

Naslov članka/Article:

O POŠTEVANKI

On Multiplication Tables

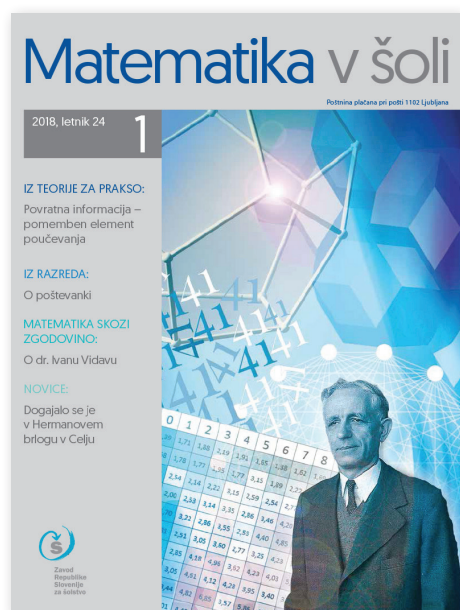
Avtor/Author:

Tomaž Miholič

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



Matematika v šoli št. 1/2018, letnik 24

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2018

Spletna stran revije:

<https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>

O poštevanke

Tomaž Miholič
Osnovna šola Duplek

Povzetek

Težko je najti učitelja matematike, ki bi dvomil v pomembnost znanja poštevanke pri svojih učencih. Kaj o poštevanke veleva učni načrt in ali izkušnje temu pritrjujejo? Kako pomembna je avtomatizacija poštevanke? Kateri izrazi so učencem najtežji? Kaj lahko razberemo iz napačnih odgovorov? Kaj lahko razberemo iz hitrosti odgovorov? Kdaj je vaja poštevanke potrebna in kdaj je je dovolj? V prispevku so predstavljene nekatere ugotovitve, ki so nastale na podlagi testiranja osnovnošolcev.

Ključne besede: poštevanke, osnovna šola

On Multiplication Tables

Abstract

We would be hard-pressed to find a mathematics teacher who doubts the importance of multiplication tables for their students. How is this reflected in school curriculum and does experience confirm this fact? What is the importance of memorizing multiplication tables? Which concepts are most difficult for students to learn? What can we learn from incorrect answers? What can we learn from the speed of answers? When is it necessary to practice multiplication tables and when to stop? The article introduces some of the findings based on primary-school students' tests.

Keywords: multiplication table, primary school

Uvod

Znanje poštevanke do števila 10 predstavlja enega izmed pomembnejših temeljev za doseganje ciljev v drugem in tretjem triletju osnovne šole (množenje in deljenje dvo- in večmestnih števil, večkratniki in delitelji, ulomki, sorazmerja, obsegi, ploščine, prostornine ...) in posledično tudi za doseganje ciljev pri pouku matematike po zaključeni osnovni šoli. Morda kot zanimivost: Nacionalni preizkus znanja matematike za devetošolce v šolskem letu 2016/17 vsebuje zgolj eno nalogo – od devetih, kjer ni bilo znanje poštevanke vsaj posredno preverjeno.

Zaplet

Učni načrt za matematiko v osnovni šoli med operativnimi cilji v tretjem razredu nalaga učencem (in seveda nam – učiteljem), da »usvojijo do avtomatizma

zmnožke (produkte) v obsegu 10×10 « (Žakelj, 2011, str. 15). Z relativno preprostim kvizom¹ v spletni učilnici (Slika 1) smo v šolskem letu 2015/16 ugotovili, da se ta cilj do avtomatizma v naši šoli ne usvoji v tretjem, ampak se usvaja vse do sedmega razreda, kar si razlagamo s primerjavo časovne odzivnosti (Slika 2).

Ta ugotovitev izziva k spremembi načrtovanja učenja poštevanke, če vemo, da se poštevanke načrtovano, nadzorovano in strukturirano poučuje zgolj v tretjem razredu. Učenci četrtil in višjih razredov, ki predhodno še niso usvojili poštevanke do avtomatizma, lahko posvojijo neoptimalne ali celo napačne strategije za določanje produktov dveh enomestnih števil (poštevanke). Napačno izgrajene miselne sheme je bistveno težje popravljati, kot graditi nove – zato je smiselno znanje poštevanke spremljati eksplicitno skozi celotno

osnovno šolo in tudi kasneje ter posredovati takoj, ko opazimo kakšno anomalijo.

