

Naslov članka/Article:

SRINIVASA AIYANGAR RAMANUJAN (1887–1920) – 2. DEL

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) – Part 2

Avtor/Author:

Mag. Milena Strnad in Aleksander Simonič

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



Matematika v šoli št. 2/2019, letnik 25

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2019

Spletna stran revije:

<https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) – 2. del

Mag. Milena Strnad in
Aleksander Simonič, mag. mat.
The University of New South Wales [Canberra], ACT, Australia

Izvleček

Članek v dveh delih prinaša podroben prikaz življenja in dela skrivnostnega indijskega matematičnega genija S. A. Ramanujana, ki vse od leta 1920 dalje navdušuje mlade Indijce za matematiko. Drugi del se osredotoči na obdobje v Angliji, pri čemer se začne z matematiko v pismih, konča pa z zadnjim Ramanujanovim delom v Indiji. Članek obeležuje njegovo minulo 130. obletnico rojstva in prihajajočo 100. obletnico smrti, učiteljem pa ponudi zgodbo, da z njo lahko navdušijo tudi slovensko mladino za učenje in raziskovanje matematike.

Ključne besede: S. A. Ramanujan, G. H. Hardy, biografije

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) – Part 2

Abstract

The main thrust of this two-part article is a detailed account of the life and work of S. A. Ramanujan. Ever since 1920, this mysterious Indian mathematical genius has inspired young Indians to study mathematics. The second part focuses on the genius' life in England, the novel mathematical ideas he shared in his letters as well as Ramanujan's final work in India. The article marks the recent 130th anniversary of Ramanujan's birth and the forthcoming centennial of his death. In addition, it provides a wealth of information for Slovenian teachers, who can use it to excite future generations of their students to learn and research mathematics.

Keywords: S. A. Ramanujan, G. H. Hardy, Biographies

Glavni matematični poudarki iz dopisovanja Ramanujan-Hardy

Spomnimo, da je Ramanujan v prvem pismu Hardyju 16. januarja 1913 navedel okoli 50 formul s področja teorije števil, integralov, neskončnih vrst, transformacij vrst in integralov, približne integracije in sumacije, neskončnih verižnih ulomkov ter divergentnih vrst. Nekatere formule so bile zelo presenetljive in lepe, npr.

$$1 - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi}, \quad (1)$$

$$1 + 9 \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17 \left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right)^4 + 25 \left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^4 + \dots = \frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}, \quad (2)$$

$$\frac{\coth \pi}{1^7} + \frac{\coth 2\pi}{2^7} + \frac{\coth 3\pi}{3^7} + \dots = \frac{19\pi^7}{56700}. \quad (3)$$

Hardy je vrsto (1) prepoznal, saj jo je dokazal že G. Bauer leta 1859, vrsta (2) pa mu je delala težave. Izkazalo se je, da vrsti (1) in (2) spadata v teorijo hipergeometrijskih vrst. S temi vrstami se je Ramanujan precej ukvarjal, npr. v 10. poglavju Druge beležke, glej [3].

Vrsta (3) pa je poseben primer splošnejšega rezultata

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\coth(\pi k)}{k^{4n-1}} = \pi^{4n-1} 2^{4n-2} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{B_{2k} B_{4n-2k}}{(2k)! (4n-2k)!}, \quad (4)$$

ki ga je prvi odkril in dokazal Lerch leta 1901. Ta izraz je tudi poseben primer *Ramanujanove formule* za $\zeta(2n+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{(-\beta)^{-n} - \alpha^{-n}}{2} \zeta(2n+1) &= -(-\beta)^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2n-1}}{e^{2\beta k} - 1} + \alpha^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2n-1}}{e^{2\alpha k} - 1} \\ &\quad + 2^{2n} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{B_{2k} B_{2n+2-2k}}{(2k)! (2n+2-2k)!} \alpha^{n+1-k} \beta^k, \end{aligned}$$

kjer sta α in β pozitivni realni števili, za kateri velja $\alpha\beta = \pi^2$, in n je naravno število. Formulo (4) dobimo tako, da v Ramanujanovi formuli nadomestimo n z $2n-1$, postavimo $\alpha = \beta = \pi$ in upoštevamo še $2/(e^{2x} - 1) = \coth x - 1$. Ramanujan jo je pod 21. vnos zapisal v 14. poglavju Druge beležke, prvi dokaz pa je prispeval Malurkar leta 1925. Prav ta formula je bila »kriva« za to, da se Bruce Berndt z Ramanujanom ukvarja že od leta 1974.

Za mnoge je Ramanujan največji mojster verižnih ulomkov, kar jih je kdaj živelo, zato ni presenetljivo, da je enega izmed kronske re-

zultatov s tega področja omenil Hardyju že v prvem pismu [4, str. 29]: Če definiramo

$$u = \frac{x}{1 + \frac{x^5}{1 + \frac{x^{10}}{1 + \frac{x^{15}}{\ddots}}}} \quad \text{in} \quad v = \frac{\sqrt[5]{x}}{1 + \frac{x}{1 + \frac{x^2}{1 + \frac{x^3}{\ddots}}}},$$

potem velja

$$v^5 = u \cdot \frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4}. \quad (5)$$

Pozorni bralec bo opazil, da levi verižni ulomek dobimo tako, da v desnem verižnem ulomku zamenjamo x z x^5 . Desni verižni ulomek danes imenujemo *Rogers-Ramanujanov verižni ulomek* in ga označujemo z $R(x)$. Enakost (5) je dokazal **L. J. Rogers**¹ šele leta 1921. Velikokrat je prikladneje študirati verižni ulomek

$$T(q) = 1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{\ddots}}}.$$

Seveda velja $R(q) = q^{1/5}/T(q)$. Izkáže se, da je $T(q)$ holomorfná funkcija na enotskem disku $\{q \in \mathbb{C} : |q| < 1\}$, za $|q| > 1$ pa verižni ulomek divergira. Za nekatere vrednosti q lahko $T(q)$ izrazimo v zaključeni obliki, npr. $T(1) = (1 + \sqrt{5})/2$. V pismu najdemo precej manj trivialna rezultata:

$$T^{-1}(e^{-2\pi}) = \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \sqrt[5]{e^{2\pi}}, \quad (6)$$

$$T^{-1}(-e^{-\pi}) = \left(\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \sqrt[5]{e^{\pi}}. \quad (7)$$

Formule (5), (6) in (7) so Hardyja dobesedno šokirale. Dvajset let po Ramanujanovi smrti je Hardy v [6, str. 9] o svojih občutkih pri branju prvega pisma pisal takole:

(Formule so me) popolnoma premagale; nikoli nisem videl niti približno česa takega. En sam pogled je dovolj za uvid, da so lahko napisane le od matematika najvišjega ranga. Morajo biti pravilne, kajti če ne bi bile, nima nihče take domišljije, da bi jih iznašel.

Raziskovanje teh ulomkov je še vedno zelo aktivno področje. Kot primer navedimo problem, da še vedno ni znan natančen opis množice točk na enotski krožnici, kjer ulomek divergira.

Ramanujan je matematični del prvega pisma začel s citatom iz Hardyjeve knjige *Orders of infinity*, ki se nanaša na praštevilski izrek²:

[...] število praštevil, manjših od x , je

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} + \rho(x),$$

kjer natančen red funkcije $\rho(x)$ še ni določen.

V nadaljevanju odlomka, ki smo ga citirali v prvem delu, je trdil, da je namesto zgornjega integrala³ našel več takih izrazov, kjer so pripadajoči ostanki omejeni, izrazov pa ni napisal. To je Hardyja zelo presenetilo, saj bi bil v luči Littlewoodovega izreka to izjemen napredek. Littlewood je ravno v tistem času dokazal, da je $\rho(x)$ lahko poljubno velika količina, tako pozitivna kot negativna. S tem je tudi ovrgel stoletje staro domnevo, da za $x > 8$ vedno velja $\pi(x) < \text{Li}(x)$.

Hardy je v odgovoru prosil Ramanujana, da mu pošlje te izraze in vsaj skice dokazov. Littlewood je v prvi opombi pojasnil, kakšne so znane meje za $\rho(x)$, in med vrsticami navezal problem na *Riemannovo hipotezo*⁴.

