Naslov članka/Article:

RAZLIKA KVADRATOV

Difference of Squares

Avtor/Author: **mag. Sonja Rajh**

Matematika v šoli št. 2/2021, letnik 27
ISSN 1318-010X
Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2021

Spletna stran revije:
https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/

Matematika v šoli, št. 2., letnik 27, 2021

Razlika kvadratov

mag. Sonja Rajh
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

Na študijskih srečanjih v osnovnih in srednjih šolah smo se z učitelji matematike lotili preiskovanja. V vlogi učečih smo si zadali cilj, da poiščemo čim več različnih načinov reševanja dane problemske naloge. Nekatere od načinov reševanja predstavljamo v prispevku.

Ključne besede: preiskovanje, posploševanje, razlika kvadratov, (številski) vzorec, algebrski zapis, računalniške preglednice, večkratniki

Difference of Squares

Abstract

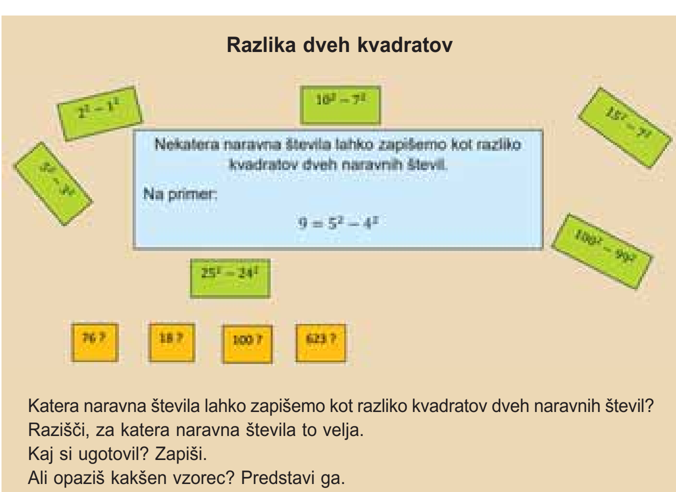
At academic meetings in primary and secondary schools, we tried our hand at investigation with mathematics teachers. Assuming the role of learners, we set the goal of finding as many different ways as possible of solving the given problem-solving task. Some of these ways are presented in the article.

Keywords: investigation, generalization, difference of squares, (number) pattern, algebraic notation, computer spreadsheets, multiples

Uvod

Na srečanju študijskih skupin za matematiko smo se z osnovnošolskimi in srednješolskimi učitelji matematike v okviru **Učenja in poučevanja matematike s preiskovanjem** ukvarjali z enakim matematičnim problemom (Slika 1).

Osnovnošolski učitelji matematike so reševali problem:



Slika 1: Matematični problem

Pristope k reševanju smo razdelili v tri večje skupine:

1. Preiskovanje številskih vzorcev do posploševanja in algebrskega zapisa
2. Preiskovanje z algebro
3. Preiskovanje v geometriji

V tem prispevku si bomo podrobneje ogledali prva dva pristopa k reševanju.

1. Preiskovanje številskih vzorcev do posploševanja in algebrskega zapisa

Predvidevamo, da bi se osnovnošolci lotili reševanja s preizkušanjem posameznih številskih vrednosti, nato bi primere sistematično urejali in šele potem bi sistematično preiskovali. Navajamo različne pristope k reševanju problema na nivoju številskih vzorcev.

1.1 Prvi način preiskovanja

Sistematičnega urejanja se lahko lotimo tako, da za vsako od naravnih števil (po)iščemo kvadrata naravnih števil s to razliko. Pri tem nam je lahko v pomoč tabela kvadratov naravnih števil ali pa uporabljamo žepno računalo.

Ta način je precej neproduktiven, saj je težko poiskati naravni števili, katerih kvadrata dajeta želeno razliko. Poleg tega ne moremo utemeljiti, da nekega števila sploh ni možno zapisati kot razliko dveh kvadratov. Morda pa samo ne znamo najti rešitve. Je pa ta način dobra vaja v urjenju kvadriranja.

Preglednica 1: Z zeleno so obarvana števila od 1 do 30, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh naravnih števil.

1 =	$11 = 6^2 - 5^2$	$21 = 5^2 - 2^2$
2 =	$12 = 4^2 - 2^2$	22 =
$3 = 2^2 - 1^2$	$13 = 7^2 - 6^2$	$23 = 12^2 - 11^2$
4 =	14 =	$24 = 7^2 - 5^2$
$5 = 3^2 - 2^2$	$15 = 8^2 - 7^2$	$25 = 13^2 - 12^2$
6 =	$16 = 5^2 - 3^2$	26 =
$7 = 4^2 - 3^2$	$17 = 9^2 - 8^2$	$27 = 6^2 - 3^2$
$8 = 3^2 - 1^2$	18 =	$28 = 8^2 - 6^2$
$9 = 5^2 - 4^2$	$19 = 10^2 - 9^2$	$29 = 15^2 - 14^2$
10 =	$20 = 6^2 - 4^2$	30 =

Obrnimo način reševanja in najprej sistematično kvadriramo števila ter nato iščemo razliko kvadratov, kot je ponazorjeno v preglednici 2.

Preglednica 2: Eden od načinov sistematičnega postopka reševanja.

