Naslov članka/Article:

RAZISKOVALNE NALOGE IZ MATEMATIKE NA SREČANJU MLADIH RAZISKOVALCEV SLOVENIJE 2019

Avtor/Author:

Dr. Borut Jurčič Zlobec

Matematika v šoli št. 2/2019, letnik 25
ISSN 1318-010X
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2019

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2019

Dr. Borut Jurčič Zlobec
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je čim zgodnejše uvajanje mladih v znanost, popularizacija znanosti in tehnike, odkrivanje nadarjenih učencev in dijakov na posameznih področjih in njihovo spodbujanje k poglabljanju znanja in raziskovalne dejavnosti.

Na to državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge iz regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2019 je potekalo že 53. državno srečanje v Murski Soboti. Organizator je dobil v pregled 19 nalog, ki so prišle v končni izbor za priznanja, od teh jih je osem določil za bronasto priznanje.

Ostale naloge so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, dr. Borut Jurčič Zlobec, izr. prof. dr. Marko Jakovac in doc. dr. Janja Jerebic.

Komisija je izbrala sedem nalog za srebrno priznanje, štiri naloge pa so dobile zlato priznanje.

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo nalog, ki so dosegle zlata priznanja. Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi strani pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda bomo z opisom dela najboljših dali kakšno idejo tudi drugim in jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja seveda tudi zanje.

S tem ko so mladi raziskovalci dobili zlato priznanje, so dobili pohvalo za svoje dosežke. Na tem mestu pa jim želimo sporočiti, kaj bi lahko popravili, izboljšali, da bi bili še bolj uspešni.

Pojdimo k nalogam. Teme nalog, ki so bile predstavljene, so bile predvsem geometrijske (devet nalog), potem iz teorije števil (tri naloge), anketne (tri naloge), aritmetične (dve nalogi), nato ena algebrska in ena čisto statistična.

Anketne naloge so privlačne, ker ustrezajo napotkom, da je treba v raziskovalni nalogi narediti kaj izvirnega, kar pa v matematiki ni tako lahko. Zato stalno poudarjamo, da taka inovativnost za matematične naloge ne pride v poštev, in vsakokrat na žalost izločimo vse anketne naloge iz zadnjega kroga, vendar pa nam izbor na lokalni ravni znova in znova pošilja take naloge. Tudi kakovost teh nalog je vprašljiva. Vprašljive so tudi statistične metode, ki jih uporabljajo. Zato priporočam mentorjem, naj se izogibajo takim temam. Pri matematičnih raziskovalnih nalogah je pomembno, da se učenci naučijo nekaj novega iz matematike in da znajo to lepo predstaviti. Če pa jim uspe kakšen izviren problem opisati matematično in ga tako rešiti, so dosegli največ, kar se od njih pričakuje. Veliko je odvisno od mentorjev. Prav je, da ti pustijo učencem, da delajo samostojno, vendar pa pričakujemo, da je končni izdelek narejen matematično korektno in da mentor svetuje, kako bi se določene stvari izboljšale in poenostavile. Pomembno je tudi, da mentorji opozarjajo na lep in razumljiv jezik.

Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2019

Nagrajene so bile štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski. Sledi kratek opis, najprej za osnovnošolski, nato pa za srednješolski nalogi.

1. Aritmetični biljard

Avtorici: Ela Habjanič, Nika Ornik
Mentor: Alenka Repnik
Šola: Osnovna šola borcev za severno mejo, Maribor

2. Skrivnost babilonske ploščice PLIMPTON 322

Avtorji: David Demšar, David Ficko, Peter Mašič
Mentor: Igor Blažič, dipl. ing.
Somentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.
Šola: Osnovna šola montessori, Ljubljana

3. Dopolnjujoči se skutoidi

Avtorji: Eva Brumat, Samo Fučka, Domen Vovk
Mentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.
Šola: Škofijska gimnazija Vipava

