

Naslov članka/Article:

BABILONSKA TABLICA IN PITAGOREJSKE TROJICE

A Babylonian Tablet and Pythagorean Triples

Avtor/Author:

Dr. Marko Razpet

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



Matematika v šoli št. 1/2021, letnik 27

ISSN 1318-010X

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2021

Spletna stran revije:

<https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>

Babilonska tablica in pitagorejske trojice

Dr. Marko Razpet
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Izvleček

Glavni namen članka je obravnavati vsebine babilonske glinene tablice Plimpton 322. Za lažje razumevanje sta pojasnjena babilonski sistem zapisovanja števil in kratka razlaga pitagorejskih trojic. Na koncu je dodanih še nekaj nalog.

Ključne besede: šestdesetiški sistem, pitagorejske trojice, Plimpton 322

A Babylonian Tablet and Pythagorean Triples

Abstract

The main aim of the article is a discussion of the Babylonian clay tablet Plimpton 322. For an easier understanding, the Babylonian system of writing numbers and the Pythagorean triples are explained. At the end, some exercises are added.

Keywords: sexagesimal system, Pythagorean triples, Plimpton 322

Uvod

Mezopotamijo, grško Μεσοποταμία, kar pomeni Medrečje, pogosto imenujejo zibelka civilizacije. Danes je del Iraka. Že v Mezopotamiji sta reki Evfrat in Tigris s poplavami skrbeli za rodovitno zemljo, tako kot na primer Nil v Egiptu. Zato so tu ljudje zgradili bivališča in svetišča, se naselili in začeli obdelovati zemljo ter rediti domače živali. Ker je bilo treba živati, bojevnike, delovno silo in zaloge prešteti in izvajati potrebne račune, zemljo pa pogosto deliti, meriti in napovedovati čas poplav, so se hitro razvile aritmetika, geometrija in astronomija, kar je zahtevalo zapisovanje besedil in števil z znaki. Svojevrstni zapis števil z vrezovanjem črt v lesene palice ali kosti so ljudje uporabljali že v pradžini za evidenco staleža živine, prihodkov, odhodkov in posojil. Več o tem na primer v [3].

Najbolj je bila v Mezopotamiji za zapisovanje števil in besed pripravljena tamkajšnja glina, ki jo je bilo na pretek. Iz nje so za potrebe gradbeništva izdelovali opeko, ki so jo sušili na soncu ali pa žgali v preprostih pečeh. Hitro so ugotovili, da se da na sveže glinaste tablice pisati s prirotenimi paličicami iz trstja. Zato so zelo zgodaj izumili *klinopis*. V slovenščini je tako poimenovan zaradi klinaste oblike znakov. Popisane tablice so, tako kot opeko, žgali v pečeh ali pa so jih pustili posušiti se na žgočem soncu.

Tako so zapisi postali zelo obstojni, žal pa se tablice rade krušijo in lomijo. V 2. stoletju starih klinopisov že nihče ni več znal brati. Arheologi so jih v novejši dobi našli na tisoče in po več tisoč letih so v 19. stoletju uspeli razvozlati pozabljeno pisavo in rekonstruirati stare jezike, ki jih nihče ni več govoril (sumerski, akadjski, babilonski). Tako so se nam ohranila imena starodavnih mest,

pokrajin, ljudstev, vladarjev, zakoniki, epi in tablice z matematično vsebino. Od literarnih del se je skoraj v celoti ohranil sumerski Ep o Gilgamešu, iz katerega se da razbrati, kakšno je bilo življenje Sumercev v stari Mezopotamiji. Del epa pripoveduje o vesoljnem potopu.

Mezopotamija je bila v zgodovini vedno zanimiva za osvajalce vseh vrst. Tako zasledimo na njenih tleh od približno leta 3000 p. n. š. naprej sumersko, akadjsko, novosumersko, starobabilonsko, asirsko, novobabilonsko, kaldejsko, medijsko in perzijsko kraljestvo, če navedemo samo nekatera. Klinopisno pisavo so poznali že Sumerci, druga ljudstva so jo prevzela in prilagodila svojim jezikom. Celo staroperzijska pisava je bila klinopisna. Dolgo časa je bil Babilon osrednje mesto v Mezopotamiji, zato bomo v nadaljevanju govorili kar o Babiloncih, babilonskih številskih znakih in babilonskem načinu zapisovanja števil.

Babilonci so za zapis števil uporabljali samo dva klinopisna znaka: $\lceil$ za 1 in $\lrcorner$ za 10. S pravilno priroteno paličico iz trstja ju ni bilo težko odtisniti v mehko surovo glino. Naravna števila od 1 do 9 so zapisovali z ustreznim številom znakov za 1, ki so jih razporedili v kupčke:

$$\lceil = 1, \lceil\lceil = 2, \lceil\lceil\lceil = 3, \lrcorner = 4, \lrcorner\lceil = 5, \lrcorner\lceil\lceil = 6, \lrcorner\lceil\lceil\lceil = 7, \lrcorner\lceil\lceil\lceil\lceil = 8, \lrcorner\lceil\lceil\lceil\lceil\lceil = 9.$$

Desetkratnike od 10 do 50 so zapisovali z ustreznim številom znakov za 10, ki so jih tudi razporedili v kupčke:

$$\lrcorner = 10, \lrcorner\lrcorner = 20, \lrcorner\lrcorner\lrcorner = 30, \lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner = 40, \lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner = 50.$$

Naravna števila od 1 do 59 so zapisovali z ustreznim številom desetic in enic, na primer

$$\text{𐎶𐎵} = 18, \text{𐎶𐎶} = 47.$$

Klinopisni zapisi vseh babilonskih števil od 1 do 59 so zbrani v preglednici 1. Uporabili jih bomo kot številke ali cifre v šestdesetiškem sistemu mestnih vrednosti. Zaradi enotnejšega zapisa bomo tedaj enomestnim številom spredaj dodali ničlo: 01, 02 ... 09.

Kako so zapisovali naravna števila, ki so večja od 59, to se pravi 60, 61 ...?

Kako so zapisovali pozitivne ulomke in realna števila? Negativnih števil še niso uvedli. O tem bo tekla beseda v nadaljevanju.

V običajnem življenju uporabljamo desetiški ali decimalni (lat. Decimus – deseti) številski sistem mestnih vrednosti. Osnova v tem sistemu je 10. To pomeni, da pozitivno realno število a zapišemo v obliki

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \dots$$

Pri tem so $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots$ naravna števila 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

To je deset števk desetiškega sistema. Začetna številka a_n navadno ni enaka 0. Včasih jo dopišemo v preglednicah zaradi lepšega zapisa. Število a lahko v splošnem razdelimo na celi del $[a]$ in decimalni del (a) , to pomeni $a = [a] + (a)$, kjer sta

$$[a] = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0, (a) = a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \dots$$

Preglednica 1: Številke babilonskega šestdesetiškega sistema.

01	𐎶	16	𐎶𐎵	31	𐎶𐎶𐎵	46	𐎶𐎶𐎶
02	𐎶𐎶	17	𐎶𐎶𐎵	32	𐎶𐎶𐎶𐎵	47	𐎶𐎶𐎶𐎶
03	𐎶𐎶𐎶	18	𐎶𐎶𐎶𐎵	33	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
04	𐎶𐎶𐎶𐎵	19	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵
05	𐎶𐎶𐎶𐎶	20	𐎶𐎶	35	𐎶𐎶𐎶𐎶	50	𐎶𐎶𐎶
06	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	21	𐎶𐎶𐎵	36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	51	𐎶𐎶𐎶𐎵
07	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	22	𐎶𐎶𐎶𐎵	37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	52	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵
08	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	23	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	53	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵
09	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	24	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	54	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵
10	𐎶	25	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	40	𐎶𐎶	55	𐎶𐎶𐎶𐎶
11	𐎶𐎶𐎵	26	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	41	𐎶𐎶𐎵	56	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵
12	𐎶𐎶𐎶𐎵	27	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	42	𐎶𐎶𐎶𐎵	57	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵
13	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	28	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	43	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	58	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵
14	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	29	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	59	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵
15	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵	30	𐎶𐎶	45	𐎶𐎶𐎶𐎶		

Vsaka številka ima svoj pomen: a_0 je število enic, a_1 število desetic, a_2 število stotic itd. Decimalni del je vsota desetiških ulomkov,

to je ulomkov, ki imajo za imenovalc naravno potenco osnove, torej števila 10. Številka a_{-1} je število desetin, a_{-2} število stotic, a_{-3} število tisočin itd.

Po dogovoru število a v splošnem zapišemo v strnjeni obliki:

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \dots$$

Vejica v zapisu razmejuje celi in decimalni del. Imenujemo jo decimalna vejica. Desno od nje stojijo decimalke. Če število nima decimalnega dela, pišemo enostavneje

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0,$$

če pa nima celega dela, pa

$$a = 0, a_{-1} a_{-2} \dots$$

Decimalni del realnega števila je lahko vsota neskončnega števila desetiških ulomkov. Teh je končno mnogo le v primeru, ko je a ulomek, katerega imenovalc je večji kot 1 in ga lahko zapišemo v obliki $2^i \cdot 5^j$, pri čemer sta i in j naravni števili ali 0. Taka števila imenujemo *regularna števila* v desetiškem sistemu. Razlog tiči v tem, da ima osnova 10 prafaktorja 2 in 5: $10 = 2 \cdot 5$. Drugi ulomki imajo neskončno število decimalk, ki se periodično ponavljajo, kar označujemo s črto nad periodično skupino števk. Iracionalna števila imajo tudi neskončno število decimalk in so brez periode.

Primeri.

$$\frac{3}{2} = 1,5, \quad \frac{791}{250} = 3,164, \quad \frac{22}{7} = 3,142857.$$

Omenimo, da zapis v decimalni obliki ni enoličen. Število $1/2$ ima dve obliki: 0,5 in $0,4\overline{9}$.

Ni pa osnova 10 edina možna. Za osnovo številkega sistema mestnih vrednosti lahko uporabimo katerokoli naravno število b , ki je večje od 1. To pomeni, da pozitivno realno število a lahko zapišemo v obliki

$$a = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_1 \cdot b + a_0 + a_{-1} \cdot b^{-1} + a_{-2} \cdot b^{-2} + \dots$$

Pri tem so $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots$ naravna števila 0, 1 ... $b - 1$. To je b števk sistema z osnovo b . V računalništvu sta v rabi sistem z osnovo $b = 2$ s števkama 0 in 1 ter sistem z osnovo $b = 16$ s števkami 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Prvega imenujemo dvojiški ali binarni (lat. binarius – dvojen), drugega pa šestnajstiški ali heksadecimalni (gr. ἑξ, heks – šest, lat. decimus – deseti) sistem.