$2^2 - 1^2 = 3$	$3^2 - 1^2 = 8$ $3^2 - 2^2 = 5$	$4^2 - 1^2 = 15$ $4^2 - 2^2 = 12$ $4^2 - 3^2 = 7$	$5^2 - 1^2 = 24$ $5^2 - 2^2 = 21$ $5^2 - 3^2 = 16$ $5^2 - 4^2 = 9$

Sistematično lahko preiskujemo tudi tako, da najprej kvadriramo števila, ki se razlikujejo za 1 (za 2, 3, 4 …) ter izračunamo razliko teh kvadratov (glejte preglednico 3). Nato izpišemo števila, ki so dobljena kot razlika dveh kvadratov naravnih števil.

Iz preglednice 3 je razvidno, da nekatera števila lahko na več različnih načinov zapišemo kot razliko dveh kvadratov. Npr.: $15 = 4^2 - 1^2$ in tudi $15 = 8^2 - 7^2$. $24 = 7^2 - 5^2$ in tudi $24 = 5^2 - 1^2$. $32 = 9^2 - 7^2$ in tudi $32 = 6^2 - 2^2$.

Če želimo ugotoviti, katera od naravnih števil lahko zapišemo kot razliko dveh kvadratov, jih moramo iz preglednice 3 sistematično zbrati/izpisati. Kot razliko kvadratov dveh naravnih števil lahko zapišemo naslednjih 20 naravnih števil do števila 30 (urejena so po velikosti): 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29. Ta zapis nam pri iskanju pravila kaj dosti ne koristi. Zato polja s števili, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh naravnih števil, pobarvamo v shemi zaporednih števil.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140

Shema 1: Obarvana so polja v shemi z naravnimi števili do 140, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice ℕ.

V obarvani shemi takoj opazimo vzorec, ki nam nakazuje, da bi morali pobarvati še polji s številoma 1 in 4. Števili 1 in 4 lahko

Preglednica 3: Z zeleno so obarvana števila, ki jih zapišemo kot razliko kvadratov dveh naravnih števil, ki se razlikujeta za 1, 2, 3 oziroma 4.

Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 1.	Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 2.	Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 3.	Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 4.
$2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$	$3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$	$4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$	$5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$
$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$	$4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$	$5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$	$6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$
$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$	$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$	$6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$	$7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$
$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$	$6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$	$7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$	$8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$
$6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$	$7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$	$8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$	$9^2 - 5^2 = 81 - 25 = 56$
$7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$	$8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$	$9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45$	$10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$
$8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$	$9^2 - 7^2 = 81 - 49 = 32$	$10^2 - 7^2 = 100 - 49 = 51$	$11^2 - 7^2 = 121 - 49 = 72$
Učenci ugotovijo, da - zaporedje števil narašča za 2, - dobijo liha števila.	Zaporedje števil narašča za 4. Dobljena števila so soda (oz. deljiva z 2), deljiva s 4.	Zaporedje števil narašča za 6. Dobljena števila so liha, deljiva s 3.	Zaporedje števil narašča za 8. Dobljena števila so soda, deljiva s 4, z 8.

dobimo kot razliko dveh kvadratov le v primeru, da upoštevamo kvadrate naravnih števil in števila 0. Velja $1^2 - 0^2 = 1$ in $2^2 - 0^2 = 4$.

Zaradi te ugotovitve smo za izvedbo študijskih skupin za srednjo šolo spremenili in dopolnili navodilo naloge.

> Nekatera naravna števila lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.
> Npr.:
> $9 = 5^2 - 4^2$
> $28 = 8^2 - 6^2$
> Raziščite, za katera naravna števila to velja.
> Zapišite ugotovitve in pripravite poročilo.

V spodnji shemi so obarvana polja z naravnimi števili do 140, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$. V tem primeru nam barvanje polj z rešitvami pokaže številski vzorec, iz katerega lahko delamo posplošitve.

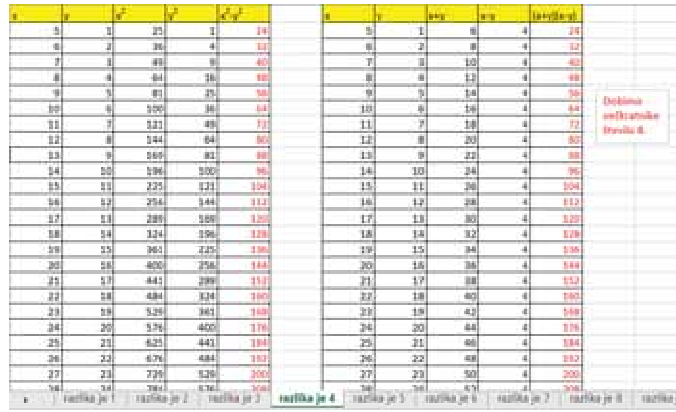
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140

Shema 2: Obarvana so polja v shemi z naravnimi števili do 140, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

Ugotovimo, da se med dvema zaporednima številoma, ki ju ne moremo napisati kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, nahajajo tri zaporedna naravna števila, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$. Tako ostane nepobarvano vsako četrto polje v shemi. To bi bilo lažje razvidno, če bi namesto sheme, ki ima 10 števil v vrsti, uporabili shemo, ki ima manj/več števil v vrsti ali pa številski trak (Shema 3).

Ugotovimo: Kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$ lahko zapišemo vsa naravna števila, razen števil: 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50 … Opazimo, da so vsa ta števila soda in da jih lahko zapišemo kot dvakratnik zaporednega lihega števila: $2 = 2 \cdot 1$, $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$, $14 = 2 \cdot 7$, $18 = 2 \cdot 9$, $22 = 2 \cdot 11$, $26 = 2 \cdot 13$, $30 = 2 \cdot 15$ … Torej: števil oblike $2(2x - 1) = 4x - 2$, $x \in \mathbb{N}$, **ne moremo zapisati kot razlike kvadratov dveh števil iz množice** $\mathbb{N}_0$.