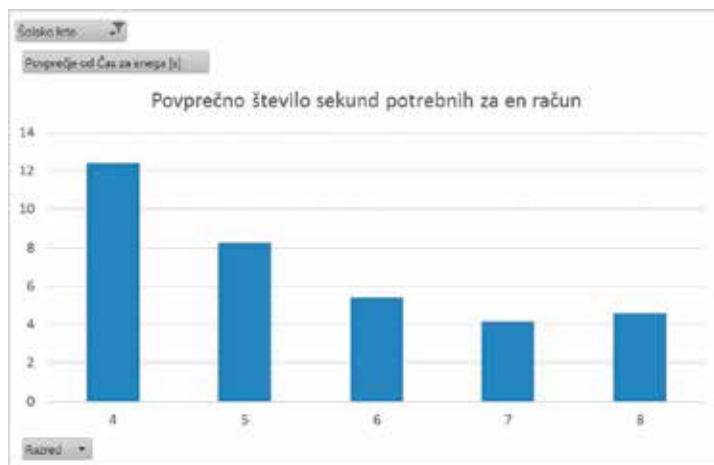
Učitelji v drugi in tretji triadi ter v srednji šoli upravičeno pričakujemo avtomatizirano znanje poštevanke in se z vzroki napak in napačno izgrajenimi miselnimi shemami običajno ne ukvarjamo – bodisi zaradi natrpanega učnega načrta bodisi zaradi prepričanja, da bo učencem ali dijakom samim uspelo odpraviti težave.

Potrditev dolgoletne slutnje, da učenci v tretjem razredu v celoti ne avtomatizirajo poštevanke, nas je vzpodbudila, da to elementarno področje matematične veščine podrobneje analiziramo in poskušamo skrajšati čas usvajanja zmnožkov v obsegu 10×10 oziroma se opremiti z informacijami, s katerimi bomo lahko učencem višjih razredov pomagali pri izgradnji ali korekciji novih oziroma obstoječih miselnih shem.

¹ Kviz v spletni učilnici Moodle, v katerega smo uvrstili 78 izrazov poštevanke. Testiranje celotnega oddelka hkrati je potekalo eno šolsko uro v računalniški učilnici z uporabo osebnih računalnikov. Vsak oddelek je v ta namen obiskal računalniško učilnico enkrat.



Slika 1: Uporabniški vmesnik kviza v spletni učilnici (Moodle).



Slika 2: Povprečen čas v sekundah (navpična os), ki ga potrebujejo učenci posameznih razredov (vodoravna os) za en izraz poštevanka. (n = 207, kviz v spletni učilnici)

Štiri stopnje usvajanja nove veščine

Pri usvajanju katerekoli nove veščine gre do učeči skozi štiri stopnje (Burch, 1974). Če se teh stopenj zavedamo, lahko učence učinkoviteje vodimo skozi običajno naporen proces usvajanja veščine.

Nezavedno nekompetentni – »Ne vemo, da ne vemo«, na tej stopnji se učeči se ne zavedajo svojega neznanja. Prehod na naslednjo stopnjo je mogoč zgolj ob zunanji pomoči (učitelj, vrstnik, starši ...).

Zavedno nekompetentni – »Vemo, da ne vemo«, na to stopnjo sodijo učeči se, ki spoznajo primanjkljaj pri svojem znanju oziroma veščini, vendar sami ne uspejo preiti na naslednjo stopnjo. Znova se pokaže pomembnost zunanje pomoči (učitelj, vrstnik ...).

Zavedno kompetentni – »Vemo, da vemo«, sem sodijo učeči se, ki veščino oziroma znanje usvojijo, vendar ob tem porabljajo veliko energije, koncentracije in časa ter drobijo probleme na rešljive podprobleme. Prehod na naslednjo stopnjo lahko opravijo takrat, ko razvijejo ustrezne miselne sheme in znanje oziroma veščino avtomatizirajo.

Nezavedno kompetentni – »Ne vemo, da vemo«, stopnja, kjer učeči se znanje oziroma veščino uporabljajo brez pretiranega napora in rutinsko ter so pri tem sposobni reševati druge naloge. Zgolj minimalno truda je potrebno, da učeči svojo veščino ohranjajo na tej stopnji – čisto brez redne vaje pa tudi ne gre.



Slika 3: Stopnje usvajanja nove veščine.

Pri tako osnovni veščini, kot je poznavanje množkov (produktov) števil do 10, prehodi s prve na drugo stopnjo in z druge na tretjo stopnjo za učence niso zahtevni in jih opravi velika večina učencev v relativno kratkem času v tretjem razredu. Prehod na četrto stopnjo je težaven vendar potreben, saj le tam govorimo o avtomatizaciji veščine.

