Naslov članka/Article:

RAZISKOVALNE NALOGE IZ MATEMATIKE NA SREČANJU MLADIH RAZISKOVALCEV SLOVENIJE 2018

Avtor/Author:

Dr. Borut Jurčič Zlobec

Matematika v šoli št. 1/2019, letnik 25
ISSN 1318-010X
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2019

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2018

Dr. Borut Jurčič Zlobec
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je čim zgodnejše uvajanje mladih v znanost, popularizacija znanosti in tehnike odkrivanja nadarjenih učencev in dijakov na posameznih področjih in njihovo spodbujanje k poglabljanju znanja in raziskovalne dejavnosti.

Na to državno srečanje prispejo naloge, ki se bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge z regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2018 je potekalo že 52. državno srečanje v Murski Soboti. Organizator je dobil v pregled 18 nalog, ki so prišle v končni izbor za priznanja, od teh jih je šest določil za bronasto priznanje.

Ostale naloge so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, dr. Borut Jurčič Zlobec, izr. prof. dr. Marko Jakovac in doc. dr. Janja Jerebic.

Komisija je izbrala osem nalog za srebrno priznanje, štiri naloge pa so dobile zlato priznanje.

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo nalog, ki so dosegle zlata priznanja. Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi strani pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda bomo z opisom dela najboljših dali kakšno idejo tudi drugim in jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja seveda tudi zanje.

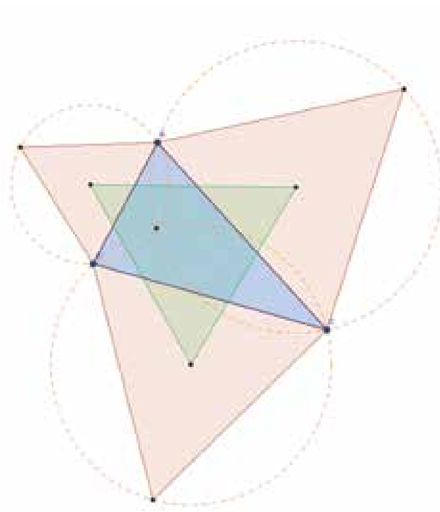
S prejetim zlatim priznanjem so mladi raziskovalci dobili pohvalo za svoje dosežke. Na tem mestu pa jim želimo sporočiti, kaj bi lahko popravili, izboljšali, da bi bili še bolj uspešni.

Pojdimo k nalogam. Teme nalog, ki so bile predstavljene, so bile predvsem algebrske (devet nalog), potem geometrijske (pet nalog), tri iz teorije iger oziroma kombinatorike in ena čisto statistična.

Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2018

Nagrajene so bile štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski: sledi kratek opis, najprej za osnovnošolski, nato pa za srednješolski nalogi.

1. **Napoleonovi trikotniki**
   Avtor: **Aljaž Gornik**
   Mentorica: **Vesna Harej**
   Osnovna šola Dravlje, Ljubljana

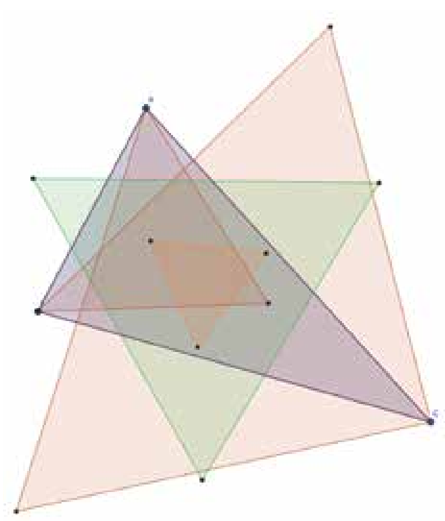


Slika 1: Napoleonovi trikotniki

2. **Trdnjavski polinomi**
   Avtor: **Jaka Slapar**
   Mentorja: **Katarina Kunaver** in **Tadej Starčič**
   Osnovna šola Riharda Jakopiča, Ljubljana
3. **Pitagorejske peterice**
   Avtorja: **Rok Jurinčič** in **Patrik Mikuž**
   Mentor: **Alojz Grahor**
   Škofijska gimnazija Vipava
4. **Dimenzija fraktalov in fraktalna dimenzija**
   Avtorica: **Eva Kuhar**
   Mentorici: **Metka Horvat** in **Ivana Vogrinčič**
   Gimnazija Murska Sobota