Pri delu si lahko pomagamo z računalniškimi preglednicami kot na sliki 2.



Slika 2: Delovni list iz delovnega zvezka v excelu. Datoteka, ki je v aktivni obliki, se nahaja v spletni učilnici študijskih skupin za matematiko v mapi Gradiva študijskega srečanja 2019.

Pri tem primeru je zelo dobrodošla uporaba računalniških preglednic, ki precej olajšajo delo, poleg tega nam pa ponujena aktivnost nudi priložnost za realizacijo ciljev iz učnega načrta za matematiko v OŠ, po katerem naj bi se že šestošolci srečali z enostavnimi računalniškimi preglednicami in se jih naučili uporabljati, v naslednjih letih šolanja pa naj bi to znanje le še dopolnjevali in elektronske računalniške preglednice uporabljali pri različnih tematskih sklopih.

Ob tem primeru preiskovanja se učenci v računalniških preglednicah naučijo kreirati zaporedja (nize števil), računati vrednosti enostavnih številskih izrazov, kopirati formule in jih prenašati znotraj stolpca ali vrstice (niza) ali jih uporabljati na različnih delovnih listih znotraj istega delovnega zvezka. Na podlagi velikega števila primerov lažje posplošujejo in iščejo rešitve, saj ne izgubljajo časa z računanjem. Ko imajo izpolnjeno prvo vrstico s števili in v vseh poljih vpisane formule za računanje, lahko te formule samo prenesejo (kopirajo in prilepijo) v naslednje vrstice in dobijo preglednico s poljubnim številom rešitev problema.

1.2 Drugi način preiskovanja

Vrednosti izraza $a^2 - b^2$ zberimo v preglednici, pri čemer število a zapisujemo v vrstice, število b pa v stolpce preglednice.

V preglednici 4 opazimo številske vzorce. Po diagonali preglednice se nahajajo same ničle, saj v primeru, ko je $a = b$, velja $a^2 - b^2 = 0$.

Na vzporednicah diagonale najdemo naslednja zaporedja številskih vrednosti za $a^2 - b^2$:

- Zaporedje lihih števil: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 … dobimo v primeru, ko je $a - b = 1$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

Shema 3: Obarvana so polja na traku z naravnimi števili do 33, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

$a^2–b^2$		b							
		0	1	2	3	4	5	6	7
a	0	0							
	1	1	0						
	2	4	3	0					
	3	9	8	5	0				
	4	16	15	12	7	0			
	5	25	24	21	16	9	0		
	6	36	35	32	27	20	11	0	
	7	49	48	45	40	33	24	13	0

Preglednica 4: Tabeliranje izraza $a^2 – b^2$ za $a \geq b$.

- Zaporedje večkratnikov števila štiri: 4 , 8, 12, 16, 20, 24 … dobimo v primeru, ko je $a – b = 2$
- Zaporedje lihih večkratnikov števila 3 od števila 9 naprej: 9, 15, 21, 27, 33 … dobimo v primeru, ko je $a – b = 3$
- Zaporedje večkratnikov števila 8 od števila 16 naprej: 16, 24, 32, 40 … dobimo v primeru, ko je $a – b = 4$
- Zaporedje lihih večkratnikov števila 5 od števila 25 naprej: 25, 35, 45 … dobimo v primeru, ko je $a – b = 5$
- Zaporedje večkratnikov števila 12 od števila 36 naprej: 36, 48, 60 … dobimo v primeru, ko je $a – b = 6$
- …

Več številskih vrednosti, ki nam olajšajo posploševanje, zberemo v računalniških preglednicah (glejte preglednico 5). Po stolpcih preglednice opazimo še do sedaj neopisane vzorce števil, zato se jim na tem mestu podrobneje posvetimo.

V stolpcih preglednice 5 najdemo naslednja zaporedja številskih vrednosti za $a^2 – b^2$

- V prvem stolpcu so kvadrati števil iz množice $\mathbb{N}_0$: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 … torej števila oblike x^2
- V drugem stolpcu so števila: 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99 … ki so za 1 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 – 1 = x^2 – 1^2$
- V tretjem stolpcu so števila: 0, 5, 12, 21, 32, 45, 60, 77, 96 … ki so za 4 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 – 4 = x^2 – 2^2$
- V četrtem stolpcu so števila: 0, 7, 16, 27, 40, 55, 72, 91, 112 … ki so za 9 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 – 9 = x^2 – 3^2$
- V petem stolpcu so števila: 0, 9, 20, 33, 48, 65, 84, 105, 128 … ki so za 16 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 – 16 = x^2 – 4^2$
- V šestem stolpcu so števila: 0, 11, 24, 39, 56, 75, 96, 119, 144 … ki so za 25 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 – 25 = x^2 – 5^2$
- V sedmem stolpcu so števila: 0, 13, 28, 45, 64, 85, 108, 133 … ki so za 36 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 – 36 = x^2 – 6^2$
- V osmem stolpcu so števila: 0, 15, 32, 51, 72, 95, 120, 147 … ki so za 49 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 – 49 = x^2 – 7^2$
- V devetem stolpcu so števila: 0, 17, 36, 57, 80, 105, 132, 161 … ki so za 64 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 – 64 = x^2 – 8^2$

