

Naslov članka/Article:

# GRAVITACIJSKA INTERAKCIJA MNOŽICE TELES

*Gravitational Interaction of a Mass of Bodies*

Avtor/Author:

Peter Jevšenak

CC licenca



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav



**Fizika v šoli št. 1/2019, letnik 24**

ISSN 1318-6388

Izdal in založil: Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Kraj in leto izdaje: Ljubljana, 2019

Spletna stran revije:

<https://www.zrss.si/strokovne-revije/fizika-v-soli/>

# Gravitacijska interakcija množice teles

**Peter Jevšenak**

Šolski center Velenje, Gimnazija Velenje

---

## Izvelek

Galaksije so osnovni gradnik vidnega vesolja. Dinamiko teles, ki tvorijo galaksijo, usmerja gravitacijska interakcija med njimi. Gravitacija je s fizikalnega in matematičnega stališča dobro poznana, a enormno število teles v galaksiji vseeno povzroča težave. Vsako telo z gravitacijsko silo vpliva na vsa druga telesa in s tem na njihovo gibanje. Pri sto milijardah zvezd v galaksiji je natančen izračun vseh interakcij in premikov nemogoč tudi z najboljšimi računalniki na svetu.

Katere metode se potem uporabljajo, da se simulacije vseeno zanesljivo izvajajo?

Ali so tega sposobni že običajni osebni računalniki?

Ali lahko sami z računalnikom ustvarimo svojo galaksijo ali celo galaktični trk v tridimenzionalnem prostoru?

Kljub pomislekom, da odgovori na zgornja vprašanja presegajo naše trenutne zmožnosti in (srednješolsko) znanje, smo si postavili cilj, napisati računalniški program, kjer bi gibanje množice teles usmerjala gravitacijska interakcija med njimi.

**Ključne besede:** gravitacijska interakcija, računalniške simulacije, Barnes-Hutov algoritem, galaksije

## Gravitational Interaction of a Mass of Bodies

### Abstract

Galaxies are primary components of the structure of observable universe. The dynamics between the bodies forming a galaxy depends on their gravitational interactions. Although gravitation has been well defined by physics and mathematics, the enormous number of galactic bodies continues to cause problems. Each body having a gravitational pull affects all other bodies, thus influencing their movements. With a hundred billion stars in a galaxy, a precise calculation of all interactions and movements is impossible even when using the best computers in the world.

With this in mind, which methods can therefore be used to carry out reliable simulations?

Can our personal computers do that?

Can we use our computer to create our own galaxy or even a galactic collision in three-dimensional space?

Despite any doubts that the answers to these questions might go beyond our current capabilities and (high school) knowledge, our goal was to write a computer program where the movements of a mass of bodies would be influenced by their gravitational interactions.

**Keywords:** gravitational interaction, computer simulation, Barnes-Hut Algorithm, galaxies

---

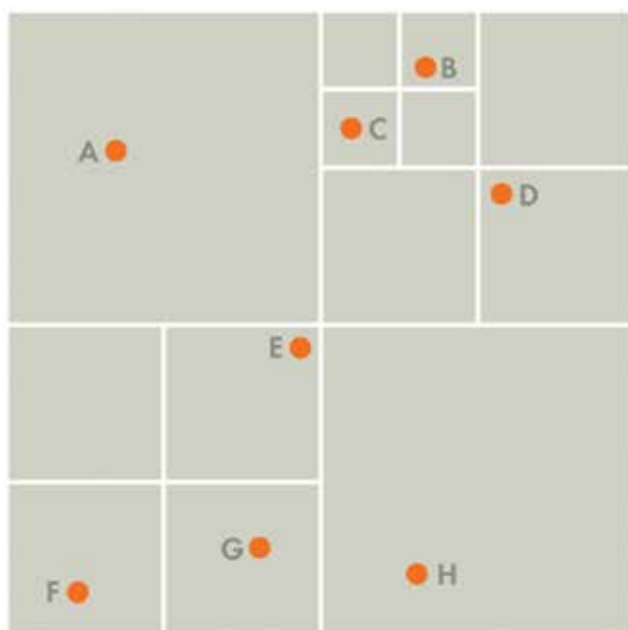
Z gravitacijo in računalniškimi simulacijami smo imeli že kar nekaj izkušenj, tako smo v programskem jeziku C++ simulirali gravitacijsko polje teles nepravilnih oblik [1] in gibanje zvezd v dvozvezdijh ter proučevali stabilnost orbit planetov v takih sistemih [2]. Da smo se lahko lotili novega problema, pa smo morali najprej usvojiti programiranje grafike v tridimenzionalnem (3D) prostoru. Odločili smo se za uporabo aplikacijskega programskega vmesnika OpenGL, ki omogoča izrisovanje 2D- in 3D-vektorske grafike z optimizirano uporabo grafičnega procesorja. Vmesnik deluje neodvisno od izbire programskega jezika in je podprt na več platformah [3]. Naslednja faza je bila usvojitev Barnes-Hutovega algoritma. Ta algoritem uspešno zmanjšuje število potrebnih izračunov v simulacijah z velikim številom teles na račun združevanja oddaljenejših teles po določenem kriteriju. Po pregledu obstoječih simulacij na spletu smo ugotovili, da se te med seboj močno razlikujejo po številu teles. Razpon sega od deset tisoč do milijon teles. Glede na to, da se z omenjenimi problemi, programi in metodami srečujemo prvič, smo si kriterij za uspešnost svojega dela postavili na spodnjo mejo. Zadovoljni bomo, če bomo na zaslonu osebnega računalnika lahko opazovali zvezno gibanje (vsaj) 10.000 teles hkrati.

Naš namen ni natančno simuliranje procesov, ki potekajo v vesolju, saj je gravitacija vidne snovi le redko edini odločilni dejavnik od začetka do konca. Na tvorbo, vrtenje in razporeditev galaksij odločilno vpliva skrivnostna temna snov, znaten del mase galaksij pa predstavljajo tudi ogromni oblaki prahu in plina, ki jih ne moremo šteti za točkasta telesa tako kot zvezde. Z reševanjem zastavljenega fizikalnega problema – proučiti dogajanje, ko med  $n$  telesi po izbrani začetni postavitvi v 3D-prostoru deluje samo gravitacijska interakcija – bi radi predvsem pridobili veliko novega in uporabnega fizikalnega, matematičnega in računalniškega znanja.

## Barnes-Hutov algoritem

Josh Barnes in Piet Hut sta se domislila učinkovite sheme, kako različna telesa, ki so dovolj blizu skupaj, združiti v eno telo. To je ključna ideja, kako pospešiti algoritme z množico teles, ki vplivajo drugo na drugo. Če smo v točki prostora dovolj daleč od gruče teles, lahko dejanski gravitacijski vpliv gruče (približno) izenačimo z gravitacijskim vplivom telesa, ki ima skupno maso gruče in se nahaja v njenem težišču.

