

Matematika v šoli

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2020, letnik 26

2

IZ TEORIJE ZA PRAKSO

Razvijanje matematičnih znanj z reševanjem problemov

IZ RAZREDA

Problemska naloga
v fazi poglobljanja
in povezovanja
matematičnih znanj

Od načrtovanja do
poučevanja verjetnosti
v 9. razredu

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO

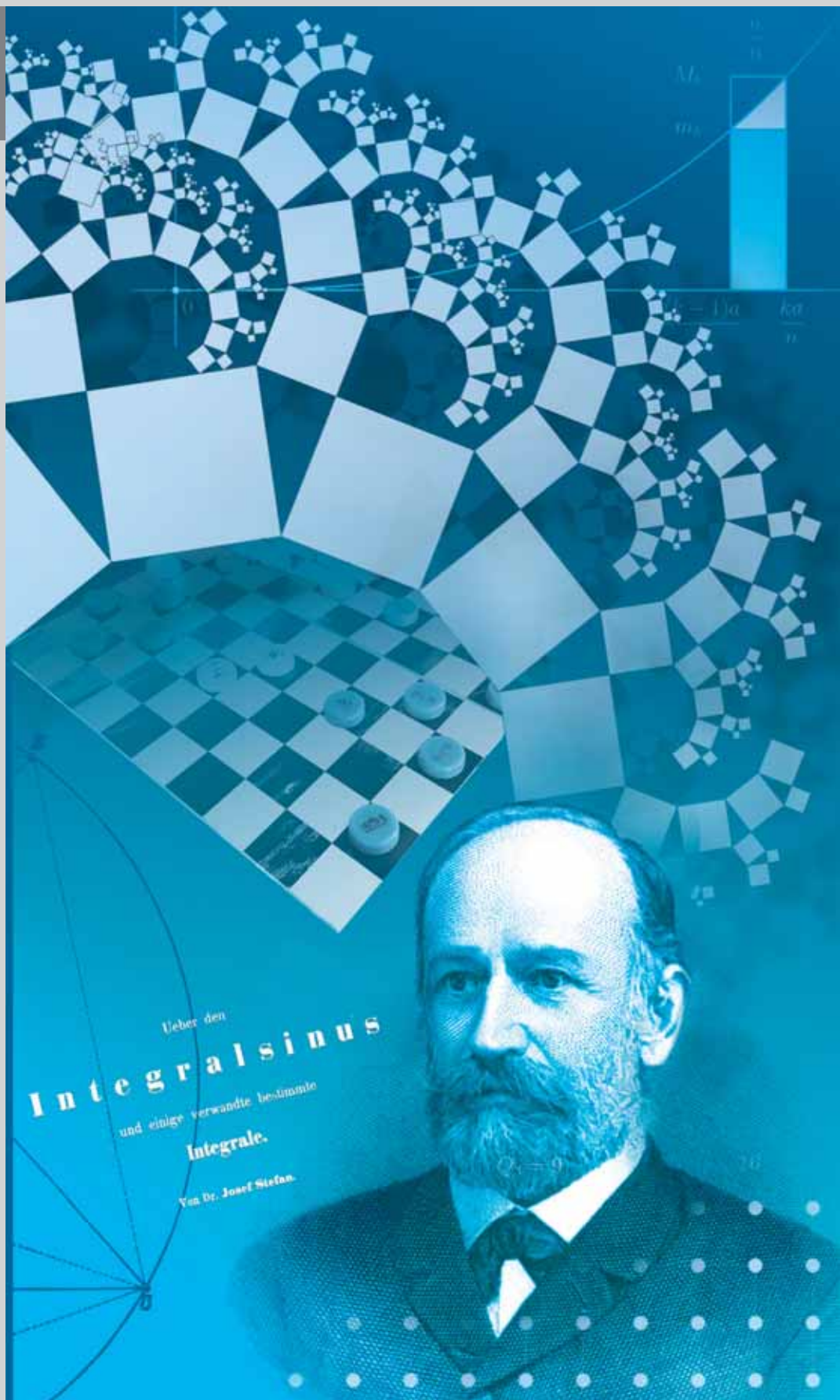
Jožef Stefan
predava matematiko

NOVICE

V spomin
dr. Marjanu Jermanu



Zavod
Republike
Slovenije
za šolstvo



VSEBINA

mag. Mateja Sirnik

Kaj je nič?

IZ TEORIJE ZA PRAKSO

dr. Samo Repolusk

Razvijanje matematičnih znanj z reševanjem problemov 2

O priročniku *Ugotavljanje matematičnega znanja* 9

mag. Mojca Suban

Preiskovalne naloge pri matematiki 10

dr. Marko Razpet

Potenčne funkcije in kovinska razmerja 16

IZ RAZREDA

Loreta Hebar

Preiskovalna naloga o množenju z decimalnimi števili v 6. razredu 21

Urška Rihteršič

**Preiskovalna naloga v podporo razvoju procesnih znanj
v 2. letniku gimnazijskega programa** 26

mag. Simona Pustavrh

Problemska naloga v fazi poglobljanja in povezovanja matematičnih znanj 28

Ana Cencelj

Od načrtovanja do poučevanja verjetnosti v 9. razredu 35

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO

dr. Stanislav Južnič

Jožef Stefan predava matematiko 47

NOVICE

Simona Klasinc

Evropske statistične igre, tekmovanje srednješolcev 54

dr. Borut Jurčič Zlobec

**Raziskovalne naloge iz matematike na
Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2020** 56

V spomin dr. Marjanu Jermanu 60



ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
 letnik XXVI, številka 2, 2020

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
 Predstavniki: dr. Vinko Logaj

Odgovorna urednica: mag. Mateja Sirmik, Zavod RS za šolstvo
 Uredniški odbor:
 dr. Darja Antolin Drešar, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta,
 mag. Melita Gorše Pihler, Zavod RS za šolstvo,
 mag. Valentina Herbay, Zavod RS za šolstvo,
 Silva Kmetič,
 Sabina Kumer, Šolski center Krško – Sevnica,
 dr. Zlatan Magajna, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta,
 mag. Sonja Rajh, Zavod RS za šolstvo,
 Simona Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem,
 dr. Lucija Željko, Osnovna šola Dravljje,
 dr. Herremans Adriaan, Universiteit Antwerpen, Belgija,
 dr. Evgenia Sendova, Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian
 academy of Sciences, Bolgarija.

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj in Vanja Kavčnik Kolar
 Prevod povzetkov v angleščino: Enisra prevajanje, Brigita Vogrinec Škraba, s. p.
 Urednica založbe: Andreja Nagode
 Oblikovanje: Simon Kajtna
 Fotografije: avtorji člankov, Drago Jovič
 Računalniški prelom: ABO grafika, d. o. o., zanj Igor Kogelnik
 Tisk: Tisk Žnidarič, d. o. o.
 Naklada: 520 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
 Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Kidričeva 53,
 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirmik@zrss.si
 Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana,
 faks: 01/30 05 199, e-naslov: zaloza@zrss.si
 Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične
 osebe, 8,50 € za študente, dijake in upokojenke. Cena posamezne številke v prosti
 prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za
 kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v
 mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database,
 Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic
 System and Services (COBISS)

© Zavod Republike Slovenije za šolstvo, 2020

Vse pravice pridržane. Brez založnikovega pisnega dovoljenja ni dovoljeno
 nobenega dela te revije na kakršenkoli način reproducirati, kopirati ali kako
 drugače razširjati. Ta prepoved se nanaša tako na mehanske oblike reprodukcije
 (fotokopiranje) kot na elektronske (snemanje ali prepisovanje na kakršenkoli
 pomnilniški medij).

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Kaj je nič?

Kakšno vprašanje je to, filozofsko ali matematično? Kdaj nič postane število? Pretekla so stoletja, da smo prišli od pomena *nič* kot *količine pšenice v shrambi* do *števila nič*, ki ga uporabljamo za računanje.

Svoje življenje je število nič začelo tako, da je zaznamovalo prazno mesto pri Babilonskih matematikih. S tem je sprožalo različne filozofske razprave, s praznim mestom pa je dokazovalo svojo prisotnost. Torej če nečesa ni, pomeni, da *nič* obstaja. Med rimskimi števili nimamo ničle, današnji znak in uvedbo ničle kot števila pa pripisujemo indijskim matematikom. Naslednji korak je bil narejen, ko so sistem števil v 19. stoletju posplošili v današnjo algebro kolobarjev in obsegov, kjer je nič poseben element teh urejenostnih struktur, običajno poimenovan ničla kolobarja ali obsega.

Kaj pa nam v tem času pomeni *nič*? Mogoče to, da ni učencev v matematičnih učilnicah, skoraj nedosegljiv cilj pa nam gotovo predstavlja nič obolelih za virusom covid-19. S pozitivnim pogledom pa zapišimo, da bo zagotovo število obolelih v odvisnosti od časa limitiralo proti nič.

