Naslov članka/Article:

MATEMATIKA NA KONSERVATORIJU ZA GLASBO

Mathematics at Conservatoire of Music

Avtor/Author: **Tinka Majaron**

Matematika v šoli št. 2/2017, letnik 23

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2017

Spletna stran revije:

https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Matematika na konservatoriju za glasbo

Tinka Majaron
Konservatorij za glasbo in balet Ljubljana

Povzetek

Pred kratkim je dr. Miha Kos v intervjuju, objavljenem na rtvslo.si, dejal, da bi profesorji morali biti navduševalci. Profesorji matematike imamo za prikaz čarobnosti matematike veliko možnosti, saj se matematika skriva povsod okoli nas. In s čarobnostjo zagotovo lahko navdušimo. V tem članku bomo odkrili nekaj povezav z glasbo. Matematika in glasba imata veliko skupnega - za obe uporabljamo enak zapis po celem svetu (sta mednarodna jezika) in pri obeh je potrebno veliko redne vaje, če želimo biti dobri. Toda zakaj bi matematiko potrebovali (bodoči) glasbeniki? Kako prepričati dijake, da matematiko potrebujejo za glasbo? Lepote matematike jim lahko približamo z glasbo v poglavjih Realna števila, Statistika, Verjetnost, Toge preslikave, Podobnost in Kotne funkcije. Če smo seznanjeni z osnovami teorije glasbe, pri tem ne bi smeli imeti težav, saj je glasba matematika s čustvi.

Ključne besede: lepota matematike, glasba, medpredmetno povezovanje

Mathematics at Conservatoire of Music

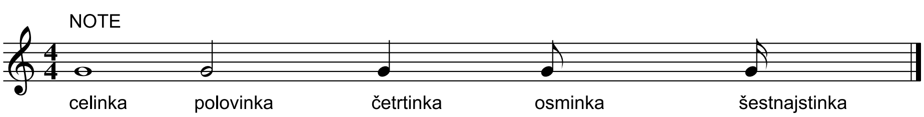
Abstract

Recently, dr. Miha Kos said in an interview published on www.rtvslo.si that professors should be exciters. We, Mathematics professors, have many opportunities for showing the magic of mathematics, because mathematics is hidden all around us. And with magic we are bound to excite.This article reveals a few of its connections to music. Mathematics and music have much in common - the same notation is used for both throughout the world (they are international languages), and both require a great deal of regular practice if one wishes to be good at them. But why would (prospective) musicians need mathematics? How to convince secondary school students that they need mathematics for their music? We can connect the beauties of mathematics to music in the chapters Real Numbers, Statistics, Probability, Isometry, Similarity, and Trigonometric Functions. If we are familiar with the basics of music theory, this should not be a problem, because music is mathematics with emotions.

Keywords: beauty of Mathematics, Music, cross-curricular integration

Uvod

Tesna povezanost med glasbo in matematiko se kaže že v imenih not glede na njihovo dolžino:



Poleg tega se notni zapis praviloma začne z ulomkom, ki pove, v kakšnem taktu je napisana skladba. Tudi višino tonov lahko zapišemo s številkami (namesto glasbene abecede C, D, E, F, G, A, H). Leta 1973 je Allen Forte v knjigi *The Structure of Atonal Music* objavil glasbeno teorijo množic ali nizov. Tonske višine je obravnaval po načelu oktavne ekvivalence in po načelu enharmonske identitete (to pomeni, da so bili zanj vsi c-ji enaki in da je bil ton cis enak tonu des in podobno). Tako je dobil sistem razredov notnih višin (pitch-classes), v katerem je tonske višine predstavil s preglednim številčnim sistemom, kot je prikazano v preglednici 1.

Poleg očitnih podobnosti med matematiko in glasbo obstaja še kopica bolj ali manj skritih povezav. V tem članku bomo odstrli tiste tančice, ki glasbo povezujejo s slovensko srednješolsko matematiko. Za razumevanje je potrebno osnovno znanje teorije glasbe.