V 3D-prostoru, recimo v kocki s stranico  $a$ , imamo razporejenih  $n$  teles. Kocko razdelimo na osem manjših, enako velikih kock s stranico  $a/2$  in vsaka taka kocka predstavlja nov podprostor. Vsak podprostor, v katerem je več teles, rekurzivno delimo naprej na osem nadaljnjih podprostorov, dokler se vsa telesa ne razporedijo vsako v svoj podprostor. Delitev v dveh dimenzijah je prikazana na sliki 1. Algoritem gradi drevesno strukturo, kjer podprostori pred-



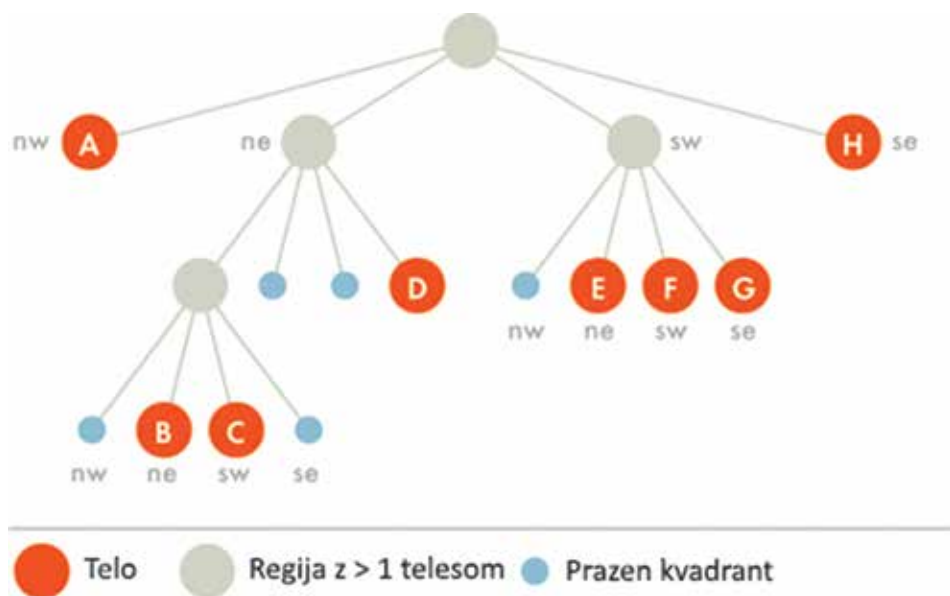
**Slika 1:** Razdelitev prostora na podprostore (kvadrante) v 2D.

Da smo se lahko lotili novega problema, pa smo morali najprej usvojiti programiranje grafike v tridimenzionalnem (3D) prostoru.

Na tvorbo, vrtenje in razporeditev galaksij odločilno vpliva skrivnostna temna snov, znaten del mase galaksij pa predstavljajo tudi ogromni oblaki prahu in plina, ki jih ne moremo šteti za točkasta telesa tako kot zvezde.

stavljajo vozlišča, iz katerih se spušča osem vej do novih vozlišč nivo nižje (štiri veje v 2D, slika 2). Zapolnjeni kvadranti na zunanjih položajih drevesa predstavljajo posamezna telesa, vozlišča znotraj drevesa pa skupino teles pod njim in hranijo lego težišča ter skupno maso.

Pri izračunu težnega pospeška na izbrano telo se postopek začne pri korenu drevesa (prvi voz-  
zel – ves prostor) in se nato spušča po nivojih. Za vsak voz-  
zel se preveri, ali je težišče skupine, ki jo predstavlja, dovolj daleč od izbranega telesa. Če je pogoj izpolnjen, se ves del drevesa pod  
vozliščem obravnava kot eno telo s skupno maso v težišču te skupine. Kriterij, ali je vozlišče  
dovolj oddaljeno od telesa, določa kvocient  $s/d$ , kjer je  $s$  značilna dimenzija podprostoru, ki  
ga vozlišče predstavlja (običajno stranica kocke),  $d$  pa razdalja med izbranim telesom in teži-  
ščem skupine teles pod vozliščem. Kvocient nato primerjamo z referenčno vrednostjo  $\theta$ . Če je  
 $s/d < \theta$ , potem je vozlišče dovolj oddaljeno za združevanje. S spreminjanjem parametra  $\theta$   
vplivamo na hitrost in natančnost simulacij. Za gravitacijsko interakcijo se običajno vzame  
vrednost  $\theta = 0,5$ . Če  $\theta$  spuščamo proti nič, potem je združevanja vse manj, čas simulacij se  
podaljšuje, povečuje pa se natančnost.



**Slika 2:** Drevesna shema algoritma v 2D. Vsak podprostor na sliki 1, ki vsebuje več kot eno telo, postane (sivo) vozlišče v drevesni strukturi in se razdeli naprej na štiri podprostore en nivo nižje z oznakami nw, ne, sw, se (po straneh neba v angleškem jeziku). Proces se nadaljuje, dokler ni vsako telo v svojem podprostoru.

Pri računanju vseh medsebojnih interakcij med  $n$  telesi je treba opraviti  $n^2$  izračunov. Pri deset tisoč telesih to pomeni sto milijonov izračunov za en korak. Barnes-Hutov algoritem za isti problem potrebuje  $n \cdot \log_2 n$  izračunov. Pri deset tisoč telesih torej le 133.000 izračunov, kar je 750-krat manj [4, 5].

## Metode dela

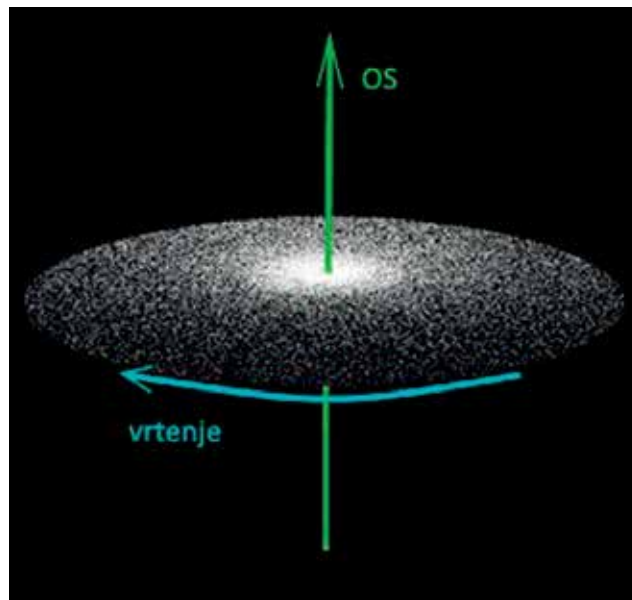
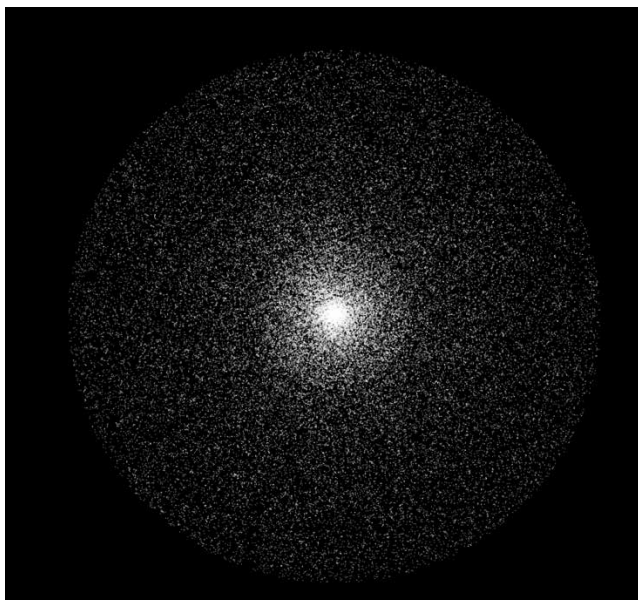
Programirali smo v programskem jeziku C++ v okolju Visual studio 2015. Program ima več faz. Najprej moramo odpreti grafično okno na zaslonu računalnika in v 3D-prostor, ki ga okno predstavlja, postaviti telesa. Najbolj smiselni začetni postavitvi glede na obliko galaksij se nam zdita razporeditev teles znotraj kroga ali znotraj krogle. Razporeditev teles po krogu lahko predstavlja disk spiralne galaksije (v nadaljevanju disk), razporeditev teles po krogli pa kroglasto kopico ali eliptično galaksijo. Telesa smo naključno porazdelili po ploskvi znotraj diska oziroma po notranjosti krogle. To smo storili tako, da smo naključno izbrali dve števili med 0 in 1. Prvo smo pomnožili s polmerom, drugo pa z  $2\pi$ . Tako smo dobili polarni koordinati točke na disku, kamor smo postavili telo. Dobljeno porazdelitev, kjer gostota teles pada od sredine proti robu, prikazuje slika 3a. Podoben, a ustrezno prilagojen postopek smo uporabili