»Avtomatizacija – osnova genija«

Benjamin Bloom (1986) v članku »The Hands and Feet of Genius – Automaticity« ob bok vsakdanjih veščin, ki jih je treba avtomatizirati (hoja, govor, branje, vožnja kolesa, tek, plavanje ...) v zgodnji čas šolanja postavlja tudi veščino rabe osnovnih računskih operacij, ki naj se do avtomatizma razvije tudi ob pogosti rabi izven učilnice.

Avtomatizem Bloom opredeli kot sposobnost nezavednega, hitrega in zanesljivega izvajanja postopkov, med tem ko na zavedni ravni rešujemo drug problem.

Na poti do avtomatizma

Razkorak med dejanskim stanjem in pričakovanji učiteljev smo v šolskem letu 2016/17 podrobneje analizirali ponovno s pomočjo tehnologije. Za učence smo razvili aplikacijo za pametne telefone »Vadnica poštevanka«, s katero smo igričificirali² poštevanko do števila 10. Učenci imajo eno minuto časa, da izračunajo čim več množkov. Podatke o uspešnosti igralcev zbiramo na strežniku, kjer so s

² Igrifikacija (angl. Gamification) je pojem, ki označuje uporabo izkušenj iz iger v kontekstu, ki z igro ni neposredno povezan – z namenom povečanja motivacije.



Slika 4: Uporabniški vmesnik v aplikaciji za pametne telefone (Android).

pomočjo spletnega vmesnika na voljo učecim učiteljem. Aplikacijo smo oblikovali tako, da je uporabna tako v fazi strukturiranega poučevanja poštevank v tretjem razredu, kot kasneje v fazi utrjevanja in preverjanja. Aplikacija sicer ponuja učencem takojšnjo povratno informacijo o pravih in napačnih odgovorih, prav tako jim za motivacijo ponuja primerjavo z uspehom drugih tekmovalcev istega dne, vendar se njena prava vrednost pokaže šele, ko zbrane rezultate analizira učitelj in lahko posameznemu učencu poda čisto individualizirano povratno informacijo. Tehnologija učitelju omogoča, da morebitna odstopanja od pričakovanih rezultatov enostavno in hitro zazna in se nanjo odzove.

Zbrani podatki učitelju omogočajo analizo s pomočjo treh kazalnikov: Pravilno ali napačno izračunan izraz, potreben čas za vpis odgovora in še za učitelja najpomembnejši – kaj so učenci zapisali, ko so napačno določili odgovor.

V podatkovni bazi smo zbrali že več kot pol milijona zapisov, kar pomeni, da imamo za vsak izraz poštevank do števila 10 več kot štiri tisoč zapisov, opremljenih z vsemi tremi kazalniki.

Niso vse poštevank »enake«

Analiza takšne količine podatkov nam omogoča, da preverimo nekatera prepričanja o poštevanki in se pripravimo na povratno informacijo učencem, s katero jih usmerimo v popravo napačno izgrajenih miselnih shem. V tabeli (Slika 5) je prikazana uspešnost vseh sodelujočih pri posameznih izrazih poštevank.

Čeprav se nam je zdelo, da si poštevanka števila nič niti ne zasluži preverjanja, so rezultati pokazali, da ni tako. Rezultati so

slabši od pričakovanih, vendar nas to ne skrbi, saj lahko učencem dokaj enostavno in s konkretnimi primeri pomagamo popraviti te rezultate.

Poštevank števil ena, dve, pet in deset niso presenetile saj podatki kažejo, da jih učenci usvojijo najbolje. Pozitivno presenetijo rezultati poštevank števila tri.

Težave pri poštevankah števil štiri, šest, sedem, osem in devet so pričakovane, predvsem tam, kjer ti faktorji nastopajo hkrati. Za njihovo odpravo si je priporočljivo ogledati napačne odgovore učencev oziroma dijakov in šele na podlagi teh podatki ustrezno povratno informacijo.

Nepričakovane težave se skrivajo na diagonali slike 5, kjer so prikazani produkti dveh enakih faktorjev. Wong (2007) pravi, da naj učenci ne bi imeli težav z avtomatizacijo produktov dveh enakih števil.

S slike je jasno razvidno, da učenci oziroma dijaki poznajo in uporabljajo zakon o

zamenjavi pri množenju, saj je slika skoraj osno somerna – po diagonali od produkta dveh ničel do produkta dveh desetk.