4. Mandelbrotova in Juliajeve množice

Avtorica: Eva Sreš
Mentor: Samo Hajdinjak
Somentor: Boštjan Žnidaršič
Šola: Gimnazija Poljane, Ljubljana

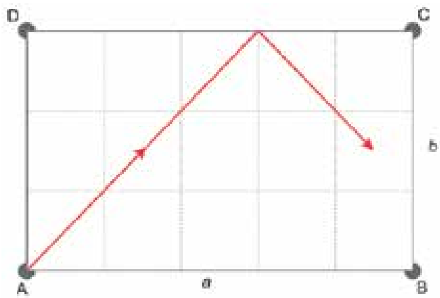
Kratek opis nagrajenih nalog

1. Naloga z naslovom: **Aritmetični biljard**

Predstavimo nalogo z nekoliko skrajšanim povzetkom k nalogi.

Obravnavamo pot krogle po pravokotni mizi za biljard, ki ima luknje le v vogalih. Krogla začne pot v spodnjem levem vogalu pod kotom 45 stopinj. Giblje se s konstantno hitrostjo, dokler ne konča poti v eni od lukenj. Vprašali smo se, ali lahko napovemo, v kateri luknji konča krogla pri različnih dimenzijah mize. Dimenzije mize so stalno celoštevilčne. Zanimalo nas je tudi število odbojev krogle na njeni poti in dolžina poti. Opazovali smo tudi poti krogle po mizi.

Mizo razdelimo na enotske kvadrate, kot prikazuje slika. Krogla prečka tak kvadratek vedno po diagonali. Če sta



Slika 1: Biljardna miza, razdeljena na enotne kvadrate in pot krogle.

dolžini stranic tuji števili, potem krogla vedno prepotuje skozi vse kvadratke. Če števili nista tuji, potem lahko kvadratke združimo v večje kvadratke z dolžino stranice enako največji skupni meri in tako prevedemo problem na prejšnji primer. Število kvadratkov, ki jih prečka krogla, pa je enako najmanjšemu skupnemu večkratniku dimenzij mize. Število odbojev na mizi z dimenzijama *a* in *b,* ki sta tuji števili, je enako $K = a + b - 2$. Izvora in ponora ne štejemo, zato je -2. Če števili nista tuji, potem združimo kvadratke, kot smo povedali zgoraj. Če je $m = D(a, b)$, je število odbojev enako $K = (a + b)/m - 2$. V nadaljevanju naloge se spreminja začetna točka, ta ni nujno v vogalu mize, ampak v ogliščih enotskega kvadrata, ki ležijo na stranici mize.

Ne upam si reči, da sem pogrešal jasne dokaze, ker gre za osnovnošolsko nalogo. Naj bo to izziv za v prihodnje. Takih nalog si lahko le želimo. Avtorici in avtorjema iskrene čestitke.

2. Naloga z naslovom: **Skrivnost babilonske ploščice PLIMPTON 322**

Sledi ena od izjemno dobrih nalog, ki si tudi v najsplošnejšem pomenu zasluži naziv raziskovalna.

Plimpton 322 je glinena ploščica iz babilonske civilizacije, ki je nastala okrog 1800 pr. n. š. Na njej so zapisana naravna števila v štirih stolpcih in petnajstih vrsticah. Danes je shranjena na univerzi Columbia, ZDA. Števila so zapisana v klinopisni pisavi. Imenuje se po publicistu in zbiralcu Arthurju Pilmptonu (1855–1936).

Nalogo bomo predstavili z njenim povzetkom.