Josh Barnes in Piet Hut sta se domislila učinkovite sheme, kako različna telesa, ki so dovolj blizu skupaj, združiti v eno telo.

Najbolj smiselni začetni postavitvi glede na obliko galaksij se nam zdita razporeditev teles znotraj kroga ali znotraj krogle. Razporeditev teles po krogu lahko predstavlja disk spiralne galaksije, razporeditev teles po krogli pa kroglasto kopico ali eliptično galaksijo.

tudi pri krogli [6]. Telesa lahko v začetnem položaju mirujejo, lahko pa se jim določi začetna hitrost. Telesom, razporejenim po disku, smo določili začetno hitrost tako, da se glede na navpično os skozi središče vsa na začetku vrtijo v smeri urinih kazalcev (slika 3b). Za vsako telo leži vektor hitrosti v ravnini diska in je pravokoten na zveznico med izbranim telesom in središčem diska. Po velikosti pa smo preizkušali različne možnosti, tako enako hitrost za vsa telesa kot enakomerno in neenakomerno naraščanje hitrosti od sredine proti robu. Skupaj z začetnim položajem določimo tudi maso telesa. Vsem telesom smo najprej določili isto maso, kasneje pa smo jo določali naključno, vendar smo omejili razmerje med največjo in najmanjšo maso na 10. Izvajali smo tudi simulacije, pri katerih smo dodatno v prostor (v sredino ali še bolj na rob) postavili telo z zelo veliko maso (recimo toliko kot vsa preostala telesa skupaj) po analogiji supermasivnih črnih lukenj.

Telesom, razporejenim po disku, smo določili začetno hitrost tako, da se glede na navpično os skozi središče vsa na začetku vrtijo v smeri urinih kazalcev.



Slika 3a, b: Disk s 50.000 teles, pogled od zgoraj in s strani.

Med drugim lahko med začetne pogoje štejemo odločitev, ali med simulacijo dopustimo trke med telesom in s tem »lepljenje« teles ali ne. Najpreprostejša možnost je, da so vsa telesa točkasta in do trkov ne prihaja. Realno, če pogledamo trk dveh galaksij, trkov praktično ni, ker so razdalje med zvezdami zelo velike v primerjavi z velikostjo zvezd. Če pa pogledamo oblikovanje sončnega sistema, so trki v tem procesu nujni. Tako smo preverili tudi možnost, da se telesa, ki se približata na neko minimalno razdaljo, zlepita. Pri tem se masi seštejeta, hitrost novega telesa pa se določi z ohranitvijo gibalne količine.

Ko določimo vse začetne pogoje, program izvaja Barnes-Hutov algoritem. Program dopušča globino do 20 nivojev, kar pomeni do  $8^{19}$  vozlišč. Pri ciljnem številu nekaj deset tisoč teles taka globina več kot zadošča. Za vsako telo se izračuna težni pospešek, ki je vektorska vsota posameznih težnih pospeškov, ki jih povzročajo vsa druga telesa, in se izračunajo po enačbi  $\vec{g} = \frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ . Bližnja telesa so obravnavana samostojno, bolj oddaljena pa algoritem združuje. Iz znanih začetne lege, začetne hitrosti in težnega pospeška, ki se v (kratkem) časovnem intervalu  $\Delta t$  obravnava kot konstanten, se izračunata nova lega telesa

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot \Delta t \quad (1)$$

in hitrost v naslednjem koraku

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot \Delta t \quad (2).$$

Začetne polarne koordinate teles se pretvorijo v kartezične in v kartezičnem koordinatnem sistemu potekajo vsi nadaljnji izračuni. Nove lege teles se sproti nalagajo v grafični spomin, na zaslonu se točke prestavijo v novo lego in lahko se začne nov korak. Človeški vid ima gibanje za zvezno, če se slika osveži vsaj 12-krat v sekundi, pri nižjih frekvencah osveževanja pa si

Za vsako telo se izračuna težni pospešek, ki je vektorska vsota posameznih težnih pospeškov, ki jih povzročajo vsa druga telesa, in se izračunajo po enačbi.

lahko pomagamo s snemalnikom zaslona in potem posnetek hitreje zavrtimo. Procesi, ki so predmet simulacij, v veselju trajajo na milijone let. Za pospešitev poteka dogajanja v simulacijah smo vzeli točkasta kilogramska telesa na metriških razdaljah in povečali gravitacijsko konstanto  $G$  za faktor sto tisoč. Med izvajanjem simulacij je omogočeno spreminjanje perspektive s tipkovnico in z miško. Objektu se lahko približamo, ga zavrtimo in nanj pogledamo s katere koli strani.

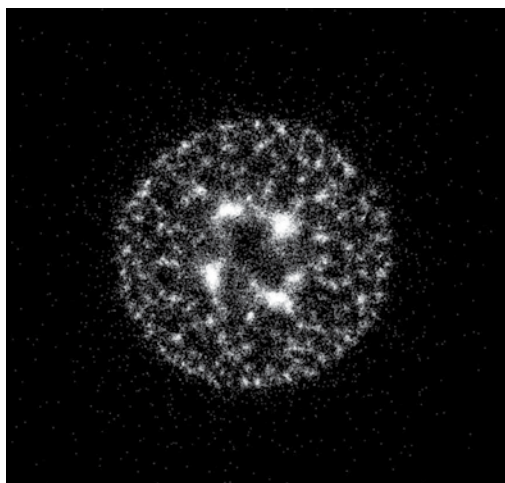
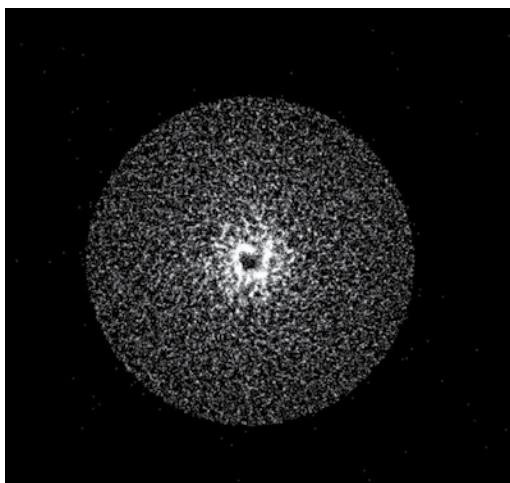
## Rezultati