Kako učenci določajo vrednost produktov

Poštevanko do števila deset (vključno s številom 0) sestavlja 121 različnih izrazov in verjetno so redki tisti, ki poznajo vrednosti vseh produktov »na pamet«. Ostali učenci sicer ne poznajo vseh vrednosti produktov »na pamet«, ampak jih določajo s pomočjo strategij, ki pa se lahko tesno naslanjajo na tiste produkte, ki jih znajo »na pamet«.

Dodatne strategije

Množenje števil 6, 7, 8 in 9 lahko poteka po relativno kompleksnih strategijah, ki so kombinacija enostavnejše strategije

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2%	4%	8%	9%	6%	9%	5%	5%	6%	4%	6%
1	4%	4%	3%	5%	2%	3%	1%	9%	7%	3%	4%
2	1%	4%	5%	4%	5%	5%	6%	5%	8%	7%	6%
3	8%	3%	4%	3%	6%	4%	9%	9%	13%	10%	6%
4	6%	1%	6%	6%	7%	11%	9%	16%	25%	14%	2%
5	6%	2%	5%	2%	7%	9%	9%	7%	12%	9%	4%
6	6%	3%	8%	12%	11%	6%	10%	20%	31%	17%	2%
7	5%	3%	2%	8%	18%	10%	17%	14%	17%	12%	5%
8	5%	5%	5%	16%	26%	13%	32%	18%	21%	10%	6%
9	6%	1%	5%	16%	14%	15%	14%	13%	15%	15%	7%
10	10%	6%	4%	4%	4%	2%	4%	2%	6%	6%	5%

Slika 5: Odstotek napačnih odgovorov za posamezni izraz poštevank. Navpično so nanižani prvi, vodoravno pa drugi faktorji. ($n =$ cca 500 000)

Nekaj splošnih strategij za poštevance števil do 10

Poštevanka števila	Strategije določanja vrednosti produkta	Ovisnost od znanja:	
Vsa števila	Faktorja lahko zamenjaš $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3, 0 \cdot 7 = 7 \cdot 0, 7 \cdot 4 = 4 \cdot 7$	Zakon o zamenjavi faktorjev.	
0	Vedno 0 $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 3 = 0, 0 \cdot 7 = 0$	Razume ali zapomnitev.	
1	Enako izbranemu številu $1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot 2 = 2, 1 \cdot 4 = 4, 1 \cdot 7 = 7$	Razume ali zapomnitev.	
2	Izbrano število podvoji $2 \cdot 3 = 3 + 3, 2 \cdot 7 = 7 + 7, 2 \cdot 5 = 5 + 5$	Šteje po dva $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$	Seštevanja enomestnih števil.
10	Izbranemu številu dodaj ničlo $10 \cdot 3 = 30, 10 \cdot 5 = 50, 10 \cdot 10 = 100$	Množenje z 10, ali pravilo o dodajanju ničel.	
5	Množi z 10 in deli z 2. $5 \cdot 7 = (10 \cdot 7) : 2 = 70 : 2 = 35$	Šteje po pet. $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$	Razpolavlja število na dve enaki števili.
3	Izbrano število podvoji, rezultat še povečaj za izbrano število $3 \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 7, 3 \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 6$	Poštevance števila 2 in seštevanja enomestnih števil.	
6	Izbrano število množi s 5, rezultat še povečaj za izbrano število $6 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 7 = 35 + 7 = 42$	Poštevance števila 5 in seštevanja enomestnih števil.	
4	Izbrano število množi z 5, rezultat zmanjšaj za izbrano število $4 \cdot 7 = 5 \cdot 7 - 7 = 35 - 7 = 28$	Izbrano število dvakrat podvoji $4 \cdot 7 = 2 \cdot 7 \cdot 2 = 14 \cdot 2 = 28$	Poštevance števila 5 in odštevanja enomestnih števil, poštevance števila 2.
9	Izbrano število množi z 10, rezultat zmanjšaj za izbrano število $9 \cdot 7 = 10 \cdot 7 - 7 = 70 - 7 = 63$	Opazuj vzorec $0 + 9 = 9, 1 + 8 = 9, 2 + 7 = 9, 3 + 6 = 9, 4 + 5 = 9, 5 + 4 = 9, 6 + 3 = 9, 7 + 2 = 9, 8 + 1 = 9, 9 + 0 = 9$	Poštevance števila 10 in odštevanja enomestnih števil.
7	Izbrano število množi s 5, rezultat še povečaj za podvojeno število $7 \cdot 8 = 5 \cdot 8 + 2 \cdot 8 = 40 + 16 = 56$	Poštevance števil 5 in 2 ter seštevanja števil.	
8	Izbrano število množi z 10, rezultat zmanjšaj za podvojeno število $8 \cdot 7 = 10 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 70 - 14 = 56$	Poštevance števil 10 in 2 ter odštevanja števil.	

