Naslov članka/Article:

NIKOMAHOV IZREK

Nicomachus's Theorem

Avtor/Author:

dr. Marko Razpet

Matematika v šoli št. 1/2020, letnik 26
ISSN 1318-010X
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2020

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Matematika v šoli, št. 1., letnik 26, 2020

Nikomahov izrek

dr. Marko Razpet
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Izvleček

V članku na preprost način dokažemo *Nikomahov izrek*. Osnovna ideja dokaza izvira iz Nikomahovega dela *Uvod v aritmetiko.*

Ključne besede: sodo število, liho število, trikotniško število, kvadrat, kub, vsota, ploščina, prostornina

Nicomachus's Theorem

Abstract

In the article, we prove Nicomachus's Theorem in a simple way. The basic idea of the proof originates from Nicomachus's work Introduction to Arithmetic.

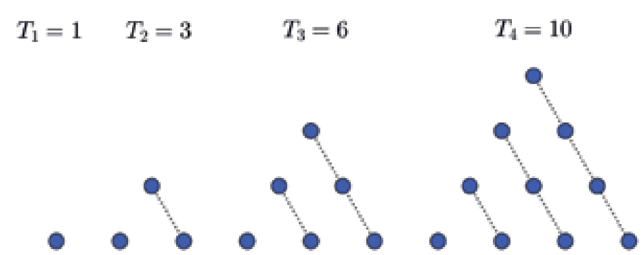
Keywords: even number, odd number, triangular number, square, cube, sum, area, volume

Uvod

Dokazali bomo Nikomahov izrek, ki trdi, da je vsota kubov prvih n zaporednih naravnih števil enaka kvadratu n-tega trikotniškega števila. Izrek se imenuje po antičnem matematiku, filozofu in glasbenem teoretiku Nikomahu iz Gerase. O njem vemo zelo malo. Rodil se je okoli leta 60 našega štetja v Gerasi, kjer je sedaj jordansko mesto Džeraš, umrl pa okoli leta 120. Ne vemo niti, kje je deloval. Morda v Aleksandriji. Matematikom je najbolj znan po delu *Uvod v aritmetiko*, kjer je Nikomahov izrek tudi dokazan. Znani sta še njegovi deli *Priročnik o harmoniji* in *Teologija aritmetike*. Veliko zaslug, da se je Nikomahovo znanje preneslo v Evropo, ima poznoantični učenjak Boetij, ki je živel na koncu 5. in v začetku 6. stoletja.

Nikomahova aritmetika je za današnje pojme teorija števil. Nikomah je bil med prvimi, ki so števila obravnavali neodvisno od geometrije. Zelo rad se je ukvarjal s števili, podobno kot nekaj stoletij pred njim pitagorejci. V *Uvodu v aritmetiko* zasledimo med drugim tudi trikotniška, kvadratna, kubična in druga figurativna števila. Pri nastanku pričujočega prispevka so izdatno pomagali viri [1, 2, 3].

Pitagorejci so že poznali *trikotniška števila*. To so naravna števila, ki povedo, koliko točk v ravnini je razporejenih v natančno določen trikoten vzorec. Začnemo z eno točko. Prvo trikotniško število je $T_1 = 1$. Točki dodamo dve točki. Drugo trikotniško število je $T_2 = 3$. Trem točkam dodamo še tri. Tretje trikotniško število je $T_3 = 6$ (slika 1). Tako lahko nadaljujemo v nedogled. V splošnem T_n točkam dodamo $n + 1$ novih, da dobimo T_{n+1} točk.



Slika 1: Prva trikotniška števila.