Pri pisanju programa smo imeli v mislih predvsem pravilnost delovanja. Ko pa so prve simulacije potekale zelo počasi že pri postavitvi nekaj sto teles, smo bili prisiljeni razmišljati tudi o optimizaciji postopkov. V programu smo namesto spremenljivk uporabili kazalce, kar močno zmanjša obremenitev računalniškega spomina, v standardnih knjižnicah C++ pa smo našli funkcije, ki omogočajo polno obremenitev vseh jeder računalniškega procesorja. S temi spremembami smo uspeli hitrost simulacij zvišati za faktor sto. Posledično smo lahko povečali število teles v simulacijah na deset tisoč. Končni rezultat je, da pri deset tisoč telesih v disku procesor (Intel i5) zmore 26 slik na sekundo, pri deset tisoč telesih znotraj krogle z enakim polmerom pa 16 slik na sekundo. Pri disku gre hitreje najbrž zato, ker so telesa gosteje porazdeljena in je več združevanja (Barnes-Hutov algoritem, poglavje 2).

Začetni pogoji ponujajo praktično neskončno različnih možnosti pri simuliranju. Primeri v nadaljevanju po naši oceni predstavljajo izbor najbolj karakterističnih, najzanimivejših in tudi najzahtevnejših simulacij. V vseh primerih je teles vsaj petdeset tisoč. Večje število teles pomeni, da je kakovost slike na zaslonu bistveno boljša in omogoča vsaj približno predstavo o trenutni razporeditvi. Simulacije so bile zato počasne, v večini primerov jih je bilo treba pustiti teči več kot eno uro, celotno dogajanje pa smo posneli s snemalnikom zaslona in nato naredili video posnetke z 32-kratno hitrostjo. Uporaba snemalnika zaslona hitrost simulacij še dodatno zniža za približno dvajset odstotkov.

## Razporeditev teles po disku

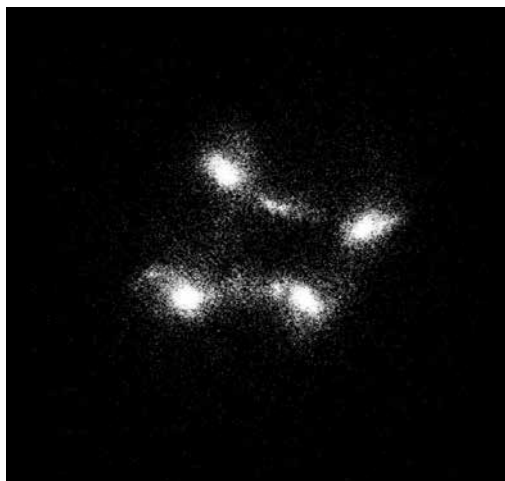
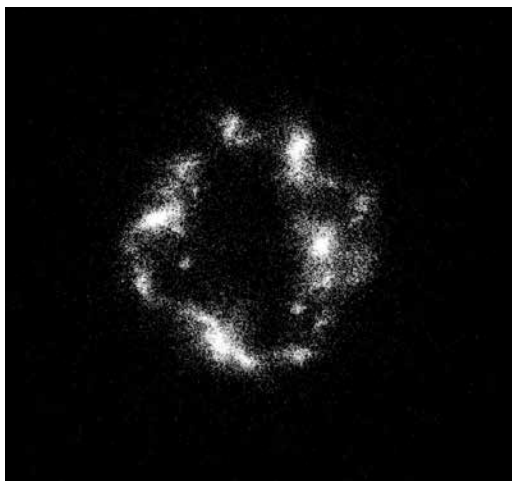
50.000 teles istih mas smo razporedili po disku tako, kot je prikazano na sliki 3a. Velikost hitrosti je enaka za vsa telesa, disk pa se vrti v smeri urinih kazalcev (poglavje 3, slika 3b). Rezultat takega pogoja je, da pri telesih blizu središča, kjer je težnost majhna, prevlada centrifugalna sila in ta telesa se začnejo premikati po spirali navzven (praznina v središču), medtem ko pri telesih na obrobju diska prevlada težnost in se začnejo premikati po spirali navznoter (disk se manjša, sliki 4a, b). Blizu krožnice s polovičnim polmerom prvotnega diska se telesa zgostijo v neenakomeren obroč (slika 4c), čez čas prevladajo štiri večje zgoščine (slika 4d), ki se postopoma ena po ena sesedajo v osrednjo zgoščino eliptične oblike (sliki 4e, f).



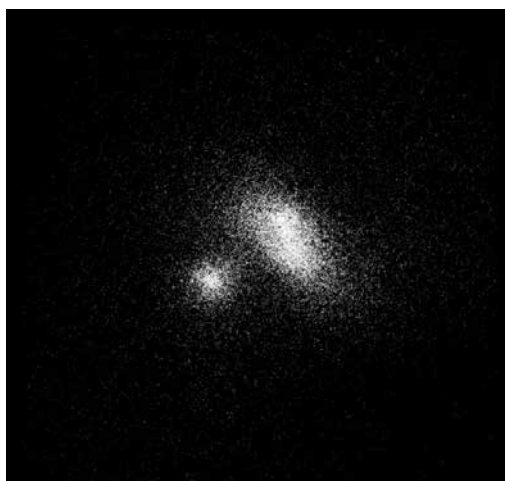
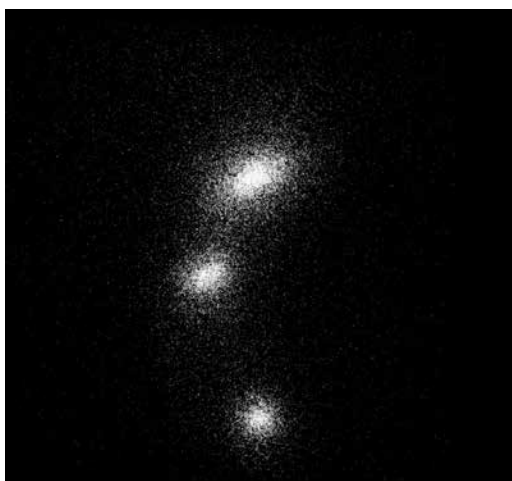
Slika 4a, b: Praznina v sredini in sesedanje diska.

Posnetke simulacij si lahko ogledate na spletni strani revije.