$a^2 - b^2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	0																						
1	1	0																					
2	4	3	0																				
3	9	8	5	0																			
4	16	15	12	7	0																		
5	25	24	21	16	9	0																	
6	36	35	32	27	20	11	0																
7	49	48	45	40	33	24	13	0															
8	64	63	60	55	48	39	28	15	0														
9	81	80	77	72	65	56	45	32	17	0													
10	100	99	96	91	84	75	64	51	36	19	0												
11	121	120	117	112	105	96	85	72	57	40	21	0											
12	144	143	140	135	128	119	108	95	80	63	44	23	0										
13	169	168	165	160	153	144	133	120	105	88	69	48	25	0									
14	196	195	192	187	180	171	160	147	132	115	96	75	52	27	0								
15	225	224	221	216	209	200	189	176	161	144	125	104	81	56	29	0							
16	256	255	252	247	240	231	220	207	192	175	156	135	112	87	60	31	0						
17	289	288	285	280	273	264	253	240	225	208	189	168	145	120	93	64	33	0					
18	324	323	320	315	308	299	288	275	260	243	224	203	180	155	128	99	68	35	0				
19	361	360	357	352	345	336	325	312	297	280	261	240	217	192	165	136	105	72	37	0			
20	400	399	396	391	384	375	364	351	336	319	300	279	256	231	204	175	144	111	76	39	0		
21	441	440	437	432	425	416	405	392	377	360	341	320	297	272	245	216	185	152	117	80	41	0	
22	484	483	480	475	468	459	448	435	420	403	384	363	340	315	288	259	228	195	160	123	84	43	0

Preglednica 5: Tabeliranje izraza $a^2 – b^2$ za $a \geq b$ s pomočjo računalniških preglednic.

- V desetem stolpcu so števila: 0, 19, 40, 63, 88, 115, 144, 175 … ki so za 81 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - 81 = x^2 - 9^2$
- …
- V n-tem stolpcu so števila, ki so za $(n-1)^2$ manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - (n-1)^2$.

Opazimo, da se v takem zapisu nekatera števila pojavijo večkrat, npr. število 0 je v vseh zaporedjih, števili 9 in 16 se pojavita dvakrat …

Preverimo še, ali smo na ta način iskanja in ponazarjanja števil, ki jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, dobili vsa naravna števila, ki smo jih s sivo obarvanim poljem označili že v shemi 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Shema 4: Naravna števila do 50, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

Ugotovimo, da smo v shemi 4 z istimi barvami, s katerimi smo obarvali določena števila v preglednici 5, obarvali vsa števila v sivih poljih sheme 2 do števila 50, razen števila 47, ki se v preglednici 5 nahaja šele v 25. vrstici kot vrednost $24^2 - 23^2 = 47$. Opazimo, da so v preglednici 5 nekatera relativno majhna števila, ki so v preglednici sicer ponazorjena blizu diagonale, zelo daleč od »izhodišča« (levega zgornjega polja) preglednice.

1.3 Tretji način preiskovanja

Z opazovanjem številskih vzorcev lahko zapišemo mnoge posplošitve in ugotovitve. Vzorce števil lahko posplošimo do algebrskega izraza.

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 1.

$1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1$ $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$ $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ $6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$ $7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 1, dobimo liho število. $x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$, $x \in \mathbb{N}$	$(1+0)(1-0) = 1 \cdot 1 = 1$ $(2+1)(2-1) = 3 \cdot 1 = 3$ $(3+2)(3-2) = 5 \cdot 1 = 5$ $(4+3)(4-3) = 7 \cdot 1 = 7$ $(5+4)(5-4) = 9 \cdot 1 = 9$ $(6+5)(6-5) = 11 \cdot 1 = 11$ $(7+6)(7-6) = 13 \cdot 1 = 13$ Produkt dveh lihih števil je liho število. Vsota dveh zaporednih števil iz množice $\mathbb{N}_0$ (od katerih je eno liho, drugo pa sodo) je vedno liho število. Vijoličasto število je vedno 1 (razlika obeh števil).

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 2.

$2^2 - 0^2 = 4 - 0 = 4$ $3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$ $4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$ $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$ $6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$ $7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$ $8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 2, dobimo večkratnik števila 4. $x^2 - (x-2)^2 = 4x - 4 = 4(x-1)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$	$(2+0)(2-0) = 2 \cdot 2 = 4$ $(3+1)(3-1) = 4 \cdot 2 = 8$ $(4+2)(4-2) = 6 \cdot 2 = 12$ $(5+3)(5-3) = 8 \cdot 2 = 16$ $(6+4)(6-4) = 10 \cdot 2 = 20$ $(7+5)(7-5) = 12 \cdot 2 = 24$ $(8+6)(8-6) = 14 \cdot 2 = 28$ Produkt dveh sodih števil je sodo število, ki je večkratnik števila 4. Rdeče število je večkratnik števila 4. $(4 = 2 \cdot 2)$ Zeleno število je vsota števil z razliko 2. Obe števili sta sodi ali obe lihi, zato je tudi njuna vsota sodo število oz. večkratnik števila 2. Vijoličasto število je vedno 2 (razlika obeh števil).

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 3.