Trikotniška števila lahko izračunamo rekurzivno po formuli

$$T_{n+1} = T_n + n + 1,$$

pri čemer je $n \geq 1$ in $T_1 = 1$. Rekurzivno računanje pa je zamudno, a na srečo obstaja preprosta formula za n-to trikotniško število. Takoj spoznamo, da je n-to trikotniško število enako vsoti prvih n naravnih števil, tako da veljata enakosti

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n$$

in

$$T_n = n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1.$$

Če obe seštejemo in združimo istoležne člene, dobimo

$$2T_n = (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1) + (n + 1) = n(n + 1)$$

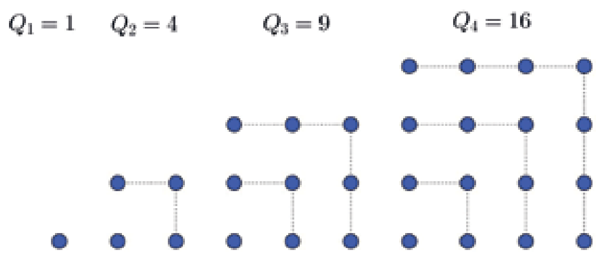
in nazadnje

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Veljavnost dobljene trditve lahko preverimo še z metodo matematične indukcije. Deljenje na desni strani v (1) se izide, ker je vedno eno od zaporednih števil n in $n + 1$ sodo. Število

$$R_n = n(n+1) = 2T_n \tag{2}$$

so starogrški matematiki imenovali *podolžno število*, ker R_n točk lahko razporedimo v podolžen, pravokoten vzorec.



Slika 2: Prva kvadratna števila.

S kvadratnimi vzorci vpeljemo *kvadratna števila* Q_n. Spet začnemo z eno točko. Prvo kvadratno število je $Q_1 = 1$. Točki dodamo tri točke. Drugo kvadratno število je $Q_2 = 4$. Štirim točkam dodamo novih pet. Tretje kvadratno število je $Q_3 = 9$ (slika 2). Tako lahko nadaljujemo v nedogled. V splošnem Q_n točkam dodamo $2n + 1$ novih, da dobimo Q_{n+1} točk.

Tudi kvadratna števila lahko računamo rekurzivno, in sicer po formuli

$$Q_{n+1} = Q_n + 2n + 1,$$

pri čemer je $n \geq 1$ in $Q_1 = 1$.

Očitno velja enakost

$$Q_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2, \tag{3}$$

ki pove, da je vsota prvih n lihih števil enaka n-temu kvadratnemu številu.

Lahko pa (3) izpeljemo popolnoma formalno:

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + \ldots + (2 \cdot n - 1) =$$
$$= 2(1 + 2 + \ldots + n) - n = 2T_n - n = R_n - n = n(n+1) - n = n^2.$$

Veljavnost dobljenega rezultata spet lahko preverimo z metodo matematične indukcije.

Glavni rezultat

Sedaj smo pripravljeni, da dokažemo Nikomahov izrek, ki pravi:

Vsota kubov prvih n naravnih števil je enaka kvadratu n-tega trikotniškega števila:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = T_n^{\,2}. \tag{4}$$

Dokaz bomo naredili tako kot Nikomah, le s sodobnimi oznakami in enakostmi, ki smo jih utemeljili v Uvodu.

Razporedimo naravna števila v trikotno razpredelnico (5).

$$\begin{array}{llll}
1 = T_1 & & & \\
2 & 3 = T_2 & & \\
4 & 5 & 6 = T_3 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Takoj opazimo, da so na hipotenuzi tega trikotnika sama trikotniška števila $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ Za $n > 1$ je zadnji element v $(n-1)$-ti vrstici T_{n-1}, zadnji v n vrstici pa T_n. Števil v n-ti vrstici je n, in sicer so to

$$T_{n-1} + 1,\ T_{n-1} + 2,\ \ldots,\ T_{n-1} + n = T_n. \tag{6}$$

Sedaj pa števila v razpredelnici (5) preslikajmo s funkcijo $F : k \rightarrow 2k - 1$ v liha števila, ki jih razporedimo v novo trikotno razpredelnico v istem vrstnem redu:

$$\begin{array}{llll}
1 = 2T_1 - 1 & & & \\
3 & 5 = 2T_2 - 1 & & \\
7 & 9 & 11 = 2T_3 - 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array} \tag{7}$$