<https://www.zrssi.si/strokovne-resitve/revije/fizika-vsoli/fizika-v-solivideovsebine>



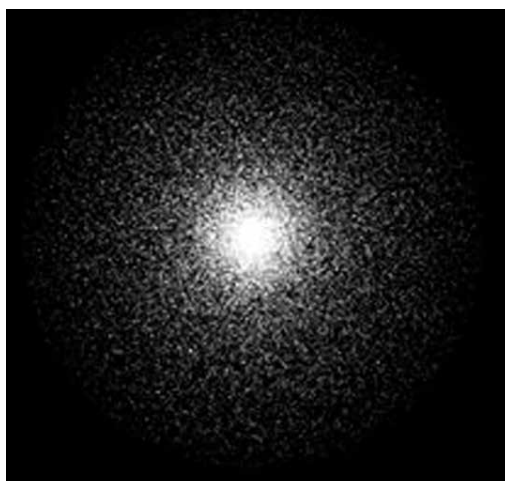
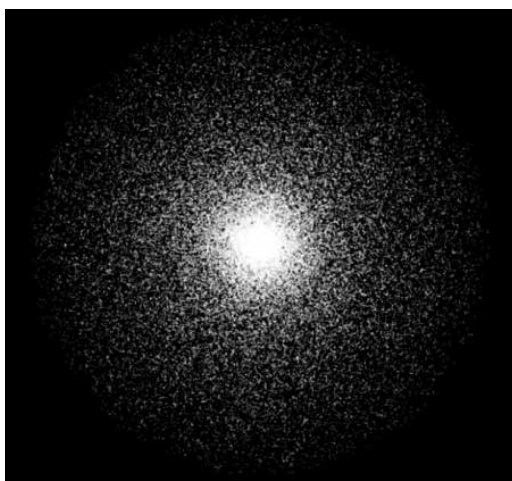
Slika 4c, d: Obroč in štiri lokalne zgoščine.



Slika 4e, f: Postopno sesedanje v enotno zgoščino.

### Razporeditev teles po krogli

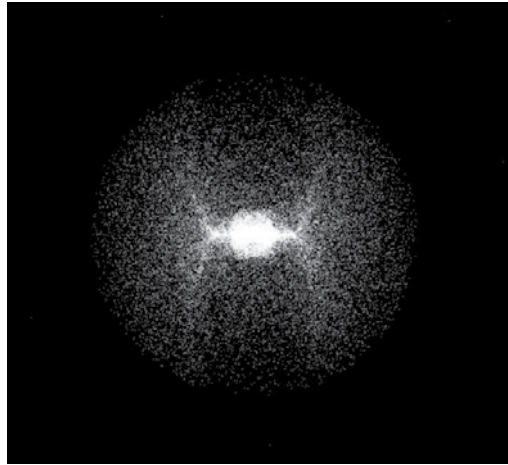
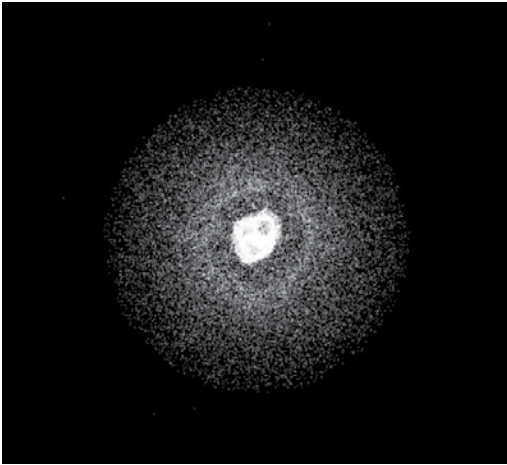
50.000 teles istih mas in istih velikosti hitrosti z naključno razporeditvijo po notranjosti krogle smo pognali v taki smeri, da se pri pogledu na kroglo od zgoraj vsa vrtijo v isto smer okoli navpične osi skozi središče. Slike od 5a do 5j so združene v pare, kjer leva slika prikazuje pogled



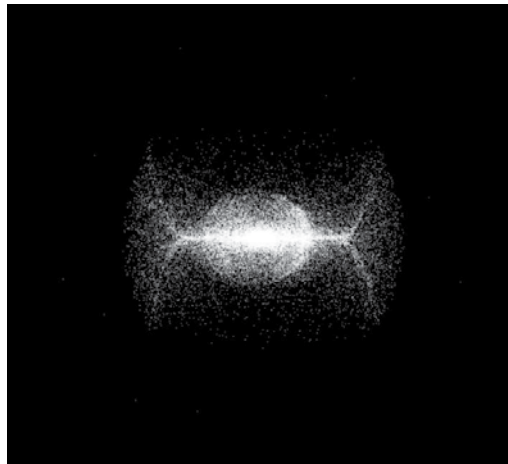
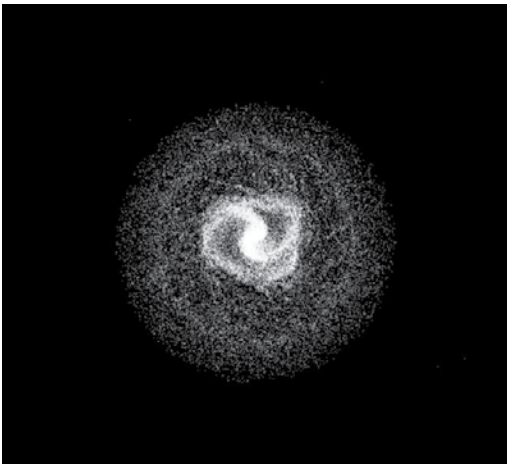
Slika 5a, b: Začetna krogelna postavitev.

na dogajanje od zgoraj, desna slika pa pogled v približno istem trenutku s strani. Pogled na začetno postavitev je skoraj enak z obeh perspektiv (sliki 5a, b), razlike so malenkostne zaradi naključne razdelitve. Po zagonu simulacije opazimo, da se telesa v sredini najprej združijo v jedro (slika 5c), pogled s strani pa odkrije, da se tudi zgornji in spodnji del krogle sesedeta proti jedru (slika 5d). Telesa daleč od osi (ob ekvatorju) se gravitaciji močneje upirajo, vseeno pa se doseže največja zgostitev na slikah 5g in 5h. V nadaljevanju lahko opazujemo vrtenje dveh spiralnih krakov (slika 5i), dokler ne zbledita v končni kroglasti obliki.

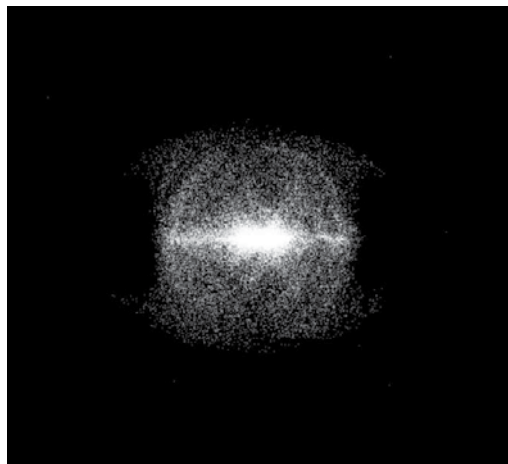
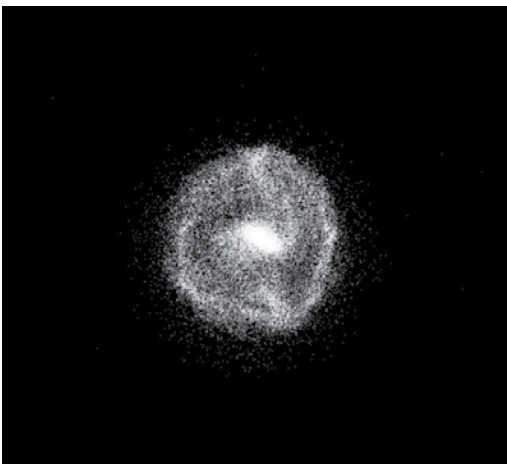
Po zagonu simulacije opazimo, da se telesa v sredini najprej združijo v jedro (slika 5c), pogled s strani pa odkrije, da se tudi zgornji in spodnji del krogle sesedeta proti jedru (slika 5d).