$3^2 - 0^2 = 9 - 0 = 9$ $4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$ $5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$ $6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$ $7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$ $8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$ $9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 3, dobimo lihi večkratnik števila 3. $x^2 - (x-3)^2 = 6x - 9 = 3(2x-3)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq 3$	$(3+0)(3-0) = 3 \cdot 3 = 9$ $(4+1)(4-1) = 5 \cdot 3 = 15$ $(5+2)(5-2) = 7 \cdot 3 = 21$ $(6+3)(6-3) = 9 \cdot 3 = 27$ $(7+4)(7-4) = 11 \cdot 3 = 33$ $(8+5)(8-5) = 13 \cdot 3 = 39$ $(9+6)(9-6) = 15 \cdot 3 = 45$ Produkt dveh lihih števil je liho število. Rdeče število je lihi večkratnik števila 3, saj je vijoličasto število vedno 3 (razlika obeh števil), zeleno število (vsota števil z razliko 3) pa je vedno liho (saj je eno od števil vedno sodo, drugo pa vedno liho).

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 4.

$4^2 - 0^2 = 16 - 0 = 16$ $5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$ $6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$ $7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$ $8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$ $9^2 - 5^2 = 81 - 25 = 56$ $10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 4, dobimo večkratnik števila 8. $x^2 - (x-4)^2 = 8x - 16 = 8(x-2)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq 4$	$(4+0)(4-0) = 4 \cdot 4 = 16$ $(5+1)(5-1) = 6 \cdot 4 = 24$ $(6+2)(6-2) = 8 \cdot 4 = 32$ $(7+3)(7-3) = 10 \cdot 4 = 40$ $(8+4)(8-4) = 12 \cdot 4 = 48$ $(9+5)(9-5) = 14 \cdot 4 = 56$ $(10+6)(10-6) = 16 \cdot 4 = 64$ Produkt dveh sodih števil je sodo število, ki je večkratnik števila 4. Rdeče število je večkratnik števila 8. $(8 = 2 \cdot 4)$ Zeleno število je vsota števil z razliko 4. Obe števili sta sodi ali obe lihi, zato je tudi njuna vsota sodo število oz. večkratnik števila 2. Vijoličasto število je vedno 4 (razlika obeh števil).

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 5.

$5^2 - 0^2 = 25 - 10 = 25$ $6^2 - 1^2 = 36 - 1 = 35$ $7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$ $8^2 - 3^2 = 64 - 9 = 55$ $9^2 - 4^2 = 81 - 16 = 65$ $10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$ $11^2 - 6^2 = 121 - 36 = 85$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 5, dobimo lihi večkratnik števila 5. $x^2 - (x - 5)^2 = 10x - 25 = 5(2x - 5)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq 5$	$(5 + 0)(5 - 0) = 5 \cdot 5 = 25$ $(6 + 1)(6 - 1) = 7 \cdot 5 = 35$ $(7 + 2)(7 - 2) = 9 \cdot 5 = 45$ $(8 + 3)(8 - 3) = 11 \cdot 5 = 55$ $(9 + 4)(9 - 4) = 13 \cdot 5 = 65$ $(10 + 5)(10 - 5) = 15 \cdot 5 = 75$ $(11 + 6)(11 - 6) = 17 \cdot 5 = 85$ Produkt dveh lihih števil je liho število. Rdeče število je lihi večkratnik števila 5, saj je vijoličasto število vedno 5 (razlika obeh števil), zeleno število (vsota števil z razliko 5) pa je vedno liho (saj je eno od števil vedno sodo, drugo pa vedno liho).

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 6.

$6^2 - 0^2 = 36 - 0 = 36$ $7^2 - 1^2 = 49 - 1 = 48$ $8^2 - 2^2 = 64 - 4 = 60$ $9^2 - 3^2 = 81 - 9 = 72$ $10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84$ $11^2 - 5^2 = 121 - 25 = 96$ $12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 6, dobimo večkratnik števila 12. $x^2 - (x - 6)^2 = 12x - 36 = 12(x - 3)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq 6$	$(6 + 0)(6 - 0) = 6 \cdot 6 = 36$ $(7 + 1)(7 - 1) = 8 \cdot 6 = 48$ $(8 + 2)(8 - 2) = 10 \cdot 6 = 60$ $(9 + 3)(9 - 3) = 12 \cdot 6 = 72$ $(10 + 4)(10 - 4) = 14 \cdot 6 = 84$ $(11 + 5)(11 - 5) = 16 \cdot 6 = 96$ $(12 + 6)(12 - 6) = 18 \cdot 6 = 108$ Produkt dveh sodih števil je sodo število, ki je večkratnik števila 4. Rdeče število je večkratnik števila 12. $(12 = 2 \cdot 6)$ Zeleno število je vsota števil z razliko 6. Obe števili sta sodi ali obe lihi, zato je tudi njuna vsota sodo število oz. večkratnik števila 2. Vijoličasto število je vedno 6 (razlika obeh števil).

…

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za n.

$x^2 - (x - n)^2 = 2nx - n^2 = n(2x - n)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq n$ Če je n liho število, dobimo lihi večkratnik števila n. Če je n sodo število, dobimo večkratnik števila $2n$.	$(x + (x - n)) \cdot (x - (x - n)) = (2x - n) \cdot (n) = n(2x - n)$ Če je n liho število, dobimo **produkt dveh lihih števil**, kar je liho število $n(2x - n)$. Če je n sodo število, je $n(2x - n)$ **produkt dveh sodih števil** (dveh večkratnikov števila 2), kar je sodo število, ki je večkratnik števila 4.

V izrazih desnega stolpca, ki so oblike $(x - (x - n)) \cdot (x + (x - n))$, ne dobimo produkta sodega in lihega števila oziroma lihega in sodega števila, da bi dobili dvakratnik lihega števila.