V tej številki revije Matematika v šoli lahko rečemo, da imamo več kot nič. Za vas smo pripravili prispevke, ki so lahko izhodišče za načrtovanje raznolikih učnih izkušenj za vaše učence in dijake. Ena od učnih izkušenj tudi v tem času je lahko učenje s preiskovanjem in reševanje različnih problemov v matematičnem ali nematematičnem kontekstu. Še več učnih izkušenj je opisanih v priročniku *Ugotavljanje matematičnega znanja*, ki ga predstavimo v reviji. Z reševanjem zahtevnejših matematičnih problemov se učenci ukvarjajo v raziskovalnih nalogah, ki so predstavljene na Srečanju mladih raziskovalcev. Predstavljena je vsebina teh najuspešnejših matematičnih orehov. Eden od matematičnih raziskovalcev v naši zgodovini je bil dr. Jožef Stefan, opisano je njegovo življenje in matematično delo. Zagotovo je trud učiteljev in učencev v tem času lahko samo nasprotje od nič, zato smo v podporo poučevanju matematike na daljavo zbrali informacije, ki so nadaljevanje vsebine iz prejšnje številke.

Vabljeni k branju.

mag. Mateja SIRNIK, odgovorna urednica

Mateja Sirmik

Spoštovane bralke in bralci,

tokrat smo vam poslali **revijo brez zaščitne folije**. Za to smo se odločili po premisleku zaradi škode, ki jo le-ta povzroča. Na leto namreč razpošljemo prek **14.000** izvodov revij, zaviti v folijo.



Zavedamo se, da se nezaščiten revija lahko pri dostavi poškoduje, pa vendar se nam to zdi sprejemljivo v primerjavi s škodo, ki jo 14.000 zaščitnih folij povzroča okolju.

Upamo, da boste našo odločitev sprejeli z razumevanjem.

Na e-naslovu zaloza@zrss.si bomo veseli vašega odziva.



Razvijanje matematičnih znanj z reševanjem problemov

dr. Samo Repolusk
Škofijska gimnazija Antona Martina Slomška Maribor

»Pomagaj mi, da naredim sam.«
(pedagoško načelo pedagogike Montessori)

Izvleček

Uspešnost učencev pri matematiki je tesno povezana z njihovim odnosom in predstavami o matematiki: eden od hudomušnih rekov, ki lahko razkriva tudi učiteljevo bolj ali manj (ne)zavedno dojemanje matematike in posledično določa njegov način poučevanja, pravi: »Matematika ni računanje, ampak umetnost o tem, kako se izogniti računanju«. Sistematično razvijanje problemskih znanj pri pouku in prikazi uporabe različnih strategij za reševanje matematičnih problemov so v praksi eden težje uresničljivih ciljev pri pouku matematike. V članku so najprej definirani nekateri osnovni pojmi teorije reševanja problemov, v nadaljevanju pa je predstavljen eden od možnih naborov strategij reševanja problemov (povzet po ameriškem združenju NCTM) z zgledi uporabe strategij in primeri preiskovalnih nalog.

Ključne besede: matematični problemi, strategije reševanja problemov, matematična znanja, problemska znanja, matematična preiskovanja, pouk matematike

Developing Mathematical Knowledge through Problem Solving

Abstract

Students' performance in mathematics is closely related to their attitude towards and notions of mathematics. A witty saying, which also reveals the teacher's more or less (sub)conscious perception of mathematics and consequently determines the teacher's teaching style, goes: »Mathematics isn't arithmetic but the art of how to avoid arithmetic.« Systematic development of problem-solving knowledge in class and demonstrating the application of various strategies in solving mathematical problems is one mathematics objective that is harder to achieve in practice. The article begins by defining some of the basic concepts of the theory of problem-solving and continues with a presentation of possible problem-solving strategies (taken from the American association NCTM), providing examples of strategy use and of investigative tasks.

Keywords: mathematical problems, problem-solving strategies, mathematical knowledge, problem-solving knowledge, mathematical investigations, mathematics lesson

Uvod

Ukvarjanje z matematiko je v svoji osnovi ustvarjalen proces. Poleg uporabne vrednosti, ki jo matematika predstavlja s svojim abstraktnim in eksaktnim jezikom (orodjem) opisovanja družbenih in naravnih pojavov s pomočjo modelov, lahko nudi reševalcu tudi posebno notranje zadovoljstvo – človeku odstira nova obzorja in čutenja, podobno kot glasba, slikarstvo in druge umetnosti. Tako kot vsakdanje človeško znanje in modrost, se tudi matematično znanje v osnovi razvija po dveh poteh: na eni strani s ponavljanjem preizkušenih vzorcev in načinov razmišljanja, ki človeku omogočajo stabilno dojetje strukture sveta (pri matematiki npr. razvoj proceduralnih znanj), po drugi strani pa s soočanjem z novimi situacijami, kjer je človek v luči »preživetja« ali »novega spoznanja« prisiljen mobilizirati svojo ustvarjalnost in povezati obstoječe znanje v nekaj kakovostno novega. Slednje pri matematiki predstavljajo problemska znanja (Magajna, 2003).

Matematični problemi in problemska znanja

V nadaljevanju nas bo zanimala druga pot razvoja matematičnih znanj: osredotočili se bomo na opazovanje **razvoja matematičnih znanj skozi reševanje problemov**. Motivacijo za spodbujanje reševanja problemov pri pouku matematike pa si oglejmo ob naslednjih dveh vprašanjih:

1. Kateri od spodaj naštetih možnosti A ali B sta bližji mojemu dojetanju sveta?

Zgled 1:

- A. 15-letna hčerka: »Mama, lačna sem.« Mama: »Že hitim, že hitim!« In hčerka na kavču počaka in gleda mamo, kako kuha odlično kosilo. Ko je končano, mama pripravi krožnike in pribor ter hčerko povabi k mizi. Prinaša hrano, odnaša umazano posodo in na koncu še vpraša: »Ali ti lahko ponudim še kakšno sladico?« Po kosilu pa mama pospravi mizo in opere vso posodo. Hčerka je vesela, ker ima tako ljubečo mamo, ki naredi vse.
- B. 15-letna hčerka: »Mama, lačna sem.« Mama: »Pridi v kuhinjo. Danes boš kosilo naredila ti. Jaz bom s teboj in ti pomagala, če boš potrebovala mojo pomoč.« Hčerka naredi kosilo – ne še sicer tako okusno kot mama, a zadovoljni sta obe. Posodo umijeta skupaj.

Zgled 2:

- A. Pridem v galerijo. K meni takoj pristopi kustos in me vodi od slike do slike ter razlaga pomen in zgodovino vsake od njih. Celo abstraktne motive mi vse tako lepo razloži, da si mi ni treba razbijati glave z iskanjem pomena.
- B. Pridem v galerijo. K meni pristopi kustos in reče: »Vzemite si eno uro in uživajte ob slikah, nato pa bova šla skupaj k vsaki sliki in povedala nekaj o njeni zgodovini, vi pa o vaših občutkih ob njej.« In tako storiva.

2. Vprašanje učitelja: »Kaj je matematika?« Odgovor učenca: »Matematika je računanje.« Ali je to res največji intelektualni domet, ki bi ga kot učitelji matematike želeli videti pri svojih učencih za njihovo popotnico v širni svet?

Odgovori na zgornja vprašanja opredeljujejo naš temeljni pogled na vlogo matematike kot šolskega predmeta v življenju otroka in mladostnika. Ker bomo v nadaljevanju predstavili nekatere spodbude za razvoj čim širšega spektra matematičnih znanj, že v uvodu navedimo **dva izmed različnih možnih načinov razvijanja matematičnih znanj**, ki sta dokaj preprosta in učinkovita, a v praksi morda ne dovolj izkoriščena:

- **Reševanje nalog s prikazom uporabe različnih strategij reševanja problemov:** poleg rutinskega obvladovanja temeljnih matematičnih pojmov in procedur na izbrani način lahko nekatere naloge rešimo na dva ali celo več različnih načinov z uporabo različnih strategij.
- **Odkrivanje novih matematičnih konceptov s preiskovanjem (raziskovanjem):** metoda reševanja problemov, med katere sodi matematično preiskovanje, je lahko alternativa metodi razlage in deduktivnemu vpeljevanju novih pojmov.

Po teh uvodnih premislekih si poglejmo pomen nekaterih temeljnih pojmov, o katerih bomo govorili; pri tem bodo predstavljena teorija in primeri povzeti večinoma po avtorjih Magajna (2003) in Posamentier s sodelavci (1998, 2006) oz. virih, navedenih na koncu članka.