Funkcija F povratno enolično vsakemu naravnemu številu k priredi k-to liho število, to je $2k - 1$. Pri tem funkcija F preslika n-to vrstico razpredelnice (5), to je vrstico (6), v n-to vrstico razpredelnice (7), to se pravi v

$$2T_{n-1} + 1,\ 2T_{n-1} + 3,\ \ldots,\ 2T_{n-1} + (2n-1). \tag{8}$$

Upoštevajmo enakosti (3) in (2) v obliki $2T_{n-1} = R_{n-1} = n(n-1)$, pa dobimo vsoto števil v (8)

$$s_n = 2nT_{n-1} + (1 + 3 + \ldots + (2n-1)) = n^2(n-1) + n^2 = n^3.$$

V razpredelnici (7) je vsota števil v prvi vrstici enaka $s_1 = 1^3$, v drugi $s_2 = 2^3$, v tretji $s_3 = 3^3$, … v n-ti pa $s_n = n^3$. Vsota števil v prvih n vrsticah razpredelnice (7) je potemtakem enaka

$$S_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

Po drugi strani pa dobimo enak rezultat, če seštejemo vsa števila v razpredelnici (7) do vključno n-te vrstice z uporabo enakosti (3), v kateri namesto n vzamemo T_n:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2T_n - 1) = T_n^{\,2}.$$

Torej velja

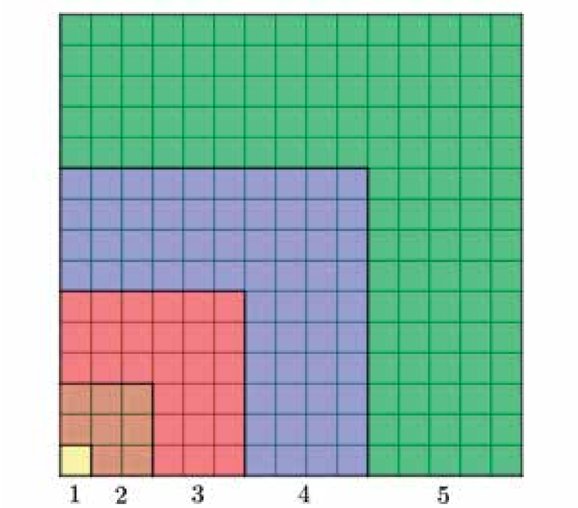
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = T_n^{\,2} = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

kar je bilo treba dokazati.

Enakost (4) ima tudi svojo geometrijsko ponazoritev. Na ravnino položimo $T_n^{\,2}$ enotskih kvadratov (kvadratov s stranico 1) in z njimi oblikujmo kvadrat s stranico T_n. Na sliki (3) vidimo te kvadrate za primer $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Enotski kvadrat levo spodaj posebej označimo, preostali del velikega kvadrata pa razdelimo na kotnike širin 2, 3, 4 in 5 ter jih različno obarvamo.

Kotnik širine 2 ima ploščino $T_2^{\,2} - T_1^{\,2} = 9 - 1 = 8 = 2^3$,
kotnik širine 3 ima ploščino $T_3^{\,2} - T_2^{\,2} = 36 - 9 = 27 = 3^3$,
kotnik širine 4 ima ploščino $T_4^{\,2} - T_3^{\,2} = 100 - 36 = 64 = 4^3$,
kotnik širine 5 ima ploščino $T_5^{\,2} - T_4^{\,2} = 225 - 100 = 125 = 5^3$,
v splošnem ima kotnik širine n ploščino

$$T_n^2 - T_{n-1}^2 = \frac{1}{4}(n^2(n+1)^2 - n^2(n-1)^2) = n^3. \tag{9}$$



Slika 3: Razdelitev kvadrata na enotski kvadrat in kotnike.