Torej števil, ki so dvakratniki lihega števila ($2 = 2 \cdot 1$, $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$, $14 = 2 \cdot 7$, $18 = 2 \cdot 9$, $22 = 2 \cdot 11$, …), ne moremo dobiti kot razlike kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

Te ugotovitve so s številskimi primeri na tablo zapisali tudi udeleženci študijske skupine za matematiko v osnovni šoli. Glejte sliko 3.

Slika 3: Zapis učiteljev na tablo.

Iz zapisov sledi, da se kot razlika kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$ lahko zapišejo le števila, ki jih lahko vsaj na ena način razcepimo na produkt dveh lihih števil (npr. $623 = 89 \cdot 7$) ali kot produkt dveh sodih števil (npr. $76 = 38 \cdot 2$, $100 = 50 \cdot 2 = 10 \cdot 10$).

Števila 18 pa ne moremo zapisati kot produkt dveh sodih ali dveh lihih števil ($18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$, saj je vedno en faktor sod, drugi pa lih), zato ga ne moremo zapisati kot razlike kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

Barvanje števil v shemi

V shemi naravnih števil pobarvamo polja s števili, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$. Glejte shemo 5. Najprej z zeleno pobarvamo polja z lihimi števili, saj jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 1. Nato z oranžno pobarvamo polja z večkratniki števila 4, saj jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Shema 5: Pobarvana so polja z naravnimi števili do števila 100, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

Ko želimo pobarvati tiste večkratnike števila 3, ki jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 3, ugotovimo, da so števila 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45 ... že pobarvana z zeleno, saj so to liha števila. (Predlagamo, da ta števila v shemi obkrožite in preiskujete nastali številski vzorec.) Torej: števila oblike $6x - 9 = 3(2x - 3)$, $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 3$, so liha števila.

Ko želimo pobarvati tiste večkratnike števila 4, ki jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 4, ugotovimo, da so števila 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64 … že pobarvana z oranžno, saj so to večkratniki števila 4. Torej: vsi večkratniki števila 8 so tudi večkratniki števila 4, saj velja: $8x - 16 = 8(x - 2) = 4(2x - 4)$, $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 4$.

Ko želimo pobarvati tiste večkratnike števila 5, ki jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 5, ugotovimo, da so števila 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 … že pobarvana z zeleno, saj so to liha števila. Torej: števila oblike $10x - 25 = 5(2x - 3)$, $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 5$, so liha števila.

Ko želimo pobarvati tiste večkratnike števila 6, ki jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 6, ugotovimo, da so števila 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 … že pobarvana z oranžno, saj so to večkratniki števila 4. Torej: vsi večkratniki števila 12 so tudi večkratniki števila 4, saj velja: $12x - 36 = 12(x - 3) = 4(3x - 9)$, $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 6$.

….

Posplošimo:

Vsa liha števila lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata liho razliko.

Vse večkratnike števila 4 lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata sodo razliko.

Torej lahko samo nekatera soda števila zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, in to so samo tista soda števila, ki so hkrati tudi večkratniki števila 4. V shemi 5 so ostala nepobarvana soda števila, ki niso večkratniki števila 4, saj jih ne moremo zapisati kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$. **Torej števil oblike $4x - 2 = 2(2x - 1)$, $x \in \mathbb{N}$, ne moremo zapisati kot razlike kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.**

2. Preiskovanje z algebro

Srednješolci so že sposobni ta matematični problem utemeljiti in tudi dokazati z algebro.

2.1 Prvi način reševanja

Naj bosta števili $a, b \in \mathbb{N}_0$, za kateri velja $a \geq b$.

Imamo natanko tri možnosti:

1. možnost: **Razlika med številoma *a* in *b* je liho število, torej $a - b = 2k - 1$,** $k \in \mathbb{N}$

Če iz tega zapisa izrazimo $a = b + 2k - 1$, in to vstavimo v izraz za $a + b$, dobimo $a + b = b + 2k - 1 + b = 2(b + k) - 1$ spet liho število.

Iz tega sledi, da je

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = (2k - 1)(2(b + k) - 1) =$$
$$2(2k - 1)(b + k) - 2k + 1 = 2((2k - 1)(b + k) - k) + 1$$

liho število (produkt dveh lihih števil je liho število).

Ugotovitev: Če je razlika med številoma a in b liho število, je tudi razlika kvadratov števil a in b liho število.

Primeri: Če je $k = 1$, je $a - b = 1$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 2b + 1$ … vsa liha števila.

Če je $k = 2$, je $a - b = 3$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 3(2b + 3)$ … nekatere lihe večkratnike števila 3.

Če je $k = 3$, je $a - b = 5$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 5(2b + 5)$ … nekatere lihe večkratnike števila 5.

…

2. možnost: **Razlika med številoma *a* in *b* je sodo število, torej $a - b = 2k$, $k \in \mathbb{N}$,**

Če iz tega zapisa izrazimo $a = b + 2k$, in to vstavimo v izraz za $a + b$, dobimo $a + b = b + 2k + b = 2(b + k)$ spet sodo število.

Iz tega sledi, da je

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 2k(2(b + k)) = 4k(b + k)$$

večkratnik števila 4 (produkt dveh sodih števil je večkratnik števila 4).

Ugotovitev: Če je razlika med številoma a in b sodo število, je razlika kvadratov števil a in b večkratnik števila 4.

