Naslov članka/Article:

ENAČBA SENCE RAVNE PALICE V TREH RAVNINAH

Equation for the Shadow of a Straight Stick on Three Planes

Avtor/Author: **Marijan Prosen**

Matematika v šoli št. 2/2017, letnik 23
ISSN 1318-010X
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2017

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Enačba sence ravne palice v treh ravninah

Marijan Prosen

Povzetek

Članek predstavi izpeljavo enačbe sence v treh značilnih ravninah, to je v vodoravni, navpični in ekvatorialni ravnini.

Ključne besede: senca palice, enačba sence palice, vodoravna, navpična in ekvatorialna ravnina.

Equation for the Shadow of a Straight Stick on Three Planes

Abstract

The article presents the derivation of an equation for shadow on three characteristic planes, namely the horizontal, vertical and equatorial plane.

Keywords: shadow of a stick, equation for the shadow of a stick, horizontal, vertical and equatorial plane.

Uvod

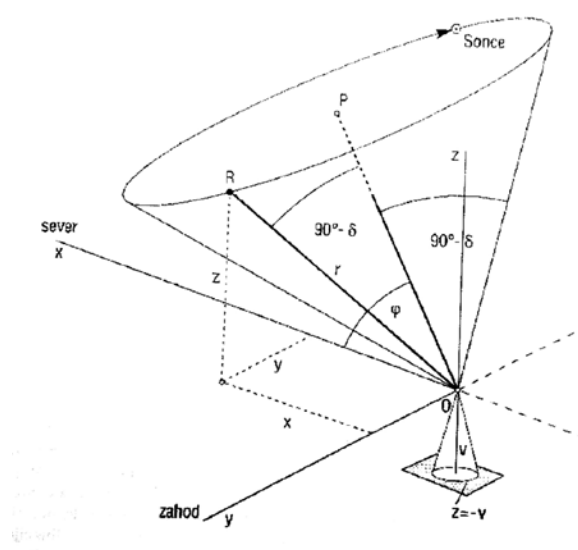
S senco, ki jo od Sonca osvetljena ravna palica meče na različne ravnine, sem se veliko ukvarjal (1981-2017). Tu navajam del svojih raziskav, in sicer svojo izpeljavo enačbe krivulje, po kateri se med dnevom premika konec (vrh) sence od Sonca osvetljene ravne palice v omenjenih treh ravninah. Enačbe iskanih krivulj sem poimenoval enačbe sence.

Precej razmišljanja, poskušanja in tudi matematičnega dela je bilo, predno sem ugotovil enačbe krivulj v teh ravninah. Do danes še nisem opazil, da bi senco, ki jo od Sonca osvetljena ravna palica meče na te tri ravnine, kdo tako obravnaval, kot jo sam obravnavam. Vse tri enačbe sence sem izpeljal po lastni zamisli z vektorji na osnovi srednješolske matematike, zato lahko zapišem, da sem jih odkril. S tem člankom jih zavarujem. Prvo enačbo sence sem odkril leta 1994, drugi dve leta 2017.

Osrednji del

Recimo, da želimo ugotoviti, kakšno krivuljo med dnevom popiše konec (vrh) sence navpične od Sonca osvetljene palice (gnomona) z višino v na vodoravni ravnini v kraju (opazovališču) z geografsko širino $\varphi \geq 0$ določenega dne v letu pri znani deklinaciji δ Sonca. Za kraje v Sloveniji je φ blizu 45°, deklinacija Sonca pa se spreminja v mejah od $-23{,}5^\circ$ do $+23{,}5^\circ$.

Vpeljemo prostorski pravokotni koordinatni sistem, ki ima koordinatno izhodišče v vrhu O navpične palice (gnomona). Pozitivno smer osi x usmerimo proti severu, pozitivno smer osi y proti zahodu, pozitivno smer osi z pa proti zenitu. Severni nebesni pol P leži v meridianski ravnini, to je ravnini (xz). Višinski kot pola P za kraje na severni Zemljini poluti je po definiciji enak geografski širini φ kraja. Navidezna dnevna pot Sonca poteka po nebesnem vzporedniku z deklinacijo δ, to je po nebesnem vzporedniku, katerega točke so za kot $(90^\circ - \delta)$ oddaljene od P. Sončevi žarki, ki gredo med dnevom čez vrh palice, ležijo na plašču krožnega dvojnega stožca, katerega os gre skozi P. Kot med vektorjem $\overrightarrow{OP}$ in vektorjem $\overrightarrow{OR} = \vec{r} = (x, y, z)$ Sončevega žarka je $(90^\circ - \delta)$.



Slika 1: K izpeljavi enačbe plašča krožnega dvojnega stožca, katerega os gre skozi severni nebesni pol P. Presek tega plašča in vodoravne ravnine skozi podnožišče palice (gnomona; tukaj pokončnega stožca) je stožnica, ki je pri nas v splošnem hiperbola, v drugih krajih pa tudi krožnica, elipsa ali parabola. Plašč krožnega dvojnega stožca pa preseka tudi navpično ravnino v smeri vzhod-zahod in tudi ekvatorialno ravnino. Tako dobimo kot presek plašča krožnega dvojnega stožca s tema ravninama spet stožnice.