Realna števila

Za ustvarjanje glasbe je najpomembnejša uglasitev. Pitagora je prvi matematično zapisal glasbeno lestvico. Ugotovil je, da dve struni zvenita ubrano, če sta njuni dolžini v razmerjih 1 : 2, pri čemer zazveni oktava, 2 : 3, pri čemer zazveni kvinta, ter 3 : 4, pri čemer zazveni kvarta. Na več kot štiri dele

 Matematika v šoli, št. 2., letnik 23, 2017

Preglednica 1: Nizi po definiciji Allena Forteja

c	cis/des	d	dis/es	e	f	fis/ges	g	gis/as	a	ais/b	h	c
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 = 0

strune ni delil. Lestvico je sestavil s kvintnimi skoki, in sicer za en navzdol in pet navzgor, ker je tako dobil vse »ubrane« intervale:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1},\ 1,\ \left(\frac{3}{2}\right)^{1},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{3},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{4},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{5}$$

Dobljene vrednosti je z množenjem ali deljenjem z 2 (oktavni premik) prestavil v osnovno oktavo, to je od 1 do 2. Tako je prišel do glasbene lestvice:

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{81}{64},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{27}{16},\ \frac{243}{128},\ 2$$

Ta zapis pomeni, da moramo frekvenco osnovnega tona (1) pomnožiti z $\frac{9}{8}$, da dobimo drugi ton, z $\frac{81}{64}$ za tretji ton in tako naprej do oktavne ponovitve prvega - množenje osnovne frekvence z 2. Oglejmo si še razdalje med dvema sosednjima tonoma Pitagorove lestvice (dobimo jih z deljenjem):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & & \frac{9}{8} & & \frac{81}{64} & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{2} & & \frac{27}{16} & & \frac{243}{128} & & 2 \\ & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{256}{243} & & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{256}{243} & \end{array}$$

Okrog leta 20 pr.n.št. je Didimos z delitvijo strune tudi na petine dobil lestvico čiste uglasitve:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & & \frac{9}{8} & & \frac{5}{4} & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{15}{8} & & 2 \\ & \frac{9}{8} & & \frac{10}{9} & & \frac{16}{15} & & \frac{9}{8} & & \frac{10}{9} & & \frac{9}{8} & & \frac{16}{15} & \end{array}$$

Pri obeh lestvicah naletimo na težave, če želimo vpeljati še višaje in nižaje (črne tipke na klaviaturi), saj dva poltona nista enaka kot en cel ton (pri lestvici čiste uglasitve pa imamo celo dva različna cela tona). Kako definirati glasbeno lestvico, da se bo na eno glasbilo lahko igralo vse durove lestvice? Eno oktavo moramo razdeliti na dvanajst enakih poltonov. V ta namen moramo iz množice racionalnih števil prestopiti v množico iracionalnih števil, saj moramo za tak polton rešiti enačbo $x^{12} = 2$. Iskano število je $\sqrt[12]{2}$. Dobimo enako temperirano lestvico:

$$1,\ \sqrt[12]{2^2},\ \sqrt[12]{2^4},\ \sqrt[12]{2^5},\ \sqrt[12]{2^7},\ \sqrt[12]{2^9},\ \sqrt[12]{2^{11}},\ \sqrt[12]{2^{12}} = 2$$

Pri učenju o realnih številih lahko glasbo vključimo še na en način. Če vsaki števki priredimo nek ton, lahko slišimo razliko med racionalnimi in iracionalnimi števili. Število $\frac{1}{4} = 0{,}25$ bi bilo v takem zvočnem zapisu sestavljeno le iz treh tonov. Pri številu $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$ bi se v nedogled ponavljalo zaporedje tonov 2, 8, 5, 7, 1, 4. Pri številih $\sqrt{2}$ ali π pa bi bil zvočni zapis povsem nepredvidljiv, brez kakršnih koli ponovitev.

Statistika in verjetnost

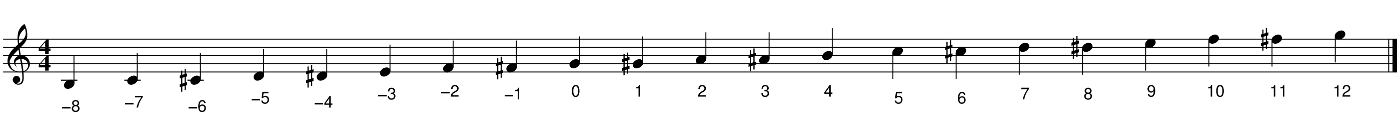
Statistična analiza skladbe nam lahko razkrije značilnosti skladateljevega komponiranja ali značilnosti ljudskih pesmi z nekega področja. Opazovali bomo značilnosti slovenske ljudske pesmi Marko skače. (Glejte Sliko 1.)