Primeri:

Če je $k = 1$, je $a - b = 2$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 4(b + 1)$ … vse večkratnike števila 4.

Če je $k = 2$, je $a - b = 4$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 8(b + 2)$ … nekatere večkratnike števila 8.

Če je $k = 3$, je $a - b = 6$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 12(b + 3)$ … nekatere večkratnike števila 12.

…

3. možnost: **Razlika med številoma *a* in *b* je 0 oziroma števili *a* in *b* sta med seboj enaki,** iz tega sledi, da je

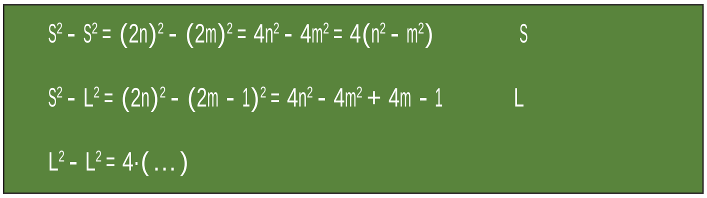
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = \mathbf{0}$

Ugotovitev: Če sta števili a in b med seboj enaki, je razlika kvadratov števil a in b enaka 0.

Obravnavali smo vse tri možnosti. Več možnosti ni. Zato sodih števil, ki niso večkratniki števila 4, ne moremo zapisati kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

2.2 Drugi način reševanja

Preiskujmo razliko kvadratov dveh sodih števil, dveh lihih števili, ter po enega sodega in enega lihega. Glejte sliko 4.



Slika 4: Na tabelski sliki je ideja dokaza učiteljev, ki nastala na srečanju študijske skupine.

$S^2 - S^2$

Če kvadriramo dve sodi števili (ki sta večkratnika števila 2), za razliko kvadratov dobimo večkratnik števila 4.

$$(2n)^2 - (2m)^2 = 4(n^2 - m^2)$$

Če sta ti dve sodi števili, ki ju kvadriramo, zaporedni sodi števili, dobimo 4-kratnik lihega števila: $(2m + 2)^2 - (2m)^2 = 4(2m + 1).$

Polja s 4-kratniki lihega števila v shemi 6 pobarvamo z oranžno barvo.

$L^2 - L^2$

Tudi če kvadriramo dve lihi števili, za razliko kvadratov dobimo večkratnik števila 4.

$$(2n - 1)^2 - (2m - 1)^2 = 4(n^2 - n - m^2 + m)$$

Če sta ti dve lihi števili, ki ju kvadriramo, zaporedni lihi števili, dobimo 4-kratnik sodega števila:

$$(2m + 1)^2 - (2m - 1)^2 = 8m = 4 \cdot 2m.$$

Polja s 4-kratniki sodega števila v shemi 6 pobarvamo z zeleno barvo.

Torej lahko vse večkratnike števila 4 dobimo kot razliko kvadratov dveh sodih oziroma dveh lihih števil. V shemi 6 smo jih pobarvali z oranžno (4-kratniki lihega števila) oziroma z zeleno (4-kratniki sodega števila) barvo.

$S^2 - L^2$

Če od kvadrata sodega števila odštejemo kvadrat lihega števila, dobimo liho število.

$$(2n)^2 - (2m - 1)^2 = 4(n^2 - m^2 + m) - 1$$

Če sta števili, ki ju kvadriramo, zaporedni števili, za razliko kvadratov dobimo večkratnik števila 4 zmanjšan za ena:

$$(2m)^2 - (2m - 1)^2 = 4m - 1 .$$

Večkratnik števila 4 zmanjšan za 1 v shemi 6 pobarvamo z modro barvo.

$L^2 - S^2$

Tudi če od kvadrata lihega števila odštejemo kvadrat sodega števila, dobimo liho število.

$$(2n - 1)^2 - (2m)^2 = 4(n^2 - n - m^2) + 1$$

Če sta števili, ki ju kvadriramo, zaporedni števili, za razliko kvadratov dobimo večkratnik števila 4 povečan za ena:

$$(2m + 1)^2 - (2m)^2 = 4m + 1 .$$

Večkratnik števila 4, povečan za 1, v shemi 6 pobarvamo z vijoličasto barvo.

Torej lahko vsa števila, ki so za 1 večja oziroma manjša od večkratnika števila 4, dobimo kot razliko kvadratov po enega sodega in enega lihega števila. V shemi 6 smo jih pobarvali z modro (za 1 manjše od večkratnika števila 4) oziroma z vijoličasto (za 1 večje od večkratnika števila 4) barvo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

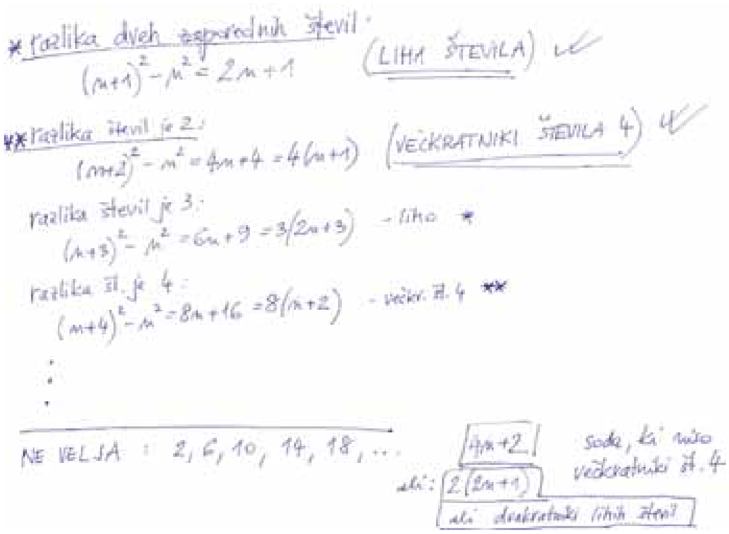
Shema 6: Pobarvana so polja z naravnimi števili do 100, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

V shemi 6 tako ostanejo nepobarvana števila, ki so za 2 manjša oziroma večja od večkratnikov števila 4, torej števila oblike $4m - 2$ oziroma $4m + 2$.