Ramanujan je v drugem pismu napisal tri približne formule za praštevilsko funkcijo $\pi(x)$, od katerih je bila ena zares nova. Na novo je odkril znameniti Riemannov približek

$$\pi(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \text{li}\left(x^{1/n}\right),$$

ki sledi iz Riemannove eksplícitne formule za praštevilsko funkcijo. Tukaj je $\mu(n)$ Möbiusova funkcija⁵, $\text{li}(x)$ pa logaritemski integral, za $x > 1$ definiran kot

$$\text{li}(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right).$$

Seveda velja $\text{Li}(x) = \text{li}(x) - \text{li}(2)$, kjer je $\text{li}(2) \approx 1,045$. Njegova trditev o omejenosti ostankov pri vseh treh aproksimacijah ne drži, saj bi bilo v nasprotnem to v protislovju z Littlewoodovim izrekom. To, da je treba upoštevati tudi netrivialne ničle funkcije zeta, je Hardy Ramanujanu jasno zapisal v odgovoru, toda Ramanujan se ni dal prepričati in je Hardyju v tretjem pismu 17. aprila 1913 oporekal. Dodal je še priložo, ki naj bi dokazovala tudi praštevilski izrek. Da ni tako in da »dokaz« vsebuje ogromno lukenj, čeprav ima nekaj zelo dobrih idej, je Hardy obrazložil v pismu, domnevno datiranem na 24. december 1913. Šele v zadnjem pismu Hardyju 22. januarja 1914 je Ramanujan sprevidel nekaj svojih napak in poskušal popraviti dokaze, toda Hardy mu ni odgovoril.

Danes se zdi, da se je pri analitični teoriji števil še najbolj poznala Ramanujanova neformalna matematična izobrazba. To potrdi tudi

¹ Leonard James Rogers (1862–1933) je bil dolgo spregledan matematik mnogih talentov, deloma tudi zaradi izrazite osebne skromnosti. Ulomek je uvedel v članku *Second memoir on the expansion of certain infinite products*, Proc. Lond. Math. Soc. 25 (1893/94), 318–343.

² Ta pravi $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x)x^{-1} \log x = 1$, kjer je $\pi(x)$ število praštevil, ki ne presegajo realnega števila $x > 0$.

³ Označujemo ga z $\text{Li}(x)$, kjer je $x > 1$. Gauss je bil prvi, ki je ta integral primerjal s $\pi(x)$. Praštevilski izrek je ekvivalenten trditvi $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x)/\text{Li}(x) = 1$.

⁴ Riemannova hipoteza je domneva, da imajo vse ničle $\rho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Riemannove funkcije zeta (netrivialne ničle) realni del $1/2$. Ta problem spada med najpomembnejše odprte probleme matematike.

⁵ Za $n = p_1 \cdots p_k$ je $\mu(n) = (-1)^k$ in $\mu(1) = 1$, sicer $\mu(n) = 0$.

Hardyjev citat v [10, str. xxiv], kjer je več let po Ramanujanovi smrti zapisal:

Ramanujanova teorija praštevil je bila zaradi njegove nevednosti o teoriji funkcij kompleksne spremenljivke obsojena na propad. Lahko bi rekli, da bi bila teorija morda taka, če funkcija zeta ne bi imela kompleksnih ničel. Njegova metoda temelji na pretirani uporabi divergentnih vrst [...] Pričakovati je bilo, da bodo dokazi nepravilni, toda napake so bile še globlje in mnogo dejanskih izsledkov je bilo napačnih. Dobil je vodilne člene klasične formule, čeprav z nepravilnimi metodami, toda nobeden izmed njih ni tako dober približek, kot je domneval. Lahko rečemo, da je bil to Ramanujanov velik neuspeh.

Več kot deset let pozneje je Hardy v [6, str. 22–47] podrobno analiziral Ramanujanove napake iz pisem in po tej poti skiciral pravičen dokaz praštevilskega izreka.

Dodajmo, da netrivialne ničle Riemannove funkcije zeta pomembno vplivajo na teorijo praštevil, kar je Ramanujanu postalo jasno šele pozneje pri neposrednem sodelovanju s Hardyjem v Angliji. V članku [13] lahko bralec spozna nekatere prijeme pri študiju povezave med netrivialnimi ničlami in praštevili.

Vrenje okrog Ramanujana

Hardy je takoj po prejemu Ramanujanovega prvega pisma (ne da bi mu prej odgovoril in ga o svoji nameri vsaj obvestil, če ga že ni nameraval vprašati za njegovo mnenje) stopil v akcijo. Že 3. 2. 1913 je napisal pismo gospodu Malletu, sekretarju Svetovalnega komiteja za indijske študente v Madrasu, s prošnjo, da naj v Indiji omogočijo čimprejšnji prihod Ramanujana na Cambridge, kjer se bo razvil v matematika svetovnega formata. S tem je sprožil živahno polemiko med uradniki, profesorji in predstavniki študentov. O tem pričajo številna pisma. Olje na ogenj je prililo pismo spoštovanega meteorologa, direktorja Indijskega observatorija v Simli, G. T. Walkerja⁶. Walker je upravi madraške univerze napisal pismo naslednji dan po svojem obisku madraškega pristanišča 25. februarja 1913, kjer ga je Sir Spring seznanil z delom Ramanujana. V pismu jih je seznanil z Ramanujanovim izjemnim talentom in jih pozval, da naj Ramanujanu izdajo status izrednega študenta in raziskovalca matematike, da bo materialno neodvisen, in mu pozneje omogočijo tudi večletno bivanje na Cambridgeu, kjer bo lahko končal in izpopolnil svoje dosedanje delo. Dodal je [4, str. 51]:

Čeprav sam nisem ekspert na področju čiste matematike, ne dvomim, da se iz njegovih zapiskov da razbrati, da gre za delo, ki je primerljivo z deli najboljših matematikov s Cambridgea.

S tem pismom je Walker dosegel, da so Ramanujanu dodelili štipendijo 75 rupij mesečno za dve leti in mu omogočili dostop do predavanj in knjižnice na madraški univerzi. V zameno so od njega zahtevali četrtletna poročila o njegovem delu. V letu 1913 je napisal tri in enega v začetku leta 1914. V poročilih je opisal več svojih korenov iz

nabora 180 strani iz Prve beležke in jih največ izračunal s pomočjo določenih integralov, ki jih povezuje »*Master Theorem*«. Ta izrek je predstavil tudi v prvem pismu Hardyju, in to že v posplošeni obliki, v kateri je postal bolj uporaben. Kot zanimivost dodajmo, da se je leta 1902 s tem integralom veliko manj uspešno ukvarjal tudi Hardy in o tem napisal članek.

Vse to je Ramanujanu dvignilo samozavest, kar veje tudi iz njegove nadaljnje korespondence s Hardyjem, v kateri je občasno uporabil tudi dele svojih poročil madraški univerzi. Konec leta 1913 je tako postal Ramanujan osrednja oseba madraškega intelektualnega in političnega življenja. Septembra 1913 je njegov prijatelj, nekdanji šef, Narayana Aiyar izdal nekaj Ramanujanovih izrekov o vrstah v indijski reviji s pripisom [8, str. 182]:

Ti izreki so delo gospoda S. Ramanujana, matematičnega raziskovalca, študenta madraške univerze.

Ob blišču domačega vzdušja se je nadaljevalo za Ramanujana mučno dopisovanje s Hardyjem. To, da je Hardy brez njegovega privoženja začel pripravljati njegovo pot v Anglijo, je Ramanujana zelo prizadelo. Bolelo ga je tudi to, da ga je Hardy s svojimi odgovori puščal čakati vse dlje in da je ton njegovega pisanja postajal vse ostrejši in celo žaljiv. Za Ramanujana ni bil pravi obliž niti to, da je Hardy svoj ponižujoči nastop na koncu pisma vedno omilil z opravičilom, da upa, da mu njegova kritika ne bo vzela poleta, ampak ga bo opogumila, da bo svoje trditve dokazal in s tem morda naredil največje mojstrsko delo v vsej zgodovini matematike.

Kljub vedenju, da Ramanujan odklanja prihod v Anglijo, si je Hardy še naprej prizadeval, da bi ga pripeljal na Cambridge. Problem je bil denar. Po Angliji in Madrasu je iskal poti, da bi za Ramanujanovo potovanje in življenje na Cambridgeu pridobil potrebna sredstva. Za svoj načrt je pridobil tudi mladega kolega, profesorja E. H. Nevillea⁷, ki je bil konec leta 1913 poslan s Trinityja v Madras, kjer je imel serijo predavanj. Hardyjeva želja je bila, da naj bi osebno pritiskal na Ramanujana tako, da bi končno le privolil v odhod v Anglijo.