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Slika 6: Memoriranje štirih produktov olajša določanje devetih produktov.

10 sec.

- Vedo, da je $7 \cdot 4 = 28$
- Uporabijo strategijo:
 - $7 \cdot (5 - 1) = 35 - 7 = 28$
 - $(5 + 2) \cdot 4 = 20 + 8 = 28$
 - ...
- Uporabijo enostavnejšo strategijo
 - $7 + 7 + 7 + 7 = 28$
 - (oziroma 7, 14, 21, 28)
- Štejejo s prsti
- Ugibajo

7 · 4

Slika 7: Kako učenci določajo vrednost produkta števil (na primeru števil 7 in 4).

in še ene računske operacije (odštevanje, seštevanje). Z zakonom o zamenjavi lahko več kot polovico zmnožkov poštevank števil 6, 7, 8 in 9 prevedemo na uporabo enostavnejših strategij (primer: $9 \cdot 2 = 2 \cdot 9 = 9 + 9 = 18$). Težave nastopijo takrat, ko faktorji 6, 7, 8 in 9 v zmnožku nastopajo skupaj (primer: $9 \cdot 6, 8 \cdot 7, 8 \cdot 8, 8 \cdot 6, \dots$). Teh zmnožkov je 16 in tudi poznavanje strategije o zamenjavi faktorjev ta nabor oklesti na še vedno 10 zmnožkov. V teh primerih je smiselno memorirati vrednosti produktov enakih števil ($9 \cdot 9 = 81, 8 \cdot 8 = 64, 7 \cdot 7 = 49, 6 \cdot 6 = 36$), ki jih ni veliko (znanje je uporabno tudi pri avtomatizaciji kvadriranja) – za določanje vrednosti produkta dveh sosednjih števil (primer: $9 \cdot 8, 8 \cdot 9, 7 \cdot 8, 8 \cdot 7, 6 \cdot 7, 7 \cdot 6$) pa uporabiti strategijo:

$$9 \cdot 8 = 9 \cdot 9 - 9 \text{ ali } 9 \cdot 8 = 8 \cdot 8 + 8$$

Zmožnost uporabe več različnih strategij za določanje vrednosti enakega produkta je v fazi učenja koristno, učenec sam prevzame tisto, ki mu je enostavnejša.

Produkti dveh enakih števil od 0 do 10 lahko služijo kot oporna točka tudi za določanje vrednosti produkta sosednjih števil, zato jih je vse smiselno memorirati (Slika 6).

Kaj nam čas reševanja pove o strategijah

Načini določanja produktov so na sliki 7 nanizani od najhitrejšega do najpočas-

nejšega. Učenec, ki ne pozna 'na pamet' vrednosti produkta, se običajno zateče k strategiji s seštevanjem ali odštevanjem od njemu znane vrednosti. Pri produktu $7 \cdot 4$ je to lahko $35 - 7$ ali $14 + 14$ ali $21 + 7$. Zato lahko pravočasna reakcija učitelja na napako učenca pri poštevanki razreši napako izgrajeno miselno shemo računske operacije seštevanja ali odštevanja. Učenec, za katerega lahko trdimo, da je usvojil do avtomatizma zmnožke v obsegu števil 10×10 , bodisi ve (je memoriral), koliko je vrednost produkta, bodisi zanesljivo in hitro uporablja ustrezne strategije.

Za katere produkte imajo učenci izdelane ustrezne (hitre) strategije, lahko sklepamo s pomočjo drugega kazalnika – časa za vpis odgovora.

Ko pri učencu zaznamo podobno situacijo, kot je prikazana v tabeli (Slika 8) za poštevanko števila osem, je smiselno najprej preveriti, katero strategijo ali strategije uporablja (za produkta števila osem in štiri ter osem in šest) in mu bodisi ponuditi alternativno - hitrejšo strategijo bodisi ga vzpodbuditi k dodatni vaji.

