

Naslov članka/Article:

## RAZISKOVALNE NALOGE IZ MATEMATIKE NA SREČANJU MLADIH RAZISKOVALCEV SLOVENIJE 2020

Avtor/Author:

dr. Borut Jurčič Zlobec

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



### Matematika v šoli št. 2/2020, letnik 26

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2020

Spletna stran revije:

<https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>

# Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2020

dr. Borut Jurčič Zlobec  
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je čim zgodnejše uvajanje mladih v znanost, popularizacija znanosti in tehnike, odkrivanje nadarjenih učencev in dijakov na posameznih področjih in njihovo spodbujanje k poglobljanju znanja in raziskovalne dejavnosti.

Na to državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge z regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2020 je potekalo že 54. državno srečanje v Murski Soboti. Organizator je dobil v pregled 13 nalog, ki so prišle v končni izbor za priznanja, od teh je 3 določil za bronasto priznanje.

Ostale naloge so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, izr. prof. dr. Marko Jakovac, dr. Borut Jurčič Zlobec, doc. dr. Mateja Grašič in asist. Simon Brezovnik.

Komisija je izbrala 6 nalog za srebrno priznanje, 4 naloge pa so dobile zlato priznanje.

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo nalog, ki so dosegle zlato priznanje. Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi strani pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda bomo z opisom dela najboljših dali kakšno idejo tudi drugim in jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja tudi zanje.

Z zlatim priznanjem so mladi raziskovalci dobili pohvalo za svoje dosežke. Na tem mestu pa jim želimo sporočiti, kaj bi lahko popravili, izboljšali, da bi bili še bolj uspešni.

Pojdimo k nalogam. Teme nalog, ki so bile predstavljene pred državno komisijo, so bile geometrijske (5 nalog), algebrske (4 naloge), aritmetične (3 naloge) in ena anketna.

Tudi letos smo dobili eno anketno nalogo. O neprimernosti teh nalog smo že govorili, vendar povejmo še enkrat, zakaj se nam zdijo neprimerne. Anketne naloge so privlačne, ker ustrezajo napotkom, da je treba v raziskovalni nalogi narediti kaj izvirnega, kar pa v matematiki ni tako lahko. Zato stalno poudarjamo, da tovrstna inovativnost za matematične naloge ne pride v poštev. Tudi kakovost teh nalog je vprašljiva. Vprašljive so tudi statistične metode, ki jih uporabljajo. Zato mentorjem priporočamo, da se takim temam izogibajo. Pri matematičnih raziskovalnih nalogah je pomembno, da se učenci naučijo nekaj novega iz ma-

tematike in da znajo to lepo predstaviti. Če pa jim uspe kakšen izvirni problem opisati matematično in ga tako rešiti, so dosegli največ, kar se od njih pričakuje. Veliko je odvisno od mentorjev. Prav je, da ti pustijo učencem, da delajo samostojno, vendar pa pričakujemo, da je končni izdelek narejen matematično korektno in da mentor svetuje, kako bi se določene stvari izboljšale in poenostavile. Pomembno je tudi, da mentorji opozarjajo na lep in razumljiv jezik. Raziskovalne naloge so priložnost, da se učenci naučijo kaj novega s pomočjo mentorja. Zato je pomembno, da jih mentorji pri tem usmerjajo in jim svetujejo kako in kaj.

## Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2020

Nagrajene so bile štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski:

### (1) Ploščina tetivnega večkotnika

Avtorici: **Katarina Lija Hrastnik** in **Marija Papa**

Mentorja: **Igor Blažič** in **mag. Alojz Grahor**

Šola: Montessori inštitut, Zavod – Zasebna OŠ Montessori

### (2) Koliko je ulomkov

Avtorja: **Črt Cigale** in **Aleksander Kalacun**

Mentor: **Jožef Senekovič**

Šola: Osnovna šola Bojana Illica, Maribor

### (3) Postavitve večdimenzionalnih kock

Avtor: **Gal Zajc**

Mentor: **dr. Tilen Marc** in **Jasna Kos**

Šola: Gimnazija Bežigrad

### (4) Splošni kriterij deljivosti

Avtorja: **Jurij Grohar** in **Matej Kompara**

Mentor: **mag. Anton Grahor**

Šola: Škofijska gimnazija Vipava

## Kratek opis nagrajenih nalog

### 1. Naloga z naslovom: Ploščina tetivnega večkotnika

V raziskovalni nalogi avtorici obravnavata formulo za ploščino tetivnega petkotnika, izraženo le z dolžinami stranic. Znani sta Heronova formula za ploščino trikotnika in Brahmaguptova formula za ploščino tetivnega štirikotnika, ki sta predstavljali izhodišče za raziskavo.