Najosnovnejša informacija o melodiji je njen obseg ali ambitus, to je interval med najvišjim in najnižjim tonom. V našem primeru je obseg 7 poltonov (čista kvinta). Obseg se uporablja kot merilo za razvitost melodije. Podobno kot nize iz uvoda lahko vsakemu tonu priredimo številsko vrednost na način, kot je prikazano na sliki 2.

Za Marko skače dobimo zaporedje tonov: –1, 2, 2, 2, –1, 2, 2, 2, –1, –1, –3, –3, –5, –5, –5, –3, –1, 2, 2, –1, –1, –3, –3, –5, –5, –5, –3, –1, 2, 2, –1, –1, –3, –3, –5, –5.

V melodiji so toni bolj ali manj razpršeni okrog njihove srednje vrednosti. Iz zgornjih vrednosti za Marko skače dobimo srednjo vrednost $\overline{x} = -\frac{54}{36} = -1,5$. Standardni odklon tonov je merilo za razgibanost melodije. Večje vrednosti standardnega odklona ustrezajo večji gibljivosti tonov okrog srednje vrednosti. Nekateri avtorji enačijo stopnjo razgibanosti s stopnjo razvitosti. Za Marko skače dobimo $\sigma = \sqrt{\frac{241}{36}} = 2,587$.

Slika 1: Marko skače



Slika 2

Zastopanost posameznega tona v melodiji pove njegova pogostost (verjetnost pojavitve), ki je enaka deležu ponovitev tega tona. Za Marko skače dobimo:

ton	–5	–3	–1	2
frekvenca	8	8	10	10
pogostost	$0,\overline{2}$	$0,\overline{2}$	$0,\overline{27}$	$0,\overline{27}$

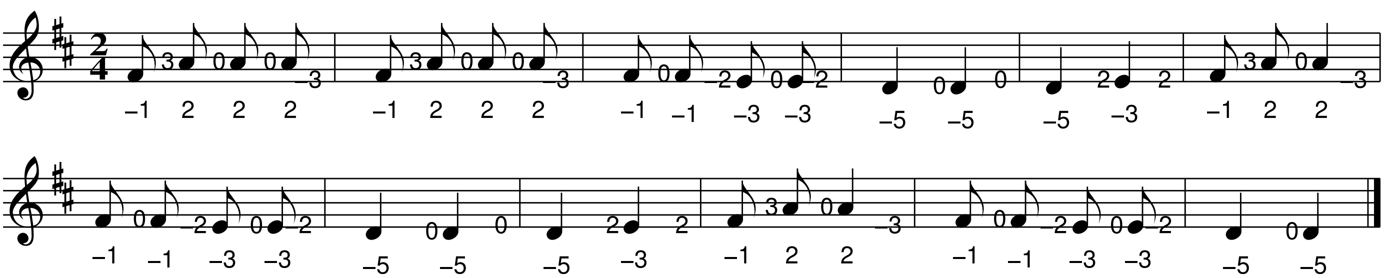
Entropija je pričakovana informacija o pojavljanju tonov pri naključnem izbiranju tona,

$$H = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 p_i,$$

pri čemer je p_i verjetnost pojavitve (pogostost) posameznega tona, k pa število tonov. Entropijo merimo v bitih in jo lahko privzamemo kot merilo za razvitost melodijske zgradbe. Za Marko skače dobimo:

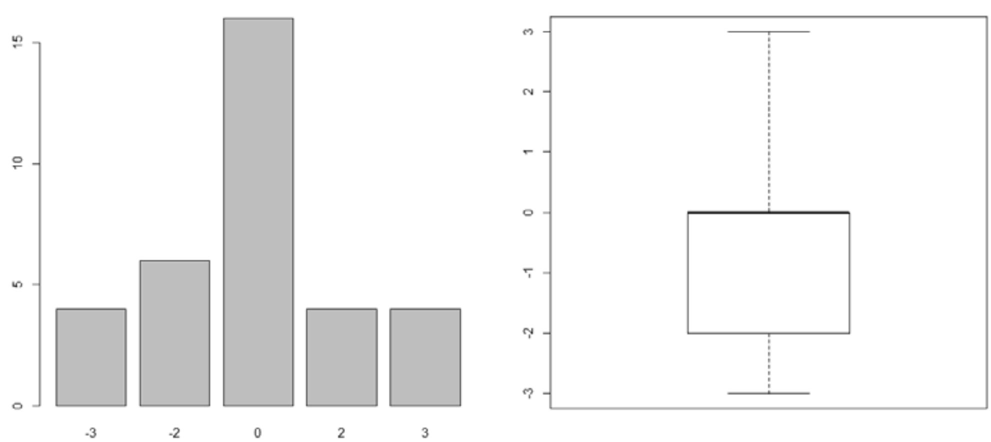
$$H = -0,\overline{2}\cdot\log_2 0,\overline{2} - 0,\overline{2}\cdot\log_2 0,\overline{2} - 0,\overline{27}\cdot\log_2 0,\overline{27} - 0,\overline{27}\cdot\log_2 0,\overline{27} = 1,9911 \text{ bit}.$$

Že omenjeni parametri govorijo o zgradbi melodije, glasbeni slog pa določajo intervali med toni. Intervale merimo v poltonih in jih dobimo kot razliko ustreznih sosednjih vrednosti za tone. Za Marko skače dobimo zaporedje intervalov: 3, 0, 0, –3, 3, 0, 0, –3, 0, –2, 0, –2, 0, 0, 2, 2, 3, 0, –3, 0, –2, 0, –2, 0, 0, 2, 2, 3, 0, –3, –2, 0, –2, 0.



Slika 3: Marko skače – zaporedje not in intervalov

Za glasbeni slog sta pomembni asimetrija in kurtozis intervalov, a to presega učni načrt na srednji stopnji. Namesto tega si oglejmo porazdelitev intervalov in narišimo škatlo z brki za Marko skače.



Slika 4: Marko skače – porazdelitev intervalov in škatla z brki

Vidimo, da je polovica vseh intervalov med intervaloma –2, to je velika sekunda navzdol, in 0, to je čista prima. Na splošno je značilno, da prevladujejo majhni intervali in da je medčetrtinski razmik okrog 2, kot je tudi v tem primeru.

Toge preslikave in podobnost

V glasbi najdemo tudi vse toge preslikave. Tudi te si bomo ogledali na slovenski ljudski pesmi Marko skače. Začnimo s premikom. Osnovni premik si lahko predstavljamo kot transponiranje v višjo ali nižjo lego (na primer iz D-dura v C-dur). Še bolj zanimiv je premik v času, tako dobimo kanon. Spodaj je zapisano, kdaj vstopi naslednji glas – Marko skače lahko zapojemo kot štiriglasni kanon. (Glejte Sliko 5.)

Lahko ga zapojemo tudi kot retrogradni kanon - ena skupina poje, kot piše, druga pa od zadaj naprej. Matematično gre za zrcaljenje čez vertikalno premico skozi sredino skladbe (če je skladba zapisana v eni vrstici). Zapišimo osnovno in zrcaljeno melodijo, tokrat brez besedila. (Glejte Sliko 6.)

Slika 5: Marko skače – kanon

Slika 6: Marko skače – retrogradni kanon

Slika 7: Marko skače – zrcalni retrogradni kanon

Slika 8: Marko skače – proporcionalni kanon

Če osnovno melodijo zavrtimo okrog sredine skladbe za 180°, dobimo prav poseben kanon. Pri tem kanonu prvi glas poje osnovno melodijo, drugi pa od zadaj naprej, a z notami, obrnjenimi na glavo. (Glejte Sliko 7.)

Nazadnje si oglejmo še razteg. Dobimo ga, če skladbo izvajamo hitreje ali počasneje (običajno s faktorjem 2). V našem primeru bi Marko skače en glas lahko pel počasneje - zapisano v štiričetrtinskem taktu, drugi pa kot običajno (alla breve). Drugi glas skladbo zapoje dvakrat. Tako dobimo proporcionalni kanon. Matematično gledano je prvi glas podoben drugemu.