V raziskovalni nalogi obravnavamo babilonsko matematično ploščico Plimpton 322. Znano je, da so matematiki v babilonski civilizaciji uporabljali šestdesetiški sestav za zapis števil, besedila in podatke pa so zapisovali s klinopisno pisavo na glinene ploščice. Med veliko ohranjenimi matematičnimi ploščicami je tudi ploščica z oznako Plimpton 322. Na njej so v 15 vrsticah in v štirih stolpcih zapisana števila. Raziskovalci so si enotni, da so na tej ploščici zapisane hipotenuze in ena izmed katet petnajstih pravokotnih trikotnikov s celoštevilčnimi dolžinami stranic. V levem stolpcu je zapisano racionalno število. Menijo, da gre za zapis razmerij med stranicami pravokotnega trikotnika. Z današnjega zornega kota naj bi šlo za prve tabele kotnih funkcij. Nekateri menijo, da je ploščica Plimpton 322 le del večje plošče, nekateri, da bi morala imeti 16 vrstic. V raziskovalni nalogi postavimo hipotezo o tem, na kakšen način so izbrali ravno teh petnajst pravokotnih trikotnikov. Svoje trditve računsko utemeljimo.

Pitagorejska trojica je trojica naravnih števil *(a, b, c),* za katera velja, da je $a^2 + b^2 = c^2$. O pitagorejskih trojicah in njihovih posplošitvah smo na tem mestu slišali že večkrat.

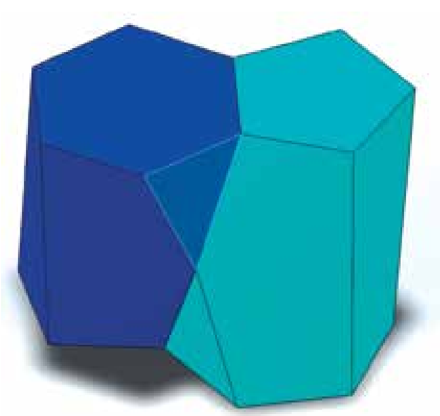
Ta naloga je nekoliko drugačna. Govori o babilonski tablici, kjer so zapisane pitagorejske trojice.

Na ploščici Plimpton 322 so vsa števila pretvorili iz šestdesetiškega v desetiški sistem. Osredotočili so se na iskanje pomena v drugem in tretjem stolpcu. Že prvi raziskovalci so ugotovili, da gre za dolžino katete in hipotenuze pravokotnega trikotnika, izražene z naravnimi števili, ki so del pitagorejske trojice. Zakaj je na ploščici zapisanih ravno teh 15 trojic? Raziskovalci so si enotni, da so Babilonci poznali formule, kako s pomočjo dveh naravnih števil (u, v) dobimo pitagorejske trojice (a, b, c). Vedno lahko izberemo *taki* tuji števili $u > v$, da je $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ in $c = u^2 + v^2$. Parom števil (u, v) pravimo tudi generatorji pitagorejskih trojic. Za vsako vrstico na ploščici so izračunali števili u in v. V 15. vrstici je zapisano 56 in 53, ki ne ustrezata pravilu. Očitno je šlo za napako prepisa. Pravilno bi bilo 56 in 106, kar so ugotovili tudi drugi raziskovalci. Z opazovanjem so ugotovili, da so vsa števila u in v večkratniki števil 2, 3 in 5. Postavili so hipotezo, da so sestavljavci ploščice Plimpton 322 izbrali samo tista števila u in v, pri katerih je količnik u/v med 9/5 in 12/5, kjer je $v < 60$.

3. Naloga z naslovom: **Dopolnjujoči se skutoidi**

Iz Škofijske gimnazije Vipava prihajajo že kar nekaj let naloge, ki so med najboljšimi in se odlikujejo tudi po izbrušenem jeziku, kar sicer ni nujno, tudi ne med najboljšimi nalogami. Zato bom prepustil besedo avtorici in avtorjema in ponovil to, kar so zapisali v povzetku.

Konec julija 2018 so raziskovalci z Univerze v Sevilli in z Univerze Lehigh (ZDA) objavili članek z naslovom »Skutoidi so geometrijska rešitev trodimenzionalne zapolnitve krovnega



Slika 2: Na sliki so primeri skutoidov. Spodaj so 3D modeli skutoidov, ki so jih avtorji sami načrtali in jih ustvarili na tiskalniku 3D.