**Slika 5c, d:** Vrh in dno krogle padeta skupaj.

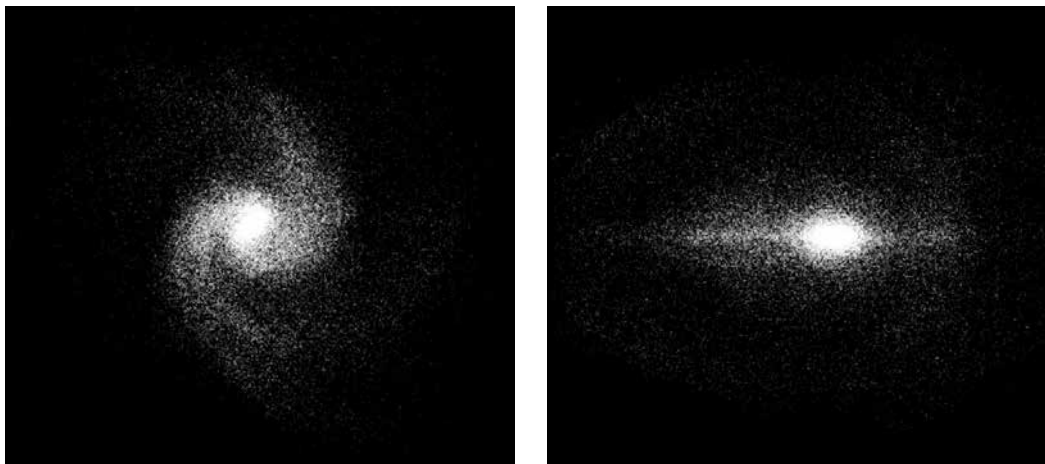


**Slika 5e, f:** Iz jedra se razvijeta manjša kraka.



**Slika 5g, h:** Največja zgostitev.



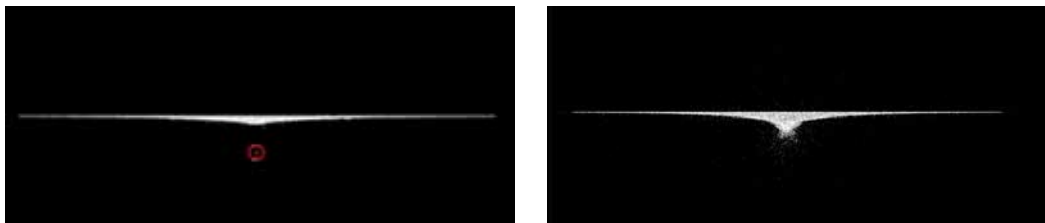


Slika 5i, j: Močna spiralna kraka.

## Disk in črna luknja

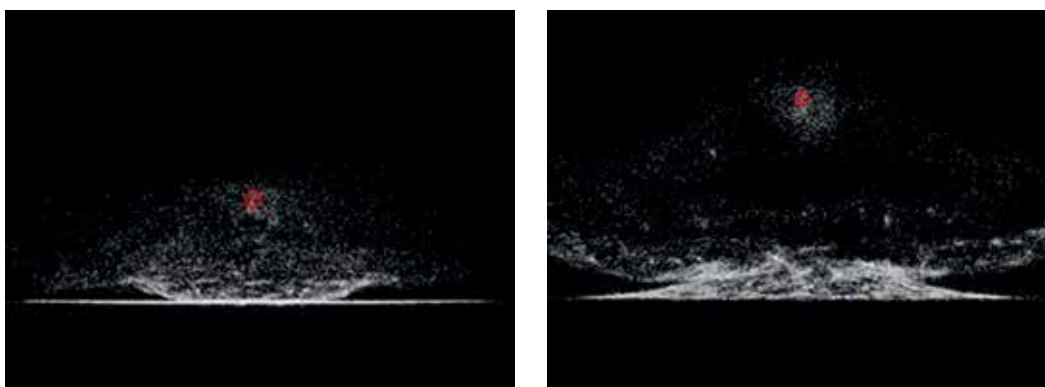
Zanimalo nas je, kolikšno hitrost bi morala imeti telesa v disku, da bi disk vsaj nekaj časa obdržal svojo značilno obliko. Preizkusili smo različne možnosti, kot najbolj zadovoljivo pa smo izbrali naraščanje hitrosti od sredne proti robu po funkciji, ki je sorazmerna s kvadratnim korenem iz radija. Proti disku s 50.000 telesi smo nato iz bližnje okolice poslali točkasto telo z maso 20.000 teles, ki predstavlja (supermasivno) črna luknja. V primerih, ko črna luknja potuje skozi sredino diska v navpični ali vodoravni smeri, pride do popolnega uničenja oblike diska. Na tisoče teles se razprši po prostoru, okrog črne luknje pa se ustvari zgoščina hitro krožečih zvezd. Slike od 6a do 6f prikazujejo primer, ko se črna luknja v navpični smeri približa sredini diska, ki leži v vodoravni ravnini. Slike od 6a do 6e prikazujejo pogled s strani, pri sliki 6f pa je »kamera« nekoliko dvignjena nad ravnino diska. Črna luknja že med približevanjem upogne disk proti sebi, tako da ta dobi obliko plitkega lijaka. Po trku se večina teles z območja jedra diska razbeži navzgor in navzven, v sredini pa zeva velika praznina, lepo vidna na sliki 6f. V nadaljevanju simulacije črna luknja z rojem ujetih zvezd odtava proč, preostala telesa pa se brez osrednje zgoščine, ki bi jih držala skupaj, porazgubijo po prostoru.

Zanimalo nas je, kolikšno hitrost bi morala imeti telesa v disku, da bi disk vsaj nekaj časa obdržal svojo značilno obliko.

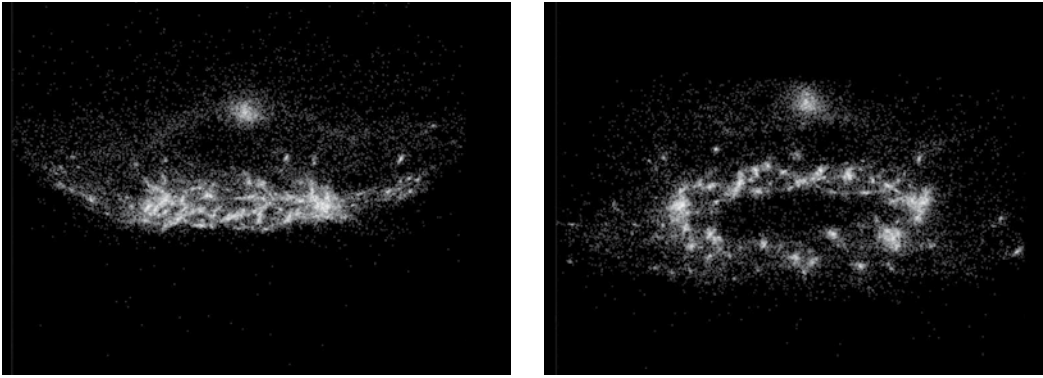


Slika 6a, b: Približevanje črne luknje disku in trenutek trka (lega črne luknje je označena z rdečim krožcem).