Reševanje problemov je že od nekdaj eden izmed **ciljev pouka matematike**, v zadnjih letih pa tudi vedno pogostejša in pričakovana **metoda poučevanja matematike v šolah** – »poučevanje matematike preko reševanja problemov«. Kaj si lahko predstavljamo pod pojmom »matematični problem«? Oglejmo si naslednja dva zgleda:

Zgled 3: Danih 9 točk povežite s samo štirimi ravnimi črtami, pri čemer med risanjem ne smete odmakniti pisala z lista.



Zgled 4: Poiščite vse pare praštevil, katerih vsota je 999.

Razmislimo, kaj je bil skupni imenovalc občutkov, ki smo jih doživeli ob prebiranju besedila obeh nalog. Ko si pri sebi odgovorimo, lahko pogledamo še nekoliko formalnejšo opredelitev temeljnih pojmov (Magajna, 2003):

- **problem** v najširšem smislu je notranji občutek nelagodja, ki v človeku vzbudi željo po tem, da problem reši;
- **problemska situacija** so objektivne okoliščine, ki v človeku povzročijo občutek nelagodja in željo po reševanju, sam problem pa je človekovo subjektivno doživljanje situacije;
- če poskušamo situacijo preseči tako, da uporabimo tudi ali predvsem **matematična orodja**, govorimo o **matematičnem problemu**.

Pomembno se je zavedati, da lahko dano situacijo neka oseba doživi kot matematični problem, druga kot nematematični problem, za tretjo pa je lahko situacija povsem neproblematična!

Rešiti matematični problem pomeni poiskati pot v skladu s pravili gibanja med stanji, ki povezujejo izhodiščno in ciljno stanje. Množico vseh stanj, kjer se bomo med reševanjem gibali, imenujemo **problemski prostor**. O **problemu** govorimo takrat, kadar **ne vidimo takoj poti do rešitve** (Magajna, 2003).

Zgled 5: Vzemimo primer naloge »Reši linearno enačbo $3x + 1 = x - 7$ «. Če je učenec pravkar spoznal pravila za tvorbo ekvivalentnih enačb in želi s tem znanjem rešiti linearno enačbo, lahko to doživi kot matematični problem. Izhodiščno stanje je enačba $3x + 1 = x - 7$, ciljno stanje pa zapis $x = -4$. Problemski prostor je množica linearnih enačb in med stanji problemskega prostora se lahko gibamo le po pravilih za tvorbo ekvivalentnih enačb.

Matematične probleme lahko **razdelimo** po različnih kriterijih (Magajna, 2003):

- **Rutinski in nerutinski problemi:** pri rutinskih je reševalcu pot reševanja vnaprej jasna (in gre torej prej za vaje kot prave probleme). Stopnja »rutinskosti« je seveda odvisna od znanja in izkušenj reševalca.
- **Zaprti in odprti problemi:** kadar je cilj natančno določen, govorimo o zaprtem problemu, kadar pa je cilj zastavljen le okvirno, govorimo o odprtem problemu. Pri preiskovanju odprtega problema si reševalec sam zastavi cilje in jih skuša doseči.
- **Glede na določenost izhodiščnega stanja:** v izhodišču so lahko podani natanko tisti podatki, ki so za rešitev naloge potrebni in zadostni, lahko pa nastopajo tudi odvečni ali pa nepopolni podatki.
- **Vodeni in nevodeni problemi:** pri vodenih problemih je reševalec s podvprašanji ali pa učiteljevo pomočjo usmerjan od izhodišča k cilju, pri nevodnih problemih pa takšne pomoči ni.

Zgled 6:

»Razišči pravokotnike s ploščino 56 cm^2 « je primer nerutinskega odprtega problema, ki ga lahko rešujemo vodeno ali nevodeno.

Zgled 7:

»Kdaj je polinom $p(x) = (b - 1)^2 x^{2021} - bx^{110} + 3$, kjer je b realno število, deljiv s polinomom $q(x) = x + 1$?« je primer zaprtega nerutinskega problema.

Problemska znanja so znanja, ki presegajo zgolj poznavanje in razumevanje matematičnih dejstev ter tekoče izvajanje postopkov, ampak omogočajo reševanje nerutinskih problemov in uporabo matematičnega znanja v novih situacijah. Mednje sodijo (Magajna, 2003):

- **Miselne veščine in procesna znanja:** obvladovanje organizacijskih in dokumentacijskih procesov (beleženje, razvrščanje ...), komunikacijskih procesov (poslušanje, branje, usklaje-

vanje pogledov), višjih miselnih procesov (analogno mišljenje, indukcija, dedukcija, vizualizacija, kritično mišljenje). Organizacijske, dokumentacijske in komunikacijske procese je mogoče poučevati, težje pa je poučevanje in učenje višjih miselnih procesov.

- **Metakognitivna znanja:** metakognicija je sposobnost in navada predvidevanja, načrtovanja reševanja, nadzorovanja, ocenjevanja poteka reševanja in kognitivnega nadzora. Pri pouku matematike je možno doseči izboljšanje metakognitivnih znanj tudi na naslednje načine: učiteljevo glasno razmišljanje med demonstracijo reševanja problema, zastavljanje vprašanj o metakognitivni ravni reševanja (Kaj počneš sedaj?, Zakaj to počneš?, Kako ti bo to pomagalo pri končni rešitvi?, ipd.), pisanje eseja ...
- **Strategije in hevrstike:** strategije so splošni scenariji poteka razmišljanja v celotnem postopku reševanja, hevrstike pa tehnike odločanja, ko pri reševanju naletimo na določno oviro.

Med naštetimi problemskimi znanji si nekoliko podrobneje oglejmo strategije in hevrstike – za učinkovito reševanje problemov naj bi namreč učitelj seznanil učence tudi z njimi, še prej pa jih mora seveda dovolj dobro poznati in uporabljati tudi sam.

Strategije in hevrstike reševanja problemov

Pri reševanju problemov običajno ne uporabljamo ene same strategije, ampak **kombinacijo različnih strategij**. Enega prvih algoritmov reševanja problemov predstavlja pet korakov reševanja problemov po Deweyju, ki jih je predstavil v knjigi *How We Think* leta 1910:

1. Zavedanje, da problem obstaja – zavedanje težavnosti, občutka frustracije, čudenja ali dvoma.
2. Identifikacija problema – razčiščevanje in definiranje problema in cilja, ki ga določa dani problem.
3. Uporaba predhodnih izkušenj, relevantnih informacij, prejšnjih rešitev ali idej za oblikovanje hipoteze in načrta reševanja problema.
4. Sistematično preizkušanje hipotez ali možnih rešitev. Če je potrebno, tudi preoblikovanje problema.
5. Evalvacija rešitve in zapis zaključkov na podlagi dejstev. To vključuje tudi usvojitev uspešne rešitve ali strategije in njeno uporabo v drugih podobnih problemih.

Kasneje je podobno sistematičen nabor tehnik odločanja (**hevrstik**) predstavil Polya v knjigi *How to Solve it* leta 1945:

1. Poskusi razumeti problem. Katere so neznanke? Kateri so podatki? Kakšni so pogoji? Nariši skico, vpelji ustrezne oznake. Razlikuj različne dele pogojev.
2. Izdelaj si načrt. Poišči zveze med podatki in neznankami. Ali si podoben problem srečal že kdaj prej? Ali poznaš soroden problem?
3. Izvedi načrt. Vsak korak preveri. Ali lahko vidiš, da je vsak korak pravilen? Ali lahko dokažeš, da je vsak korak pravilen?

4. Poglej nazaj. Razišči dobljeno rešitev. Ali lahko preveriš rezultat? Ali lahko preveriš argumente? Ali lahko dobiš rezultat še na drug način? Ali lahko uporabiš rezultat ali metodo pri katerem drugem problemu?

V novejšem času se lahko ozremo po seznamu **strategij reševanja problemov**, ki so povzete po dokumentu NCTM *Principles and Standards for School Mathematics* (Posamentier in drugi, 2006):

1. Delo nazaj
2. Opazovanje vzorca in iskanje pravila
3. Pogled z drugega zornega kota
4. Reševanje enostavnejšega analognega problema (brez izgube za splošnost)
5. Preučevanje ekstremnih primerov
6. Risanje slike (vizualna reprezentacija)
7. Pametno ugibanje in preizkušanje (vključno s približnim ocenjevanjem)
8. Obravnavanje vseh možnosti
9. Urejanje podatkov
10. Logično sklepanje

V nadaljevanju si bomo pogledali konkretne primere reševanja matematičnih problemov z uporabo pravkar naštetih strategij, pred tem pa si pogledajmo še en pogled na možno razvijanje kompleksnejših matematičnih znanj. Benson (2005) predstavi nekatere koristne **načine variiranja primerov** v procesu reševanja matematičnega problema:

- **Preučevanje posebnih primerov.** Včasih lahko dobimo idejo za splošen pristop k reševanju problema tako, da se pri preiskovanju omejimo na posebne primere, ki so lažje obvladljivi (tj. na podmnožice preučevanih objektov), npr. namesto trikotnikov v splošnem obravnavamo le pravokotne trikotnike, namesto realnih števil se najprej omejimo na racionalna ali celo le na naravna števila, namesto poljubnih zaporedij najprej obravnavamo le aritmetična (t. i. vertikalno preiskovanje od zgoraj navzdol).
- **Posploševanje.** Nove poglede na zastavljen problem lahko odkrijemo z »rahljanjem« pogojev in predpostavk, npr. če smo neko lastnost odkrili pri pravokotnih trikotnikih, nas lahko zanima obstoj te lastnosti pri poljubnih trikotnikih ali celo pri večkotnikih (t. i. vertikalno preiskovanje od spodaj navzgor).
- **Variiranje parametrov.** Vhodnim podatkom pri predpostavkah variiramo vrednosti in s tem modificiramo domeno problema, kar nas lahko pripelje do novih uvidov in pomaga pri preverjanju območja veljavnosti (domene) zastavljene hipoteze o rešitvi problema. Npr. če se problem nanaša na pravokotne trikotnike, preverimo tudi stanje pri ostrokotnih trikotnikih, če velja lastnost za soda števila, preverimo tudi veljavnost za liha, če velja lastnost za pokončne stožce, jo preverimo tudi za poševne (t. i. horizontalno preiskovanje na istih ravneh).

- **Preverjanje enoličnosti.** Če nas problem sprašuje le o tem, ali lahko nekaj naredimo, se je smiselno vprašati, ali oziroma kdaj lahko to naredimo na en sam, oziroma več različnih načinov.

Ob sklepu predstavitve nekaterih temeljnih pojmov reševanja matematičnih problemov se ustavimo še ob nekaterih kritičnih premislekih.

Nekatere dileme pri razvijanju problemskih znanj

Zgolj učenje strategij in hevristik ne zadošča za bistveno izboljšanje zmožnosti reševanja problemov iz vsaj treh razlogov (Magajna, 2003):

1. Mnoge hevristike so miselno prezahtevne za osnovnošolce in večino srednješolcev.
2. Miselne strategije se pogosto razume kot recepte in navodila za delo namesto kot napotke za razmišljanje; pri njih ne gre za korake, ki jim je treba pri reševanju slediti v danem zaporedju, ampak za premisleke, ki jih med reševanjem spreminjamo, dodelujemo in se k njim večkrat vračamo.
3. **Strategije predpostavljajo dobro poznavanje obravnavane problematike** (ustrezna vsebinska znanja) in izkušnje.

Velik pomen baze znanja (tj. vsebinska znanja in izkušnje) pri reševanju problemov med ekspertom in povprečnim reševalcem lahko ponazorimo na naslednjem zgledu:

Zgled 8: Izraz $\binom{n}{2}$ pomeni povprečnemu reševalcu formulo $\frac{n(n-1)}{2}$, uspešnejši reševalec pa v tem binomskem simbolu »vidi« tudi: število vseh parov v množici z n elementi, število daljic med n točkami, vsoto $1 + 2 + \dots + (n-1)$, povezal ga bo s številom povezav v n -kotniku in še s čim. Boljši reševalec ima več vsebinskih znanj, več izkušenj in predvsem dobro shematizirane in povezane matematične pojme, ki so povezani glede na pomembne lastnosti – temu rečemo globinsko znanje. **Zato je dilema, ali naj se v šoli bolj poudarjajo vsebinski ali pa procesni cilji, v resnici zavajajoča, saj je potrebno oboje.**

Od problemskega pristopa pri pouku matematike ne smemo pričakovati preveč, saj od reševalcev zahteva globinsko znanje. Namen take obravnave ni samostojno odkrivanje matematičnih znanj, temveč kvalitetnejša izgradnja matematičnega znanja preko intenzivne interakcije med učenci samimi in učiteljem (Magajna, 2003).

Stališča, predsodki in čustva (nekognitivni vzgibi) so prav tako močan dejavnik uspešnega reševanja problemov, česar se učitelji morda premalo zavedamo. Mnogo predsodkov izvira iz otrokovih izkušenj pri pouku matematike in iz vsakdanjega življenja (odnos družbe do znanja). **Učiteljeva naloga** je torej tudi zagotavljanje takšnega učnega okolja, v katerem se pri **učencih razvija pozitiven odnos do matematičnega znanja** in v katerem v sebi vidijo **uspešnega reševalca problemov** (Magajna, 2003).

Navedimo še nekatere najpogostejše izražene **pomislike učiteljev ob reševanju problemov** pri pouku matematike, ki jih skupaj s svojimi odgovori nanje predstavi Burnsova (2000):

- »Reševanje problemov je časovno zahtevno. Učenci ne obvladajo niti osnovnih aritmetičnih operacij, hkrati pa učni načrti učiteljem nalagajo vedno nove zahteve.« Protiargument: Tudi zgolj osnovne aritmetične zmožnosti učencev ne pripravijo na reševanje problemov in kompleksnih realnih situacij, ki jih bodo srečevali v življenju in pri študiju.
- »S pisnimi preizkusi lahko najbolj objektivno preverjamo predvsem osnovna in proceduralna znanja, hkrati pa smo učitelji pod nenehnim pritiskom okolja, da naj učence dobro naučimo in potem ocenjujemo predvsem osnovna znanja brez zapravljanja časa za kompleksnejše in zahtevnejše vsebine.« Protiargument: S pisnimi preizkusi bi morali preverjati doseženost ciljev po učnem načrtu, zato morajo biti testi podrejeni temu in ne da tipi nalog v testih diktirajo način in vsebine poučevanja.
- »Starši pričakujejo od učiteljev matematike, da njihove otroke naučijo predvsem aritmetičnih veščin, ker so se tudi sami učili predvsem te vsebine, ne pa da učitelji »eksperimentirajo« z »neotipljivim« reševanjem problemov.« Protiargument: Cilji pouka v šolah niso nekaj statičnega: potrebe današnje družbe so drugačne, kot so bile pred 40 leti. O tem je treba poučiti tudi starše. Svet postaja kompleksnejši in bolj povezan, tehnološki napredek pa je skokovitejši kot kadarkoli v preteklosti, zato izolirana in zgolj elementarna znanja ne zadoščajo za učinkovito spoprijemanje z izzivi današnjega sveta.
- »Reševanje problemov je lahko zelo težko za učence z manjšimi matematičnimi zmožnostmi in šibkejšim predznanjem – pri njih je čas koristneje porabiti za utrjevanje temeljnih konceptov.« Protiargument: Namesto nenehnega dodajanja ur učne pomoči matematično šibkejšim učencem je treba premisliti, kaj ti v resnici potrebujejo – aritmetične zmožnosti so orodja. Vrednost orodja je uporabnost. Zmožnost zgolj računanja »s papirjem in svinčnikom« učencem ne bo prav nič pomagala brez razvite zmožnosti interpretiranja problemov, analize, kaj je treba storiti in vrednotenja rešitev. Če problem zahteva aritmetične operacije, je lahko za učno šibkejšo učence tudi računalno smiselno orodje. Vedno znova je koristen premislek o tem, kaj so temeljni cilji pouka matematike.
- »Nekateri učitelji niso zelo domači v posameznih matematičnih vsebinah in se počutijo neprijetno pri poučevanju tistega, kar slabše razumejo. Posledica tega je strah ali celo sovraštvo do predlogov novih pristopov. Vsi učitelji znajo aritmetiko, niso pa vsi domači na nekaterih drugih področjih (kot je reševanje problemov, logika, medpredmetno povezovanje, matematika v kontekstu, besedilne naloge ...), zato ni pošteno od učiteljev pričakovati, da učijo tisto, česar ne razumejo.« Protiargument: Vsi učitelji, ki so odgovorni za poučevanje matematike, se dnevno soočajo z izzivom razumljive vpeljave pomembnih matematičnih konceptov in motiviranja učencev za pozitivno doživljanje in uživanje ob matematiki. To je del vseživljenjskega izpopolnjevanja v vseh poklicih, zato tudi pedagoška zmožnost poučevanja matematike ni nekaj, kar enkrat »usvojiš«, potem pa ne rabiš več napredovati in se nič novega naučiti – takih poklicev pri odgovornem in pomembnem delu z ljudmi preprosto ni. Učitelji, ki se ne čutijo dovolj močne na kakšnem področju, imajo možnost in dolžnost profesionalno napredovati s pomočjo matematičnih tečajev, seminarjev, konferenc, delavnic itd.

Zgledi uporabe strategij pri reševanju problemov

V nadaljevanju si bomo na konkretnih primerih matematičnih problemov ogledali možnosti uporabe različnih strategij in s tem različnih poti k rešitvi istega problema (prim. Posamentier in drugi, 1998).