Torej števil oblike $4m - 2 = 2(2m - 1)$, $m \in \mathbb{N}$, (oziroma $4m + 2 = 2(2m + 1)$, $m \in \mathbb{N}_0$) **ne moremo zapisati kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.**

2.3 Tretji način reševanja

Na srečanju študijskih skupin so učitelji s pomočjo algebre zapisali povzetke ugotovitev (slika 5), ki smo jih zapisali že v prvem poglavju *Preiskovanje številskih vzorcev do posploševanja in algebrskega zapisa*.



Slika 5: Zapis učiteljev na srečanju študijskih skupin.

2.4 Četrti način reševanja

Učitelji so na srečanju študijskih skupin s pomočjo algebre dokazali, da če se števili, ki ju kvadriramo, razlikujeta za 1, dobimo liho število. Če se števili, ki ju kvadriramo, razlikujeta za *k*, dobimo večkratnik števila *k*. Glejte sliko 6.

Tudi ti dve trditvi sta s številskimi primeri zajeti v prvem poglavju.

I. primer $n, n + 1$

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

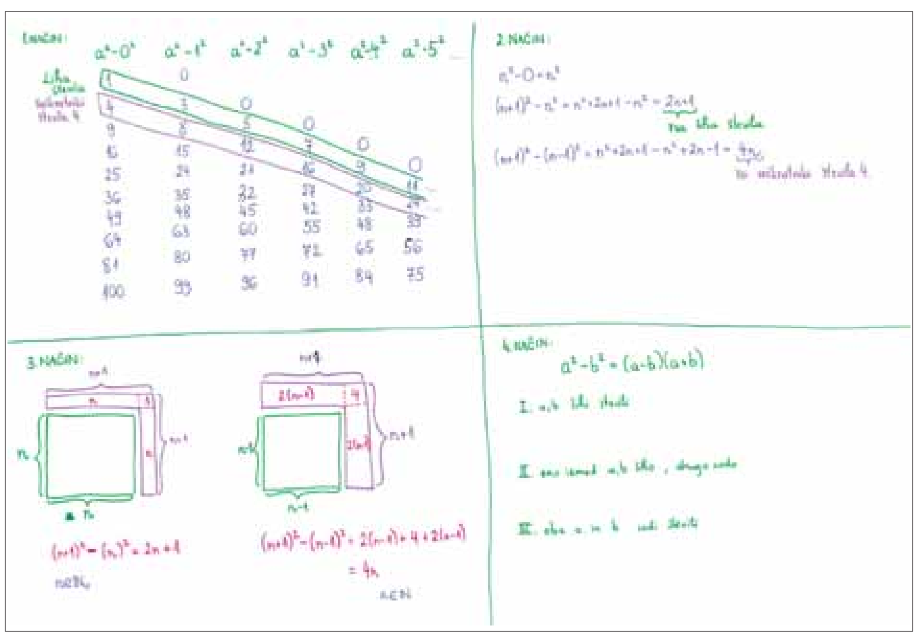
II. primer $n, n + k$

$$(n + k)^2 - n^2 = n^2 + 2nk + k^2 - n^2 = 2nk + k^2 = k(2n + k)$$

Slika 6: Zapis učiteljev na tablo.

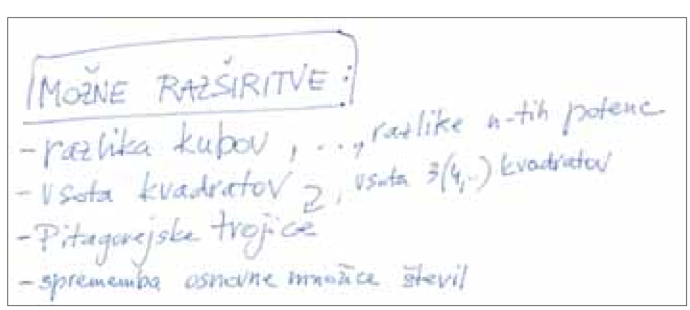
Zaključek

Ta prispevek zaključimo s plakatom (Slika 7), na katerega so učitelji na srečanju študijskih skupin za matematiko zapisali vse prej navedene pristope k reševanju ter omenili še Geometrijsko reševanje problema (3. način na plakatu).



Slika 7: Plakat, na katerem so povzeti različni načini preiskovanja.

Ob reševanju problema so se nam nakazovale možnosti razširitve problema, npr. iz množice $\mathbb{N}$ v množico $\mathbb{N}_0$. O nadaljnjih možnostih razširitve problema so razpravljali tudi učitelji. Na sliki 8 navajamo enega od njihovih zapisov.



Slika 8: Zapis učiteljev na študijskem srečanju.

Vir

Generalizing patterns: *The Difference of Two Squares*, MARS, University of Nottingham & UK Berkeley, 2015.