakostranični trikotnik s pregibanjem traku

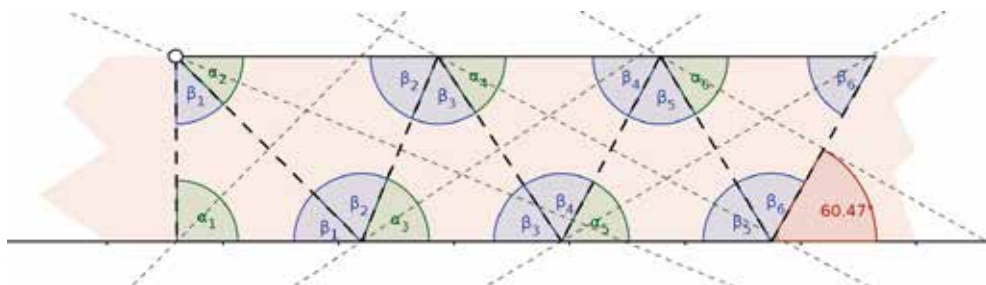
Naloga je vzbudila pozornost, ker je bila to tema, kakršne si samo želimo. Avtorju in

mentorju se je ob posrečeno izbrani temi ponudila priložnost, da pokažeta, kako se rešujejo problemi, če uporabimo pravi matematični pristop. Vendar sta ostala na pol poti in tako žal nista dosegla najvišjega priznanja. Ustavimo se na kratko pri nalogi.

Takole piše avtor v uvodu: Pri uri zgodovine smo dobili učni list, ki ga je bilo treba obrezati, preden smo ga lahko zalepili v zvezek. Trak papirja, ki je postal odpadke, sem začel prepogibati. Prepogibanje traku in opazovanje nastalega vzorca me je spodbudilo k raziskovanju. Pri pregibanju so nastajali trikotniki, sprva enakokraki, po nekaj pregibih pa enakostranični.

Kako bi to nalogo rešili?

1. Trikotniki so enakokraki, kot ob vrhu v i -tem trikotniku je α_i , medtem ko sta kota ob osnovnici enaka β_i .
2. Oba para krakov kotov, α_{i+1} in β_i , sta usmerjena v nasprotno smer, kota sta skladna $\alpha_{i+1} = \beta_i$.
3. Ker je vsota notranjih kotov enaka 180° , lahko v i -tem trikotniku zapišemo enačbo $\alpha_i + 2\beta_i = 180^\circ$. Ko vstavimo α_{i+1} namesto β_i , dobimo rekurzivno zvezo med koti ob vrhu enakokrakih trikotnikov $\alpha_i + 2\alpha_{i+1} = 180^\circ$.



Vir <https://www.geogebra.org/apps/?id=RrPNCmxQ>

4. Izrazimo α_{i+1} in dobimo $\alpha_{i+1} = \frac{180^\circ - \alpha_i}{2}$. Če obstaja limita α_i , ko gre i preko vseh meja, imenujmo jo α , kar je bilo v nalogi posredno tudi pokazano, potem mora ta ustrezati enačbi: $\alpha + 2\alpha = 180^\circ$ oziroma $3\alpha = 180^\circ$ od tod pa sledi, da je $\alpha = 60^\circ$.
5. Tako smo pokazali, da se trikotniki približujejo enakostraničnemu trikotniku. Lahko pa bi izpeljal neposreden izraz za kot ob vrhu enakostraničnega trikotnika po n -tem prepogibu
- $$\alpha_n = \alpha_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 60^\circ \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Naloga: Pitagorov izrek

Naloga na temo posplošenega Pitagorovega izreka se je v različnih oblikah že večkrat pojavila na izboru. Nad stranicami pravokotnega trikotnika ne konstruiramo kvadratov, kot je to v navadi, ampak kakšen drug lik. V določenih primerih velja za ploščine konstruiranih likov, da je vsota ploščin likov, konstruiranih nad katetama, enaka ploščini lika, konstruiranega nad hipotenuzo. Večinoma so tako nalogo reševali tako, da so za vsak konstruiran lik posebej dokazovali, da je vsota ploščin likov, konstruiranih nad katetami, enaka ploščini lika, konstruiranega nad hipotenuzo.

Običajno se izberejo pravilni mnogokotniki ali polkrogi. Pri pravilnih mnogokotnikih se njihove stranice ujemajo s stranicami trikotnika, pri polkrogu pa je stranica trikotnika običajno enaka premeru polkroga. V nekaterih primerih smo bili priča bolj zapletenim likom, kot so pentagrami itd. Kako naj bi se naloga rešila s splošnim pristopom?

Zapišimo Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$ pomnožimo enačbo s številom k , različnim od nič $ka^2 + kb^2 = kc^2$.