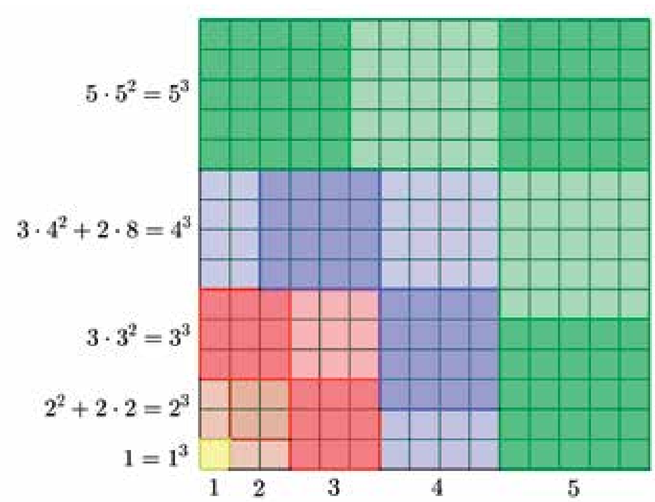
Nato izračunamo ploščino velikega kvadrata na dva načina: kot kvadrat njegove stranice in kot vsoto ploščin enotskega kvadrata levo spodaj in vseh kotnikov. Dobimo

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225,$$

v splošnem pa seveda

$$(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3,$$

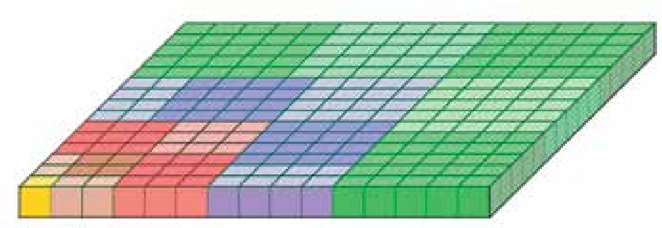
kar je samo drug zapis za (4).



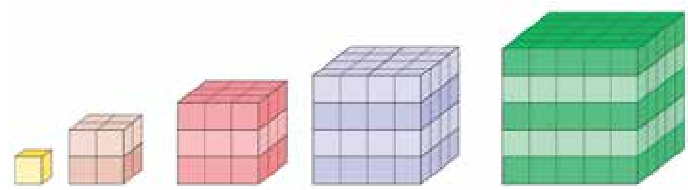
Slika 4: Ponazoritev Nikomahovega izreka.

Kotnike širine n (slika 4) s ploščino n^3 lahko za lihe n razdelimo na n kvadratov s stranico n, za sode n pa na $n - 1$ kvadratov s stranico n in dva pravokotnika s stranicama n in $n/2$. Na sliki so ločeni z dvema niansama ustrezne barve. V prvem primeru je skupna ploščina kvadratov v kotniku enaka $n \cdot n^2 = n^3$, v drugem primeru pa je skupna ploščina kvadratov in pravokotnikov v kotniku enaka $(n - 1)n^2 + 2 \cdot n \cdot n/2 = n^3$, kar je obakrat pravilno.

Če na kvadrate postavimo enotske kocke (kocke z robom 1), dobimo plast kock, ploščat kvader, ki ima za osnovno ploskev kvadrat s stranico 15 (v splošnem pa T_n) in višino 1 (slika 5). Očitno lahko potem iz kock na posameznih kotnikih sestavimo kocke z robovi 2, 3, 4 in 5. Ostane še enotska kocka (slika 6). V splošnem dobimo n kock z robovi 1, 2, …, n in skupno prostornino $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = T_n^2$.



Slika 5: Plast kock.

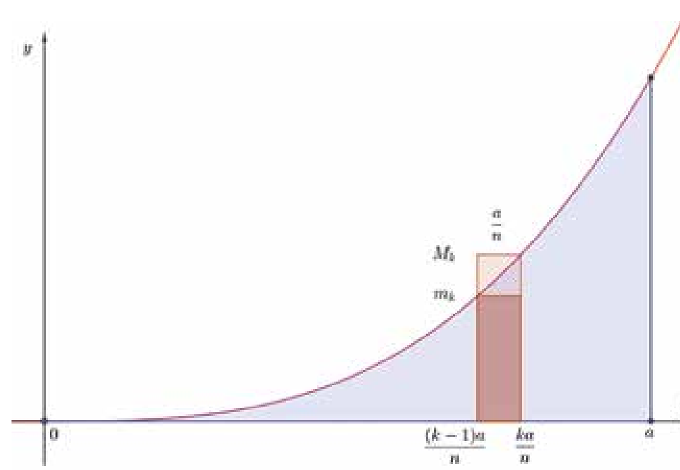


Slika 6: Kocke z robovi 1, 2, 3, 4 in 5, dobljene iz plasti.