Predstavimo jo z nekoliko skrajšanim povzetkom k nalogi.

*S pregledom literature sva ugotovili, da za izračun ploščine tetivnega petkotnika obstaja zapleten postopek. V raziskovalni nalogi pa sva izpeljali dokaj preprosto formulo, za njen približek. Novo formulo sva utemeljili s pomočjo programa GeoGebra. Meniva, da je izpeljana formula primerna za uporabo.*

Formula se zgleduje po natančni formuli za trikotnik in tetivni štirikotnik, kjer se ploščina izraža z dolžinami stranic. Formula za trikotnik je dobro znana Heronova formula:

$$p_{He} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kjer je

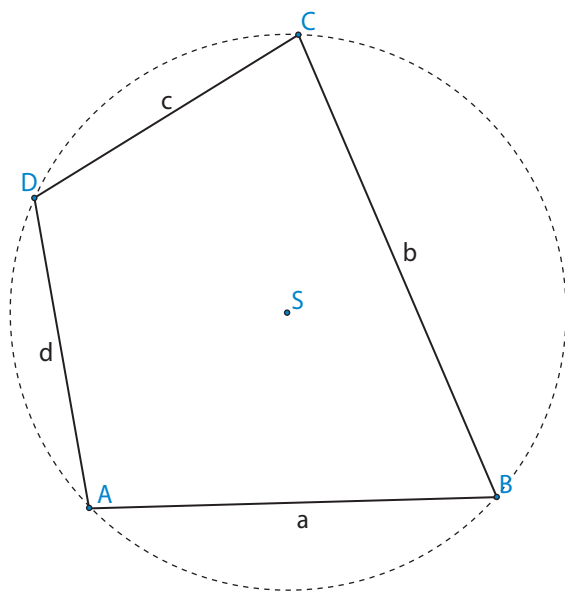
$$s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

*Tetivni štirikotnik je štirikotnik, ki ima očrtano krožnico. Z drugimi besedami, oglišča tega štirikotnika se nahajajo na krožnici. Brahmanova formula za ploščino tetivnega štirikotnika je:*

$$p_{Br} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

kjer je

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$



Raziskovalki je vodila primerjava Heronove in Brahmanove formule. V Heronovi formuli je produkt  $(s-a)(s-b)(s-c)$  pod korenem pomnožen s polovičnim obsegom  $s$ . V Brahmanovi formuli pa lahko rečemo, da je produkt pod korenem  $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$  pomnožen s faktorjem 1. Zato sta sklepali, da bi formula za petkotnik imela pod korenem faktor  $1/s$ . To formulo je zapisala Shahbazi. Formula za ploščino tetivnega petkotnika bi potemtakem lahko bila

$$p_{Sh} \approx \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)/s},$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c+d+e),$$

vendar pa ta formula ni več natančna. Tudi če je vseh pet stranic enakih, če imamo opravka s pravilnim petkotnikom, formula ne da točne vrednosti. Točna vrednost za pravilni petkotnik je:

$$p_{p5} = \sqrt{25 + 105/4}a^2$$

Če izračunamo približno vrednost ploščine za pravilni petkotnik po gornji formuli, dobimo:

$$p_{Sh} \approx 9/4 \sqrt{3/5}a^2$$

Relativna napaka je 0.0223651. Avtorici sta naredili popravke Shahbazijeve formule, tako je nastala Lija-Majina formula:

$$p_{LM} \approx \left(1 - \frac{abcde}{s^5}\right) \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)/s},$$

$$s = \frac{1}{1}(a+b+c+d+e),$$

ki pa še vedno ni natančna. Porodila se je ideja, da bi dodali konstanto tako, da bi bila formula natančna za pravilni petkotnik:

$$p_{LM} \approx \left(1 - K \frac{abcde}{s^5}\right) \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)/s}.$$

Če je

$$K = \frac{3125}{864} \left(27 - 5\sqrt{15 + 6\sqrt{5}}\right),$$

potem je formula res natančna za pravilni petkotnik. Vendar avtorici nista vzeli te vrednosti, ampak njen racionalni približek  $5/4$ . Za tiste, ki ne vedo, kaj je verižni ulomek, naj povemo, da je ta ulomek tretji konvergent verižnega ulomka za konstanto  $K$ . Tokrat je bila relativna napaka pri računanju ploščine pravega petkotnika enaka 0.0000567211. Predlagamo še izboljšano formulo, kjer se  $5/4$  nadomesti z  $99/79$  (peti konvergent). Ime formule pa prepuščamo avtoricama. Računi v nalogi niso natančni, zato smo jih ponovili. Zanimivo je dejstvo, da je formula s konstanto  $K$  točna, če je vseh pet stranic enakih oziroma, če je dolžina ene od njih enaka 0. V tem primeru dobimo formulo za tetivni štirikotnik. Nekje vmes pa bi bila napaka največja. Pri poskušanju s programom *Mathematica* smo dobili največjo relativno napako okoli 0.00065, in to za vrednost konstante  $99/79$ .