Če je ploščina lika, konstruiranega nad stranico a , enaka ka^2 , kjer je konstanta k neodvisna od velikosti lika, potem bo za ploščine likov, konstruiranih nad stranicami pravokotnega trikotnika, veljal Pitagorov izrek.

Naloga mora pokazati le to, da za ploščine izbranih likov res velja omenjena zveza.

Pravilni n -kotnik nad stranico a je sestavljen iz n enakokrakih trikotnikov z osnovnico enako a in višino v_a . Kot ob vrhu pa je enak $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Ploščina pravičnega n -kotnika s stranico enako a je potemtakem enaka $p = \frac{nav_a}{2}$. Zaradi podobnosti je višina na osnovnico a , v_a premosorazmerna osnovnici. Vzemimo, da v primeru, ko je $a_0 = 1$, je $v_{a_0} = v_0$.



Liki nad stranicami pravokotnega trikotnika
(vir <http://www.contracosta.edu/legacycontent/math/Pythagoras.htm>).

Potem je $v_a = v_0 a$. Od tod je ploščina pravičnega mnogokotnika enaka $p = \frac{na^2 v_0}{2}$. V tem primeru je $k = \frac{nv_0}{2}$ oziroma natančneje $k = \frac{n}{4 \cot \frac{\pi}{n}}$. Pri dokazu uporabimo podobnost, tako da kotnih funkcij niti ne potrebujemo. Potrebujemo jih le, če želimo izračunati ploščine.

Ploščina polkroga nad stranico a je $p = \frac{\pi a^2}{4}$. Vidimo, da je ploščina sorazmerna z a^2 , faktor sorazmernosti pa je enak $k = \frac{\pi}{4}$.

Za podobne like se da dokazati čisto splošno. Definirajmo premer lika kot največjo razdaljo med dvema točkama lika. Če imata dva podobna lika razmerje premerov enako d , potem je razmerje njunih ploščin enako d^2 .

6 Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2015

Nagrajene so bile štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski.

1. Geometrija v večrazsežnem prostoru
Avtor: Luka Smrekar Voskobojsnik
Mentor: Jaka Smrekar
Šola: OŠ Danile Kumar, Ljubljana
2. Pravila za deljivost – ne le v desetiškem sestavu
Avtorji: Zoja Javornik, Nina Oven
in Jakob Šušteršič
Mentor: dr. Lucija Željko
Šola: OŠ Sostro, Ljubljana
3. Hanojski stolp na zvezdi
Avtorja: Anže Kastelic in Zala Mlinarič
Mentorja: Jasna Kos in
prof. dr. Sandi Klavžar
Šola: Gimnazija Ljubljana Bežigrad

4. Sinus in kosinus quadraticus
Avtorji: Jakob Božič, Primož Ruter in
Miha Debenjak
Mentor: Alojz Grahor
Šola: Škofijska gimnazija Vipava

Na kratko o dosežkih v pričajučih nalogah.

1. Naloga: Geometrija v večrazsežnem prostoru

V nalogi se je avtor ukvarjal s štirirazsežnimi geometrijskimi objekti. Izračunal je štirirazsežno prostornino štirirazsežnih teles: hiperkocke, hiperpiramide, hiperstožca in hiperkrogla.

Ugotavljal je, kako lahko računamo prostornine in površine trirazsežnih teles na način, ki omogoča posplošitev na štirirazsežno prostornino štirirazsežnih teles. Naloga je matematično korektno napisana. Učenec je pokazal, da obvlada matematično terminologijo, slovenski jezik in programiranje v sistemu Mathematica. Brez pripomb, odlična naloga.

2. Naloga: Pravila za deljivost -- ne le v desetiškem sestavu

Naloga se začne s kratkim uvodom o zgodovini številskih sestavov in nadaljuje z opisom mestnih številskih sestavov in pretvarjanjem zapisa iz enega v drug mestni številski sestav. Nato govori o pravilih za deljivost v desetiškem sestavu.

1. Število N je deljivo z n v n -tiškem sestavu, če je zadnja številka 0. To velja v vseh n -tiških sestavih, če je $n \in \{2, \dots, 9\}$.
2. Če je vsota števk števila N v n -tiškem sestavu deljiva z m , pri čemer m deli $n - 1$, potem je tudi število N deljivo z m .

3. Če je število, ki je sestavljeno iz zadnjih k števk števila N v n -tiškem sestavu, deljivo z m^k , pri čemer m deli n , potem je tudi število N deljivo z m^k .
4. Če je izmenična vsota števk števila N v n -tiškem sestavu deljiva z m , pri čemer m deli $n + 1$, potem je tudi število N deljivo z m .

Vsa pravila so bila dokazana splošno, kar je še posebej pohvalno. Naloga je v vseh ozirih korektno predstavljena. Brez pri-pomb, odlična naloga.