V primerih, ko črna luknja potuje skozi sredino diska v navpični ali vodoravni smeri, pride do popolnega uničenja oblike diska.



Slika 6c, d: Uničenje jedra diska.



**Slika 6e, f:** Pogled z oddaljenejši perspektive. Črna luknja je sredi zgoščine na vrhu slike.

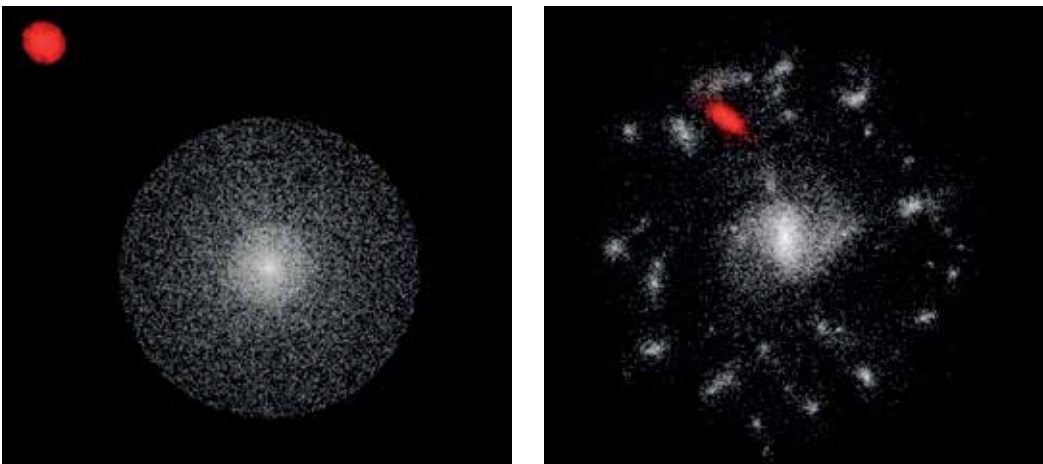
Črno luknjo smo poslali še mimo diska tako, da se je nekaj časa gibala po njegovem robu (slika 7). V tem primeru jedro »preživi«, črna luknja pa na disku vseeno pusti močan pečat.



**Slika 7:** Črna luknja potegne telesa z roba diska v »slonji rillec«.

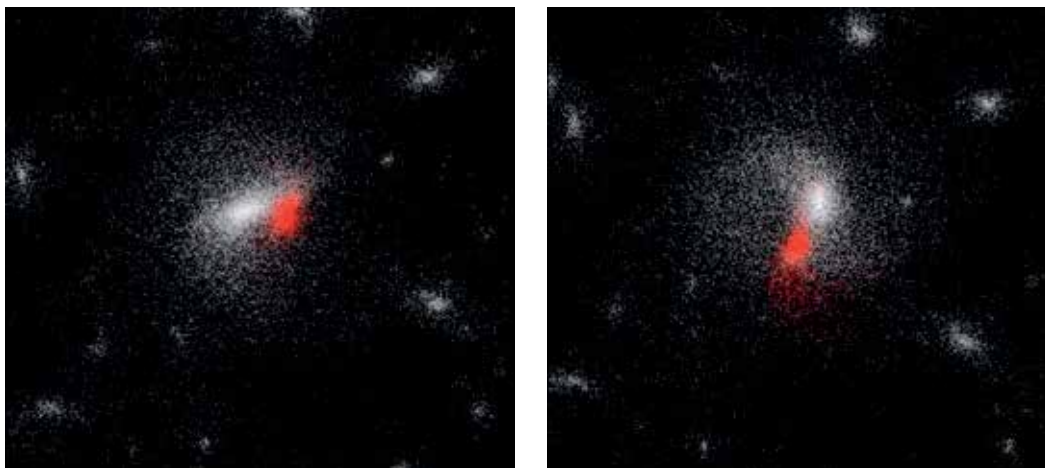
## Trk diska in krogle

V 3D-sceni smo v sredino postavili disk s 50.000 teles, na obrobje pa še 10.000 teles, razporejenih v kroglo. Telesa v krogli smo obarvali rdeče. Začetna postavitev je vidna na sliki 8a, ki

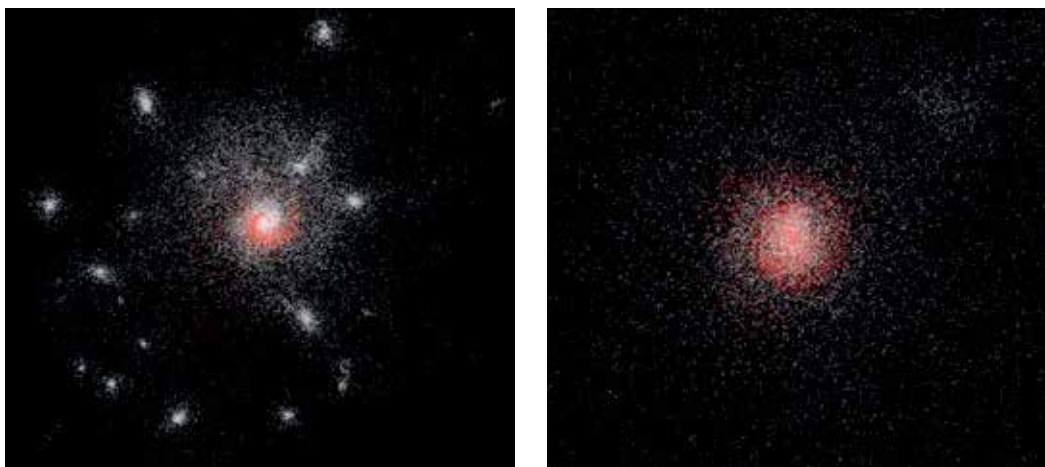


**Slika 8a, b:** Začetna postavitev in približevanje (rdeče) krogle jedru (belega) diska.

prikazuje pogled od zgoraj na ravnino diska. Središče krogle leži v isti ravnini. S takšno postavitvijo smo se hoteli približati trku dveh galaksij, recimo večje spiralne in manjše eliptične. Telesa iz diska in krogle smo obarvali različno, da bi iz simulacij lažje ocenili, kako poteka trk in kako se razporedijo telesa iz krogle v novi združbi. Jedro krogle se sprva počasi približuje jedru diska (slika 8b), po stiku obeh jedr (slika 8c) pa dogajanje postane bolj dinamično. Jedri se začneta pospešeno vrteti v smeri urinih kazalcev. Vedno večja centrifugalna sila začne razprševati šibkeje vezana telesa in obe jedri dobita širok rep (slika 8d). Ker pa jedro krogle vsebuje bistveno manj teles od jedra diska, se prej razprši med gibanjem po spirali (slika 8e).