Primer uporabe

Pred odkritjem integrala so matematiki računali ploščine likov, ki niso omejeni z daljicami in krožnimi loki, s tako imenovano *metodo izčrpavanja*. To metodo so uporabljali praktično za vsak tak lik posebej. Podobno je delal že Arhimed v 3. stoletju pred našim štetjem.

1. Oglejmo si metodo izčrpavanja na primeru izračuna ploščine lika, ki je v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu O_{xy} omejen s kubično parabolo $p^2y = x^3$, abscisno osjo in premico $x = a$, kjer sta p in a pozitivni števili. Interval $[0, a]$ s krajiščema 0 in a na abscisni osi razdelimo na n enakih delov.



Slika 7: Ploščina lika pod kubično parabolo.

Delitvene točke s krajiščema vred so:

$$0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n}, \frac{na}{n} = a.$$

Delitvene točke razdelijo interval na podintervale

$$I_k = \left[\frac{(k-1)a}{n}, \frac{ka}{n}\right],$$

kjer je $k = 1, 2, \ldots, n$. Vsak podinterval ima dolžino a/n. Najmanjša vrednost ordinate na krivulji $p^2y = x^3$ nad I_k je $m_k = (k-1)^3a^3/(p^2n^3)$, največja pa $M_k = k^3a^3/(p^2n^3)$. Največja ploščina pravokotnika nad I_k, ki ne štrli čez krivuljo $p^2y = x^3$, je

$$p_k = m_k \cdot \frac{a}{n} = \frac{(k-1)^3a^4}{p^2n^4},$$

najmanjša ploščina pravokotnika nad I_k, ki ravno še štrli čez krivuljo, pa je

$$P_k = M_k \cdot \frac{a}{n} = \frac{k^3a^4}{p^2n^4}.$$

Na sliki 7 je narisan samo en tak pravokotnik.

Vsoti

$$\underline{\sigma}_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n \quad \text{in} \quad \overline{\sigma}_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n,$$

sta spodnji oziroma zgornji približek ploščine $S(a)$ lika pod krivuljo. Pri tem za vsako naravno število n velja relacija $\underline{\sigma}_n < S(a) < \overline{\sigma}_n$. Z uporabo enakosti (4) dobimo:

$$\underline{\sigma}_n = \frac{a^4}{p^2n^4}(1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3) = \frac{a^4}{p^2n^4}T_{n-1}^2 = \frac{a^4(n-1)^2}{4p^2n^2} =$$
$$= \frac{a^4}{4p^2}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{a^4}{4p^2} - \frac{a^4}{4p^2}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

in

$$\overline{\sigma}_n = \frac{a^4}{p^2n^4}(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = \frac{a^4}{p^2n^4}T_n^2 = \frac{a^4(n+1)^2}{4p^2n^2} =$$
$$= \frac{a^4}{4p^2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{a^4}{4p^2} + \frac{a^4}{4p^2}\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Za razliko obeh približkov dobimo

$$\overline{\sigma}_n - \underline{\sigma}_n = \frac{a^4}{4p^2n^2}((n+1)^2 - (n-1)^2) = \frac{a^4}{p^2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ko število n narašča prek vseh meja in s tem tudi število delitvenih točk intervala $[0, a]$, postaneta ulomka $1/n$ in $1/n^2$ poljubno majhna. To pomeni, da se $\underline{\sigma}_n$ in $\overline{\sigma}_n$ od števila $S(a) = a^4/(4p^2)$ razlikujeta tako malo, kot želimo, če je le n dovolj velik. Prav tako postane razlika $\overline{\sigma}_n - \underline{\sigma}_n$ poljubno majhna. S sistemom pravokotnikov nad intervali I_k tako izčrpujemo lik pod krivuljo, ko n raste prek vseh meja. Potemtakem je ploščina $S(a)$ lika pod krivuljo $p^2y = x^3$ nad intervalom $[0, a]$ enaka