3. Naloga: Hanojski stolp na zvezdi

Igra Hanojski stolp je uvrščena med deset največjih ugank vseh časov. Sestavljena je iz treh nosilcev. Na prvem so diski različnih velikosti in so razporejeni od največjega do najmanjšega, z največjim na dnu. Cilj igre je s čim manjšim številom potez premakniti diske s prvega nosilca na tretjega, pri čemer lahko vsakič prestavimo le en disk, nikoli pa ne smemo postaviti večjega diska na manjšega. Hanojski stolp na zvezdi je inačica že rešenega problema Hanojskega stolpa, le da so tu namesto treh nosilcev štirje. Eden iz-med njih je centralni, okoli njega pa so v trikotnik razporejeni periferni nosilci. Na njih so diski razporejeni po velikosti.

S čim manj premiki ob upoštevanju ena-kih pravil kot prej jih želimo premakni-ti z enega nosilca na drugega. V nalogi je obravnavana do sedaj neraziskana uganka centralnega Hanojskega stolpa na zvezdi. Diske premikamo s centralnega na perifer-ni nosilec. Izpeljana je rekurzivna formula za zgornjo mejo števila premikov n diskov.

Problem, ki so si ga naložili dijaki, je zahteven in še ni rešen. Kot je videti, jim je uspelo narediti pomemben korak pri reše-vanju tega problema.

Dijaki so v zaključku zapisali: Ob reševan-ju naloge smo odkrili novo zaporedje, ki še ni v bazi zaporedij *The On-Line Encyclope-dia of Integer Sequences*^{*}. Členi zaporedja so 1, 4, 7, 14, 23, 32, 47 Zapisali so tudi re-kurzivno formulo za računanje členov tega zaporedja. Brez besed, čestitamo.

4. Naloga: Sinus in kosinus quadraticus

Raziskovalne naloge, ki prihajajo iz Škofijs-ke gimnazije v Vipavi pod mentorstvom Alojza Grahorja, odlikuje izvirnost in že nekaj let zasedajo prva mesta na predstavit-vah.

Nalogo predstavimo kar s kratkim pov-zetkom avtorjev.

Kotne funkcije poljubnega kota so de-finirane s koordinatami točke, ki leži na presečišču enotske krožnice in premičnega kraka kota: abscisa je kosinus, ordinata sinus kota. V raziskovalni nalogi smo namesto enotske krožnice vzeli enotski kvadrat, to je množico točk v ravnini, ki ustreza enačbi. Nove funkcije smo poimenovali kvadratič-ne funkcije (funkcije quadraticus), in sicer sinus quadraticus in kosinus quadraticus (kvadratični sinus in kvadratični kosinus), označili pa z $f(x) = \sin q(x)$ in $f(x) = \cos q(x)$. Izpeljali smo njihove funkcijske predpise, narisali njihove grafe, izračunali natančne vrednosti pri nekaterih kotih, opisali last-nosti, izpeljali zveze med njimi in zveze z običajnimi kotnimi funkcijami, izračuna-li odvode, nedoločena integrala, inverzni funkciji ter izpeljali in dokazali adicijske izreke. Poleg tega smo posplošili definicije kotnih funkcij na poljubni enotski krivulji, izpeljali njihove funkcijske predpise in ski-cirali grafe.

Naloga je izjemno lepo opremljena, odlikuje jo lep jezik in jasno matematično izražanje. Brez pripomb, odlična naloga.

γ Zaključek

Naj zaključim z mislijo, ki sem jo izrekel tudi na predavanju o raziskovalnih nalogah jeseni leta 2013 na Pedagoški fakulteti v Ljubljani. »Spoštujem delo profesorjev, ki so si vzeli čas za plemenito delo za delo z mladimi raziskovalci na področju matematike.

Želim omeniti, kaj bi se dalo pri raziskovalnih nalogah izboljšati:

- Več pozornosti namenite dokazovanju.
- Izogibajte se dokazom, ki to pravzaprav niso (na primer: računska preverjanja).
- Uporabljajte natančno matematično izražanje, dosledno uporabljajte matematično terminologijo.
- Posebno pozornost posvetite izražanju in pisanju v slovenskem jeziku.

Še nekaj želim poudariti, čeprav se bo čudno slišalo: naj vas ne bo strah znanja in izstopite iz okvirov, čeprav določenih vsebin v šoli še niste in jih niti ne boste obravnavali. Spoštovani učitelji, profesorji, želim vas spodbuditi, da pomagate talentiranim na področju matematike prebiti okvir šolskega znanja.«

Prosojnice iz omenjenega predavanja najdete na povezavi
<https://dl.dropboxusercontent.com/u/8290265/raziskovalne-2013.pdf>.