Zgled 9: V sobi z 10 osebami se vsaka oseba rokuje z drugo osebo natanko enkrat. Koliko je vseh rokovanj?

- Uporabimo **risanje slike** in **obravnavo vseh možnosti** z 10-kotnikom in povezavami iz vsake točke: iz prve 9 povezav, iz druge še 8 povezav, itd., na koncu dobimo $9 + 8 + \dots + 1 = 45$ povezav.
- Uporabimo **logično sklepanje**: vsaka izmed 10 oseb se rokuje s preostalimi 9, torej je vseh rokovanj $10 \cdot 9 = 90$, vendar smo pri tem rokovanje med osebama A in B šteli dvakrat, zato je vseh različnih rokovanj v resnici $\frac{90}{2} = 45$.
- Uporabimo **pogled z drugega zornega kota** in nalogo rešimo v jeziku moči množic z binomskim simbolom: koliko podmnožic moči 2 ima množica z 10 elementi? $\binom{10}{2} = 45$

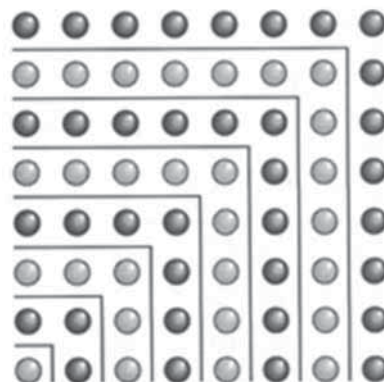
Zgled 10: Vsota dveh števil je 12, produkt pa 4. Poiščite vsoto obratnih vrednosti obeh števil.

- Nalogo lahko rešimo z nastavitvijo sistema enačb $x + y = 12$, $xy = 4$, pri čemer dobimo rešitvi $x = 6 \pm 4\sqrt{2}$ in $y = 6 \mp 4\sqrt{2}$. Ta postopek je dolg in neatraktiven, a ga je prvič smiselno izvesti, sicer učenci ne začutijo prednosti uporabe smiselne strategije.
- Nalogo lahko rešimo elegantneje in hitreje z **delom nazaj**: iščemo vsoto obratnih vrednosti števil, kar lahko zapišemo tudi drugače: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$ (izhajamo torej iz oblike rešitve, kot jo želimo dobiti na koncu). Ob tem pa opazimo, da imamo vse podatke za izračun vrednosti zadnjega izraza že podane: $\frac{12}{4} = 3$. Pri tem nas vrednosti x in y sploh nista zanimali.

Opomba: Strategijo **delo nazaj** pogosto uporabljamo pri geometrijskih konstrukcijah in pri nalogah z uporabo Vietovih formul.

Zgled 11: Poiščite vsoto prvih n lihih števil.

- Nalogo rešimo z **opazovanjem vzorca** in **iskanjem pravila** (kot mnoge podobne naloge pri vsotah vrst): za prvo liho število je vsota 1, za prvi dve lihi števili je vsota 4, za prve tri je 9 itd., za prvih n lihih števil je vsota n^2 .
- Nalogo lahko rešimo tudi z **risanjem slike**:



Zgled 12: Dve koncentrični krožnici sta medsebojno oddaljeni 10 enot. Kolikšna je razlika med obsegoma obeh pripadajočih krogov?

- Pri običajnem reševanju bi polmer manjšega kroga označili z r , polmer večjega z $r + 10$ in razlika obsegov je potem $2\pi(r + 10) - 2\pi r = 20\pi$ enot.
- S strategijo **preučevanja ekstremnih primerov** pa si lahko predstavljamo notranji (manjši) krog kot izrojen primer, strnjen v točki ($r = 0$) in ta je središče zunanega (večjega) kroga, pri čemer je sedaj razlika obsegov obeh krogov enaka ravno obsegu večjega kroga, in sicer $2\pi(r + 10) = 20\pi$ enot.

Zgled 13: Poiščite največji možni produkt dveh naravnih števil, katerih vsota je 41.

- Ob izpustitvi pogoja, da sta števili naravni, je to tipični ekstremalni problem, ki ga lahko rešimo z odvodom ali iskanjem temena ustrezne parabole (po formuli ali grafično).
- V našem primeru rešimo problem z uporabo strategije **urejanja podatkov**: v tabeli zapišemo vse možne pare dveh števil z vsoto 41 in vzporedno pripadajoče produkte; iz tabele bomo razbrali, da je največji produkt pri številih 20 in 21.

Zgled 14: V trikotniku ABC velja: $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma > 0$. Kakšne vrste je trikotnik ABC ?

- Nalogo lahko najelegantneje rešimo s strategijo **obrnave vseh možnosti**: če je trikotnik ABC pravokotni trikotnik, bo eden od kotov enak 90° in potem bo $\cos 90^\circ = 0$, torej celoten produkt enak 0. Če je trikotnik ABC topokotni trikotnik, bo natanko eden izmed kotov večji od 90° , ostala dva pa bosta ostra; tedaj bo kosinus tega kota negativen, kar pomeni, da bo produkt negativen. Če je trikotnik ABC ostrokotni trikotnik, so vsi trije koti ostri in njihovi kosinusi pozitivni, zato je produkt pozitiven.

Zgled 15: Poiščite dve naravni števili, ki se razlikujeta za 5, prav tako pa je vsota njunih kvadratnih korenov enaka 5.

- Nalogo lahko rešimo z reševanjem sistema enačb $x - y = 5$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ s substitucijo in z uporabo pravil za reševanje iracionalnih enačb.
- S strategijo **pametnega ugibanja in preizkušanja vseh možnosti** pa lahko razmišljamo takole: ker je vsota kvadratnih korenov enaka 5, sta lahko posamezna korena 4 in 1 ali pa 3 in 2. Števili sta torej 16 in 1 ali pa 9 in 4. A razliko 5 imamo samo v drugem primeru, zato sta iskani števili 9 in 4.

Dodatek: primeri matematičnih preiskovanj v srednješolski matematiki

V nadaljevanju je predstavljenih še nekaj zgledov možnih matematičnih preiskovanj v srednji šoli, predvsem v vlogi prvega vtisa in nevsiljive spodbude učitelju k samostojnemu iskanju nadaljnjih primerov matematičnih problemov.

Zgled 16: Primer odkrivanja in posplošitve Pitagorovega izreka – preiskovanje z GeoGebro.

- (a) S pomočjo ustreznega apleta v GeoGebri učenci preiskujejo morebitno zvezo med vsotama ploščin kvadratov nad dvema stranicama in ploščino kvadrata nad tretjo stranico za ostrokotni/pravokotni/topokotni trikotnik.

- (b) S pomočjo ustreznega apleta v GeoGebri učenci preiskujejo morebitno posplošitev Pitagorovega izreka tako, da nad stranicami ne tvorimo kvadratov, ampak druge like (pravokotnike, pravilne večkotnike, druge like poljubnih oblik). Kakšna mora biti zveza med temi liki, da bo v jeziku ploščin veljala enaka zveza, kot velja pri Pitagorovem izreku? Dokaz.

- (c) S pomočjo podatkov v tabeli učenci preiskujejo posplošitev Pitagorovega izreka do kosinusnega izreka (Benson, 2005):

- i. Za ostrokotne, pravokotne in topokotne trikotnike ugotovljamo predznak izraza $(a^2 + b^2) - c^2$ pri danih a, b in c . Utemeljitev.

γ	$(a^2 + b^2) - c^2$
ostrokotni	
pravokotni	
topokotni	

- ii. Pri fiksnih a in b variiramo kot γ (in s tem c) med 0° in 180° . Primerjamo spreminjanje izraza $(a^2 + b^2) - c^2$ ob spreminjanju kota γ : ali naraščajo, padajo ali oscilirajo? Ali se spomnimo katere trigonometrične funkcije, ki se obnaša podobno kot vrednosti izraza $(a^2 + b^2) - c^2$?

- iii. Narišimo tabelo, kjer pri izbranem kotu $\gamma = 60^\circ$ iščemo zvezo med $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ter različnimi danimi vrednostmi za a, b, c ter izračunanimi $(a^2 + b^2) - c^2$. Učenci oblikujejo hipotezo, za pomoč pa dodamo še nekaj primerov za kota $\gamma = 30^\circ$ in 45° . ($\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$) Na koncu sledi še eden od dokazov kosinusnega izreka.

γ	$\cos \gamma$	a	b	c	$(a^2 + b^2) - c^2$
60°	$\frac{1}{2}$	3	3	3	
60°	$\frac{1}{2}$	3	8	7	
60°	$\frac{1}{2}$	5	8	7	
60°	$\frac{1}{2}$	7	15	13	
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	3	5	$\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$	
60°	$\frac{1}{2}$	3	5	$\sqrt{19}$	
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	4	7	$\sqrt{65 - 28\sqrt{2}}$	

Zgled 17: Vlaksi – preiskovanje (Usiskin, 2003).

- (a) Narišemo kvadrat iz 4 črtic (zobotrebcev) in mu rečemo vagon. Sestavljenim vagonom rečemo vlakec. Poiščimo zvezo med številom vagonov v in številom zanje potrebnih zobotrebcev Z kot funkcijo $Z = Z(v)$.

- (b) Razmislimo o posplošitvi za obliko vagona, ki je n -kotnik. Poiščimo predpis za funkcijo dveh spremenljivk $Z = Z(n, v)$.
- (c) Za izbrane konkretne vrednosti n narišemo grafe funkcij $Z = Z(n, v)$.
- (d) Razmislimo o posplošitvi oblike vagona v 3-D prostoru: naj bo vagon kocka. Spet poiščimo zvezo $Z = Z(v)$.
- (e) pomen konstant in ter načine, kako ju lahko vpeljemo/odkrijemo/izračunamo približke zanj;
- (f) zakaj je za računanje absolutne vrednosti realnega števila primernejša običajna srednješolska definicija, kot pa npr. $|a| = \sqrt{a^2}$, ki je sicer bolj naravna zaradi analogije z ostalimi primeri $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Zgled 18: »Matemagične« naloge – preiskovanje (Sobel in Maletsky, 1999):

- (a) V mislih si izberi poljubno število. / Pomnoži število z 2. / Prištej 7. / Odštej 1. / Deli z 2. / Odštej število, s katerim si začel. / Rezultat: A si dobil število 3? Utemeljite postopek, nato pa si še sami izmislite kak primer.
- (b) V mislih vzemi svojo starost v letih. / Pomnoži starost z 2. / Prištej 10. / Pomnoži s 5. / Prištej število vseh oseb v vaši družini. / Odštej 50. / Povej mi dobljeno število. Npr. 154. Rezultat: Star si 15 let, v družini pa ste 4. Utemeljite postopek. Ali ima postopek kakšno omejitev glede splošne veljavnosti?

Zgled 19: Navedite:

- (a) čim več različnih načinov računanja ploščine trikotnika, ki jih spoznamo v srednji šoli;
- (b) čim več različnih primerov uporabe koncepta absolutne vrednosti v srednješolski matematiki;
- (c) temeljne geometrijske izreke pri razreševanju trikotnikov;
- (d) primere sodih/lih, injektivnih/surjektivnih/bijektivnih funkcij z izbranimi dodatnimi lastnostmi;

Zgled 20: Koliko je vseh kvadratov različnih velikosti na standardni šahovnici? Namig: Najprej preverite vse možnosti na šahovnicah dimenzij 1×1 , 2×2 , 3×3 in 4×4 ter na podlagi opazovanja vzorcev v tabeli poskusite oblikovati hipotezo za šahovnico 8×8 (Sobel in Maletsky, 1999).

Zgled 21: S pomočjo preiskovanj lahko vpeljemo nove matematične koncepte tudi pri vseh tistih vsebinah iz analize, kjer učenci odkrivajo pomen posameznih parametrov v predpisih funkcij. Nobene od teh vsebin ni treba učencem »prinesti na pladnju«, ampak so jih učenci zmožni odkriti sami vodeno ali samostojno s pomočjo matematičnih programov ali primernih apletov (že narejenih na spletu ali avtorskih v GeoGebri).

Zgled 22: Znamenite točke trikotnika in Eulerjeva premica – preiskovanje z GeoGebro.

Zgled 23: Opazujmo polinomske funkcije tretje stopnje.

- (a) Koliko realnih ekstremov lahko nastopa kot maksimum in koliko kot minimum? Odgovor preveri.
- (b) Ali je možen polinom tretje stopnje z enim samim ekstremom? Premisli in dokaži.
- (c) Podaj primer za vsak tip prejšnjih polinomov in preveri ugotovljeno.

Zaključek

Na kratko smo predstavili nekatere temeljne pojme razvijanja matematičnih znanj z reševanjem problemov in nakazali možnosti vpogleda v ukvarjanje z matematiko ob uporabi različnih strategij reševanja matematičnih problemov.

Za nadaljnje poglobljanje v razvijanje matematičnih znanj skozi reševanje problemov poleg širokega nabora spletnih virov predlagamo tudi nekaj izbranih tiskanih virov, ki so navedeni v nadaljevanju. Naj bo raziskovanje novih matematičnih izzivov v veselje tako učiteljem kot našim učencem!

Viri in nekatera možna literatura s področja razvijanja problemskih znanj

- Benson, S. idr. (2005). *Ways to Think About Mathematics. Activities and Investigations for Grade 6–12 Teachers*. Corwin Press.
- Burns, M. (2000). *About Teaching Mathematics. A K-8 Resource. 2nd Edition*. Math Solutions Publications.
- Hauptman, H. A., Posamentier, A. S. (2001). *101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics: A Resource for Secondary School Teachers*. Corwin Press.
- Magajna, Z. (2003). Problemi, problemsko znanje in problemski pristop pri pouku matematike. *Matematika v šoli*, 10(2003), str. 129–138.
- Polya, G. (1989). *Kako rešujemo matematične probleme*. DMFA.
- Posamentier, A. S. idr. (1998). *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher*. Corwin Press.
- Posamentier, A. S. idr. (2006). *Teaching Secondary Mathematics: Techniques and Enrichment Units. 7th Edition*. Pearson Prentice Hall.
- Sobel, M. A., Maletsky, E. M. (1999). *Teaching Mathematics: A Sourcebook of Aids, Activities and Strategies, 3rd Edition*. Allyn & Bacon.
- Usiskin, Z. idr. (2003). *Mathematics for High School Teachers. An Advanced Perspective*. Pearson Education.
- Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally, Fifth Edition*. Allyn & Bacon.

Ugotavljanje matematičnega znanja



Z vprašanji, kako omogočiti učenecem, da na raznolike načine izkažejo svoje znanje, so se ukvarjali učitelji v razvojni nalogi **Uvajanje formativnega spremljanja in inkluzivne paradigme** (2018–2020). Naloga je predstavljala smiselno nadaljevanje in nadgradnjo razvojne naloge Formativno spremljanje (2015–2018), kjer je bil osrednji namen razvijanje strategij formativnega spremljanja in njihovo uvajanje v šolsko prakso. V sklopu prve razvojne naloge smo z učitelji pripravili priročnik *Formativno spremljanje pri matematiki – priročnik za učitelje* (Slika levo spodaj). V pričujoči publikaciji pa predstavljamo nadaljnje izsledke in izkušnje na področju formativnega spremljanja pri matematiki s poudarkom na različnih oblikah izkazovanja in ugotavljanja matematičnega znanja.

- preiskovalne naloge,
- pisna besedila,
- govorni nastopi,
- vizualne predstavitve,
- didaktične igre,
- izdelki.

Naročila:

P Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana **T** 01 300 51 00 **F** 01 300 51 99 **E** zalozba@zrss.si **S** www.zrss.si

Preiskovalne naloge pri matematiki¹

mag. Mojca Suban
Zavod RS za šolstvo

Uvod

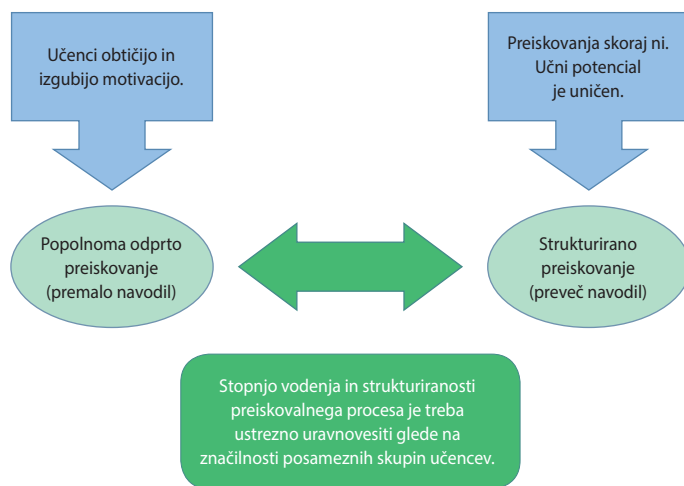
V matematiki se kot prevod termina Inquiry Based Learning (IBL) uveljavlja *učenje s preiskovanjem* (Suban M., 2017). Magajna in Žakelj (Magajna Z., Žakelj, A., 2000) v kontekstu obdelave podatkov navajata, da s **preiskovanjem označujemo osnovno-šolsko obravnavo problemskih situacij z nejasnimi cilji**. Postopoma je učenje s preiskovanjem preseglo omejitve na določeno matematično vsebino ali nivo izobraževanja ter se uporablja kot pristop k učenju in poučevanju matematike s poudarjeno aktivno vlogo učenca.