$$S(a) = \frac{a^4}{4p^2}.$$

Ploščina $S(a, b)$ pod isto krivuljo nad intervalom $[a, b]$, kjer je $0 < a < b$, pa je očitno

$$S(a,b) = S(b) - S(a) = \frac{1}{4p^2}(b^4 - a^4).$$

2. Poiščimo formulo za vsoto kubov prvih n lihih števil.

Ideja njene izpeljave je v tem, da od vsote kubov prvih $2n$ naravnih števil odštejemo vsoto kubov prvih n sodih števil.

Zapišimo:

$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 =$

$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (2n-1)^3 + (2n)^3) - (2^3 + 4^3 + \ldots + (2n)^3) =$

$= T_{2n}^{\ 2} - (2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + \ldots + 2^3 \cdot n^3) =$

$= T_{2n}^{\ 2} - 8T_n^2.$

Pri tem smo dvakrat upoštevali enakost (4): prvič za vsoto kubov prvih $2n$ naravnih števil in nato še za vsoto kubov prvih n naravnih števil. Iz

$$T_{2n}^2 - 8T_n^2 = \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 =$$
$$= n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = n^2(2n^2-1)$$

imamo nazadnje formulo, ki smo jo iskali:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

Njeno veljavnost lahko potrdimo z metodo matematične indukcije.

3. Vsota kubov prvih n naravnih števil, zapisana v desetiškem številskem sistemu, ima na mestu enic lahko samo števke 0, 1, 4, 5, 6, 9 nikoli pa 2, 3, 7, 8. Utemelji trditev.

Res! Ker je vsota kubov prvih n naravnih števil enaka kvadratu trikotniškega števila T_n, je treba pogledati samo enice kvadratov števil 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Te so pa res lahko le 0, 1, 4, 5, 6, 9.

4. Izračunaj vsoto $S(m, n) = m^3 + (m+1)^3 + \ldots + (m+n)^3$, kjer sta m in n naravni števili.

Očitno je

$S(m, n) = (1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 + (m+1)^3 + \ldots + (m+n)^3) -$

$- (1 + 2^3 + \ldots + (m-1)^3) =$

$= T_{m+n}^{\ 2} - T_{m-1}^{\ 2}.$

Po krajšem računu dobimo:

$$S(m,n) = \frac{1}{4}(n+1)(2m+n)(2m^2 + 2mn + n^2 + n).$$

5. Za katero naravno število n je $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 666(1 + 2 + \ldots + n)$?

Dano zahtevo lahko prepišemo v obliki enačbe $T_n^2 = 666T_n$. Ker je $T_n \neq 0$, lahko enačbo s T_n krajšamo in dobimo $T_n = 666$ oziroma kvadratno enačbo $n^2 + n - 1332 = 0$, ki ima pozitivno rešitev $n = 36$.

6. Domača naloga. Brez geometrijske interpretacije, samo z uporabo relacije (9) v obliki $n^3 = T_n^2 - T_{n-1}^2$, izpeljite formulo (4).

Zaključek

Nikomahov izrek smo uspeli dokazati z razmeroma preprostimi matematičnimi pripomočki. Postopek je edinstven, pri vsoti potenc namreč po navadi uporabljamo drugačne prijeme. Spoznali pa smo, kako so tudi antični matematiki obvladali svojo stroko. Za konec smo naredili tudi nekaj težjih in lažjih nalog, ki se navezujejo na Nikomahov izrek, ki je lep primer, kako se lahko učimo ob spoznavanju zgodovine matematike.

Literatura

[1] Merzbach, U. C., Boyer, C. B. (2011). *A History of Mathematics*. New Jersey: John Wiley & Sons, Hoboken.

[2] Pavlič, G. (2019). *Na vrtiljaku števil*. Ljubljana: Mladinska knjiga.

[3] Struik, D. J. (1986). *Kratka zgodovina matematike*. Ljubljana: DMFA Slovenije.