Niso vse napake enake

Za kakovostno povratno informacijo učencu, ki mu bo pomagala izgraditi ustrezno miselno shemo, so učitelju v največjo pomoč učenčeve napake. S pomočjo teh učitelj lahko ugotovi, katero strategijo uporablja učenec in v katerem koraku uporabe ima težave. Več kot je

evidentiranih napak, lažje učitelj ugotovi, ali gre pri posamezni napaki za osamljen primer ali za posledico napačnih strategij, za težavo pri konkretnem zmnožku ali pri več zmnožkih istega faktorja.

Na podlagi analize napak posameznega učenca ali skupine učencev je smiselno za poštevanko števil ali posamezne produkte, ki se izkažejo kot problematični (ponavljajoča istovrstna napaka):

- Pogovoriti se o vzrokih za napako – preveriti njihovo aktualno strategijo določanja zmnožka ali zmnožkov,
- ponuditi jim različne reprezentacije teh izrazov (slikovni in konkretni pripomočki) – z njihovo pomočjo učenecem pokazati, kje njihova aktualna strategija odpove,
- jim omogočiti, da sami oblikujejo in utrdijo novo strategijo – po potrebi jim pomagamo,
- preverimo uspešnost te intervencije.

Napake pri nekaterih izrazih so tako običajne, da lahko učencu tudi brez njegovih dodatnih informacij pojasnimo, zakaj je njegov odgovor napačen (primer poštevank števila 0, ki jo učenci zamenjujejo s poštevanko števila 1). Pri drugih izrazih se pojavlja toliko različnih napačnih odgovorov, da je običajno pogovor z učenecem potreben. Učenci za napačno vrednost produkta števil 6 in 4 zapišejo kar 13 različnih vrednosti (to so: 28, 42, 32, 20, 12, 8, 16, 30, 23, 18, 21, 26, 22). Nekateri z gotovostjo pripišejo napaki »sosednje poštevank« (28, 20, 30, 18, 21), nekaj napačni strategiji (26), za ostale pa je smiselno od učenca zahtevati dodatna pojasnila. Istovrstne in ponavljajoče se napake učenca s pomočjo tehnologije relativno enostavno zaznamo ter podamo kakovostno povratno informacijo.

Tehnologija brez učitelja

V fazi strukturiranega poučevanja poštevank je vloga učitelja nenadomestljiva. Učitelj uporablja tehnologijo kot pripomoček za hitro in enostavno analizo stanja. Kasneje (v drugem in tretjem triletju ter srednji šoli) postane tehnologija pripomoček učenca za samoevalvacijo, saj mu pomaga najti vrzeli v znanju. Te vrzeli v obliki pomanjkljivih ali napačnih strategij lahko učenec odpravlja sam ali mu pri tem pomaga učitelj, kar je neprimerno bolj učinkovito.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1,39	1,71	1,88	2,19	1,91	1,65	1,38	1,62	1,69	1,74	2,24
1	1,68	1,78	1,77	1,95	1,77	3,15	1,89	2,22	1,76	2,17	2,74
2	1,42	2,54	2,14	2,22	3,15	2,59	2,54	2,77	3,11	3,12	2,40
3	1,99	2,00	2,53	3,14	3,35	2,86	3,46	4,20	4,45	3,85	2,56
4	1,83	1,70	3,22	2,86	3,55	2,55	4,40	4,85	6,16	4,42	2,44
5	1,86	1,81	2,51	3,05	3,60	2,77	3,25	4,23	3,24	4,37	2,13
6	2,02	1,84	2,85	4,18	4,96	3,62	4,23	4,03	5,37	4,49	2,23
7	1,74	2,58	3,05	4,61	4,12	4,28	3,95	3,40	3,92	4,27	2,24
8	2,00	2,34	3,44	4,82	6,85	3,57	5,86	4,03	4,93	4,76	2,15
9	1,83	2,37	3,01	4,45	5,60	3,89	5,27	4,75	4,00	3,04	2,63
10	3,05	2,42	2,14	2,07	2,29	2,47	2,20	2,44	2,10	2,53	2,99

Slika 8: Povprečen čas, potreben za določitev vrednosti posameznega produkta. ($n =$ cca 500 000)

		Drugi faktor										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prvi faktor	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	2	2	0	1	0	0	0	0	0	1
	2	1	1	2	4	2	0	1	0	1	0	3
	3	1	1	6	2	4	0	4	2	5	5	1
	4	1	2	4	1	5	2	3	8	6	6	1
	5	1	1	2	0	0	2	1	4	1	2	1
	6	1	1	6	5	13	1	4	5	8	4	1
	7	1	1	3	5	9	5	9	6	6	6	1
	8	1	1	6	6	9	2	10	7	8	3	1
	9	1	2	2	5	7	4	5	8	3	3	2
	10	1	1	3	1	1	1	1	2	1	1	4