**Slika 8c, d:** Bližja perspektiva stika obeh jedr in začetek pospeševanja v smeri urinih kazalcev.



**Slika 8e, f:** Rdeča spirala od daleč in blizu.

Slika 8f prikazuje približano jedro. Na sliki je še vidna spirala, ki pa čez čas izgine, ko se bela in rdeča telesa pomešajo v novonastalo elipsoidno zgoščino.

## Razprava

V simulacijah prihaja do primerov, ko dve telesi v paru z veliko hitrostjo v nasprotnih smereh pobegneta iz ustvarjenega 3D-prostora. To se zgodi takrat, ko se telesi zelo približata in se pospešek v kratkem času (krajšem od časovnega koraka  $\Delta t$ , poglavje 3) močno spremeni. Posledično je izračunana hitrost teles napačna (enačba 2). Telesi lahko dobijo nerealno veliko hitrost, ki ju odnese iz prostora. To je problem numeričnega računanja premikov in ga je mogoče omiliti s posebnimi prijemi, kot je »mehčanje sile« (angl. *force softening*). Vemo, da simulacije predstavljajo približek resničnega dogajanja, zato je vsak naslednji računski korak

nekoliko manj natančen. Računalniški program računa premike teles po najenostavnejši metodi numerične integracije (enačbi 1 in 2), za katero je značilno, da zaradi nenatančnosti povečuje skupno energijo sistema teles. Slika 9 prikazuje, kako program računa gibanje telesa po krožnici. Po izračunih se telo dejansko giblje po spirali navzven, a če je časovni korak kratek, je to opazno šele po večjem številu obhodov.

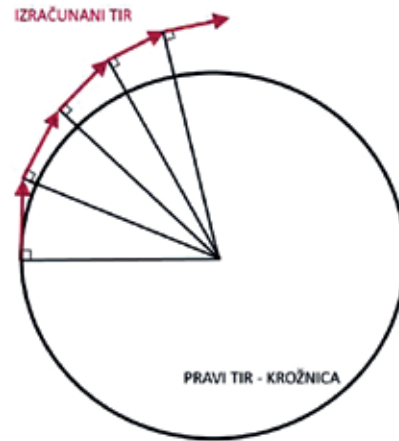
Posledica takega gibanja je povečevanje potencialne energije telesa. Zato smo preverili, kako je s skupno energijo vseh teles med simulacijami. Skupna energija je vsota potencialne in kinetične energije ter je teoretično ves čas konstantna. Potencialna energija je negativna, kinetična pa pozitivna, in dokler je skupna energija negativna, je sistem gravitacijsko vezan. Za preizkus smo vzeli disk z 10.000 telesi, začetna hitrost teles pa je naraščala od sredine proti robu sorazmerno s kvadratnim korenom iz radija. Največjo hitrost smo omejili na tako vrednost, da se je disk po zagonu simulacije začel gravitacijsko sesedati. Simulacijo smo pustili teči tako dolgo, da se je slika na zaslonu ustalila in smo lahko spremljali samo še dinamiko teles, ki jo je narekovala nastala osrednja zgoščina. Analiza vrednosti je pokazala, da se je skupna vrednost energije v tem času povečala za 35 %. Pri ogledu simulacije se to kaže tako, da se telesa postopoma izmikajo težnosti osrednje zgoščine in odtavajo iz 3D-prostora. Število teles v simulaciji se zato zmanjšuje, in če bi pustili simulacijo teči dovolj časa (recimo 10 ur), bi najbrž lahko dočakali razpad osrednje zgoščine in odhod vseh teles iz prostora. Problem omilijo natančnejše metode numeričnega integriranja, ki pa so matematično in računalniško zahtevnejše in jih v tej fazi še nismo preučili.

Poskusili smo tudi združevanje teles. Telesi, ki se dovolj približata drugo drugemu, smo združili v novo telo s skupno maso. A ta sprememba ni bistveno vplivala ne na število pobeglih teles ne na potek simulacij. Tudi testne simulacije z različnimi masami teles niso bistveno odstopale od predstavljenih simulacij s telesi z isto maso, vendar je tu še možnost za nadaljnje raziskovanje.

## Zaključek

Menimo, da smo nalogo, ki smo si jo zadali, uspešno opravili. Pri deset tisoč telesih v gravitacijski interakciji je dinamika osveževanja slike na zaslonu dovolj visoka, da lahko proces brez težav spremljamo »v živo«. Pri petdeset tisoč telesih pa smo uporabljali snemalnik zaslona *Icecream Screen Recorder* ter nato v programu *Movie maker* naredili videoposnetek z 32-kratno hitrostjo predvajanja. Ocenjujemo, da je petdeset tisoč teles optimalno število za simulacije z osebnim računalnikom glede na simulacijski čas in kakovost slike. Napisani računalniški program je dobra osnova za postopno približevanje realnejšim situacijam, kar se tiče števila teles in začetnih pogojev, vendar pa je vzporedno s tem treba razmišljati o možnostih uporabe hitrejših računalnikov in natančnejših numeričnih metod integracije.

Ta članek je povzetek raziskovalne naloge z naslovom Projekt gravitacija [7], ki je bila v šolskem letu 2017/18 izdelana na Gimnaziji Velenje in predstavljena v okviru gibanja »Mladi raziskovalci« na interdisciplinarnem področju fizike in računalništva. Kljub fizikalni tematiki je mladi raziskovalec najbolj napredoval ravno v znanju računalništva, zato se nam je zdela izbira področja ustrezna. V nalogi nismo postavili nobene hipoteze, zastavili pa smo si jasen cilj in na koncu naredili analizo doseženega. Pridobljeno znanje je zelo uporabno na več področjih in bo avtorju nedvomno zelo pomagalo pri študiju fizike.



Slika 9: Izvor napak pri računanju tira telesa.

Potencialna energija je negativna, kinetična pa pozitivna, in dokler je skupna energija negativna, je sistem gravitacijsko vezan.

## Literatura in viri

- [1] Jevšenak, P. (2017). O gravitaciji teles nepravilnih oblik. *Fizika v šoli*, 22(1), 16–21.
- [2] Jevšenak, P. (2018). Planeti v dvozvezdijh. *Fizika v šoli*, 23(1), 9–16.
- [3] <https://learnopengl.com/> (28. 10. 2017).
- [4] Wikipedia, Barnes – Hut simulation. [https://en.wikipedia.org/wiki/Barnes%E2%80%93Hut\\_simulation](https://en.wikipedia.org/wiki/Barnes%E2%80%93Hut_simulation) (30. 11. 2017).
- [5] Ventimiglia, T., Wayne, K. (2012). The Barnes-Hut Algorithm. <http://arborjs.org/docs/barnes-hut> (30. 11. 2017).
- [6] Naključna porazdelitev teles po notranjosti krogle. <http://mathworld.wolfram.com/SpherePointPicking.html> (4. 12. 2017).
- [7] Jevšenak, L. (2018). *Projekt gravitacija, raziskovalna naloga*. Velenje: Šolski center Velenje.



Konferenca NAK – za učitelje naravoslovnih predmetov

# NAPOVEDUJEMO

## 5. konferenco učiteljev naravoslovnih predmetov – NAK 2019

Laško, 23. in 24. oktober 2019



Zavod  
Republike  
Slovenije  
za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI SKLAD  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Naložbo sofinancirata Republika Slovenija in Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada