Naslov članka/Article: **PLOŠČINSKO ENAKA KOLOBARJA IN ŠE KAJ**

Avtor/Author: **dr. Marko Razpet**

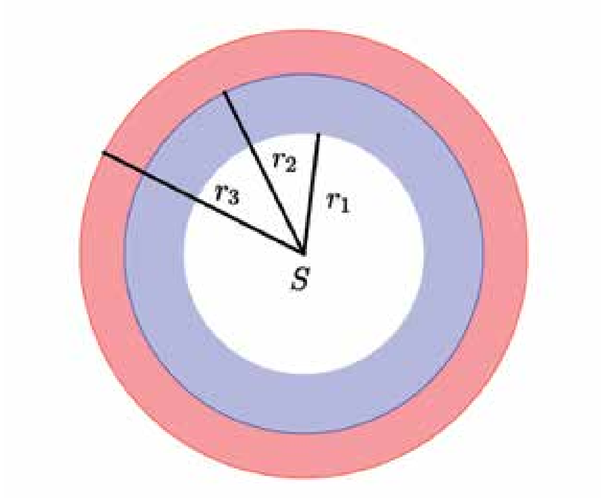
Matematika v šoli št. 1/2019, letnik 25
ISSN 1318-010X
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2019

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Ploščinsko enaka kolobarja in še kaj

dr. Marko Razpet

Del ravnine med dvema krožnicama, od katerih je manjša v celoti v večji, je *krožni kolobar*, v nadaljevanju kar *kolobar*. Če imata obe krožnici isto središče, govorimo o *koncentričnem kolobarju*, sicer pa o *ekscentričnem kolobarju*. Če je polmer manjše krožnice r_1, večje pa r_2, je ploščina kolobarja v obeh primerih enaka $p = \pi r_2^2 - \pi r_2^2 = \pi(r_2^2 - r_2^2)$.



Slika 1: Stikajoča se koncentrična kolobarja.

Denimo, da krožnicama s polmeroma r_1 in r_2 s središčem v točki S pridružimo še krožnico s polmerom r_3, prav tako s središčem v S (Slika 1). Pri tem velja relacija $r_1 < r_2 < r_3$. Zanima nas, kdaj je ploščina kolobarja med prvima dvema krožnicama enaka ploščini kolobarja med zadnjima dvema. To se pravi, da nas zanima, kdaj je $\pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi(r_3^2 - r_2^2)$ oziroma po krajšanju s π, kdaj je $r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2$. Zadnji razliki označimo z d, kar pomeni, da sta tedaj ploščini kolobarjev enaki πd. Kvadrati vseh treh polmerov morajo zato sestavljati aritmetično zaporedje r_1^2, r_2^2, r_3^2 z razliko d. To zaporedje lahko zapišemo tudi v obliki $r_2^2 - d, r_2^2, r_2^2 + d$. Polmeri krožnic pri izbranem r_2 in d so potemtakem $r_1 = \sqrt{r_2^2 - d}, r_2, r_3 = \sqrt{r_2^2 + d}$.

Naloga bi bila lahko s tem končana, če nas ne bi zanimalo, ali se nemara ne da poiskati takih pozitivnih *racionalnih števil* r_1, r_2, r_3 in takega *naravnega števila* d, da bo vsak od obeh kolobarjev imel ploščino πd. To pomeni, da moramo poiskati pozitivna racionalna števila r_1, r_2, r_3 in naravno število d, za katera veljata enačbi

$$r_2^2 - d = r_1^2,\ r_2^2 + d = r_3^2. \qquad (1)$$

Po navadi d kar izberemo in iščemo r_1, r_2, r_3. Naloga, rešiti sistem (1), je stara že okoli 1000 let. Z njim so se ukvarjali arabski matematiki in Leonardo iz Pise (1170–1250), bolj znan kot Fibonacci. Leonardo je nalogo rešil za $d = 5$: $r_1 = 31/12$, $r_2 = 41/12$, $r_3 = 49/12$. V resnici je rešitev nešteto. Nalogo rešijo na primer tudi

$$r_1 = \frac{249563579992463717493803519}{535422986282160209229124 8},$$

$$r_2 = \frac{249850594047271558364480641}{5354229862821602092291248},$$

$$r_3 = \frac{250137278774864229623059201}{5354229862821602092291248},$$

kar dobimo s teorijo eliptičnih krivulj, s katerimi so povezani problemi kongruentnih števil.

Naravno število d, za katero obstajajo pozitivna racionalna števila r_1, r_2, r_3, ki rešijo sistem (1), imenujemo *kongruentno število*. Število 5 je kongruentno. Pierre de Fermat (1601–1665) je dokazal, da število 1 ni kongruentno. Posledično niso kongruentni kvadrati naravnih števil. Če bi namreč $d = n^2$ bilo kongruentno število za naravno število $n > 1$, bi sistem $r_2^2 - n^2 = r_1^2,\ r_2^2 + n^2 = r_3^2$ imel rešitev v pozitivnih racionalnih številih r_1, r_2, r_3. Potem bi lahko zapisali $(r_2/n)^2 - 1 = (r_1/n)^2$, $(r_2/n)^2 + 1 = (r_3/n)^2$, kar bi pomenilo, da za pozitivna racionalna števila $r_1' = r_1/n, r_2' = r_2/n, r_3' = r_3/n$ veljata zvezi $r_2'^2 - 1 = r_1'^2,\ r_2'^2 + 1 = r_3'^2$. To pa pomeni, da je 1 kongruentno število, kar je protislovno z omenjeno Fermatovo ugotovitvijo. Kvadrati naravnih števil torej niso kongruentna števila.

Število 4 ni kongruentno, prav tako ne 2 in 3. Število 5 je najmanjše kongruentno število. Med 1 in 35 so naslednja kongruentna števila: 5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 34.

Podobno tudi dokažemo, da je število $d = k^2 d_1$, kjer je $k > 1$ naravno število, d_1 pa naravno število brez kvadratnega faktorja, kongruentno, kakor hitro je d_1 kongruentno. Kongruentno število brez kvadratnega faktorja imenujemo *primitivno kongruentno število*. Število 5 je primitivno kongruentno število, število $20 = 4 \cdot 5$ je kongruentno, toda ne primitivno kongruentno.

Ugotavljanje, ali je dano število d brez kvadratnega faktorja kongruentno, je trd oreh tudi za največje matematike. Znani kriteriji kongruentnosti so prezapleteni, da bi jih tukaj sploh omenjali. Razumljiva pot do kongruentnih števil vodi prek pitagorejskih trikotnikov. To so pravokotni trikotniki s celoštevilskimi stranicami a, b, c. Pri tem sta a, b kateti, c pa hipotenuza, tako da velja $a^2 + b^2 = c^2$. Dovolj se je omejiti na *primitivne* pitagorejske trikotnike, pri katerih a, b, c nimajo skupnih faktorjev. Vedno lahko predpostavimo, da je $a < b < c$. Seveda velja še relacija $b - a < c < a + b$. Z lahkoto preverimo enakosti

$$c^2 - 2ab = (b - a)^2, c^2 + 2ab = (a + b)^2. \qquad (2)$$

Sistem (2) primerjamo s sistemom (1) in takoj ugotovimo, da je $d = 2ab$ kongruentno število, če vzamemo $r_1 = b - a$, $r_2 = c$, $r_3 = a + b$.

Za najenostavnejši pitagorejski trikotnik s stranicami $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ je $r_1 = 1$, $r_2 = 5$, $r_3 = 7$, $d = 24$. Ker je $d = 24 = 4 \cdot 6$, iz
$5^2 - 24 = 1^2$, $5^2 + 24 = 7^2$
po deljenju s $4 = 2^2$ dobimo
$(5/2)^2 - 6 = (1/2)^2$, $(5/2)^2 + 6 = (7/2)^2$.

Število 6 je zato primitivno kongruentno.

Za pitagorejski trikotnik s stranicami $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ dobimo $r_1 = 7$, $r_2 = 13$, $r_3 = 17$, $d = 120$. Ker je $d = 120 = 4 \cdot 30$, je 30 primitivno kongruentno število in velja:
$(13/2)^2 - 30 = (7/2)^2$, $(13/2)^2 + 30 = (17/2)^2$.

Tako bi lahko nadaljevali s pitagorejskimi trikotniki in našli nova kongruentna števila. Ta pot je sicer preprosta, toda neučinkovita in zamudna. Traja lahko dolgo časa, preden ugotovimo, če imamo srečo, ali je število d kongruentno ali ne. Zato matematiki na vse kriplje iščejo metode, ki bi odgovorile na to vprašanje in nam obenem dale racionalna števila r_1, r_2, r_3.

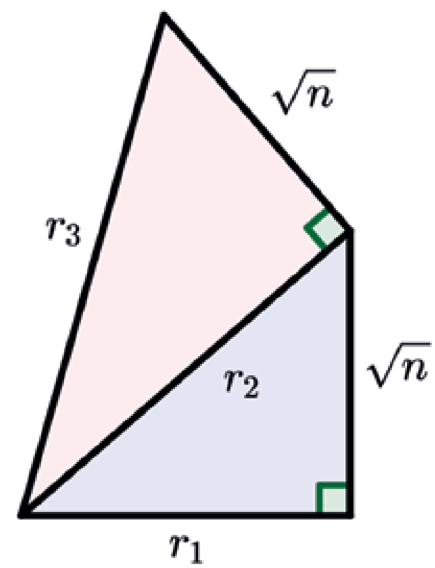
Če enačbi v (2) delimo s 4, dobimo:
$(c/2)^2 - ab/2 = (b/2 - a/2)^2$, $(c/2)^2 + ab/2 = (a/2 + b/2)^2$. (3)

Enačbi veljata za vsak pravokoten trikotnik. Izraz $ab/2$ je ploščina pravokotnega trikotnika s stranicami a, b, c. Zato se je smiselno vprašati po pravokotnem trikotniku z racionalnimi stranicami a, b, c ($a < b < c$), katerega ploščina $ab/2$ je naravno število n.

Če vpeljemo
$r_1 = b/2 - a/2$, $r_2 = c/2$, $r_3 = a/2 + b/2$, $d = n$
v (3), dobimo
$r_2^2 - n = r_1^2,\ r_2^2 + n = r_3^2,$

kar pa je ravno sistem enačb (1). To pa pomeni, da obstaja pravokoten trikotnik z racionalnimi stranicami in ploščino n takrat in samo takrat, ko je n kongruentno število. Iz znanih r_1, r_2, r_3 takoj izračunamo stranice: $a = r_3 - r_1$, $b = r_1 + r_3$, $c = 2r_2$.

Za $n = 5$ dobimo na primer iz $r_1 = 31/12$, $r_2 = 41/12$, $r_3 = 49/12$ stranice $a = 3/2$, $b = 20/3$, $c = 41/6$. Seveda pa to ni edina rešitev.



Slika 2: Geometrijska predstavitev.

Povezavo med r_1, r_2, r_3 in n lahko predstavimo tudi geometrijsko (slika 2).

Viri

[1] J. H. Coates. (2005). Congruent Number Problem, *Pure and Applied Mathematics Quarterly, 1*, št. 1, str. 14–27.

[2] G. Kramarz. (1986). All Congruent Numbers Less than 2000, *Mathematische Annalen, 273*, str. 337–340.

[3] I. Vidav. (1986). O kongruentnih številih, *Obzornik za matematiko in fiziko*, *33*, št. 1, str. 1–8.