Slika 1: E. H. Neville

⁶ Sir Gilbert Thomas Walker (1868–1958), Senior Wrangler (1889) in FRS (1904), je bil leta 1904 poslan v Indijo, da bi razrešil tamkajšnje slabe napovedi monsumov, kar mu je tudi uspelo.

⁷ Eric Harold Neville (1889–1961) je bil odličen, a neambiciozen matematik. Ukvarjal se je z diferencialno geometrijo, eliptičnimi funkcijami in funkcijami theta. Diplomiral je kot Drugi Wrangler na zadnjem Triposu. Nanj sta imela velik vpliv Hardy in Russell. Leta 1911 je prejel Smithovo nagrado in leto kasneje je bil izvoljen za člana kolidža Trinity. Članstvo je sedem let kasneje izgubil zaradi svoje pacifistične drže do 1. svetovne vojne. Odigral je pomembno vlogo v Ramanujanovem življenju.

V Madrasu sta se Ramanujan in Neville srečala vsaj trikrat. Neville je bil zelo navdušen nad Ramanujanovima beležkama in si s tem pridobil njegovo zaupanje, saj mu ju je Ramanujan že kmalu dal za večdnevni ogled. To Ramanujanovo dejanje je pozneje Neville opisal takole [8, str. 187]:

To ponudbo Ramanujana sem smatral za največji kompliment, ki sem ga kdajkoli dobil. Zdelo se mi je, da Ramanujan svoji beležki sploh ni dal nikoli iz rok. Noben Indijec vsebine namreč ni razumel, noben Anglež pa doslej ni bil vreden njegovega zaupanja.

Med njima se je rodilo prijateljstvo, ki pa pri Nevillu ni bilo povsem iskreno. Res je, da Neville ni izpolnil Hardyjevih navodil v celoti in na Ramanujana ni pritiskal neposredno, a ga je opazoval in Hardyju o njem poročal [8, str. 187]:

To ni človek, neotesan, neolikan, zaraščen in nečist kot Ramanachandra Rao⁸, ampak mož, ki deluje povsem nesamozavestno in željno, angleščino pa, čeprav je bil vseskozi zelo reven in nešolan, uporablja odlično, ima izjemen besednjak, kot ga zlepa nisem zasledil pri nobenem drugem.

Ob tem se je Ramanujan znašel v ponovnih težavah. Komaj je v Indiji svobodno zadihal in se končno začel ukvarjati samo z matematiko, že bi se moral vsemu temu odreči in odpotovati v mrzlo in neznano Anglijo s povsem drugo kulturo. Ob tem pa bi moral prekršiti tudi strog brahmanski predpis, ki mu je kot predanemu brahmanu prepovedal potovanje čez morje. Bal se je tudi, da ga v Angliji ponovno čakajo izpiti, s katerimi je imel že v Indiji travmatične izkušnje, zato se je skupaj z materjo temu vabilu upiral in vztrajal, da ostane v Indiji.

Da je bila situacija še težja, so Ramanujanov odhod v Anglijo podpirali veljaki in njegovi pravi prijatelji, saj so mu privoščili priznanje, indijski matematiki pa razcvet. Med njimi je bil tudi njegov največji podpornik Aiyar. Ramanujanov odhod je sicer podpiral, a ker je razumel vso njegovo stisko, nanj ni pritiskal, ampak mu je kot pravoveren brahman svetoval, da naj težko odločitev za morebitni odhod prepusti boginji Namagiri. Ramanujan je namreč v Indiji trdil, da mu formule prišepetava boginja Namagiri, saj je matematični jezik pravzaprav jezik bogov.



Slika 2: Boginja Namagiri iz templja Narasimhaswami v Namakkalu

Ramanujan je nasvet prijatelja matematika sprejel in tako se je skupaj z njim, njegovim sinom in svojo materjo konec decembra 1913 odpravil po odgovor v Namakkal, v ločeno majhno svetišče družinske boginje Namagiri znotraj templja Lorda Narasimha. Tam sta prijatelja v molitvi prebela tri dni. Tretjo noč pa je Ramanujan zbudil Aiyarja, rekoč, da je od zaslepljujoče, briljantne svetlobe sprejel *adesh*, to je ukaz, da lahko obide prepoved glede potovanja v tujino. Aiyar je pozneje dejal, da se je v Ramanujanovi notranjosti in psihi, povsem podrejeni boginji Namagiri, to zares zgodilo, saj si je podzavestno tudi sam želel te poti, da bi svet spoznal njegovo delo. Ovira je ostala samo še mama, a je tudi ta kmalu zatem Ramanujanu dovolila odhod. Baje se je tudi njej sanjalo, da vidi Ramanujana obkroženega z zahodnjaki in je slišala Namagirin ukaz, da naj svojemu sinu ne stoji več na poti.

Novico, da je Ramanujan privolil v svoj odhod iz Indije, je v pismu Hardyju 22. decembra 1913 sporočil Neville, pred tem pa je Ramanujanu razblinil vse strahove. Zagotovil mu je, da ga v Angliji ne čaka noben izpit in da tudi vegetarijanski način življenja tam ne bo problem. Do potovanja z ladjo S. S. Nevasa, kamor so Ramanujana, potem ko se od njega slovesno poslovili, pospremili najpomembnejši indijski veljaki, je zaradi finančnih težav prišlo šele 17. marca 1914. V tem času je Hardy ob Nevillovi pomoči s pretiranim hvajljenjem Ramanujana sprožil več nabiralnih akcij v Indiji in s tem za Ramanujanov odhod in za dve leti bivanja v Angliji pridobil dovolj finančnih sredstev. Največ je doniral Sir Francis Spring, nekaj pa tudi Hardy in Littlewood osebno.

Ramanujanov razcvet v Angliji

V prepričanju, da potuje v novi svet le za dve leti, ne da bi tvegati izločitev iz svoje kaste, se je Ramanujan 14. aprila 1914 izkrcal v londonskem pristanišču. Dolgo tritedensko pot od Madrasa do Londona je po začetnih težavah z morsko boleznijo prestopal kar dobro. Na ladji je užival udobje, dobro vegetarijansko hrano, bil je v družbi prijetnih sopotnikov in pod okriljem samega kapitana, vse to po zaslugi Springa. V londonskem s soncem obsijanem pristanišču, ga je pričakal njegov prijatelj Neville s svojim bratom. Z avtom sta ga odpeljala skozi živahni London, ki je že takrat štel 5 milijonov prebivalcev, v dom za tuje študente na Cromwelski cesti. Neville pa ga je kmalu zatem vzel pod svojo streho v dvonadstropni hiši na cesti Chestertown v bližnjem manjšem londonskem predmestju, ki je bil le z reko Cam ločen od njegove univerze. Namestitev v udobni lepi hiši z velikim vrtom ob reki in s prelepimi razgledi na vse strani je Ramanujanu prvič v življenju dala občutek zasebnosti. Ob gostoljubju Nevillove žene Alice, ki je skrbela za njegovo vegetarijansko prehrano, in ob veliki količini papirja, ki ga je končno imel na voljo, se je počutil dobro.

Vse to je odtehtalo hladen prvi sprejem Ramanujana pri Hardyju 18. aprila in zadržano držo, ki jo je Hardy obdržal vsa leta njunega druženja. Z Littlewoodom, ki je bil vseskozi naklonjen Ramanujanu in je v njem vedno videl velikega matematika, mu je Hardy namenil srečanje enkrat tedensko, glede obiskovanja predavanj pa mu je prepustil svobodno izbiro. Ramanujan, ki je poslušal tudi nekatera

⁸ Spomnimo, da je bil R. Rao vpliven politik in pobiralec davkov, ki je že leta 1910 dodelil Ramanujanu prvo enoletno državno štipendijo in mu tudi pozneje pomagal. Glej 1. del članka.

Hardyjeva predavanja, je bil nad vsem navdušen in se je z veliko vnamo lotil dela. Domov je med drugim sporočil [8, str. 201]:

Gospodje Hardy, Neville in drugi so zelo nezahtevni, prijazni in vljudni.