Sledi drugih številskih sistemov najdemo v besedni obliki v nekaterih jezikih, na primer dvajsetiškega v francoščini (quatre-vingts – osemdeset, to je štirikrat dvajset; quatre zase pomeni štiri, vingt pa dvajset) in v nam bližji rezijanščini, slovenskem narečju v zamejstvu. V Reziji, alpski dolini pod Kaninom v Italiji, namreč za dvajset uporabljajo besedo dvisti, za šestdeset besedi trikrat dvisti in za osemdeset štirikrat dvisti. Sledi dvanajstiškega sistema imamo v angleščini (eleven, twelve – enajst, dvanajst; od trinajst do devetnajst se angleški števniki končajo s -teen). Desetiški sistem ima izvor v desetih prstih človekovih rok, dvajsetiški v dvajsetih prstih človekovih rok in nog, dvanajstiški pa v skupaj dvanajstih členkih kazalca, sredinca, prstanca in mezinca ene človekove roke. Palec služi za kazanje nanje pri štetju.

Babilonci so v astronomiji in matematiki za svoj številski sistem uporabljali osnovo $b = 60$. Razvili so torej šestdesetiški ali seksagesimalni (lat. sexagesimus – šestdeseti) sistem. O tem, zakaj so izbrali za osnovo ravno 60, ni enotnega mnenja. Sprejemljiva je razlaga, da so pri štetju uporabili 12 členkov desne roke, tako kot smo opisali zgoraj, s petimi prsti leve roke pa so šteli dvanajstice ali ducate. S tem so obvladali števila od 1 do 60.

Število $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ima več deliteljev kot 10, zato ima šestedesetiški sistem tudi več regularnih števil, to je takih števil, večjih kot 1, ki se dajo zapisati v obliki $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$, pri čemer so i, j in k naravna števila ali 0. Regularna števila šestedesetiškega sistema so na primer 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20. V tem sistemu lahko vsako realno število a zapišemo takole:

$$a = a_n \cdot 60^n + a_{n-1} \cdot 60^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 60 + a_0 + a_{-1} \cdot 60^{-1} + a_{-2} \cdot 60^{-2} + \dots$$

Pri tem so $a_n, a^{n-1} \dots a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2} \dots$ naravna števila 0, 1, 2 ... 59. Zanje zato potrebujemo šestdeset znakov šestdesetiškega sistema iz preglednice 1 oziroma kar naše številke 00, 01, 02 ... 59. Po dogovoru spet zapišemo krajše:

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0; a_{-1} a_{-2} \dots$$

Podpičje v zapisu razmejuje celi in seksagezimalni del. Za naše potrebe mu bomo rekli seksagezimalno podpičje. Desno od nje ga stojijo seksagezimalke.

Če število nima seksagezimalnega dela, pišemo enostavneje

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0,$$

če pa nima celega dela, pa

$$a = 00; a_{-1} a_{-2} \dots$$

Seksagezimalni del realnega števila je lahko vsota neskončnega števila šestdesetiških ulomkov, to je ulomkov, ki imajo v imenovalcu naravno potenco števila 60. Teh ulomkov je končno mnogo v primeru, ko je a ulomek, katerega imenovalec je regularno število šestdesetiškega sistema.

Števke 00, 01, 02 ... 59 v šestdesetiškem sistemu mestnih vrednosti bomo podčrtovali v primerih, ko obstaja nevarnost zamenjave z običajnimi desetiško zapisanimi števili. V vsakem primeru pa jih bomo med seboj ločili s presledki, na primer: 72 = 01 12.

Uporabili smo analogijo z desetiškim sistemom. V resnici Babilonci niso uporabljali seksagezimalnega podpičja, pa tudi ne znaka za nič. Če so nanj naleteli, so pustili v zapisih kar prazen prostor. Iz konteksta so razbrali, kje naj bi stalo podpičje, ki ga mi tule uvajamo samo zaradi boljše razumljivosti. Odsotnost ničle je seveda vodila do zlorab in napak. V tem besedilu bomo, kjer bo to potrebno, namesto babilonskega praznega prostora uporabili znak $\smile$.

Neregularnih imenovalcev v ulomkih so se Babilonci izogibali, če se je le dalo. Tako so na primer za ulomek $1/7$, ki ima neregularen imenovalec, poznali le približek z nekaj seksagezimalkami. Število $\sqrt{2}$, s katerim se izraža diagonalna kvadrata, je iracionalno in ima nešteto neperiodičnih decimal in seksagezimalk. Našli pa so glinasto tablico, na kateri je narisana kvadrat z diagonalama, zraven pa je zapisano tudi število $\sqrt{2}$ z nekaj seksagezimalkami.

Babilonski način zapisovanja števil so še precej časa uporabljali, sčasoma pa je prevladal desetiški številski sistem in indijsko-arabske številke. Omenimo še tatarskega matematika in astronoma Al Kašija (1380–1429), ki je izračunal iracionalno število 2π po arhimedski metodi krogu vrtanih in očrtanih pravih večkotnikov in dobil njegovih 9 seksagezimalok:

$$2\pi \doteq 06; 16\ 59\ 28\ 01\ 34\ 51\ 46\ 14\ 50. \quad (1)$$

Preden je prevladal desetiški sistem, so matematiki in astronomi decimalni del realnega števila še vedno radi zapisovali v šestdesetiškem sistemu. Ostanke šestdesetiškega sistema še danes uporabljamo pri merjenju časa in kotov. Ena ura ima 60 minut, ena minuta 60 sekund. Ena kotna stopinja ima 60 kotnih minut, ena kotna minuta 60 kotnih sekund. Pripomnimo, da seštevaje in odštevaje v šestdesetiškem sistemu ni nič težje kot seštevaje in odštevaje kotov. Če vzamemo na primer

$\alpha = 15^{\circ} 45' 21''$ in $\beta = 3^{\circ} 50' 47''$, dobimo

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 18^\circ 95' 68'' = 19^\circ 36' 8'', \\ \alpha - \beta &= 14^\circ 104' 81'' - 3^\circ 50' 47'' = 11^\circ 54' 34''.\end{aligned}$$

Zanimiva je bila tudi babilonska utežna mera *talent*, ki je ustrezala masi nekaj nad 30 kg. En *talent* je tehtal 60 min, ena *mina* pa 60 seklov. En *sekel* je bil zato enak 1/60 mine oziroma 1/3600 talenta.

Kasneje (šele okoli leta 300 p. n. š.) so Babilonci uvedli za naš 0 poseben znak, ki pa je imel samo vlogo zapolnjevalca praznega mesta v zapisu števil. Dolgo časa je preteklo, preden so ljudje začeli 0 obravnavati kot število. Bilo je namreč nerazumljivo, zakaj bi nič zapisovali z nečim, kar je vidno in zato ni nič. Babilonski zapolnjevalec praznega mesta je imel obliko .

Kako pretvorimo naravno število v šestedetiško obliko? Odgovor je preprost: z nekaj deljenji s 60 upoštevajoč ostanke. Najlažje to pojasnimo s primeri.

Primeri

Pretvorimo števila 1949, 79429 in 648015 v šestdesetiško obliko in jih zapišimo z uporabo preglednice 1 v klinopisni obliki.

$$1949 = 32 \cdot 60 + 29, \quad 32 = 0 \cdot 60 + 32, \quad 1949 = 32 \quad 29 = \text{𐎶𐎵} \quad \text{𐎶𐎺𐎠}.$$

$$79429 = 1323 \cdot 60 + \underline{49}, \quad 1323 = 22 \cdot 60 + \underline{03}, \quad 22 = 0 \cdot 60 + \underline{22},$$

$$79429 = 22 \ 03 \ 49 = \begin{array}{c} \text{ㄣ} \\ \text{ㄣ} \end{array} \begin{array}{c} \text{ㄣ} \\ \text{ㄣ} \\ \text{ㄣ} \end{array} \begin{array}{c} \text{ㄣ} \\ \text{ㄣ} \\ \text{ㄣ} \\ \text{ㄣ} \end{array}.$$

$$648015 = 10800 \cdot 60 + 15, \quad 10800 = 180 \cdot 60 + 00, \quad 180 = 3 \cdot 60 + 00, \quad 3 = 0 \cdot 60 + 03,$$

$$648015 = 03\ 00\ 00\ 15 = \text{III} \cup \text{IV} = \text{III} \diagdown \diagdown \text{IV}.$$

V zadnjem primeru vidimo, kaj se zgodi, če je kakšna številka v šestdesetiškem zapisu enaka 00. Na koncu smo uporabili še babilonski zapolnjevalec praznega mesta.

Oglejmo si še primere ulomkov z regularnim imenovalcem.

Primeri

Pretvorimo ulomke

$$\frac{3}{4}, \frac{127}{36}, \frac{110041}{7200}$$

v šestdesetiško obliko in jih zapišimo z uporabo preglednice 1 v klinopisni obliki.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{60} \cdot \frac{180}{4} = \frac{1}{60} \cdot 45 = 00;45 = ; \text{𐎶𐎵}$$

$$\begin{aligned} \frac{127}{36} &= 3 + \frac{19}{36} = 3 + \frac{1}{60} \cdot \frac{95}{3} = \\ &= 3 + \frac{1}{60} \cdot \left(31 + \frac{2}{3}\right) = 3 + \frac{1}{60} \cdot \left(31 + \frac{1}{60} \cdot \frac{120}{3}\right) = 3 + \frac{1}{60} \cdot 31 + \frac{1}{60^2} \cdot 40 = \\ &= 03;31 \frac{40}{60} = \text{𐎶𐎵}; \text{𐎶𐎵} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{110041}{7200} &= 15 + \frac{2041}{7200} = 15 + \frac{1}{60} \cdot \frac{2041}{120} = 15 + \frac{1}{60} \cdot \left(17 + \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{2}\right) = \\ &= 15 + \frac{1}{60} \cdot \left(17 + \frac{1}{60} \cdot \frac{30}{60}\right) = 15 + \frac{1}{60} \cdot 17 + \frac{1}{60^3} \cdot 30 = \\ &= 15;17 \frac{00}{60} \frac{30}{60} = \text{𐎶𐎵}; \text{𐎶𐎵} \cup \text{𐎶𐎵} = \text{𐎶𐎵}; \text{𐎶𐎵} \text{ 𐎶𐎵} \end{aligned}$$

Pitagorejske trojice

Da bi lažje razumeli vsebino tablice Plimpton 322, na kratko ponovimo, kaj so pitagorejski trikotniki oziroma pitagorejske trojice.

Pitagorejski je tak pravokoten trikotnik, ki ima dolžine katet a , b in hipotenuze c izražene z naravnimi števili neke dolžinske enote. Pri tem seveda velja zveza $a^2 + b^2 = c^2$. Namesto o pitagorejskem trikotniku govorimo pogosto o pitagorejski trojici (a, b, c) . Pitagorejsko trojico (a, b, c) sestavljajo naravna števila a, b, c ($a < c$, $b < c$), za katere je $a^2 + b^2 = c^2$. Trikotnik, ki ima v takem primeru stranice v razmerju $a : b : c$, je po obratu Pitagorovega izreka pravokoten. Pitagorejska trojica (a, b, c) je primitivna, če naravna števila a, b, c nimajo skupnega delitelja razen 1. Primitivnih pitagorejskih trojic (a, b, c) je nešteto. Vse pitagorejske trojice (a, b, c) so zajete v obrazcih

$$a = k(p^2 - q^2), b = 2kpq, c = k(p^2 + q^2) \quad (2)$$

oziroma

$$a = 2kpq, b = k(p^2 - q^2), c = k(p^2 + q^2),$$

če izberemo tuji si števili p in q , pri čemer je $p > q$ in sta p, q različnih parnosti, torej eno liho, drugo sodo. Pri tem je k naravno število. Za $k = 1$ dobimo primitivne pitagorejske trojice.

Primer

Za $k = 1$, $p = 2$, $q = 1$ dobimo najenostavnejšo pitagorejsko trojico $(3, 4, 5)$, za $k = 1$, $p = 3$, $q = 2$ pa $(5, 12, 13)$.

V vsaki primitivni pitagorejski trojici je vsaj ena stranica deljiva s 3, 4 ali 5 (glej na primer [6]). Ta tri števila so si tuja in njihov najmanjši skupni večkratnik je 60, kar je osnova šestdesetiškega sistema.

Pitagora, grško Πυθαγόρας, po katerem se imenuje slaven izrek in omenjeni trikotniki ter trojice, je živel od leta 570 do leta 495 p. n. š. Vse kaže, da so relacijo $a^2 + b^2 = c^2$ v pravokotnem trikotniku poznali že veliko prej, kar nam izpričuje tudi glinasta tablica Plimpton 322.

Tablica Plimpton 322

Glinasta tablica Plimpton 322 izvira iz sumerskega mesta Lar-se v današnjem Iraku. V bližini sta bili še starodavni mesti Ur in Uruk, blizu Perzijskega zaliva (Slika 2). Tablica je bila izdelana okoli leta 1800 p. n. š, nekako v času vladarja Hamurabija, ki je znan po svojem zapisanem zakoniku. Ko so se v 19. in 20. stoletju tam začela arheološka izkopavanja, so lokalni prebivalci raznesli precej izkopanin in jih prodajali po svetu. Tako je tablica Plimpton 322 prek prekupčevalcev starin prišla okoli leta 1922 v roke ameriškem publicistu in filantropu Georgeu Arthurju Plimptonu (1855–1936), ki je Univerzi Columbia v New Yorku daroval mnogo starin, med drugim tudi obravnavano tablico. Takrat so menili, da je na njej nek nepomemben trgovski popis. Na univerzi je dobila kataložsko oznako Plimpton 322 in je pod tem imenom zabeležena v zgodovini matematike. Morda je bila tablica nekoč večja, obstoječa meri 127 mm × 88 mm, debela je okoli 20 mm. Prva sta jo opisala Otto Neugebauer (1899–1990) in Abraham Sachs (1914–1983) v odmevnem članku leta 1945. Kasneje je bilo o njej objavljenih še več drugih člankov.

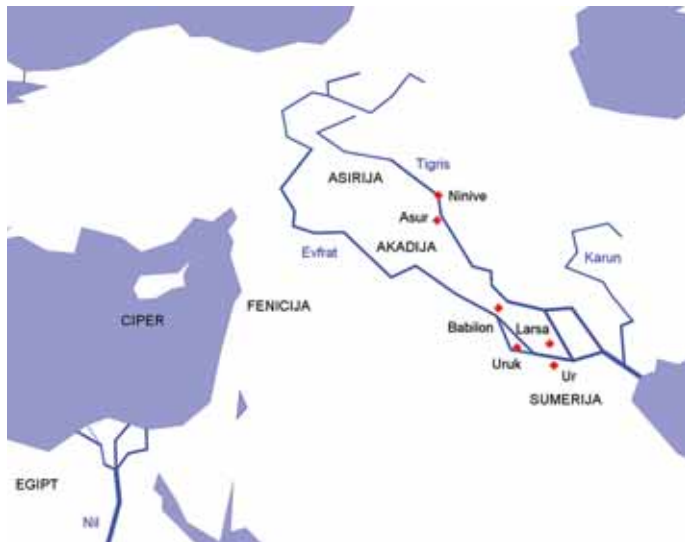


Slika 1: Tablica Plimpton 322.

Avtorji so obravnavali vsebino in namen tablice, prav tako napake in kako so Babilonci prišli do pitagorejskih trojic itd. Na tablici je sedem napak. Nekaj jih je naredil zapisovalec, nekaj računar. Vendar je toliko vrstic pravilnih, da se je dalo ugotoviti, za kaj sploh gre. Če upoštevamo popravke napak in dodamo števila, ki manjkajo na poškodovanih mestih, dobimo prenovljen Plimpton 322, ki ga bomo obravnavali v nadaljevanju. Doslej še nobena glinasta klinopisna tablica ni vzbudila toliko pozor-

nosti kot Plimpton 322, zato se spodobi, da jo predstavimo tudi našim bralcem. Morda gre to tudi na škodo drugih, prav tako zanimivih tablic. Babilonci so napisali na primer tudi tablice s poštevkami, obratnimi vrednostmi, kvadrati itd.

Za učence in dijake pa je tablica lahko vir številnih nalog, na primer pretvarjanje števil iz desetiškega sistema v šestdesetiškega in obratno, uporaba Pitagorovega izreka, merjenje kotov itd.



Slika 2: Lokacija najdbe.

Na tablici je 15 vrstic klinopisno zapisanih števil v šestdesetiškem številskem sistemu. V prvem stolpcu z desne so zaporedne številke vrstic. V drugem stolpcu je v vseh vrsticah klinopisno

zapisana beseda ki – 𒍪 , ki smo jo v prepisu izpustili. Pomenila naj bi v nekem starem orientalskem jeziku *njegov položaj*.

Ugotovili so, da so v tretjem stolpcu z desne dolžine hipotenuze c_n , v četrtem stolpcu z desne dolžine krajših katet, denimo a_n , v petem stolpcu pa količniki a_n^2/b_n^2 pitagorejske trojice (a_n, b_n, c_n) . Katet $b_n = \sqrt{c_n^2 - a_n^2}$ na tablici ni, pač pa so pravilno upoštevane v količnikih a_n^2/b_n^2 . Obstaja možnost, da je v petem stolpcu skrajno levo nekoč stal znak 𒌦 , to je število 1, a se je tablica na tistem mestu po vertikali odlomila. V tem primeru bi v tem stolpcu bili količniki za 1 večji, ker velja enakost $c_n^2/b_n^2 = (a_n^2 + b_n^2)/b_n^2 = 1 + a_n^2/b_n^2$.

V vseh primerih indeks n pomeni zaporedno številko vrstice. Zanimivo je tudi to, da so vse pitagorejske trojice, ki jih dobimo iz števil na tablici, primitivne, razen v 11. vrstici, ki ji ustreza pitagorejska trojica (45, 60, 75). Takoj opazimo, da je to 15-kratnik najmanjše pitagorejske trojice (3, 4, 5).

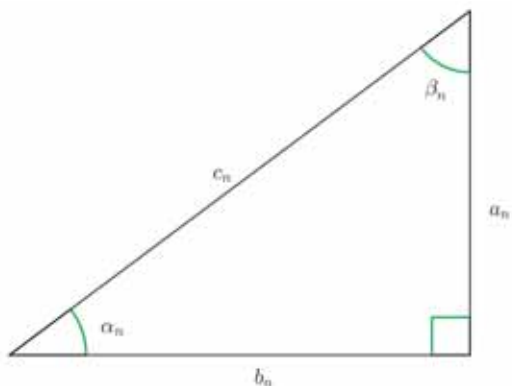
Egipčani in morda tudi Babilonci so jo v praksi uporabljali za konstrukcijo pravega kota. Med števili, ki sestavljajo tablico, je tudi precej praštevil.

V glavi tablice, nad prvo vrstico, seveda niso oznake n , a_n itd., ampak je v klinopisni pisavi v mešanici akadijskega in sumerskega jezika opisana vsebina ustreznih stolpcev.

Samo ugibamo lahko, kako so Babilonci našli vsa na tablici zapisana števila, zakaj niso izračunali kar količnike a_n/b_n , iz katerih lahko izračunamo ali izmerimo v trikotniku kot α_n (Slika 3), čemu je služila itd. Nekateri menijo, da gre samo za nekakšen šolski izdelek. Obstaja veliko razprav na to temo, na primer v [1,

Preglednica 2: Plimpton 322. Prepis s klinopisnimi simboli in odpravljenimi napakami. Podpičje pri a_n^2/b_n^2 ni zapisano.

a_n^2/b_n^2	a_n	c_n	n
𒍪	𒌦	𒌦	1
𒍪	𒌦	𒌦	2
𒍪	𒌦	𒌦	3
𒍪	𒌦	𒌦	4
𒍪	𒌦	𒌦	5
𒍪	𒌦	𒌦	6
𒍪	𒌦	𒌦	7
𒍪	𒌦	𒌦	8
𒍪	𒌦	𒌦	9
𒍪	𒌦	𒌦	10
𒍪	𒌦	𒌦	11
𒍪	𒌦	𒌦	12
𒍪	𒌦	𒌦	13
𒍪	𒌦	𒌦	14
𒍪	𒌦	𒌦	15



Slika 3: Pravokotni trikotnik.

2, 4, 5]. Presenetljivo pa je to, da koti α_n od zgoraj navzdol padajo približno po 1° . V tem nekateri vidijo zametke trigonometrije.

Vsi količniki so točno zapisani, ker so imenovalci regularna števila šestdesetiškega sistema. Preglednica 2 je prepis tablice Plimpton 322 z računalniškimi znaki. Odpravljene so vse napake, ki so na originalu. Dodali smo za 15. vrstico še eno. Na originalu je namreč v 15. vrstici »tiskarska« napaka. Tam namreč v tretjem stolpcu z desne preberemo 53, v četrtem pa 56, kar je sprto z vsebino v petem stolpcu in z dejstvom, da so po vrsticah v tretjem stolpcu povsod drugod večja števila kot v četrtem. Če pa 56 popravimo v 28 ali pa 53 v 106, se nam izračun lepo izide. Zadnje čase prevladuje mnenje, da je pravilnejša prva varianta, ker takrat dobimo tudi primitivno pitagorejsko trojico.

Kako do pitagorejskih trojic v Plimptonu 322?

O tem, kako so Babilonci prišli do števil a_n za krajše katete in c_n za hipotenuze pravokotnega trikotnika na tablici Plimpton 322, si raziskovalci niso povsem enotni. Morda so poznali obrazec (2), morda so si pomagali s tablicami obratnih vrednosti, za kar se ogreva precej razlagalcev. Če namreč v (2) postavimo zahtevo $a < b < c$, potem mora za $p > q$ veljati zveza

$p^2 - q^2 < 2pq$. Iz te dobimo $2p^2 = p^2 + p^2 < p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$, torej $p\sqrt{2} < p + q$. Iz tega sledi:

$$q < p < q(1 + \sqrt{2}).$$

Če pa vse tri stranice v (2) delimo z $b = 2kpq$, dobimo

$$r = \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right), \quad s = \frac{b}{b} = 1, \quad t = \frac{c}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \quad (3)$$

Pri tem velja $r < 1$, $t > 1$ in $r^2 + 1 = t^2$. To pomeni, da sta r in $s = 1$ kateti, t pa hipotenuza pravokotnega trikotnika, ki ima zato racionalne stranice. V obrazcih (3) opazimo par obratnih si vrednosti p/q in q/p . Glede na to, da izbiramo tuji si števili p in q različnih parnosti, sta to okrajšana ulomka.

Babilonci so poznali posebno pravilo za množenje števil, in sicer z uporabo enakosti:

$$x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 - \left(\frac{x-y}{2} \right)^2 \quad (4)$$

Če vanjo vstavimo $x = p/q$ in $y = q/p$, dobimo z oznakami iz (3) enakost $1 = t^2 - r^2$ oziroma $r^2 + 1 = t^2$, to pa je ravno tisto, kar smo ugotovili v prejšnjem odstavku, to je Pitagorov izrek za pravokotni trikotnik s stranicami r , 1 in t . Če racionalno trojico $(r, 1, t)$ pomnožimo s primernim številom, da odpravimo ulomka, dobimo primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c) . Zato je možno, da so Babilonci s preglednicami kvadratov in obratnih vrednosti računali pitagorejske trojice.

Primer

Denimo, da je babilonski matematik prepisal s tablice par recipročnih si števil

$$\overline{11} ; \overline{47} \text{ in } \overline{47} ; \overline{11}.$$

Prvo pomeni $x = 2 + 15/60 = 9/4$, drugo pa $y = 26/60 + 40/60^2 = 4/9$.

Ker je $x \cdot y = 1$, sta si števili res recipročni: $y = 1/x$.

Nato je števili seštel in odštel, da je dobil

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= 2 + \frac{41}{60} + \frac{40}{60^2}, \quad x - \frac{1}{x} = 1 + \frac{74}{60} + \frac{60}{60^2} - \frac{26}{60} - \frac{40}{60^2} = \\ &= 1 + \frac{48}{60} + \frac{20}{60^2}. \end{aligned}$$

Nato je oba rezultata delil z 2 in dobil

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{20}{60} + \frac{50}{60^2} = \overline{01} ; \overline{20} \overline{50}, \\ r &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) = \frac{54}{60} + \frac{10}{60^2} = \overline{00} ; \overline{54} \overline{10}. \end{aligned}$$

Seveda velja relacija $r^2 + s^2 = t^2$. Pri tem je $s = 1$. Opazil je, da bi oba rezultata lahko delil s 50, če bi zapisal

$$t = \frac{50}{60} + \frac{50 + 30 \cdot 60}{60^2}, \quad r = \frac{50}{60} + \frac{4 \cdot 60 + 10}{60^2}.$$

Prav tako $s = 3600/60^2 = (50 \cdot 60 + 12 \cdot 50)/60^2$. Račun se lepo izide za

$$t' = t/50, \quad r' = r/50, \quad s' = s/50 = 1/50:$$

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{60} + \frac{37}{60^2} = \overline{00} ; \overline{01} \overline{37}, \quad r' = \frac{1}{60} + \frac{5}{60^2} = \overline{00} ; \overline{01} \overline{05}, \quad s' = \\ &= \frac{1}{60} + \frac{12}{60^2} = \overline{00} ; \overline{01} \overline{12}. \end{aligned}$$

Za dobljeni števili velja relacija $r'^2 + s'^2 = t'^2$. Števila r' , s' , t' pomnožimo s $60^2 = 3600$. To pomeni, podobno kot pomik decimalne vejice v desno za dve mesti pri množenju z $10^2 = 100$ v desetiškem sistemu, pomik seksagezimalnega podpičja za dve mesti v desno. Iz trojice (r', s', t') dobimo trojico

$$\begin{aligned} (a, b, c) &= (\overline{01} \overline{05}, \overline{01} \overline{12}, \overline{01} \overline{37}) = \\ &= \left(\overline{1} \overline{7}, \overline{1} \overline{47}, \overline{1} \overline{47} \overline{11} \right), \end{aligned}$$

ki je celo primitivna pitagorejska in zanjo seveda velja $a^2 + b^2 = c^2$. V desetiškem sistemu je to trojica $(a, b, c) = (65, 72, 97)$.

Babilonec je izračunal še $a^2/b^2 = (r'^2/s'^2) = r^2/s^2 = r^2 = ((x - 1/x)/2)^2$.

Morda je pogledal na tablico kvadratov, morda je izračunal in našel:

$$\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)^2 = \frac{48}{60} + \frac{54}{60^2} + \frac{1}{60^3} + \frac{40}{60^4} = 00; 48 \ 54 \ 01 \ 40.$$

S tem je pravzaprav izračunal 5. vrstico na tablici Plimpton 322:

$$a_5^2/b_5^2 = 00; 48 \ 54 \ 01 \ 40, \quad a_5 = 01 \ 05, \quad c_5 = 01 \ 37.$$

V klinopisni pisavi je to

;     ,   ,  .

Verjetno so Babilonci podobno izračunali tudi preostale vrstice na tablici.

Zaključek

Predstavili smo zelo star dokument, samo enega od mnogih, ki je nastal pred več kot 3800 leti v Mezopotamiji. Čeprav kljub obsežnim raziskavam ne vemo točno, kako in čemu je nastal, pa se iz njega lahko veliko naučimo. Vse kaže, da so Babilonci več kot 1000 let pred Pitagoro poznali znamenito povezavo med stranicami pravokotnega trikotnika. To pomeni, da so v različnih krajih ljudje prišli do enakih matematičnih ugotovitev, čeprav morda v drugačnih oblikah.

Tablica Plimpton 322 je lahko bogat izvor raznih šolskih aktivnosti. V prilogi dodajmo nekaj nalog primernih za šolske aktivnosti, za preiskovanje. Ker je preračunavanje precej obsežno, bi bilo najbolje, da ga opravite v skupinah z dvema ali tremi učenci. V osnovni šoli lahko učenci sami izdelajo preglednico 1. Prvo in drugo aktivnost naj morda izvedejo kar brez računanja količnikov v prvem stolpcu z leve. Kot primer medpredmetnega povezovanja lahko učenci pri likovnem pouku izdelajo iz gline svojo tablico pitagorejskih trojic v klinopisni pisavi.

Viri in literatura

- A. A. Abdulaziz, The Plimpton 322 tablet and the Babylonian method of generating Pythagorean triples, arXiv: 1004.0025v1 [math.HO] 31 Mar 2010, spletni vir, dosegljiv 21. aprila 2021.
- D. F. Mansfield, N. J. Wildberger, Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry, *Historia Mathematica* 44 (2017), str. 395–419.
- U. C. Merzbach, C. B. Boyer. (2011). *A history of mathematics*. New Jersey: John Wiley & Sons, Hoboken.
- E. Robson, Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322, *Historia Mathematica* 28 (2001), str. 167–206.
- E. Robson, Words and pictures: new light on Plimpton 322, *American Mathematical Monthly* 109 (2002), str. 105–120.
- W. Sierpiński. (2003). *Pythagorean triangles*. New York: Dover Publications, Mineola.

**1. aktivnost**

Zapišite preglednico 2 s pomočjo preglednice 1 z običajnimi arabskimi števki. To pomeni, da nadaljujete preglednico:

a_n^2 / b_n^2	a_n	c_n	n
00; 59 00 15	01 59	02 49	1

2. aktivnost

Zapišite preglednico 2 s pomočjo preglednice 1 z običajnimi arabskimi števki in jo razširite z drugo kateto. To se pravi, da nadaljujete preglednico:

a_n^2 / b_n^2	a_n	b_n	c_n	n
00; 59 00 15	01 59	02 00	02 49	1

3. aktivnost

Zapišite preglednico 2 v desetiškem sistemu s pomočjo preglednice 1 z običajnimi arabskimi števki in jo razširite z drugo kateto. Ali se katete izražajo z regularnimi števili? Dobljena števila razstavite na prafaktorje. Z risanjem ustreznih pravokotnih trikotnikov in kotomerom določite kote α_n . Dijaki, ki poznajo trigonometrične funkcije, naj te kote izračunajo. To se pravi, da nadaljujete preglednico:

$\alpha_n(^{\circ})$	a_n^2 / b_n^2	a_n	b_n	c_n	n
44,76	0,9834027777...	$119 = 7 \cdot 17$	$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$169 = 13^2$	1

4. aktivnost

Po vzoru tablice Plimpton 322 pripravite številske podatke za svojo tablico, drugačne kot so na tablici Plimpton 322. Najbolj goreči jo lahko izdelate iz gline.

5. aktivnost

Pretvorite Al Kašijev približek (1) števila 2π v decimalno obliko. Koliko točnih decimal dobite?