Preiskovalni pristop je našel pot tudi v učne načrte in kataloge znanj, kjer se pojavi na ravni didaktičnih priporočil kot priporočen način obravnave posameznih matematičnih vsebin. Navajamo zapis iz učnega načrta v osnovni šoli: *branje z razumevanjem, samostojno oblikovanje vprašanj in ciljev raziskovanja, izpisovanje bistvenih trditev in podatkov, razprave o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi, prevajanje besedilnih nalog v različne sheme (enačbe, diagrame, formule, algebrske izraze, geometrijske konstrukcije itd.) ter podobni preiskovalni pristopi omogočajo učencem uspešnejše reševanje besedilnih nalog*. Poleg tega, da je preiskovanje prisotno v didaktičnih priporočilih, ga v obliki dokaza o učenju najdemo tudi med operativnimi cilji, npr. v učnem načrtu je med cilji v 3. vzgojno-izobraževalnem obdobju navedeno, da učenci izdelajo *empirično preiskavo*.

Preiskovanje se prične z odprtim problemom ali vprašanjem, v nadaljevanju procesa pa učenec lahko oblikuje dodatna vprašanja (za razjasnitev izhodiščne situacije ali za določanje cilja),

opazuje, prepoznava vzorce, rešuje problem, modelira, matematizira, išče vire in ideje, raziskuje, analizira odnose med spremenljivkami, eksperimentira, postavlja domneve, preizkuša domene, razlaga in utemeljuje svoje ugotovitve, predstavlja svojo preiskovalno pot in sporoča dokončne ugotovitve (Slika 1).

Preiskovanje lahko pri pouku matematike poteka v različnih oblikah in v različnih časovnih obsegi: kot krajša nekajminutna dejavnost do daljše (lahko skozi daljše časovno obdobje) dejavnosti, ki se lahko zaključi z oblikovanjem izdelka v obliki matematične ali empirične preiskave. Z vidika odprtosti procesa preiskovanja oziroma količine navodil, ki jih učenci dobijo za svoje delo, ločimo več možnosti. Učitelj prilagodi stopnjo odprtosti za različne skupine učencev na način, da ohrani didaktični potencial naloge in motivacijo učencev (Slika 2).



Slika 2: Stopnja odprtosti preiskovalnega procesa

V razvojni nalogi so učitelji z učenci preizkušali različne preiskovalne naloge in poročali o svojih izkušnjah. Poročali so, da so bili nekateri učenci ob prvem srečanju s preiskovalnimi nalogami precej zmedeni in negotovi. Niso vedeli, kaj se od njih pričakuje in kaj morajo izračunati. Zastavljali so vprašanja, kot npr. kaj moram narediti, kaj naj napišem, kaj naj izračunam, kaj je rezultat. Ko so pristop s preiskovanjem pri pouku večkrat uporabili, so postopoma prepoznali njegov namen in učitelji so ugotavljali, da so se nekateri učenci izkazali nad pričakovanji.



Slika 1: Dejavnosti učenca v procesu preiskovanja

¹ Prispevek je objavljen v e-priročniku *Ugotavljanje matematičnega znanja*, str. 13–17 in 31–37.

Ob tem so učitelji opozorili na svojo spremenjeno vlogo, za katero je značilno, da učitelj:

- načrtuje in predstavi raznolike probleme, ki učence spodbudijo k razmišljanju ob usvajanju vsebine in ustvarjanju povezav,
- vzpostavi sodelovalno okolje, v katerem učenci izmenjujejo ideje,
- zastavlja vprašanja, ki sprožajo miselne procese, omogočajo komunikacijo, podpirajo učence pri preiskovanju, razkrivajo napačne predstave učencev, odpirajo prostor za raziskovanje alternativnih poti,
- ustvarja priložnosti, da učenci prevzemajo odgovornost za učenje in jih podpira pri prevzemanju dejavnejše vloge.

Pri podpiranju učencev pri preiskovanju je pomembno, da učitelj s premišljenimi vprašanji usmerja miselne procese učenca, pri tem pa mu ne razkrije strategije reševanja ali rešitve. Učitelju in učencu so lahko v pomoč nekatera vprašanja v nadaljevanju. Vprašanja so lahko na plakatu pripeta na vidno mesto v učilnici in jih učenec uporabi, ko pri preiskovanju obtiči ali zaide (Slika 3).



Slika 3: Vprašanja v podporo procesu preiskovanja

Scenariji izvedbe učne ure, pri kateri učenci izvajajo preiskovalne dejavnosti, so lahko precej različni. Razlikujejo se lahko v deležu časa, ki je znotraj učne ure namenjen preiskovanju, obliki dela (individualno, v paru, skupinsko), stopnji odprtosti problema in s tem povezane podporne vloge učitelja, namenu in ciljih preiskovalnih dejavnosti (npr. obravnavanje procesnih ciljev skozi preiskovalne dejavnosti, ugotavljanje matematičnih zakonitosti, pravil, formul, uvod v novo vsebino ...).

V primeru, ko se raziskovalnim dejavnostim posveti (vsaj) ena učna ura v celoti, proces preiskovanja lahko v razredu teče po korakih, ki jih prikazuje Slika 4. Koraki so sestavljeni iz uvodnega seznanjanja s problemom in razjasnjevanja konteksta, iz samostojnega preiskovanja v paru ali skupini, predstavitev rešitev parov ali skupin ter iz povzetka ugotovitev v formalni obliki. Slednje opravi učitelj, pri čemer obvezno izhaja iz ugotovitev, ki so jih predstavile posamezne skupine. Znanje v institucionalizirani obliki učitelj navadno zapiše na tablo, učenci pa zapišejo v svoje zapiske. Koraki so povzeti iz projekta MERA, kjer je bilo teoretično izhodišče Teorija didaktičnih situacij (Winslow, 2017).



Slika 4: Možni koraki za izvedbo preiskovanja pri pouku matematike

Ko so se učenci navadili na način dela s preiskovanjem, so lahko pričeli z vrednotenjem kakovosti svojega preiskovalnega procesa in izdelka, ki je ob tem nastal. V ta namen je v razvojni skupini nastal predlog splošnih kriterijev za vrednotenje preiskovalnih nalog z opisniki na treh ravneh (Preglednica 1). Splošni kriteriji se lahko prilagodijo ali razširijo glede na vsebinska in procesna znanja, ki jih pri preiskovanju razvijamo, in glede na obseg preiskovanja.

Preglednica 1: Splošni kriteriji za vrednotenje preiskovalnih nalog z opisniki na treh ravneh znanja

Kriterij	Opisnik za minimalni dosežek		Opisnik za optimalni dosežek
Razumevanje problema	Učenec razume problem; zapiše nekaj primerov (lahko s pomočjo učitelja), lahko so prisotne napake (računske, napake v zapisu ...).	Učenec razume problem; zapiše nekaj primerov (s pomočjo/z namigom).	Učenec razume problem; zapiše nekaj primerov, iz katerih razvije strategijo.
Strategija reševanja	Učenec izbere in uporabi strategijo, ki je napačna ali pravilna le za nekaj primerov. Sistematičnost je vidna le v posameznih primerih, ob oporah učitelja. Lahko so prisotne napake (računske, napake v zapisu ...).	Učenec izbere ali uporabi strategijo, ki je pravilna, vendar uporabljena napačno ali pa je strategija manj primerna za dani primer. Sistematičnost je vidna v večini primerov (lahko s pomočjo učitelja).	Učenec izbere in uporabi pravilno strategijo. Sistematično (na različne načine) razižče različne primere glede na določene kriterije.
Zapis ugotovitev	Pri reševanju učenec opazi neke zakonitosti, pravila, vzorce, posplošitve ubesedi in zapiše delne ugotovitve.	Zapisane ugotovitve so jasne in pravilne. Nekatere pričakovane ugotovitve so izpuščene.	Vse pričakovane ugotovitve so jasno zapisane in so pravilne.

V rubriki *Iz razreda* navajamo dva primera priprave na pouk dveh učiteljic, v katerih sta uporabili pristop s preiskovanjem.