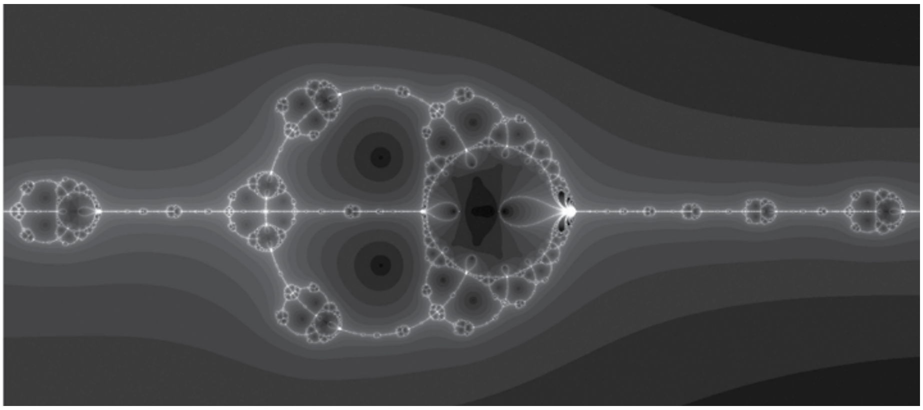
tkiva« (Scutoids are a geometrical solution to three-dimensional packing of epithelia). Ključno vlogo pri rešitvi tega problema je odigralo odkritje novega geometrijskega telesa, ki so ga poimenovali skutoid (ang. scutoid). Skutoid je telo, podobno prizmi, ki ima za osnovni ploskvi različna n-kotnika na vzporednih ravninah, stranski robovi so daljice ali kakšna druga krivulja, vsaj ena povezava pa je v obliki črke Y. Ploskve so lahko ukrivljene.

Omenjeni raziskovalci uporabljajo skutoide za modeliranje povezovanja celic v krovnem tkivu. V raziskovalni nalogi smo opazovali skutoide v prostoru med dvema vzporednima ravninama in jih obravnavali z matematičnega vidika. Pri definiciji smo se omejili na takšne skutoide, pri katerih sta osnovni ploskvi n in n+1 pravilna večkotnika, povezave oglišč pa so daljice. Iskali smo tiste skutoide, ki se v paru dopolnjujeta v ploskvah ob Y. V dostopnih virih opisujejo le skutoid, ki ima za osnovni ploskvi pravilni petkotnik in pravilni šestkotnik. Imenovali smo ga dopolnjujoči se skutoid 5-6. Cilj raziskovalne naloge je bil konstruirati ta skutoid in opisati njegove geometrijske lastnosti. Poleg tega pa smo konstruirali in opisali lastnosti dopolnjujočih se skutoidov 4-5 ter 3-4 in raziskovali, kako se med seboj povezujejo.

4. Naloga z naslovom: **Mandelbrotova in Juliajeve množice**

Cilji, ki si jih je zastavila avtorica:
Cilj raziskovanja je bil spoznati in predstaviti Mandelbrotovo in Juliajeve množice. V nadaljevanju si je zamislila, da bi napisala lasten program za izris Mandelbrotove množice. Zanimajo jo lastnosti Mandelbrotove in Juliajevih množic. Pravi, da v slovenš čini ni našla ustrezne literature. Slike je naredila s pomočjo programa Xaos in ugotavljala, kako sprememba iteracijskega polinoma vpliva na obliko množice. Tu vidi možnost za nadaljnje raziskovanje. Napisala je program za računanje iteracij v kompleksnem. Pravi, da na spletu ni našla podobnega programa, enostavnega za uporabo.

Tu ne bi dosti dodal, ker gre za temo, ki je bila že večkrat obravnavana. Literature je dovolj tudi v slovenščini. Programje vseh zahtevnosti in oblik je dostopno na spletu. Tu bi na srednješolski ravni težko dodali kaj izvirnega. Ta moja pripomba je namenjena predvsem mentorjema.



Slika 3: Območja privlačnosti transcendentne funkcije $f(z) = z^3 - 3^z$.
(Iteracije in fraktali, Gustavo Rubiano 0. in Borut Jurčič Z., ZOTKS, 2015)