Kratek opis nagrajenih nalog

1. Naloga z naslovom: **Napoleonovi trikotniki**



Izrek o Napoleonovih trikotnikih

Če nad vsako stranico poljubnega trikotnika načrtamo enakostranične trikotnike, potem tvorijo središča očrtanih krogov teh treh trikotnikov oglišča enakostraničnega trikotnika. Trikotnike nad stranicami načrtamo na dva načina tako, da načrtani trikotniki ne prekrivajo osnovnega, oziroma tako, da ti prekrivajo osnovni trikotnik. Tako dobimo veliki in mali Napoleonov trikotnik. Očrtani krogi teh trikotnikov se sekajo v eni točki. Težišča osnovnega trikotnika in obeh Napoleonovih trikotnikov sovpadajo.

V nalogi so bile dokazane gornje trditve z izključno geometrijskimi sredstvi. Vsi dokazi so bili izpeljani korektno, nekateri na precej originalen način, ki kaže, da se je kandidat resno poglobil v temo. Pri tem je nalogo opremi s slikami konstrukcij, narejenih s programom GeoGebra. Pri tem je pokazal, da to programsko orodje dodobra obvlada.

Poleg dokazov gornjih trditev najdemo v nalogi še izračunani ploščini obeh trikotnikov in dokaz, da je razlika ploščin med velikim in malim Napoleonovim trikotnikom enaka ploščini osnovnega trikotnika.

Naj navedemo nekaj stavkov, ki jih je avtor zapisal v povzetku.

Glavna tema moje raziskovalne naloge je bila preučevanje Napoleonovih trikotnikov. Med samim raziskovanjem sem spoznal ogromno novih pojmov in povezave med njimi, kot na primer Eulerjeva premica, Eulerjeva krožnica, tetivni štirikotniki, potrebna pa je bila tudi razširitev znanja o podobnosti in znamenitih točkah trikotnikov. Srečal sem se s številnimi novimi pojmi, ki sem jih razrešil po svojih najboljših močeh ter hkrati razširil svoje osnovnošolsko znanje matematike. Menim, da mi je raziskovalna naloga dobro uspela, vendar je precej kompleksna in bolj primerna za srednješolsko raven.

2. Naloga z naslovom: **Trdnjavski polinomi**

V nalogi se je avtor ukvarjal s posplošenimi šahovnicami in postavitvijo trdnjav tako, da se medsebojno ne ogrožajo.

Za dano obliko šahovnice ga je zanimalo, na koliko načinov lahko postavi nanjo dano število trdnjav, ne da bi se medsebojno ogrožale.

Če označimo dano šahovnico z B in število trdnjav s k, potem bomo označili število vseh možnih takih postavitev z $n = p_k(B)$.

Definiral je trdnjavski polimom za dano šahovnico B, $R_B(x) = p_0(B) + p_1(B)x + \dots + p_n(B)x^n$, kjer je n največje možno število trdnjav, ki jih lahko postavimo na šahovnico tako, da se medsebojno ne ogrožajo. Na sliki 2 je primer take šahovnice s tremi trdnjavami (slika je vzeta iz naloge).

Trdnjavski polinom te šahovnice je $1 + 8x + 16x^2 + 6x^3$.

Avtor je v nalogi pokazal, da trdnjavske polinome za kvadratne in pravokotne šahovnice lahko določimo s pomočjo kombinatorike.

Za splošne šahovnice je izpeljal naslednjo rekurzivno zvezo za trdnjavske polinome.

Naj bo B šahovnica in (i, j) poljubno polje na šahovnici. Če sta B' in B'' zaporedoma šahovnici, ki ju dobimo, če iz B izbrišemo i-ti stolpec in j-to vrstico, potem velja $R_B(x) = x\,R_{B'}(x) + R_{B''}(x)$.