Prava zakladnica kanonov vseh naštetih vrst je glasbena zapuščina Johanna Sebastiana Bacha. (Glejte Sliko 8.)

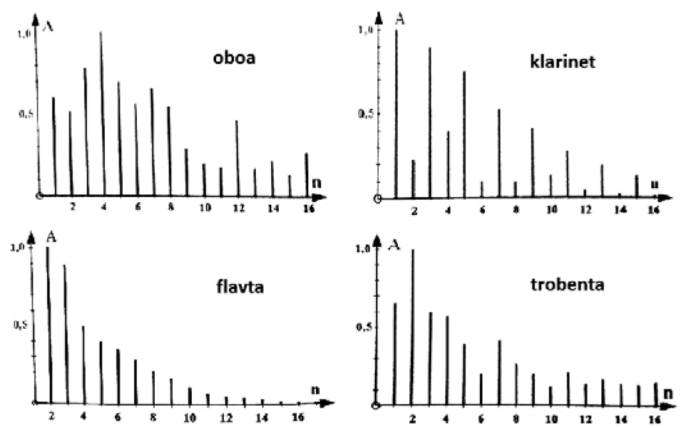
Kotne funkcije

Zvok nastane z nihanjem. Oddaljenost od središčne lege je pri tem nihanju za glasbila s strunami in za glasbila, pri katerih zvok nastane z zrakom, periodična funkcija. To v resnici sledi iz valovne enačbe za zvok. Vsako periodično funkcijo pa lahko zapišemo s Fourierovo vrsto. Za opisano oddaljenost od središčne lege lahko v zelo poenostavljeni obliki zapišemo:

$$x = A_1 \cdot \sin(2\pi \nu t) + A_2 \cdot \sin(2 \cdot 2\pi \nu t) + \ldots + A_3 \cdot \sin(i \cdot 2\pi \nu t) + \ldots ,$$

pri čemer ν predstavlja osnovno frekvenco tona. Vidimo, da so poleg osnovne frekvence prisotni tudi vsi njeni večkratniki. Večkratniki osnovne frekvence predstavljajo alikvotne tone. Prvi alikvotni ton je oktavna ponovitev osnovnega, drugi je kvinto višji od drugega, tretji je kvarto višji od drugega in tako naprej. S harmonsko ali zvensko analizo lahko izračunamo amplitude (Fourierove koeficiente) A_1, A_2 …, ki nam povejo, kako močno je zastopan posamezen alikvotni ton. Vrednosti amplitud praviloma padajo in postanejo od nekega člena naprej zanemarljivo majhne. Tako lahko teoretično neskončno vrsto v praksi obravnavamo kot končno vrsto.

Vrednosti amplitud so odvisne od glasbila in ravno te vrednosti določajo barvo zvoka (tako prepoznamo različna glasbila, ki jih slišimo na radiu). Običajno jih predstavimo s stolpičnim diagramom, ki ga imenujemo harmonski ali zvenski spekter. Pri tem vnašamo relativne vrednosti amplitud - privzamemo, da je $A_1 = 1$, ostale amplitude pa izrazimo z deležem osnovne amplitude. Na spodnji sliki je nekaj zvenskih spektrov.



Slika 9: Zvenski spekter nekaterih glasbil

Za konec le še zanimivost: solopevci se naučijo ojačati višje alikvotne tone, zato jih lahko slišimo tudi ob glasnem orkestru.

Se zdaj strinjate, da je glasba matematika s čustvi? Želim vam veliko navdušenih dijakov. ■

Literatura

Majaron, T. (2003). *Matematika glasbenih lestvic – diplomsko delo*. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko.

Majaron, T. (2016). *Vzorci v glasbi – magistrsko delo*. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko.

Mihelčič, P. (2000). *Teorija glasbe*. Ljubljana: DZS.

Pavlič, G. (1999). *Bach, mojster Jaka in matematika*, Življenje in tehnika, 6, str. 69–72.

Ravnikar, B. (2001). *Osnove glasbene akustike in informatike*. Ljubljana: DZS.