Te idile je bilo hitro konec. Veselje do predavanj mu je kmalu vzel prof. Berry, ko je na svojem predavanju o eliptičnih funkcijah opazil, da Ramanujan ne piše, ampak ga gleda in kar žari od vznemirjenja. Prepričan, da se mu Ramanujan posmehuje, ga je osorno vprašal, če sledi predavanju. Ramanujan je samo nemo prikimal, šel do table, vzel kredo in izpeljal formulo do takega zaključka, ki ga niti Berry ni poznal. To je še bolj razkačilo profesorja, ki ga je po predavanju strogo okrcal in mu v bodoče prepovedal tako predrzno vedenje. Ta nenavadni dogodek je imel dvojni učinek. Berry je Ramanujanu vzel veselje do predavanj, pri študentih pa je sprožil govorice, da je tujec Ramanujan izjemen matematik, ki mu ni uspelo narediti izpitov, ker se je uprl terorju profesorjev.

Veselje do bivanja v Angliji pa mu je že po šestih tednih vzel Hardy s tem, da ga je preselil iz toplega Nevillovega doma v svojo neposredno bližino, v kamniti, temačni in mrzli Cambridge. S tem ga je osamil in nehote prisilil, da si je moral začeti kuhati sam, saj v skupni menzi zanj ni bilo primerne vegetarijanske hrane.

Od te selitve dalje sta se Hardy in Ramanujan dobivala skoraj vsak dan. Ramanujan, ki je prezebal v svojem mrzlem domovanju, ker dolgo časa ni znal uporabljati odej, mu je razlagal svoje metode, izreke in enačbe, ki mu jih prej ni želel pošiljati po pošti. Poleg tega je Hardyju dal v preučevanje tudi svoji beležki, v kateri v teh letih ni dopisal ničesar več. V vsebinsko zelo obsežnih beležkah je Hardy našel tudi vse izreke, ki mu jih je pred tem poslal po pošti. Počasi je Hardy dojel, da mu je Ramanujan v pismih poslal zelo dober izbor enačb iz beležk, največkrat brez dokazov. Od Ramanujana, ki si je želel čimprejšnje objave svojih del, pa je zahteval tako kot prej le dokaze, do katerih se niti njemu samemu niti skupaj z Littlewoodom ni uspelo dokopati.

Kmalu po preselitvi v Cambridge se je začelo slabo, deževno in hladno vreme, ki ga je Ramanujan slabo prenašal. V avgustu so tudi že na Cambridgeu občutili grozote prve svetovne vojne. Cambriško dvorišče in park pred znamenito Wrensko knjižnico in del nje so spremenili v veliko vojno bolnišnico. V vojsko je bilo vpoklicanih 3600 študentov, saj jih je bilo le okoli 1700 prepoznanih za nesposobne. Vpoklicali so več profesorjev, med njimi tudi Littlewooda. To se je Ramanujana osebno dotaknilo, prav tako pa tudi hudo pomajkanje sadja in zelenjave, kar je pomenilo zanj še več težav pri prehranjevanju.

V takem ozračju sta zavzeto delala Hardy, nasprotnik vojne, neizprosni zagovornik rigoroznosti v matematiki, ateist in mojster dokazovanja, ter verni Ramanujan, katerega najmočnejša gonilna sila je bila njegova čarobna intuicija. Ta ga je sem in tja sicer pustila na cedilu predvsem zato, ker ni poznal sodobne analize.

Prvo leto tujine Ramanujanu ni dalo pravega zadoščenja. Profesorji so v njem videli posebnega formalista, ta pristop pa je bil takrat v nemilosti, nastajajočega novega Ramanujanovega dela pa niso poznali. Hardy je namreč več kot leto dni zadrževal objavo Ramanujanovih

del, ki jih je ta zavzeto pripravljala. O njunih zdaj skupnih temah je pisal predvsem on sam. Celotni prvi Ramanujanov članek⁹, ki je nastal na angleških tleh, je Hardy 11. junija 1914 brez navzočnosti Ramanujana predstavil na enem od običajnih četrtkovih srečanj članov Londonskega matematičnega društva. V tem članku je Ramanujan dokazal znamenito formulo

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}},$$

ki se zaradi izjemne hitrosti konvergence še danes uporablja pri računanju števila π na veliko število decimalk. V članku je opisal tudi eno izmed dveh konstrukcij približne kvadrature kroga, kar sta verjetno njegova najbolj znana prispevka s področja geometrije, glej [14]. Naslednje leto je bilo, glede na število objav, najplodnejše Ramanujanovo leto, saj je objavil kar devet člankov in si pridobil ugled tako na Cambridgeu kot med študenti, za katere je bil matematični genij.

Te objave so dale Ramanujanu nov zagon kljub občutku osame, ker od svoje žene Janaki v tem času ni prejel nobenega pisma, čeprav je sam sprva pisal domov mesečno po štiri pisma in se javljal tudi prijateljem v Indiji. Počasi je začel verjeti, da ga je žena pozabila, kar pa je bilo daleč od resnice. Janaki je namreč Ramanujanu s pomočjo pisarjev napisala v vseh letih njegovega bivanja v Angliji ogromno pisem, ljubosumna mati pa jih ni odposlala.

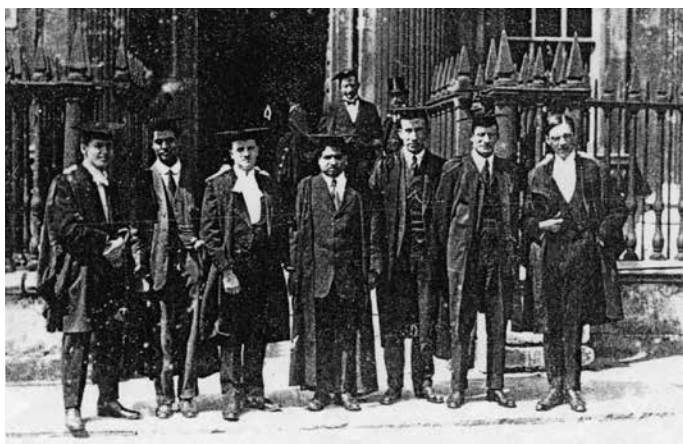


Slika 3: Ramanujan v evropski obleki in s kratkimi lasmi

O svojih stiskah ni govoril, njegova pisma domov pa so postajala vse redkejša, od leta 1916 dalje pa ni poslal niti enega več. Pravijo, da je prav žarel od radosti ob poslušanju duhovitih šal, vključeval se je v filozofske razprave, razpravljal je tudi o politiki. Znan je bil po simpatični prijaznosti, skromnosti in uglaženem vedenju, kljub temu pa ga Hardy ni vključil v intelektualna združenja raznih vrst, kamor je zahajal sam.

Vse to je Ramanujanu ugajalo, ni pa mu zadoščalo. Želel si je predvsem kakšno uradno priznanje, ki bi ga bolj umestilo v krog, v katerem je deloval, in to toliko bolj, ker je mati od njega pričakovala, da se bo v Indijo vrnil z diplomom BA. Bližal se je čas vrnitve v Indijo,

⁹ S. Ramanujan, *Modular equations and approximations to π* , Q. J. Math. **45** (1914), 350–372.



Slika 4: Ramanujan (na sredini) ob podelitvi diplome BA. Hardy stoji skrajno desno

kar ni ugajalo niti Hardyju. Da bi vrnitev preprečili, so Hardy, Barnes (Ramanujanu dodeljeni osebni tutor) in od Hardyja naprošeni Spring v Indiji začeli z invazijo pisem v Madras. Gospoda Dewsburyja so želeli prepričati, da bi se Ramanujanova štipendija podaljšala vsaj še za eno leto. Hardy, ki je v pismu zelo hvalil Ramanujanov napredek, govoril o njegovih odmevnih objavah v evropskih revijah, je v pismu navajal nujno potrebno podaljšanje Ramanujanovega študija predvsem zaradi vojne, ki je Ramanujana prikrajšala za sodelovanje z Littlewoodom in na splošno ohromila študij na Cambridgeu. Prof. Barnes pa mu je v pismu, v katerem je napovedal, da bo v letu 1917 Ramanujan izvoljen tudi za člana Trinityja, zapisal [4, str. 129]:

Delo in napredek g. S. Ramanujana sta odlična. Povsem upravičuje pričakovanja, ki so se gojila z njegovim prihodom. Nobenega dvoma ni, da mora biti njegova štipendija podaljšana do izvolitve za člana Trinityja, o čemer sem prepričan. To izvolitev pričakujem v oktobru 1917.

Prošnjam so v Indiji ugodili in Ramanujanu podaljšali štipendijo še za leto dni.