Slika 9: Število različnih napak za posamezni izraz poštevanka, ki odstopajo po pogostosti. ($n = \text{cca } 500\,000$)

enominutnih vaj v časovnem obdobju enega leta). Ti izbrani učenci so še nekoliko spretnejši pri delu s tipkovnico, saj je njihov povprečni izmerjeni čas vpisa enega števila 1,78 sekunde. V grafih (Slika 10 do 14) so ponazorjeni povprečni časi za en izraz poštevanka v odvisnosti od zaporednega števila njihove enominutne vaje ($n = 33114$).

Velika oscilacija rezultatov v 3. in deloma 4. razredu je znak, da lahko uspešnost z vajo še izboljšamo. Tudi takrat, ko rezultat zaniha v višjih razredih učence povabimo k izboljšanju le tega (primer - učenka 5. razreda v 118. poskusu). Konsistentni rezultati (primera učenec iz 6. in 7. razreda) pa sta zelo zanesljiv pokazatelj za učitelja, da učenec zanesljivo izvaja operacije množenja v obsegu 10×10 in je usvojil poštevanko do avtomatizma.

Kdaj je vaje dovolj?

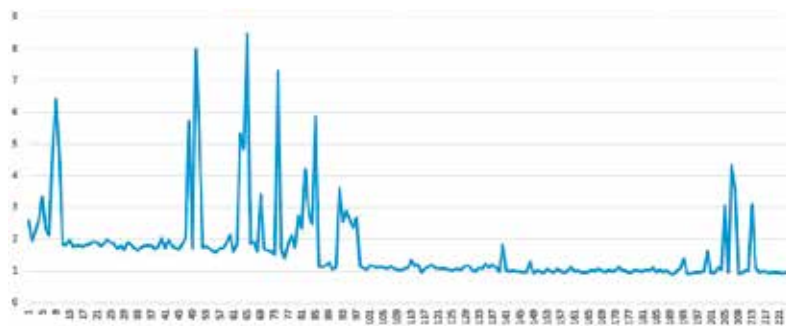
Pričakovati od učencev oziroma dijakov, da bodo z intenzivnim utrjevanjem poštevanka svojo učinkovitost izboljševali v nedogled, je nesmiselno. Na podlagi zbranih podatkov smo poskušali poiskati tisto točko, ko intenzivna vaja ni več nujno potrebna.

Pri uporabi tehnologije (pa tudi sicer) je določanje zmnožka dveh števil v grobem sestavljeno iz treh korakov: branje izraza, določanje vrednosti izraza in vpis vrednosti izraza. Da bi natančno opredelili čas, ki ga uporabnik potrebuje za določanje vrednosti izraza, moramo od skupnega časa odšteti čas branja in vpis vrednosti izraza. Aplikacija »Vadnica poštevanka« učencem omogoča, da vadijo delo s tipkovnico na svojem mobilnem telefonu tako, da se jim na vrhu ekrana prikaže število – oni pa ga samo pretipkajo. Pri tem aplikacija beleži čas, potreben za posamezni vpis. Ta vaja je med učenci sicer manj uporabljena kot poštevanka, vendar smo vseeno zbrali nekaj več kot 170.000 zapisov števil, iz katerega lahko določimo povprečen čas za vpis enega števila – ta znaša 2,2 sekundi, najhitrejši pa pretipkajo število v manj kot sekundi (tudi dvomestno število). Ti dve sekundi je smiselno upoštevati, ko analiziramo rezultate hitrosti vpisa poštevanka.

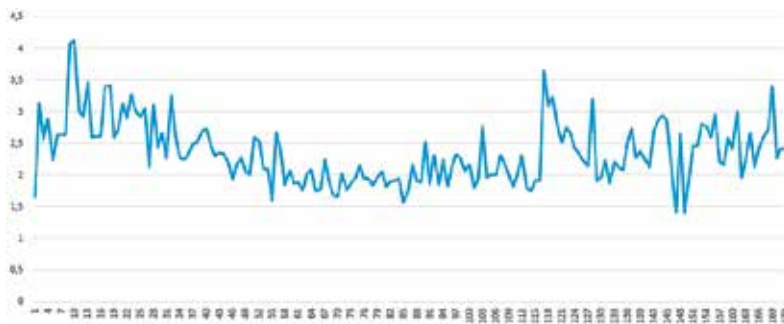
Iz množice podatkov smo izbrali pet učencev, po enega iz 3., 4., 5., 6., in 7. razreda – vse takšne, ki so imeli veliko število poskusov (skoraj vsi več kot sto