Naloga je zanimiva, zato smo podrobneje opisali pot, ki sta jo avtorici prehodili do končne formule. Ker je to osnovnošolska naloga, je popolnoma dosegla svoj namen. Čestitamo.

## 2. Naloga z naslovom: Koliko je ulomkov

Nalogo bomo predstavili z njenim povzetkom.

Vemo, da je naravnih števil neskončno mnogo. Poznamo tudi racionalna števila. Vsako racionalno število lahko zapišemo z ulomkom ali z decimalno številko, za desetiške ulomke neperiodično, s končnim številom decimalnih mest, za nedesetiške ulomke pa periodično. V raziskovalni nalogi raziskujemo, kako število, ki se zapiše s periodično decimalno številko, zapišemo z ulomkom. Raziskati želimo število ulomkov za izbrano periodo. Recimo, koliko nedesetiških ulomkov ima enomestno periodo.

V nalogi se avtorja na široko ukvarja s preštevanjem nedesetiških ulomkov, ki imajo v decimalnem zapisu dano dolžino periode. Omenjena je tudi pretvorba iz periodičnega decimalnega zapisa v ulomek in obratno. Med drugim sta dokazala, da periodični decimalni zapis  $0.9999\dots$ , kjer se števka 9 ponavlja v nedogled, predstavlja število 1.

## 3. Naloga z naslovom: Postavitve večdimenzionalnih kock

Začnimo s povzetkom k nalogi.

V nalogi obravnavamo dvodimenzionalne mostove iz kock  $2 \times 1$ , ki predstavljajo osnovo za izračun števila večdimenzionalnih mostov, ki ustrezajo določenim pogojem. Za število mostov v dvodimenzionalnem in tridimenzionalnem prostoru so dobljene konkretne formule, v večdimenzionalnih prostorih so dobljene formule rekurzivne. Pripeljejo nas do zaporedij, ki jih primerjamo s tistimi, ki so v bazi OEIS<sup>1</sup>. Naloga se zaključi s postavitvijo kock v dvodimenzionalnem prostoru, ki se imenuje zid.

Avtor se je omejil na kocke dimenzije  $2 \times 1$ . Dolžina v smeri osi  $x$  je enaka 2, medtem ko je višina v smeri osi  $y$  enaka 1. Z urejenim parom števil  $(a, b)$ , imenujemo ju koordinati, lahko natančno opredelimo položaj kocke na ravnini. Točka  $T(a, b)$  je spodnje levo oglišče opisane kocke.



Slika 1: Pravilna postavitve kock  $2 \times 1$

Prva definicija je definicija pravilne postavitve kock:

Kocka  $A$  se dotika kocke  $B$ , če ima kocka  $A$  koordinati  $(a, b)$  in točka  $B$  koordinati  $(a \pm 1, b \pm 1)$  oziroma  $(a \mp 1, b \pm 1)$ . Postavitve je pravilna, če lahko iz vsake kocke na vsako drugo kocko pride mo s premiki po dotikajočih se kockah.

Druga definicija je most: Most je pravilna postavitve kock  $2 \times 1$ , pri kateri ni kock  $2 \times 1$  z isto prvo koordinato  $a$ .



Slika 2: Most v dvodimenzionalnem prostoru

Most začnemo graditi z eno kocko in vsako nadaljnjo postavimo za eno enoto desno ter eno enoto navzgor ali navzdol glede na prejšnjo. To pomeni, da je vektor premika posamezne kocke glede na prejšnjo  $\vec{d} = (1, \pm 1)$ .

