Naslov članka/Article:

RAZISKOVALNE NALOGE IZ MATEMATIKE NA SREČANJU MLADIH RAZISKOVALCEV SLOVENIJE 2021

Avtor/Author:

Dr. Borut Jurčič Zlobec

Matematika v šoli št. 2/2021, letnik 27
ISSN 1318-010X
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2021

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2021

Dr. Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko Univerze v Ljubljani

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je čim zgodnejše uvajanje mladih v znanost, popularizacija znanosti in tehnike, odkrivanje nadarjenih učencev in dijakov na posameznih področjih in njihovo spodbujanje k poglabljanju znanja in raziskovalne dejavnosti.

Na državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge z regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2021 je potekalo že 55. državno srečanje v Murski Soboti. Zaradi posebnih razmer je bila udeležba nekoliko skromnejša pa vendar se moramo mentorjem zahvaliti, da jim je kljub temu uspelo opraviti svoje delo.

Organizator je dobil v pregled 10 osnovnošolskih in 5 srednješolskih nalog. Med osnovnošolskimi nalogami smo izbrali 4 za bronasto priznanje. Med srednješolskimi je vsaka dobila ali zlato ali srebrno priznanje.

Ostale naloge so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, izr. prof. dr. Marko Jakovac, doc. dr. Mateja Grašič in asist. Simon Brezovnik.

Komisija je izbrala 2 osnovnošolski in 2 srednješolski nalogi za zlato priznanje, ostale pa so dobile srebrno priznanje.

Objavo rezultatov je narekoval predvsem namen, da izpostavimo delo učencev in mentorjev, in pričakujemo, da bodo drugi sledili njihovem zgledu.

Z zlatim priznanjem so mladi raziskovalci dobili pohvalo za svoje dosežke. Na tem mestu pa jim želimo sporočiti, kaj bi lahko popravili, izboljšali, da bi bili še bolj uspešni.

Pojdimo k nalogam. Teme nalog, ki so bile predstavljene pred državno komisijo, so bile geometrijske (5 nalog), aritmetične (3 naloge), šahovske (2 nalogi), anketne (2 nalogi) ter po ena algebrska, zgodovinska in matematično-fizikalna.

Tudi letos smo dobili kar tri naloge z anketnimi vsebinami. O neprimernosti teh nalog smo že govorili in mislili smo, da bodo mentorji vendarle začeli upoštevati, da anketne naloge ne sodijo v to področje, pa je prišlo novo razočaranje. **Povejmo še enkrat, zakaj se nam zdijo te naloge neprimerne.** Anketne naloge so privlačne, ker ustrezajo napotkom organizatorjev, da je treba v raziskovalni nalogi narediti nekaj izvirnega, kar pa v matematiki ni tako lahko. Zato stalno poudarjamo, da tovrstna inovativnost za matematične naloge ni primerna. Tudi kakovost teh nalog je vprašljiva. Vprašljive so tudi statistične metode, ki jih uporabljajo. Zato mentorjem priporočam, da se takih tem izogibajo. Pri matematičnih raziskovalnih nalogah je pomembno, da se učenci naučijo nekaj novega iz matematike in da znajo to lepo predstaviti. Če pa jim uspe kakšen izviren problem opisati matematično in ga tako rešiti, so dosegli največ, kar se od njih pričakuje.

Tudi navodila za izdelavo raziskovalne naloge so neustrezna. Zakaj mora vsaka naloga imeti razdelek s hipotezami? Večinoma delujejo neustrezno in privlečeno za lase. Kot na primer:

(1) Moja prva hipoteza je, da je desetiški sestav najboljši in najbolj priročen za vsakdanjo uporabo, vendar so nekateri sestavi boljši za zapisovanje posameznih skupin števil.

(2) Moja druga hipoteza je, da bodo anketiranci dosegli vsaj 20 % točk.

(3) Obstaja točno določeno število rešitev.

(4) Večja kot je mreža, več je možnih rešitev.

Večinoma gre za hipoteze, ki niso hipoteze, ampak dobro poznana dejstva. Vidi se, da so hipoteze napisane le zato, da se ustreže navodilom. Zakaj se v navodila ne zapiše tudi, da anketne naloge niso primerne? Tako bi prikrajšali marsikatero razočaranje.

Pri ocenjevanju nalog je komisija poleg samih nalog ocenjevala tudi njihovo predstavitev.

Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2021

Zlato priznanje so dobile štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski:

Geometrijske rožice

Avtorja: Tadej Cajzek in Naja Tošović
Mentorica: Alenka Repnik
Šola: Osnovna šola borcev za severno mejo Maribor

Tlakovanje v ravnini

Avtorica: Hana Perman
Mentorica: Diana Kvartuh
Šola: Osnovna šola Škofljica

Problem *n* kraljic
Avtor: Jaka Slapar
Mentorica: Nataša Šuligoj
Šola: Gimnazija Vič

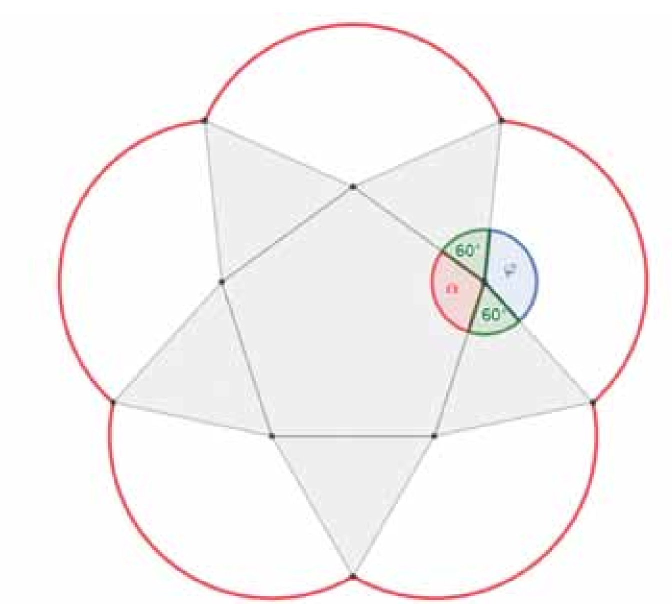
Oblika in parametri verižnice
Avtor: Simon Bukovšek
Mentorica: Barbara Kušar
Šola: Gimnazija Kranj

Opis nagrajenih nalog

1. naloga z naslovom Geometrijske rožice

Predstavimo jo z nekoliko skrajšanim povzetkom k nalogi.

Za raziskovanje smo izbrali like, ki jih omejujejo krožni loki. Pri tem smo se osredotočili na like, ki nastanejo pod točno določenimi pogoji, in sicer smo raziskovali like, ki jih dobimo, če se enakostranični trikotnik s stranico a zavrti (zakotali, op. recenzenta) okrog pravilnega večkotnika, katerega stranica je prav tako dolžine a, in pri tem s prostimi oglišči »riše« tako imenovane cvetne liste. Ugotavljali smo, kakšen je obseg tako nastalega lika in kako se obseg spreminja, glede na pravilni večkotnik, okrog katerega se zavrti enakostranični trikotnik.



Slika 1: Primer rožice s petimi lističi. (Vir avtorja)

Izračuni v nalogi se na koncu skrčijo na tri formule. Prva je formula za notranji kot pravilnega n-kotnika. Pravilni n-kotnik je sestavljen iz n skladnih trikotnikov z vrhi v njegovem središču. Vsota notranjih kotov trikotnika je 180°. Notranji kot α n-kotnika je potemtakem enak:

$\alpha = (n \cdot 180° - 360°)/n.$

Od vsote notranjih kotov trikotnikov $n \cdot 180°$ odštejemo 360°, kolikor je vsota kotov ob vrhih trikotnikov v središču večkotnika. Rezultat je $n \cdot \alpha$. Kot ϕ je enak:

$\phi = 360° - \alpha - 2 \cdot 60° = 60° \cdot (n + 6)/n.$

In nazadnje še obseg rožice:

$o = n \cdot a\, \phi\, \pi/180°.$

Pri tem je $\phi_{rad} = \phi\, \pi/180$ kot ϕ izražen v radianih in $l = a\, \phi_{rad}$ je dolžina loka lističa.

2. naloga z naslovom Tlakovanje v ravnini

Nalogo bomo predstavili z njenim povzetkom.

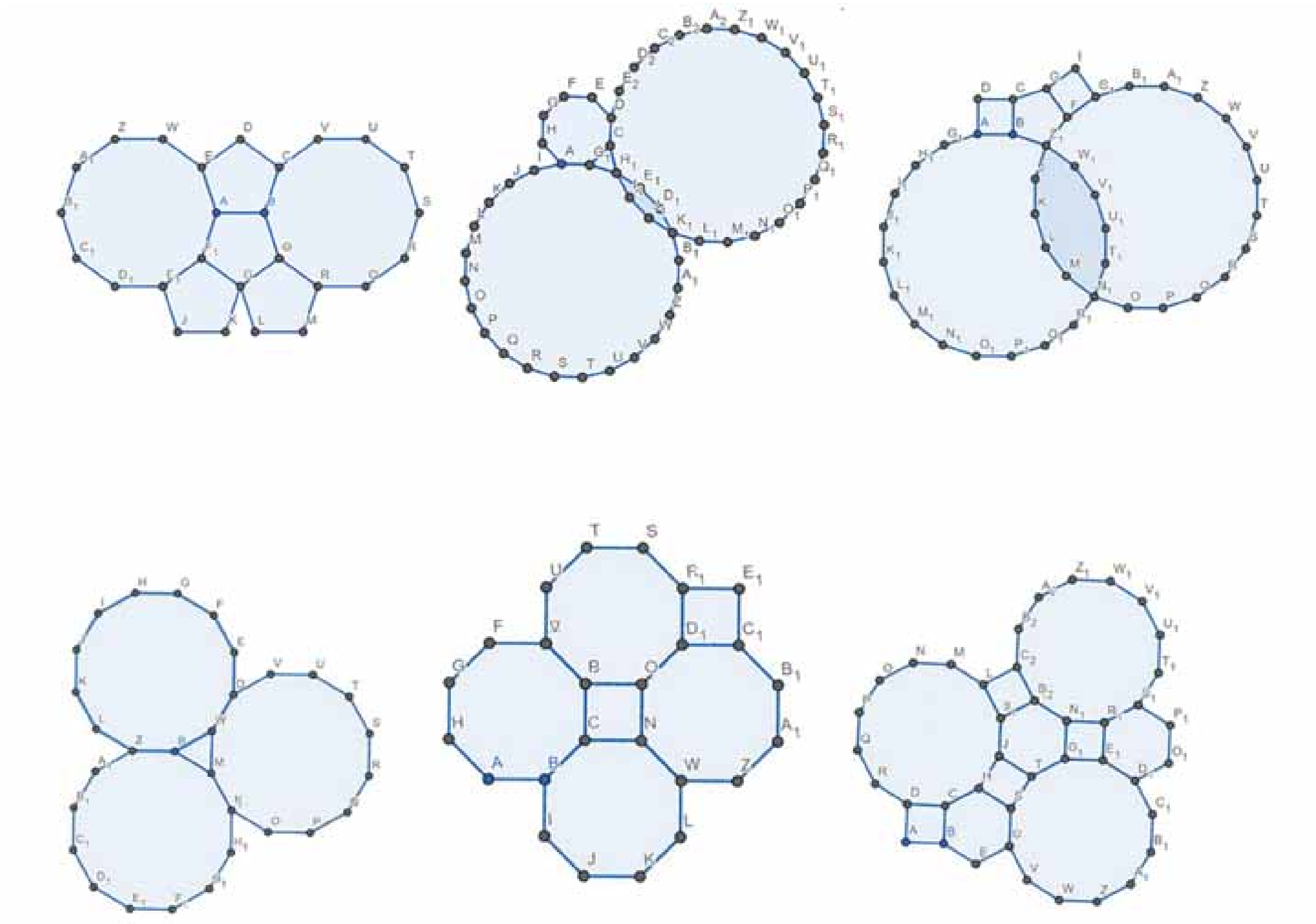
Znano je, da sta matematika in umetnost od nekdaj povezani. Ob tem se odpira bogata paleta vsebin, med katerimi me je najbolj pritegnilo tlakovanje ravnine. Ker je tlakovanj s poljubnimi mnogokotniki nešteto, sem se v raziskovalni nalogi omejila na tlakovanja s pravilnimi mnogokotniki od roba do roba. Za odkrivanje kombinacij mnogokotnikov, s katerimi bi lahko tlakovala, sem napisala programe v programskem jeziku Pascal.

Vse kombinacije, ki jih vrne program, sem preverila z risanjem v programu Geogebra. Izkaže se, da nekatere kombinacije mnogokotnikov ne morem položiti v ravnino, ne da bi prišlo do prekrivanja ali vrzeli. Ugotovila sem tudi, da lahko nekatere ugodne kombinacije mnogokotnikov postavimo v ravnino na različne načine, spet druge pa imajo enolično postavitev. Tovrstna enolična tlakovanja se imenujejo Arhimedova tlakovanja. Sprašujem se, kako lahko Arhimedova tlakovanja z rotacijo, vzporednim premikom ali zrcaljenjem in njihovimi kombinacijami preslikam sama nase. Ugotovim, da imajo tovrstne preslikave matematično strukturo grupe.

Naloga govori o tlakovanjih ravnine s pravilnimi večkotniki od roba do roba. Taka tlakovanja imenujemo evklidska. Avtorica se je zanimala predvsem za Arhimedova tlakovanja, zanje velja, da se v vsakem vozlišču srečajo enaki pravilni večkotniki.

Avtorica je prečesala vse mogoče kombinacije večkotnikov Arhimedovih tlakovanj. Pri tem je napisala program v jeziku Pascal in si pomagala z orodjem Geogebra. Omenila je monoedrska tlakovanja. Za monoedrska tlakovanja velja, da vsebujejo eno samo vrsto pravilnih večkotnikov. Na koncu je pregledala grupe transformacij tlakovanj.

Veliko preveč dela, da bi ga opisali natančneje na tem mestu. Morda prezahtevna naloga za osnovno šolo.



Slika 2: Primer neuspešnih in uspešnih tlakovanj.

3. naloga z naslovom Problem *n* kraljic

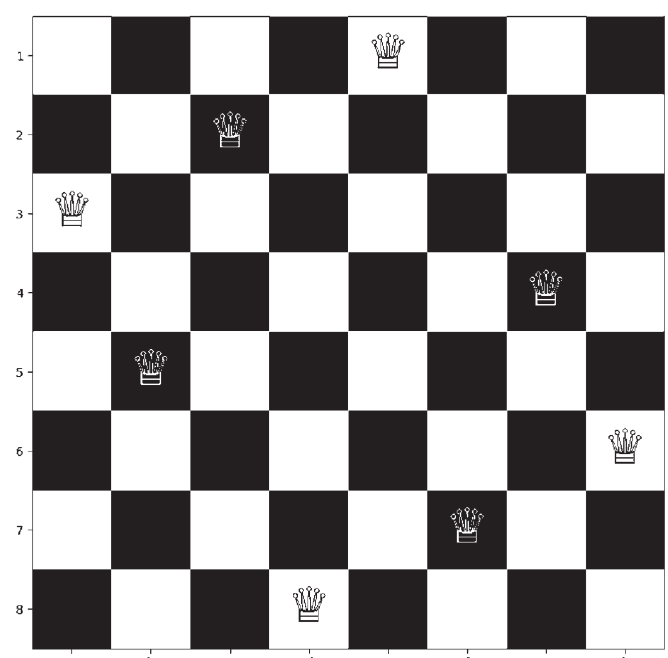
V povzetku naloge je zapisano:

V raziskovalni nalogi sem preučeval problem neodvisnosti kraljic ali problem n kraljic. Zanima nas, na koliko različnih načinov lahko na dano šahovnico postavimo največje možno število kraljic, tako da se med seboj ne napadajo. Izkaže se, da je problem pri večjih šahovnicah matematično dokaj zahteven, saj trenutno poznamo zgolj grobe ocene za število rešitev. Zaenkrat je edini način reševanja groba računalniška moč.

Problem obravnavam na standardnih in na modularnih šahovnicah, pregledal sem tudi nekaj primerov šahovnic nenavadnih oblik. Na koncu sem napisal še računalniški program, ki nam za šahovnice oblike n × n izpiše število rešitev.

Poglejmo si od blizu, čemu mora ustrezati rešitev problema n kraljic.

Prvi pogoj: da se kraljice na šahovski deski ne napadajo, je, da se v eni vrstici in enem stolpcu na šahovski deski nahaja natanko ena kraljica. Tako lahko postavitev n kraljic na šahovsko desko dimenzije $n \times n$ zapišemo kot permutacijo števil od 1 do n, $\Pi(1 \dots n)$.



Slika 3: Razporeditev kraljic, ki ustreza permutaciji $\Pi(x) = \{3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6\}$.

Na primer pri postavitvi kraljic na običajni šahovnici 8×8, kjer je $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ in permutacija

$\Pi(x) = \{3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6\}$, se kraljice nahajajo na poljih

$\{(1, 3), (2, 5), (3, 2), (4, 8), (5, 1), (6, 7), (7, 4), (8, 6)\}$

oziroma v standardnem zapisu

$\{(a, 3), (b, 5), (c, 2), (d, 8), (e, 1), (f, 7), (g, 4), (h, 6)\}$.

Drugi pogoj: kraljice se ne smejo napadati po diagonalah, zato izločimo iz permutacij $\Pi(x)$ vse primere, kjer bi se kraljice napadale po diagonalah. Za permutacijo, ki predstavlja položaj kraljic, ki se ne napadajo po diagonalah, velja, da imata seznama $\Pi(x) - x$ in $\Pi(x) + x$ same različne elemente, kjer pomeni +/– seštevanje/odštevanje po komponentah. Naslednji program, zapisan v jeziku Mathematica, izpiše seznam permutacij 92 različnih rešitev problema. Koda je napisana tako, da je čim bolj razumljiva in je zato bolj potratna s prostorom.

```
n = 8;
Ident = Table[i, {i, n}]; (* Tabela 1 ... n *)
Perm = Permutations[Ident]; (* Permutacije 1 ... n *)
plus = Map[# + Ident &, Perm]; (* Priprava podatkov za detekcijo *)
minus = Map[# - Ident &, Perm]; (* diagonalnih napadov *)
dPlus = Map[Length[DeleteDuplicates[#]] < n &, plus]; (* Detekcija *)
dMinus = Map[Length[DeleteDuplicates[#]] < n &, minus]; (* diagonalnih napadov *)
du = MapThread[#1 || #2 &, {dPlus, dMinus}]; (* Združimo oba primera *)
pos = Position[du, True]; (* Položaji permutacij z diagonalnimi napadi *)
Kraljice = Delete[Perm, pos] (* Izločimo permutacije z diagonalnimi napadi *)
```

4. Naloga z naslovom **Oblika in parametri verižnice**

Poglejmo najprej skrajšan povzetek k nalogi.

Verižnica je krivulja, ki jo oblikuje viseča vrv, pritrjena na obeh koncih. Funkcija, katere graf je verižnica, je hiperbolični kosinus:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

Pri dokazu upoštevamo ravnovesje sil. Ko vrv miruje, mora biti vsota sil na vsak del vrvi enaka nič. Hiperbolični kosinus ima podobno kot kvadratna funkcija tri parametre, ki lahko opišejo vsako neizrojeno obliko viseče vrvi. Parametri so koordinati temena in faktor raztega. V nalogi bomo poiskali te tri parametre za obliko vrvi, če poznamo njeno dolžino in koordinati koncev vrvi, v katerih je le-ta vpeta. Na koncu nas reševanje problema pripelje do transcendentne enačbe za faktor raztega, ki jo rešimo numerično.

$$\sinh(t) = k\, t, \text{ označimo } \psi(t) = \frac{\sinh(t)}{t},$$
enačba se glasi $\psi(t) - k = 0$.

V nalogi je avtor razvil v Taylorjevo vrsto inverzno funkcijo funkcije $\psi(t)$, $\psi^{-1}(t)$.

Glede na že uporabljeno težko artilerijo višje matematike, bi si avtor lahko poenostavil delo in si privoščil Newtonovo iteracijo, ki bi mu poiskala rešitev za vse regularne primere brez izjeme, tudi za velike k:

$$p(t) = \psi(t) - k \quad \text{iteracija} \quad t_0\text{: začetni približek;}$$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{p(t_n)}{p'(t_n)}.$$

Izpeljava enačbe za faktor raztega.

Splošna oblika verižnice:

$$f(x) = \lambda + a\cosh\left(\frac{x}{a} + c\right)$$

Izrazimo parametre s koordinatami temena (to je točka, kjer zavzame funkcija najmanjšo vrednost) (x_0, y_0).

$$f(x) = y_0 - a + a\cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right).$$

Kako poiščemo parametre x_0, y_0 in a, če poznamo koordinate vpetišč in dolžino vrvi l? Naj bodo koordinate (x_1, y_1) koordinate levega vpetišča in (x_2, y_2) koordinate desnega vpetišča. Parametre poiščemo kot rešitve sistema enačb

$$y_i = y_0 - a\cosh\left(\frac{x_i - x_0}{a}\right), \quad i = 1, 2 \quad \text{in}$$
$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Na koncu izločimo enačbo za parameter a:

$$k = \frac{1}{t}\sinh(t), \text{kjer je}$$

$$k = \frac{\sqrt{l^2 - (y_2 - y_1)^2}}{x_2 - x_1} \quad \text{in} \quad t = \frac{x_2 - x_1}{2a}$$

Primer Newtonove iteracije. Rešujemo enačbo $\psi(t) - 5 = 0$. Izberemo začetni približek $t_0 = 2$ in sprožimo Newtonovo iteracijo. Zaporedni približki so:

$$\{2, 5.27035, 4.37069, 3.79087, 3.5959, 3.57836\}$$

Po 5. iteraciji je rezultat natančen na 5 decimalnih mest