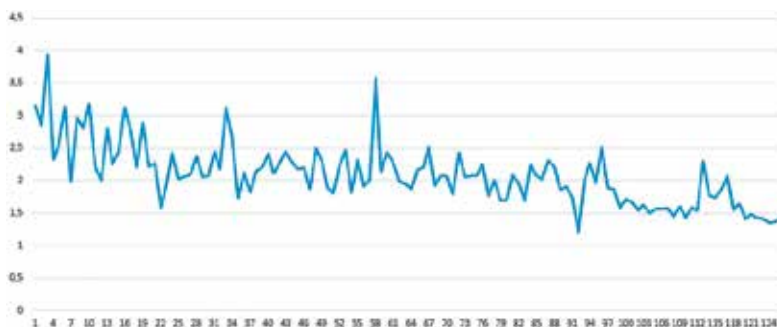
Slika 10: Povprečen čas in zaporedna številka vaje - učenka 3. razreda.



Slika 11: Povprečen čas in zaporedna številka vaje - učenec 3. razreda (do 200. poskusa) - kasneje učenec 4. razreda (med poskusom št. 100 in 200 je učenec vadil zgolj poštevanko števila 7).



Slika 12: Povprečen čas in zaporedna številka vaje - učenka 5. razreda (do 150. poskusa) - kasneje učenka 6. razreda.



Slika 13: Povprečen čas in zaporedna številka vaje - učenka 6. razreda.



Slika 14: Povprečen čas in zaporedna številka vaje - učenka 7. razreda.

Zaključek

Raziskovanja smo se lotili zaradi relativno pogostih zapletov pri reševanju algebrskih nalog v višjih razredih osnovne šole, katerih vzrok smo neposredno pripisali neznanju poštevanke. Začetna analiza testiranj poštevanke nam je ta sum potrdila, saj je kazala, da se ta cilj (avtomatizacija poštevanke) razvija dlje, kot to predvideva učni načrt. Podrobnejša analiza (s pomočjo aplikacije za mobilne telefone) pokaže velike razlike med učenci – so takšni, ki poštevanke avtomatizirajo že ob zaključku 3. razreda, so pa tudi takšni, ki imajo še v višjih razredih težave s hitrostjo in zanesljivostjo priklica vrednosti posameznih izrazov. Prav tako nimajo vsi učenci težav z istimi izrazi, pa tudi tisti, ki imajo težave z istimi izrazi, imajo lahko za to različne vzroke. Tako nehomogeni rezultati testiranj kličejo po individualizaciji, pri kateri nam je tehnologija v veliko pomoč. Učitelj lahko s pravočasnim vpogledom v rezultate in z oblikovanjem individualizirane povratne informacije učencu pomaga popraviti napačno izgrajene miselne sheme, kasneje pa spremlja učinkovitost svoje intervencije. Tudi tehnologija sama, brez posredovanja učitelja, lahko z enostavno povratno informacijo (prav/narobe) učenca vzbudi k oblikovanju pravih miselnih shem, predvsem pa zmanjša potreben čas, za priklic pravilne vrednosti izrazov poštevanke.

Množica zbranih podatkov ima za učitelje velik pomen, saj nam omogoča vpogled v najbolj pogoste napake in posredno v način razmišljanja učencev ob določanju vrednosti produktov. Tako lahko vnaprej pripravimo kakovostne povratne informacije in pojasnila. ■

Viri

- Bloom, B. (1986). *The Hands and Feet of Genius – Automaticity*. Educational Leadership, februar. Stran 70–79.
- Burch, N. (1974). The Learning Stages. V Gordon T.: *Teacher Effectiveness Trainingbook*. ZDA: Gordon Training International.
- Repolusk, S. (2010). Primeri različnih pristopov pri matematičnem modeliranju, stran 81–89. V Žakelj, A. (2010): *Posodobitev pouka v gimnazijski praksi, Matematika*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- Wells, K. (2015). *Improving the Automaticity of Multiplication Facts with Four Grade Students*. ZDA. Eastern Illinois University.
- Wong, M. (2007). Improving Basic Multiplication Fact Recall for Primary School Students, *Mathematics Education Research Journal*, 19(1), stran 89–106.
- Žakelj, A. (2011). *Učni načrt za osnovno šolo, Matematika*. Ljubljana: MIZŠ in ZRSŠ.