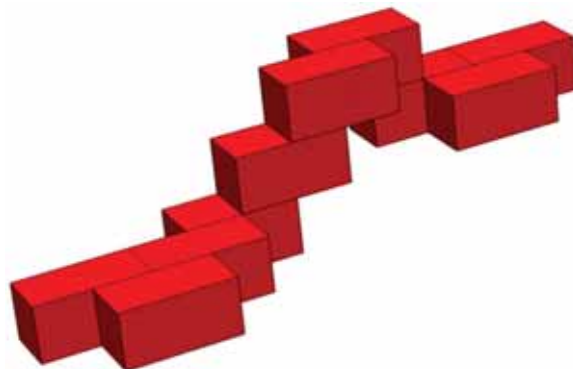
Pravilni in nepravilni most:

Most imenujmo *pravilen*, če je zadnja kocka v enaki višini kot prva, ostale pa so v enaki višini ali višje od prve kocke. Most, ki temu ne ustreza, je *nepravilen*.

V nadaljevanju imamo natančen izračun vseh možnosti sestave kock pri določenih pogojih.

Avtor je pokazal, da obvlada kombinatoriko. Dela se je lotil zelo natančno in rezultat je malodane impozanten. Ni dovolj prostora, da bi vsaj približno opisali vse, kar je avtor naredil v nalogi.

Med drugim je sestavljal kocke tudi v treh dimenzijah in na nekaterih mestih posplošil še na več kot tri dimenzije. Sledi slika tridimenzionalnega mostu in na koncu še avtorjev opis svojega dela. Čestitamo.



Ko sem se lotil raziskovanja in si ustvaril pregled nad obsežnostjo primerov, ki so me zanimali, sem si moral postaviti izvedljive cilje. Ti so bili:

- Poiskati število različnih mostov iz danega števila dvodimenzionalnih kock.
- Posplošiti problem na večdimenzionalne prostore.
- Napisati program za rešitev problema pri velikem številu kock. Cilje sem izpolnil. Naloga je izvirna in pravilnosti rešitev nisem mogel preveriti iz virov, preveril pa sem rešitve na manjšem številu konkretnih primerov. Za zaporedja, ki sem jih našel v bazi OEIS, so rešitve preverjene pri večjem številu primerov. Rekur-

<sup>1</sup> Baza OEIS: THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES: <http://oeis.org/>

zivne formule, ki sem jih izpeljal, so sicer drugačne od tistih, ki so v bazi OEIS, dajo pa enake rezultate pri vseh izračunanih vrednostih.

#### 4. Naloga z naslovom: Splošni kriterij deljivosti

Začnimo s povzetkom k nalogi:

Kriterij deljivosti je algoritem, s katerim preverimo s pomočjo števk danega naravnega števila  $n$ , ali je to število deljivo z danim naravnim številom  $p$ . Pri tem uporabljamo seštevanje, odštevanje ali množenje majhnih števil, ki jih predstavljajo števke danega števila. V raziskovalni nalogi smo razvili in utemeljili splošni kriterij deljivosti, s katerim lahko za vsako naravno število  $n$  in vsak naravni delitelj  $p$  preverimo deljivost. Z uporabo tega splošnega kriterija deljivosti smo dokazali znane kriterije za deljivost s števili 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 in 11. Ker sta tako dokaz kot izvedba splošnega kriterija deljivosti za majhna praštevila zelo preprosta, predlagamo, da se v srednješolske učbenike uvrsti te kriterije za preverjanje deljivosti s števili 7, 11, 13, 17 in 19.

Glede na dostopne vire je eden prvih kriterijev zapisan v Babilonskem talmudu, med tretjim in petim stoletjem našega štetja.

»/.../ stotice dajte na stran kot jubilejske cikle in preostanek pretvorite v sabatske cikle (vsak po sedem let), potem ko k temu dodate

dve leti za vsako dopolnjeno stoletje; preostanek vam poda številko leta v tekočem sabatskem ciklu«.

$$100a + b \equiv 2a + b \pmod{7},$$

Poljubno število  $n$ , zapisano z dvomestno številko, se da zapisati v obliki

$$n = 10a + b = 7(a - 2b) + 3(a + 5b).$$

Od tu sledi, da bo število deljivo s 7 takoj, ko bo število  $a + 5b$  deljivo s 7.

Najprej sta avtorja dokazala, da poljubno naravno število  $n$  lahko zapišemo v obliki

$$n = 10a + b = 7(a - 2b) + 3(a + 5b).$$

Če sta števili  $p$  in  $q$  tuji, od tod sledi, da je število  $n$  deljivo s  $p$ , ko je  $(a - 2b)$  deljivo s  $p$ .

Pri dokazovanju sta si pomagala z diofantsko enačbo.

$$ax + by = c, \text{ kjer so } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Sledi izpeljevanje kriterija za majhna praštevila.