Podaljšano leto se je začelo dobro. 16. marca 1916 so Ramanujanu končno podelili diplomu BA za članek o visoko sestavljenih številah¹⁰. S to temo se je Ramanujan veliko ukvarjal že v Indiji, v Messenger of Mathematics in v Transactions of Cambridge Philosophical Society pa sta izšla še dva njegova članka.

Mednarodni uspeh znamenite dvojice Hardy-Ramanujan

Leta 1918 je Ramanujanu in Hardyju uspelo rešiti problem s področja particij, ki je begal matematike od Eulerja dalje. Ta dosežek lahko štejemo za največji uspeh njunega sodelovanja, s čimer je tudi Ramanujan postal svetovno znan matematik. Ker njune metode močno presegajo raven tega članka, je priporočljivo prebrati pregledni članek [12].

Postavitev problema je preprosta. Particijsko funkcijo $p(n)$ definiramo na domeni naravnih števil tako, da je $p(n)$ število vseh

možnih različnih predstavitev števila n kot vsote naravnih števil. Podajmo primer za $n = 5$. Ker lahko to število zapišemo kot $5, 4 + 1, 3 + 2, 3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 1 + 1$ in $1 + 1 + 1 + 1 + 1$, imamo $p(5) = 7$. Z večanjem števila se zelo hitro poveča tudi število njegovih particij, npr. $p(50) = 204226$ in $p(200) = 3972999029388$, kar je izjemen računski podvig, postavljena naloga *Poišči splošno formulo za $p(n)$* pa je bila izjemen izziv. Že šibkejši problem *Poišči asimptotično formulo za $p(n)$* se je izkazal za težkega. To pomeni, da iščemo funkcijo $f(n)$, ki je lažje izračunljiva kot $p(n)$, da bo veljalo $p(n) \sim f(n)$, kar je krajši zapis za $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)/f(n) = 1$.

Euler je našel rodovno funkcijo za particijsko funkcijo:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}.$$

Ideja je bila, da bi $p(n)$ prek te formule in Cauchyjevega izreka izrazili z integralom po krožnici. Z vprašanjem, kako pravilno integrirati, da bodo določeni ostanki šli proti nič pri $n \rightarrow \infty$, se je Ramanujan ukvarjal že v Indiji, toda uspelo mu je šele v sodelovanju s Hardyjem. Njuna metoda je danes znana pod imenom *krožna metoda* (angl. circle method) zaradi izvirnega načina integriranja po lokih in radijih izbranih krožnic.



Slika 5: G. H. Hardy (okoli leta 1927)

Dokazala sta obstoj take funkcije $C(m)$, da je

$$\left| p(n) - \sum_{j=1}^m A_j(n) \phi_j(n) \right| \leq \frac{C(m)}{\sqrt[n]{n}}, \quad (8)$$

kjer sta $A_j(n)$ in $\phi_j(n)$ določljivi funkciji, ki pa ju zaradi zapletenosti na tem mestu ne bomo zapisali. To pomeni, da pri izbranem številu m iz $n \rightarrow \infty$ sledi $p(n) \rightarrow \sum_{j=1}^m A_j(n) \phi_j(n)$. Za $m = 1$ bi iz (8) lahko sklepali

¹⁰ S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) 14 (1915), 347–409.

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

To je znamenita Hardy-Ramanujanova asimptotična formula za $p(n)$, ki pa jo lahko izpeljemo tudi brez poznavanja neenakosti (8). Dokaz ocene (8) sta objavila v 40-stranskem članku¹¹, pred tem pa najavila najpomembnejše izsledke¹² v reviji *Comptes Rendus*. Vse to se je dogajalo v času, ko so ugodili Hardyjevi ponovni prošnji za podaljšanje Ramanujanovega bivanja v Angliji zaradi njegove bolezni, ki se je pojavila v začetku leta 1917.

Seveda se Hardy in Ramanujan nista ustavila pri teoriji, temveč sta želela uporabiti (8) na konkretnih primerih. To je bila vse prej kot lahka naloga, saj nista poznala vrednosti funkcije $C(m)$. Kljub temu sta poskušala oceniti število $p(200)$ tako, da sta upoštevala prvih osem členov formule:

$$\sum_{j=1}^8 A_j(200)\phi_j(200) \approx 3972998993185,896 + 36282,978 - 87,584 + 5,147 + 1,424 + 0,071 + 0 + 0,044 = 3972999029387,976.$$

Rezultat se neverjetno dobro ujema s pravo vrednostjo. To ju je spodbudilo, da sta na tak način izračunala vrednosti particijske funkcije za vsa naravna števila od 1 do 200. Prave vrednosti jima je izračunal **P. A. MacMahon**¹³, ki je takrat veljal za vodilnega matematika na področju kombinatorične analize in se je zato izjemno zanimal za njuno delo. Pravi pomen MacMahonovega prispevka k Hardy-Ramanujanovi metodi morda najbolje opiše njuna zahvala na koncu uvoda v članek:

Še posebej sva dolžna zahvalo majorju MacMahonu zaradi obilice težav, ki so mu jih delali dolgovezni izračuni. Zagotovo je, da brez spodbude, ki nama je bila dana s temi izračuni, ne bi nikoli poskušala dokazati teoretičnih izsledkov, primerljivih v natančnosti s tistimi, ki sva jih predstavila.

Problema, kako najti splošno formulo za $p(n)$, pa nista razrešila. Domnevala sta, da je vrsta, ki jo dobimo iz njune vsote pri $m \rightarrow \infty$, konvergentna, toda to se je kasneje izkazalo za napačno. Hardy je trdno verjel, da taka formula ne obstaja. Morda je bil to glavni razlog, poleg Ramanujanove bolezni, da v problem nista več vrtala. Veljalo je, da je njuno delo največ, kar je možno narediti, zato je bil matematični svet leta 1937 precej presenečen, ko je Hans Rademacher (1892–1969) med pripravo predavanj o tej temi za diplomске študente odkril eksaktno formulo. Še več, njegova formula se od Hardy-Ramanujanove le malenkostno razlikuje v funkciji $\phi_j(n)$, glavni koraki v dokazu pa so identični. S tem je bil problem dokončno rešen.

O velikem pomenu krožne metode so se razpisali številni matematiki, npr. Littlewood, ki je zapisal [8, str. 253]:

Za ta izrek moramo biti hvaležni enkratni srečni povezavi dveh mož povsem različnih sposobnosti in darov, ki sta v svojo povezavo vložila vse svoje najboljše sposobnosti in svoja najboljša, srečna leta, Ramanujanova genialnost pa je njuno zvezo oplemenitila.



Slika 6: Major MacMahon

Béla Bollobás (1943–) pa je glede Hardyjevega deleža v tem odkritju dodal [8, str. 253]:

Verjamem, da Hardy ni edini matematik, ki bi lahko to naredil. Verjetno bi to lahko storil Mordell, pa tudi Polya. Prepričan sem, da je zagotovo še kar nekaj ljudi, ki bi pri tem lahko odigrali Hardyjevo vlogo, toda Ramanujanove vloge v tem izjemnem partnerstvu in v tem času, mislim, da ne bi mogel odigrati nihče drug.



Slika 7: Fotografija J. E. Littlewooda za bilten Londonskega matematičnega društva

Krožno metodo sta po Ramanujanovi smrti Hardy in Littlewood v letih 1920–1928 nadalje razvijala, tako da danes zaseda pomembno mesto v aditivni teoriji števil. Dokaz Rademacherjeve formule in nekaj uporab krožne metode lahko bralec poišče v [7, Poglavje 20].

Ramanujan je med prebiranjem MacMahonove monografije empirično odkril kongruence

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}, p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7},$$

$$p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

¹¹ G. H. Hardy, S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc. **17** (1918), 75–115.

¹² G. H. Hardy, S. Ramanujan, *Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n* , Comptes Rendus, 1917.

¹³ Percy Alexander MacMahon (1854–1929), ki si je zaradi vojaških uspehov prislužil čin majorja, je danes znan po izreku iz preštevne kombinatorike, monografijah *Combinatory analysis* (1915/16) in *An introduction to combinatory analysis* (1920) ter knjigi *New Mathematical Pastimes* (1921) o razvedrilni matematiki.

Kasneje je podal dokaze¹⁴. Prva kongruenca sledi iz enakosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)q^n = 5 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{5n})^5}{(1-q^n)^6},$$

ki jo imajo mnogi za najlepšo Ramanujanovo formulo. Izkáže se, da so te kongruence tesno povezane z Rogers-Ramanujanovim verižnim ulomkom, glej npr. [5].

Ramanujanov vzpon na matematični Olimp

Od tega prelomnega članka dalje sta se po Hardyjevi zasluzi ugled in statusni položaj Ramanujana kljub bolezni samo še strmo dvigala. Hardy se je ob težki Ramanujanovi bolezni, ki so jo v začetku leta 1917 napačno opredelili kot tuberkulozo¹⁵ in ga sprva hospitalizirali za krajši čas v bližnji bolnišnici, pozneje pa še štirikrat po raznih sanatorijih, javno boril za njegovo pravilno umestitev v zgodovino matematike. Dosegel je, da je bil Ramanujan 6. decembra 1917 imenovan za člana Londonskega matematičnega društva, 18. februarja 1918 za člana Filozofskega društva Cambridge, 28. februarja 1918 pa za člana Kraljevega društva. To veliko čast, ki mu je kot doslej najmlajšemu matematiku prinesla še 250 funtov letno za šest let, je pred njim dosegel samo še en Indijec. Hardy je ob tem dogodku v oktobru 1918 pisal na upravo madraške univerze [4, str. 200]:

[...] Vrnil se bo v Indijo z znanstvenim uspehom in ugledom, ki ga doslej ni dosegel še noben Indijec. Prepričan sem, da bo Indija odslej nanj gledala kot na poseben zaklad, kar on tudi je [...]

Hardy jim je tudi priporočil, da naj pripravijo za Ramanujana permanentno finančno pomoč, da se bo lahko še naprej posvetil samo raziskovanju. Priporočilo je padlo na plodna tla. Madraška univerza se je namreč zavezala, da bo prispevala finančna sredstva za Ramanujanovo varno vrnitev domov, Ramanujanu pa bo od 1. aprila 1919, ko mu bo potekla prejšnja štipendija, letno še pet let nakazovala vsoto 250 funtov. Pripravili so mu tudi profesorsko mesto. To so mu sporočili v pismu, odposlanem 9. decembra 1918. Ramanujan se jim je za to radodarnost iskreno zahvalil v pismu 11. januarja 1919, ki ga je naslovil na upravno enoto madraške univerze. V njem se je tudi zavezal, da bo s tem lahko sam poravnal vse stroške svojega bivanja v Angliji, dostojno poskrbel za svojo družino in prispeval tudi kaj denarja bodisi za revne študente bodisi za njihove knjige.

Zasluge za izvolitev Ramanujana tudi za člana kolidža Trinity 13. oktobra 1918 pa ima Littlewood, ki se je samo zato, da je izpeljal to proceduro, vrnil iz vojske. To doseči ni bilo lahko, saj je imel Ramanujan med nekaterimi profesorji na Trinityju veliko nasprotnikov, ker je bil Indijec.

Ramanujan je bil po izbruhu bolezni od leta 1917 dalje še bolj osamljen in se je želel vrniti domov. Med krajšim odpustom iz bolnišnice v začetku leta 1917 je celo poskusil narediti samomor s skokom pod vlak. Svoje bede ni sporočil svojim domačim, Hardy pa je o njegovem slabem zdravstvenem stanju poročal v uradni Madras šele v maju leta 1917. Hardy, ki je pri prvi hospitalizaciji celo osebno

stregel Ramanujanu, je pozneje vsakodnevno prihajal k njemu predvsem zaradi želje, da bi razrešila čim več problemov.

V bolnišnicah, zlasti v Matlocku, je Ramanujana stalno zelo zeblo, zato je pogosto delal na stranišču kot edinem toplejšem prostoru, kar je osebe preganjalo. O tej težavi je Ramanujan potožil Hardyju in se mu v pismu celo opravičil, da zato naredi manj. Iz tega obdobja izhajajo številni zanimivi Ramanujanovi izreki. Znana je tudi anekdota o taksiju številka 1729, s katerim se je Hardy pripeljal na obisk k Ramanujanu. Ramanujan je na Hardyjevo opombo, da je to število čudno, odgovoril, da je to zelo zanimivo naravno število, saj se da na dva načina izraziti kot vsota kubov: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Zanimivo je tudi to, da ta primer najdemo v Drugi beležki. Na 221. strani je zapisal enakost

$$\begin{aligned} & (x^7 - 3x^4(1+y) + x(3(1+y)^2 - 1))^3 + \\ & + (2x^6 - 3x^3(1+2y) + 1 + 3y + 3y^2)^3 = \\ & (1 + 3y + 3y^2 - x^6)^3 + (x^7 - 3x^4y + x(3y^2 - 1))^3. \end{aligned}$$

Če v to enakost vstavimo $x = 2$ in $y = 3$, dobimo $30^3 + (-3)^3 = (-27)^3 + 36^3$, od koder po deljenju s 27 sledi zgornja predstavitev števila 1729.

V teh najtežjih mesecih svojega bivanja v Angliji se je Ramanujan, misleč, da bo umrl, Hardyju prvič odprl tudi kot človek. Šele takrat je Hardy uvidel, da z Ramanujanom sploh nista spletla pravega prijateljstva, temveč le strog »poslovni« odnos, v katerem je on, Hardy, odigral glavno vlogo, Ramanujan pa se mu je stalno osebno podrejal. Hardy je izvedel, da Ramanujan ni njegov priimek, ampak edino ime, ki ga ima, da je poročen in da mu žena dolgo časa sploh ni pisala. Ko pa je po dolgih letih dobil od nje pismo, mu je v njem samo sporočila, da je zapustila njegov dom in se je preselila k bratu. Veliko let pozneje je 88-letna Janaki, ki je zadnja leta svojega življenja preživela na Tripicanu v Madrasu skupaj s svojim 45-letnim posvojenecem Narayanom, njegovo ženo in njunimi tremi otroki, prijateljem povedala, da je od Ramanujanove matere zbežala, najprej k bratu in potem domov, zaradi njenega neizmerne pritiska nanjo. V znak zahvale, da jo je izbrala za Ramanujanovo ženo, tašči tega ravnanja javno ni nikoli očitala.

Vrnitev v ljubljeno Indijo

Po končani vojni se je 27. februarja 1919 močno oslabil, suh in bledičen Ramanujan vkrcal na ladjo Nagoya, podobno tisti, s katero je priplul v Anglijo. V Bombay je prispel 27. marca, v Madras pa 2. aprila. Ob vrnitvi v Indijo ga je pričakala družina z materjo na čelu. Žene Janaki ni bilo, kar je godilo materi, ki vsa ta leta sploh ni vedela, kje in kako Janaki živi. Na Ramanujanovo vprašanje, kje je, je odgovorila izmikajoče, češ, naj se s tem ne obremenjuje. To je v Ramanujanu povzročilo prvi zavestni odklon od matere.

Janaki, ki je za Ramanujanovo vrnitev v Indijo izvedela iz časopisov, se po nasvetu brata Srinivasa Iyengarja ni samoiniciativno pridružila družini v Madrasu, pač pa je prišla k Ramanujanu šele, ko ji

¹⁴ S. Ramanujan, *Some properties of $p(n)$, the number of partitions of n* , Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **19** (1919), 207–210.

¹⁵ Šele več let po smrti so ugotovili, da so Ramanujana tako v Angliji kot pozneje tudi v Indiji zdravili napačno. Ni bolehal za tuberkulozo, pač pa za posledicami amebne griže, ki jo je prebolel v Indiji leta 1906 in se je ob težkih fizičnih in psihičnih naporih ter pomanjkanju ustrezne zdrave hrane ponovno aktiviral.

je prijatelj sporočil, da si Ramanujan to želi. Z bratom sta obiskala Ramanujana teden dni po njegovi nastanitvi v Madrasu in od takrat je ostala pri njem.



Slika 8: Ramanujanova mati Komalattammal

V tem bungalovu je Ramanujan bival samo tri mesece ob materi in skupaj z ženo, takrat 18-letno Janaki. V tem času se je med njima spletla močna čustvena vez. Končno sta se začela pogovarjati in odstirati vse tančice iz zapletov, ki jih je napletla gospodovalna in ljubosumna mati. Vsi so pri njem opazili veliko spremembo. To ni bil več stari, vedri in klepetavi Ramanujan, ampak zagrenjen, razdražljiv in nestrpen mož, ki je samo delal in komaj kaj spregovoril.



Slika 9: 78-letna Janaki Amal

Ramanujanovo zdravje je bilo kljub prizadevanju zdravnikov vse slabše. Pestile so ga hude bolečine, zato so mu ves čas bivanja v Madrasu nudili najboljšo zdravniško oskrbo. Zdravniki so mu svetovali, da naj se za nekaj časa umakne v kraj Coimbatore, a to selitev je preprečila mati in dosegla, da so ga za dva meseca premestili v zanj manj ugodno vasico Kodomudi, blizu obale svete reke Kaveri (Cauvery), v neposredno bližino njegovega rojstnega mesta. Tam je prišlo

11. avgusta 1919 do prvega in to javnega spora med Ramanujanom in materjo, ker ni dovolila, da se Janaki pridruži družini pri verskem obredu ob reki. Ramanujan materi ni popustil in Janaki je ostala ob njem. V tem sporu¹⁶ je Ramanujan mirno, jasno in preudarno javno očital materi vse grdobije, ki jih je počela Janaki, od skrivanja pisem do vseh njenih izživljanj nad njo. S tem je Janaki dobila v družini nov status, vez med njima pa se je še poglobila.

Žal tudi v Indiji zdravniki niso postavili prave diagnoze za vse Ramanujanove težave in so ga še naprej obravnavali kot tuberkuloznega bolnika. Ko se mu je stanje stabiliziralo, je prekinil zdravljenje v Kodomudi in se 3. septembra 1919 vrnil v Kumbakonam. Toda zdravstveno zatišje je hitro minilo. V januarju 1920 je spet odšel na zdravljenje v Madras, kjer sta ga finančno podprla Srinivasa Aiyangar in **T. Namberumal Chetty**¹⁷, delno pa je kril stroške zdravljenja tudi sindikat madraške univerze.

Vsa prizadevanja številnih najboljših zdravnikov pa so bila zaman. Ramanujan, ki mu je v zadnjih mesecih življenja nesebično stala ob strani Janaki kot ljubeča žena, prijateljica in negovalka, je umrl 26. 4. 1920 v Chetputu, pristanišču Madrasa, v Chettyjevi palači Gometra, ki mu jo je lastnik dal v brezplačno uporabo. Ramanujan je v tem obdobju tudi izjavil, da zelo verjetno sploh ne bi zbolel, če bi bila v Angliji ob njem Janaki.

S tem se je izjemna naveza med Ramanujanom in Hardyjem prekinila. Zdi se, da je Hardy v naslednjih letih želel prikazati svoj odnos do Ramanujana v boljši luči. Leta 1940 je izdal knjigo *Ramanujan*, glej [6], ki je bila dolgo časa edini vir o Ramanujanovem delu in življenju. Istega leta je izšla tudi Hardyjeva zelo popularna knjiga *A mathematician's apology*, v kateri je uporabil svoj veliki dar za pisanje nematematičnih vsebin in ki je navdihnila tudi druge znamenite matematike, da so se »odprli« splošni javnosti. Po njegovi smrti je leta 1949 izšla še knjiga *Divergent series*, v kateri je omenil in razvil tudi Ramanujanov pogled na sumacijo divergentnih vrst. Zaključimo z znamenitim Hardyjevim citatom iz njegove knjige *Ramanujan*:

Ramanujan je moje odkritje. Nisem ga izumil, izumil se je sam, toda bil sem prva kompetentna oseba, ki je imela možnost videti njegovo delo. Misel na to, da sem v njem prepoznal izjemno bogastvo, me navdaja z zadovoljstvom.

Ramanujanova zapuščina

Kljub bolezni je Ramanujan vneto delal tudi ves čas v Indiji. Svoje pero je odložil le štiri dni pred smrtjo. Hardyju se je iz Indije oglasil samo enkrat in to s pismom 12. januarja 1920, v katerem je omenil lažne (angl. mock) funkcije theta [4, str. 220]:

Zelo mi je žal, da vam do sedaj nisem nič pisal [...] Nedavno sem odkril zelo zanimive funkcije, ki jih imenujem »lažne« ϑ -funkcije. V nasprotju z »napačnimi« ϑ -funkcijami (deloma študiranimi s strani prof. Rogersa v njegovem zanimivem članku) te funkcije vstopijo v matematiko tako lepo kakor navadne funkcije theta. S pismom vam pošiljam nekaj primerov.

¹⁶ O Ramanujanovih sporih z materjo zaradi Janaki in o njenem nasprotovanju donacijam denarja v dobrodelne namene je več let po njegovi smrti večkrat zelo nejasno in tudi kontradiktorno pisal njegov brat.

¹⁷ Thaticonda Namberumal Chetty (1856–1925) je bil indijski mogočnej, podjetnik, gradbeni inženir in poslovnež, ki je v Madrasu zgradil več pomembnih javnih zgradb in imel v osebni lasti 99 palač. Zaradi zasluga je bil leta 1923 odlikovan z visokim častnim nazivom *Dewan Bahadur*.

Napisal je 17 primerov, navedimo le enega:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1+q)^2 (1+q^2)^2 \cdots (1+q^n)^2}.$$

Ramanujan v pismu ni pustil nobenega namiga, kako je dobil te primere. Osnovno vprašanje prvih raziskovalcev je bilo: *Kaj je lažna funkcija theta?* Trudili so se poiskati teorijo, ki bi pokrila vse Ramanujanove primere. Te funkcije zasedajo pomembno mesto¹⁸ v znameniti *Izgubljeni beležki*, ki je nastala v tem času. Ime je zavajajoče. V nasprotju z beležkami ne gre za zvezek, temveč za 138 enostransko popisanih listov, prav tako so bili listi *založeni* in ne izgubljeni. Kot lahko razberemo iz uvodov v knjigah [1] in [4] ter [8], se je z Ramanujanovo matematično zapuščino po smrti dogajalo marsikaj.

Ramanujan je v Indijo prinesel Drugo in Tretjo beležko. Prvo beležko pa je pustil pri Hardyju. Janaki je leta 1920 vse rokopise, skupaj z avtorskimi pravicami, podarila Univerzi v Madrasu, ki ji je pozneje zanje dodelila mesečno rento 25 rupij¹⁹. Tri leta kasneje je F. Dewsbury poslal Hardyju ročno narejeno kopijo Druge beležke (v štirih delih) in nekaj originalnih rokopisov, saj je Hardy želel vse neobjavljene zapise objaviti v posebni izdaji o Ramanujanovem življenju in delu. Kasneje je na Dewsburyjevo prošnjo Hardy poslal nazaj le originalno Prvo beležko, ostalih rokopisov pa ne. S tem je knjižnica Univerze v Madrasu dobila vse originalne beležke, ki so tam shranjene še danes. Leta 1934 je Hardy predal precejšen del rokopisov **G. N. Watsonu**²⁰, ki si je za osebno rabo naredil dve kopiji Druge beležke. Ni znano, ali je Watson takrat imel tudi vse rokopise, ki danes sestavljajo Izgubljeno beležko, zagotovo pa je vse liste dobil enkrat med letoma 1934 in 1947. Watson je dobrih deset let raziskovanja posvetil beležkam in Ramanujanovim pismom Hardyju. Napisal je več kot trideset člankov na to temo, tudi nekaj o lažnih funkcijah theta, toda v poznih tridesetih letih prejšnjega stoletja mu je zaradi bolezni zanimanje za Ramanujana močno upadlo. Po njegovi smrti je **R. A. Rankin**²¹ dobil nalogo napisati nekrolog za Londonsko matematično društvo, zato je 12. julija 1965 obiskal gospo Watson, ki ga je popeljala do Watsonove sobe, polne popisane papirja, kjer je odkril del Ramanujanovih rokopisov. Te je 2. novembra 1965 poslal knjižnici na kolidž Trinity. 19. novembra 1965 pa je **J. M. Whittaker**²², prav tako z nalogo napisati nekrolog Watsonu za Kraljevo družbo, tudi obiskal Watsonov dom. Po naključju je med goro rokopisov našel prav Izgubljeno beležko, ki jo je predal Rankinu, ta pa jo je 26. decembra 1968 poslal knjižnici na kolidž Trinity. Tretjo pošiljko preostanka Ramanujanovih rokopisov, ki jih je dobil od gospe Watson aprila 1969, je odposlal 30. decembra 1969. Ne Rankin ne Whittaker nista v nekrologih omenila Ramanujanovih rokopisov. Tako so skoraj osem let ležali v knjižnici na Trinityju, za njihov obstoj pa je vedela le majhna skupina ljudi. Spomladi 1976

je rokopise ponovno »odkril« **G. E. Andrews**²³ in jih javno predstavil. Širša javnost je vzdušje tega dogodka primerjala s hipotetičnim odkritjem Beethovne desete simfonije, matematiki pa so končno dobili nekaj namigov za zgraditev teorije lažnih funkcij theta. Najpomembnejši je bil ta, da te funkcije spadajo v teorijo modularnih form. Preboj je dosegel S. Zwegers, ki je v doktoratu leta 2002 pokazal, kako se dobijo prek posebnih realno analitičnih modularnih form, ki so se malo kasneje izkazale za primere harmoničnih Maassovih form. Ta teorija je zapletena in sega tudi na druga področja, npr. na umeritveno teorijo v matematični fiziki. Zainteresirani bralec lahko dobi dober pregled nad tem področjem v članku [9], ki ga je napisal Ken Ono, eden od vodilnih ekspertov, ki je svojo kariero začel tudi zaradi navdušenosti nad Ramanujanom.

Hardyjeva prizadevanja, da bi izdali beležke, so zaradi pomanjkanja denarja spodletela. Skupaj z P. V. Seshu Aiyarjem in **B. M. Wilsonom**²⁴ so leta 1927 uredili in izdali Ramanujanove članke, glej [10], v uvodu pa navedli nekaj izsekov iz pisem. Dve leti kasneje sta Watson in Wilson začela z urejanjem beležk, vendar zaradi Wilsonove tragične smrti dela nista nikoli dokončala. Leta 1949 je Univerza v Madrasu izdala samo tri izvode faksimil beležk. Šele leta 1957 je na pobudo K. Chandrasekharana Inštitut osnovnih raziskav Tata²⁵ v Bombayu v sodelovanju z Univerzo v Madrasu in Fundacijo Tata²⁶ izdal fotokopije beležk z naslovom *Notebooks of Srinivasa Ramanujan*²⁷ v nakladi 1000 izvodov. S tem so beležke prvič postale dostopne širši matematični javnosti, vendar je minilo še sedemnajst let, preden so začeli s sistematičnim pregledom. Najbolj zaslužen za to je B. C. Berndt. Med študijskim obiskom Inštituta za napredne študije v Princetonu leta 1974 je opazil, da lahko dokaže nekaj formul iz Druge beležke, med drugim tudi Ramanujanovo formulo za $\zeta(2n+1)$. Tri leta kasneje se je odločil, da bo dokazal vse formule v 14. poglavju Druge beležke. Andrews mu je povedal, da sta na tem delala že Watson in Wilson. Na srečo so bili njuni rokopisi shranjeni v knjižnici na kolidžu Trinity. S tem se je pričelo sistematično dokazovanje formul in izrekov iz beležk (glej 2. opombo v prvem delu). Podobno sta se urejanja Izgubljene beležke lotila Andrews in Berndt. Izsledke sta strnila v pet knjig, zadnja je izšla leta 2018.

Zaključimo članek s Hardyjevim citatom, ki lepo opiše Ramanujanovo veličino [6, str. 14]:

Možno je, da je velik čas formul minil in bi se Ramanujan moral roditi pred 100 leti, toda do sedaj je bil največji formalist svojega časa. V zadnjih petdesetih letih so živeli mnogo pomembnejši matematiki kot Ramanujan, toda nobeden se ne bi mogel pomeriti z njim na njegovem področju. Z igranjem igre po njegovih pravilih bi vsakega matematika na svetu naredil za petnajstletnika.

¹⁸ Glede na količino zasedajo le okoli 5 % vsebine. Večina vsebine spada v teorijo q -vrst, med katere prištevamo tudi modularne enačbe in Rogers-Ramanujanov verižni ulomek.

¹⁹ Janaki se je težko preživljala s šivanjem oblačil, poučevanjem krojenja in tamilščine, ker ji Ramanujanova mati in sinova niso izročili Ramanujanovega denarja, s katerim je poskrbel zanj.

²⁰ George Neville Watson (1886–1965), Senior Wrangler (1907) in FRS (1919), je bil Masonov profesor čiste matematike na Univerzi v Birminghamu. Najbolj znan je po soavtorstvu z E. T. Whittakerjem pri učbeniku *A course of modern analysis*.

²¹ Robert Alexander Rankin (1915–2001), škotski matematik, ki je deloval na področju analitične teorije števil.

²² John Macnaghten Whittaker (1905–1984), FRS (1949), je bil sin E. T. Whittakerja.

²³ George Eyre Andrews (1938–) je ameriški matematik, ki deluje na področju matematične analize in kombinatorike.

²⁴ Bertram Martin Wilson (1896–1935) je bil profesor matematike na University College Dundee, Škotska.

²⁵ Tata Institute of Fundamental Research

²⁶ Tata Trust

²⁷ Ker izvodov sčasoma ni bilo mogoče več dobiti, pa tudi zaradi slabega stanja originalnih beležk, so ob pomoči najnovejše tehnologije za obdelavo slik pripravili drugo izdajo faksimil [11].

Zahvala

Avtorja se zahvaljujeta članom seminarja za zgodovino matematičnih znanosti za spodbudo in razumevanje med predavanji ob Ramanujanovi 130. obletnici rojstva. Članek v dveh delih je nastal na podlagi teh predavanj. Zahvala gre tudi veleposlaniku Indije, gospodu *Param Jit Mannu*, ki je za namene seminarja samoiniciativno priskrbel indijski film in literaturo o Ramanujanu iz Indije. Hvaležna sva tudi *Danijeli Čibej, prof.*, za lektorski pregled in *Metodu Bošku* za pomoč pri urejanju avtorizacije fotografij.

Fotografije

Slika 1: E. H. Neville

<http://www.icmihistory.unito.it/portrait/neville.php>

Pravice proste.

Slika 2: Svetišče Namakkal

Vir: Namakkal Narasimhaswami Temple Navarathri, pravice proste.

Slika 3: S. A. Ramanujan

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c1/Srinivasa_Ramanujan_-_OPC_-_1.jpg

Vir: Wikipedija, pravice proste.

Slika 4: Ramanujan ob podelitvi diplome BA

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RamanujanCambridge.jpg>

Vir: Wikipedija, pravice proste.

Slika 5: G. H. Hardy

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ghhardy@72.jpg>

Vir: Wikipedija, pravice proste.

Slika 6: P. A. MacMahon

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Percy_MacMahon.jpg

Vir: Wikipedija, pravice proste.

Slika 7: J. E. Littlewood

Vir: London Mathematical Society, pravice proste.

Slika 8: Komalattammal

<https://www.indiatoday.in/education-today/gk-current-affairs/story/srinivasa-ramanujan-life-story-973662-2017-04-26>

Pravice proste.

Slika 9: Janaki Amal

<https://www.findagrave.com/memorial/168829173/srimathi-janaki-ramanujan>

Vir: www.findagrave.com, pravice proste.

Literatura

- [1] G. E. Andrews, B. C. Berndt, *Ramanujan's lost notebook, Part I*, Springer, New York, 2005.
- [2] K. Alladi, *Ramanujan's place in the world of mathematics*, Springer, New Delhi, 2013.
- [3] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part II*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [4] B. C. Berndt, R. A. Rankin, *Ramanujan: Letters and commentary*, History of Mathematics 9, AMS, London Mathematical Society, 1995.
- [5] H.-C. Chan, *An invitation to q-series: From Jacobi's triple product identity to Ramanujan's »most beautiful identity«*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2011.
- [6] G. H. Hardy, *Ramanujan: Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940.
- [7] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications 53, AMS, Providence, RI, 2004.
- [8] R. Kanigel, *The man who knew infinity: a life of the genius Ramanujan*, Washington Square Press, 1991.
- [9] K. Ono, *Unearthing the visions of a master: harmonic Maass forms and number theory*, Current developments in mathematics, 2008, Int. Press, Somerville, MA, 2009, pp. 347–454.
- [10] S. Ramanujan, *Collected papers*, University Press, Cambridge, 1927.
- [11] S. Ramanujan, *Notebooks of Srinivasa Ramanujan*, 2nd ed., Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, 2012.
- [12] A. Rice, *Partnership, partition, and proof: The path to the Hardy-Ramanujan partition formula*, Amer. Math. Monthly **125** (2018), 3–15.
- [13] A. Simonič, *Riemannove ničle in praštevila*, Obzornik Mat. Fiz. **64** (2017), 201–215.
- [14] A. Simonič, M. Strnad, *Ramanujanova kvadratura kroga*, sprejeto v Presek **46** (2018/2019), št. 6, 8–12.