V povzetku je avtor napisal med drugim tudi tele vrstice:

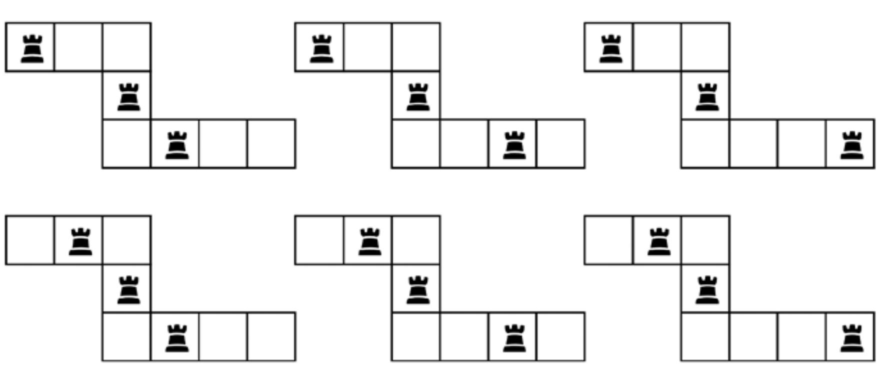
Predstavil sem način, kako lahko vsaki posplošeni šahovnici priredimo neko drugo šahovnico, tako da bo trdnjavski polinom prirejene šahovnice enak polinomu lovcev prvotne šahovnice. Napisal sem tudi program v Mathematici, ki mi izračuna polinom lovcev. Raziskovanje trdnjavskih polinomov in kombinatorike je bilo res zanimivo. Pri izdelavi naloge sem se res veliko naučil. Ker pa mi je matematika zelo blizu, mi ni bilo preveč težko. Naučil sem se tudi veliko o delovanju programa Mathematica in o osnovnih ukazih v zapisu algoritmov. Seveda pa se da še veliko izboljšati.

3. Naloga z naslovom: **Pitagorejske peterice**

Iz Škofijske gimnazije prihajajo že kar nekaj let naloge, ki so med najboljšimi in se odlikujejo tudi po izbrušenem jeziku, kar ni nujno pravilo, tudi ne med najboljšimi nalogami. Zato bom prepustil besedo avtorjema in zapisal to, kar sta onadva zapisala v povzetku.

Pitagorejska peterica je peterica števil (a, b, c, d, e), ki ustrezajo enačbi $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$. Kadar so števila a, b, c, d in e naravna števila, imenujemo peterico naravna pitagorejska peterica (na primer (24, 887, 1520, 512, 1833)), če pa so a, b, c, d in e cela števila, jo imenujemo cela pitagorejska peterica (na primer (–2, 10, –11, 20, 25)). V prvem delu raziskovalne naloge smo odkrili več različnih parametrizacij naravnih pitagorejskih peteric. Pri kreiranju nekaterih izmed njih smo uporabili analogijo s parametrizacijo pitagorejskih trojic in četveric. S pomočjo izbire parametrov dobimo pitagorejsko peterico, zato parametrizaciji pravimo tudi generator pitagorejske peterice. Odkrili smo tudi generator, ki generira vse pitagorejske peterice in to tudi dokazali.

V drugem delu raziskovalne naloge smo v množici celih pitagorejskih peteric definirali množenje s predpisom:
$(a, b, c, d, e) \cdot (p, q, r, s, t) = (ap - bq - cr - ds,\ aq + bp + cs - dr,\ ar - bs + cp + dq,\ as + br - cq + dp,\ et)$.



Sika 2: Šahovnica a tremi trdnjavami

Dokazali smo, da obstaja enota za množenje ter da je množenje asociativno, ni pa komutativno. V množici neničelnih racionalnih pitagorejskih peteric obstaja k vsakemu elementu inverzni element, tako da je množica neničelnih racionalnih pitagorejskih peteric nekomutativna grupa. Raziskovali smo tudi razstavljanje pitagorejskih peteric. Dokazali smo trditev, da v množici celih pitagorejskih peteric ne velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske peterice, kjer je nerazcepna tista pitagorejska peterica, ki je ne moremo zapisati kot produkt dveh pitagorejskih peteric. Izrek velja tudi v podmnožici naravnih pitagorejskih peteric. V nalogi smo si zastavili štiri cilje, in sicer odkriti čim več parametrizacij (generatorjev) pitagorejskih peteric, odkriti parametrizacijo, ki opiše vse pitagorejske peterice, v množici celih pitagorejskih peteric definirati množenje in preveriti ter dokazati, ali velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske peterice. Opisali smo osem parametrizacij (generatorjev) pitagorejskih peteric. Odkrili in dokazali smo tudi generator, s katerim generiramo vse pitagorejske peterice. V množici celih pitagorejskih peteric smo definirali množenje pitagorejskih peteric. Dokazali smo, da obstaja enota za množenje, da je množenje asociativno in da ni komutativno. Kot povezavo povejmo, da je množenje pitagorejskih trojic komutativno in asociativno. Zastavili smo si tudi problem razstavljanja in dokazali, da niti v množici celih pitagorejskih peteric niti v množici naravnih pitagorejskih peteric ne velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske peterice. V nam dostopnih virih smo zasledili zelo malo omemb in člankov o pitagorejskih petericah in še tisti so bili na visokem znanstvenem nivoju, ki ga nismo razumeli. O pitagorejskih trojicah in četvericah pa je več znanega. Tako smo nekaj lastnosti dobili iz idej o pitagorejskih trojicah in četvericah, nekaj pa je plod našega lastnega ustvarjanja. Nadaljnje raziskovanje pitagorejskih peteric bi se lahko usmerilo v iskanje pogojev, kdaj so pitagorejske peterice nerazcepne. Zanimivo bi bilo raziskati, kako so pitagorejske peterice razporejene znotraj štirirazsežnega vektorskega prostora. Predvidevamo pa, da bi bilo zelo težko ugotoviti, saj je pitagorejskih peteric zelo veliko. Z določeno hipotenuzo dobimo zelo veliko število pitagorejskih peteric. Izdelati bi bilo treba seveda računalniško simulacijo. Ker so pitagorejske trojice razporejene po parabolah, bi bilo zanimivo videti, ali so mogoče tudi pitagorejske peterice razporejene samo na določenih predelih.

4. Naloga z naslovom: **Dimenzija fraktalov in fraktalna dimenzija**

Kakšne so značilnosti fraktala? Nekaj pove že sama beseda fraktal, ki izvira iz latinske besede frāctus, ta pa pomeni zlomiti. Na začetku so tako poimenovali zvezno in nikjer odvedljivo krivuljo. To je krivulja, ki ji v nobeni točki ne moremo položiti tangente, v vsaki točki je prelomljena.

Sodobna definicija fraktala vsebuje dva osnovna pojma: sebipodobnost in fraktalno dimenzijo. Biti sebi podoben pomeni, da so drobni deli podobni celoti, so pomanjšana kopija celote. Zaradi sebipodobnosti odlikuje fraktal posebna lastnost, da lahko s sorazmerno preprostim opisom sestavimo izjemno zapletene in čudovite strukture. Morda je to razlog, da v naravi najdemo mnogo primerov sebipodobnosti.

Fraktalna dimenzija ni celo število, ampak zavzame realne vrednosti.

Dimenzijo sebipodobnega objekta izračunamo iz števila delov, na katere razpade sebipodobni objekt pri dani skrčitvi. Vzemimo daljico. Ta razpade na dve daljici polovične dolžine, kvadrat razpade na štiri kvadrate s polovično stranico, medtem ko kocka razpade na 8 kock s polovičnim robom. To lahko zapišemo z enačbami $2^1 = 2$, $2^2 = 4$ in $2^3 = 8$. Število 2 je faktor skrčitve, medtem ko je eksponent dimenzija objekta.

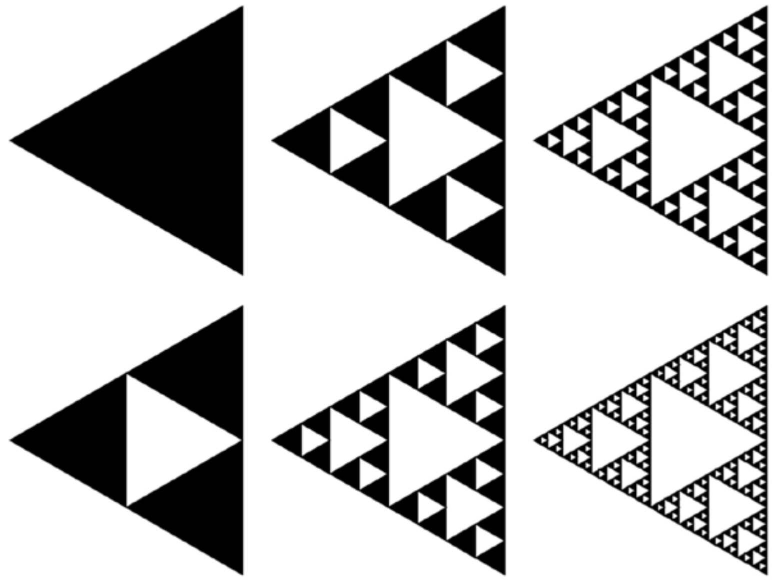
Na sliki 3 je prikazano nastajanje fraktala, ki se imenuje trikotnik Sierpinskega. Na vsakem koraku iz črnih trikotnikov izrežemo trikotnik, katerega stranica je polovica stranice črnega trikotnika. To nadaljujemo v nedogled, končni lik je trikotnik Sierpinskega. Koliko je njegova fraktalna dimenzija? Če stranice razpolovimo, razpade trikotnik na tri dele, ki so identični originalu, le za faktor 2 zmanjšani. Za fraktalno dimenzijo trikotnika Sierpinskega velja $2^n = 3$, ki pa ni več celo število.

Avtorica je v povzetku med drugim zapisala:

O fraktalih smo med raziskovanjem veliko odkrili. Najprej smo spoznali že znane fraktale, kot so Kochova krivulja, Kochova snežinka, Trikotnik Sierpinskega in Cantorjeva množica. Izračunali smo njihove fraktalne dimenzije, obsege in ploščine.

Naloga z naslovom: **Ali je pokončna piramida res pokončna**

Avtorja Maja Križnič, Lenart Žežlina, mentor Alojz Grahor Škofijska gimnazija Vipava



Slika 3: Trikotnik Sierpinskega

Naj na koncu omenim še nalogo, ki sicer ni posegla po najvišjem priznanju, bila pa je zanimiva in po dolgem času povzročila na koncu živahno razpravo.

Avtorja pravita:

V raziskovalni nalogi smo se poglobili v tri srednješolske učbenike za matematiko in v njih poiskali neskladja, ki smo jih v nalogi tudi predstavili. Pri tem smo se skušali vživeti v vlogo dijaka, ki se uči po učbeniku in rešuje naloge. Vprašali smo se tudi, kako bi bilo z vrednotenjem dijakovih izdelkov v primeru uporabe drugega učbenika.

Neskladja smo opisali in napisali pobude za poenotenje. Nekatera neskladja smo v nalogi poenostavili, saj so se posamezni problemi izkazali za globlje, kot smo sprva predvidevali. Ko smo se poglabljali v posamezni problem, smo naleteli tudi na matematična ozadja, ki presegajo naše znanje. Nalogo bi lahko še razširili in se pri določeni temi zadržali še veliko več časa, iskali izvore samih pojmov ter povezave med tujimi učbeniki in slovenskimi univerzitetnimi učbeniki za matematiko.

Zavedamo se, da najverjetneje nismo našli vseh neskladij v in med obravnavanimi učbeniki. Menimo, da bi bil potreben bolj strokovni pogled na omenjena in druga neskladja. Naša temeljna pobuda je, da bi bilo treba ugotovljena (in še morebitna druga neskladja) v slovenskih gimnazijskih učbenikih odpraviti s poenotenjem.

Zavedamo se tudi dejstva, da so na gimnazijskem nivoju potrebne določene poenostavitve in da dijake same podrobnosti v definicijah in konceptih v veliki večini ne pritegnejo niti ne zanimajo. Za dijaka je poglavitno, da zna nalogo rešiti po določenem postopku (ki je žal velikokrat samo rutinski in brez razumevanja), da bo naloga čim bolje ovrednotena v šoli pri ocenjevanju in na maturi. Zaradi same matematične korektnosti pa se nam zdi, da bi morala biti teorija, ki presega nivo gimnazijskega znanja, v učbenikih podana v posebnih okvirčkih vsaj z opombo, da »le-ta presega nivo gimnazijskega znanja« in z namigom, kje bo radovedni dijak našel odgovor.

V nalogi se nismo ukvarjali z vzroki, ki so pripeljali do neskladij. Verjamemo, da imajo avtorji svoje razloge za poenostavitve ali svoje rešitve. Cilj je bil le ugotoviti, ali neskladja so, jih evidentirati in predlagati pobude za poenotenje. Z vidika dijakov in končnega preverjanja znanja na maturi pa razlike vsekakor niso dobre. Matematika je eksaktna veda in dijaki pričakujemo doslednost. Kot sta nam povedala visokošolska matematika dr. Banič in dr. Milutinović, s katerima smo se prosto (ne v smislu raziskave) pogovarjali, na nivoju univerzitetne matematike ni neskladij.

Naš končni predlog je, da bi slovenski matematiki napisali slovenski matematični terminološki slovar. Menimo, da bi bil to dober pripomoček avtorjem učbenikov, učiteljem in dijakom.