Naj bo na vektorju $\overrightarrow{OP}$ enotski vektor $\vec{e} = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi)$, na vektorju $\overrightarrow{OR}$ pa enotski vektor $\vec{f} = (x, y, z)/r$. Najprej je skalarni produkt enotskih vektorjev

$$\vec{e}\cdot\vec{f} = 1\cdot 1\cdot\cos(90^\circ - \delta) = \sin\delta,$$

nato pa tudi

$$\vec{e}\cdot\vec{f} = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi)\cdot(x, y, z)/r = x\cos\varphi/r + z\sin\varphi/r.$$

Enačbo ploskve, to je plašča krožnega dvojnega stožca, dobimo iz enakosti:

$$x\cos\varphi/r + z\sin\varphi/r = \sin\delta,$$

od koder sledi

$$r\sin\delta = x\cos\varphi + z\sin\varphi.$$

Zapisano enačbo kvadriramo, upoštevamo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, in dobimo

$$(x^2 + y^2 + z^2)\sin^2\delta = (x\cos\varphi + z\sin\varphi)^2.$$

To je enačba plašča krožnega dvojnega stožca z odprtino $2\cdot(90^\circ - \delta)$. Presek tega plašča z vodoravno ravnino, vzporedno z ravnino (xy), pa je stožnica. Enačbo stožnice, to je krivulje, ki jo čez dan na vodoravni ravnini popiše konec (vrh) sence naše navpične palice (pokončnega stožca), dobimo s presekom plašča tega krožnega dvojnega stožca in vodoravne ravnine z enačbo $z = -v$.

1. Krivulja, ki jo določenega dne (δ) popiše konec sence navpične palice na vodoravni ravnini v kraju z geografsko širino φ, ima enačbo:

$$\mathbf{(x^2 + y^2 + v^2)\sin^2\delta = (x\cos\varphi - v\sin\varphi)^2}.$$

   To je izpeljana enačba sence navpične palice v vodoravni ravnini, vzporedni z (xy) ravnino. O tej enačbi lahko razpravljamo za različne geografske širine $\varphi \geq 0$ (različne kraje) in za različne deklinacije δ Sonca (različne datume). Enačba splošno velja za vsak kraj $\varphi \geq 0$ in dan (δ) na Zemlji.

2. Namesto vrha O navpične palice z višino v si lahko mislimo vrh vodoravne palice z dolžino d, ki jo navpično zapičimo v navpično ravnino vzhod-zahod. Enačba sence v navpični ravnini vzhod-zahod, vzporedni z (yz) ravnino, za $x = d$ dobi obliko:

$$\mathbf{(d^2 + y^2 + z^2)\sin^2\delta = (d\cos\varphi + z\sin\varphi)^2}.$$

3. Če pa si predstavljamo, da leži O na vrhu ravne palice z dolžino a, ki jo navpično zapičimo v ekvatorialno ravnino tako, da je palica usmerjena proti severnemu nebesnemu polu P, dobimo enačbo plašča krožnega dvojnega stožca iz enakosti skalarnih produktov

$$\vec{e}\cdot\vec{f} = 1\cdot 1\cdot\cos(90^\circ - \delta) = \sin\delta \text{ in}$$
$$\vec{e}\cdot\vec{f} = (0, 0, 1)\cdot(x, y, z)/r = z/r.$$

   Tako je enačba plašča krožnega dvojnega stožca $z/r = \sin\delta$ oziroma:

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\sin^2\delta.$$

Enačba sence palice v ekvatorialni ravnini za $z = -a$ dobi najprej obliko:

$$a^2 = (x^2 + y^2 + a^2)\sin^2\delta$$

in končno:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = a^2/\mathrm{tg}^2\,\delta;}\ \delta > 0.$$

To pa je enačba krožnice z radijem (ki je hkrati tudi dolžina sence palice) $R = a/\mathrm{tg}\,\delta$ in ob enakonočjih ($\delta = 0$) ni opredeljen, saj gre R v neskončnost, in to za vse $\varphi \geq 0$. Na ekvatorialni ravnini je namreč tega dne pot vrha sence palice neopredeljena (je ni), jeseni in pozimi pa senca palice sploh ne pade na ekvatorialno ravnino. Spomladi in poleti se vrh sence palice giblje po krožnicah, od katerih doseže R minimum ob poletnem Sončevem obratu, ko je $R = a/\mathrm{tg}\,23{,}5^\circ \approx 2{,}3\,a$. Tega dne je torej radij krožnice (dolžina sence palice) najmanjši, ostale dni pa je večji in se veča vse do neopredeljenosti ob enakonočjih.

Zaključek

Razen, ko gre za neopredeljenost, je krivulja, po kateri se giblje konec (vrh) sence od Sonca osvetljene ravne palice v vseh treh ravninah, vedno stožnica (krožnica, elipsa, hiperbola, parabola), ki se le v posebno redkem primeru (in to na primer pri nas v vodoravni in navpični ravnini za $\delta = 0$) izrodi v premico (glej podpis k drugi sliki).

Navedli smo le teoretično izpeljane enačbe senc za vse tri navedene ravnine. Lahko pa z neposrednim opazovanjem sence, ki jo ravne palice mečejo na te ravnine, teorijo preskusimo tudi v praksi. Treba si je vzeti čas. Jaz sem to naredil. Veliko časa mi je vzelo, dolgo, dolgo vrsto let. ■

Literatura

Prosen, M. (2003). *Ukvarjanje s senco*, Presekova knjižnica 39. Ljubljana: DMFA in tam navedena literatura.

Prosen, M. (1995). Enačba sence. *Matematika v šoli*, 3, str. 237.

Prosen, M. (2001/2002). Kako do enačbe sence?. *Presek*, 29, str. 144–148. http://www.presek.si/29/1478-Prosen.pdf