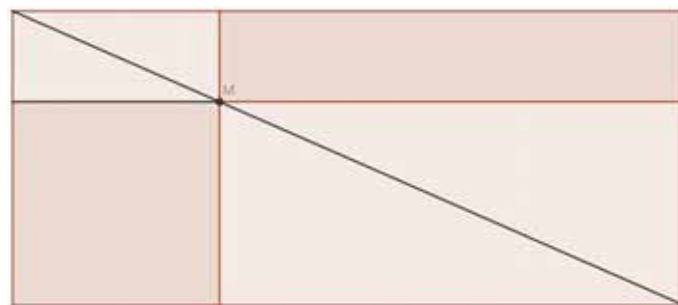
Nabor nalog za preiskovanje pri matematiki

Za preiskovalne naloge se lahko učitelj odloči v različnih fazah vzgojno-izobraževalnega procesa:

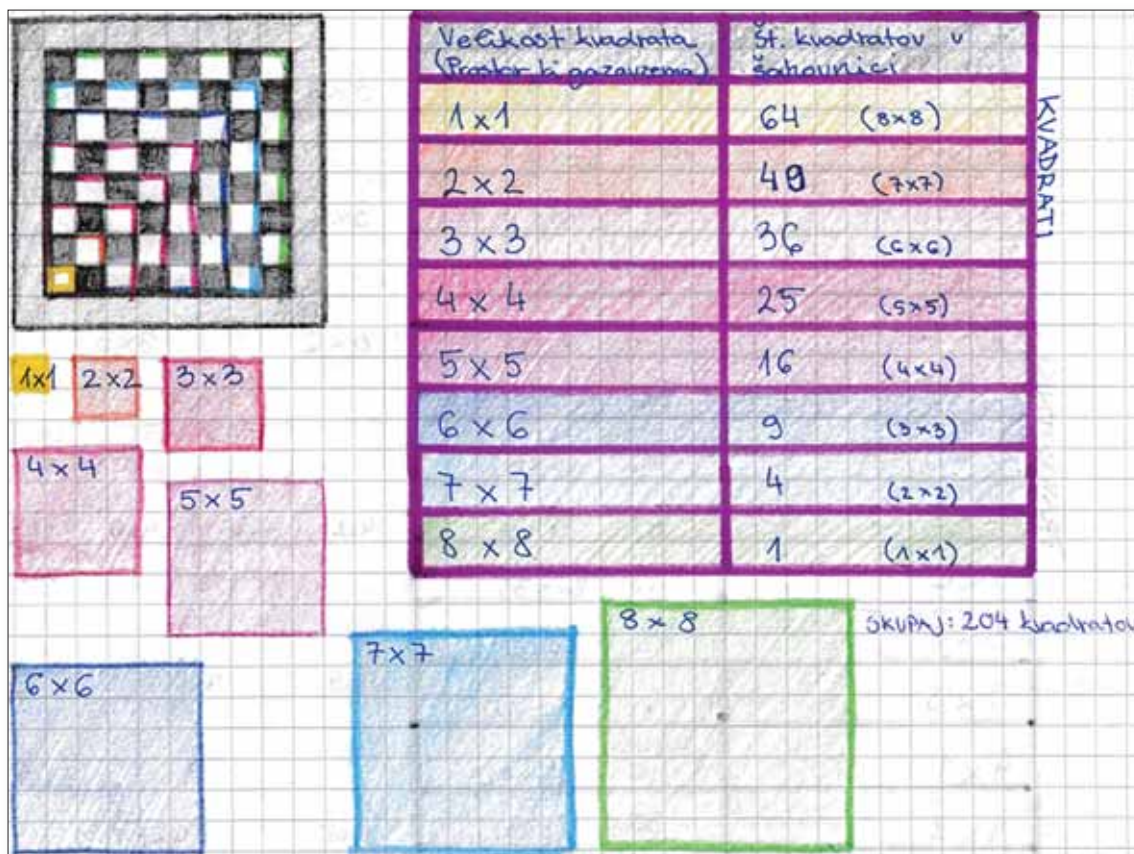
1. pri ugotavljanju in aktivaciji predznanja,
2. pri uvajanju v nov matematični pojem in vsebino,
3. pri utrjevanju in ponavljanju že naučenih vsebin,
4. pri poglobljanju in širjenju že obravnavanih vsebin,
5. pri ugotavljanju in vrednotenju znanja,
6. pri povezovanju različnih (matematičnih) vsebin.

V nadaljevanju navajamo nekatere primere preiskovalnih nalog, ki jih lahko učitelj uporabi po lastni presoji glede na razred, v katerega bo nalogo smiselno vključil, namena, ki ga želi z uporabo naloge doseči, ter ciljev in standardov, ki jih skozi nalogo dosežajo učenci. Nekatere naloge obravnavajo matematični kontekst, nekatere pa so iz konteksta vsakdanjega življenja. Razlikujejo se tudi po obsežnosti in vključujejo primere, ki jih lahko učenci rešijo v krajšem času, in primere, ki zahtevajo bolj poglobljeno obravnavo, v katero je lahko zajeto tudi pridobivanje relevantnih podatkov in jih lahko učenci na koncu oblikujejo v bolj formalni zapis kot matematično ali empirično preiskavo. Opozorili bi še, da se lahko nekatere naloge uporabijo v različnih razredih, pri čemer pri pričakovanih ugotovitvah učencev in stopnji formalnosti zapisov učitelj upošteva starost učencev in njihovo znanje matematike. Pozornost je treba nameniti tudi morebitnim pastem preiskovanja, kot so: rutinsko ugotavljanje pravil, pretirana usmerjenost na manj pomembne nematematične vidike problema in neprepoznavanje povezanosti preiskovanja z obravnavanimi matematičnimi vsebinami.

1. Razišči, koliko kvadratov se nahaja v šahovnici. (Primer reševanja učencev je prikazan na Sliki 5 in Sliki 6.)
2. Razišči, koliko pravokotnikov se nahaja v šahovnici.
3. Razišči, na koliko delov lahko razdelimo krog s premicami, ki dvakrat sekajo krožnico.
4. Razišči, koliko skupnih točk lahko ima premica s stranicami 7-kotnika.
5. Razišči, koliko skupnih točk lahko imajo stranice dveh 6-kotnikov.
6. Razišči, s katerimi števki se končujejo kvadrati števil.
7. Razišči, s katerimi števki se končujejo kubi števil.
8. Razišči, kaj se dogaja na naslednji sliki, ko točka M potuje po diagonali danega pravokotnika. Kaj bi lahko raziskoval? Zapiši nekaj svojih predlogov. Izberi si eno od možnosti in jo razišči.

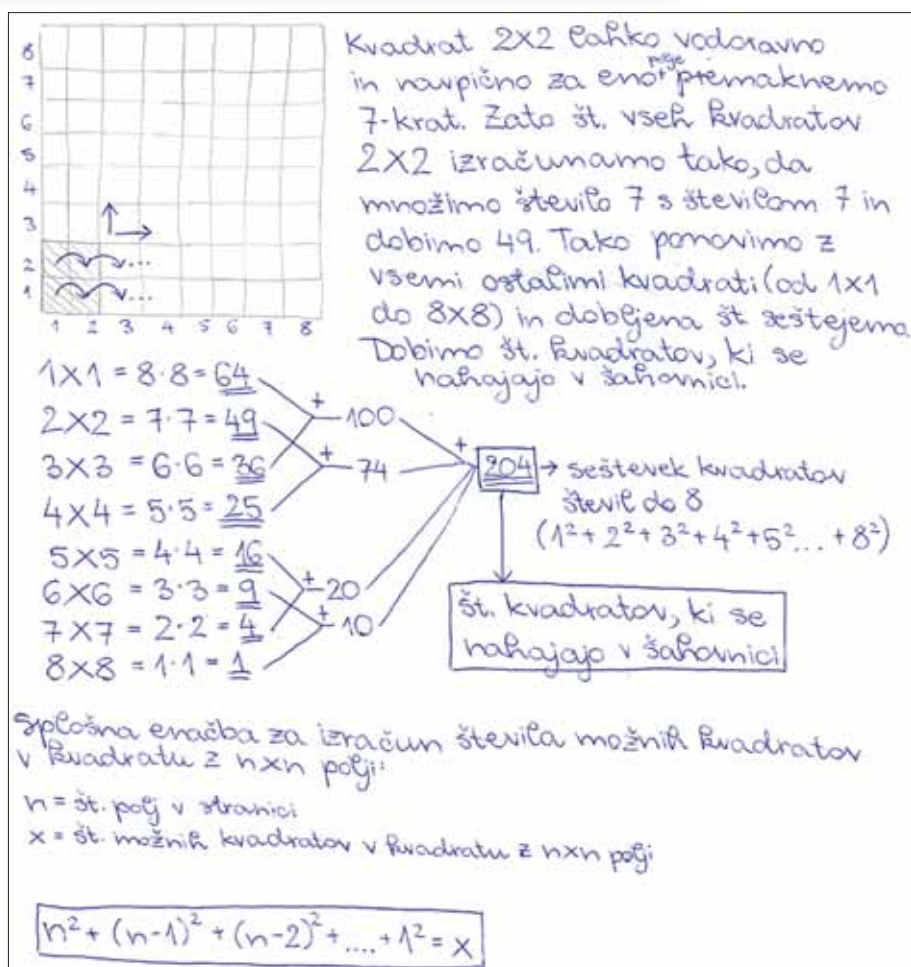


9. Najdi podatek, kaj je to palindromsko število. Nato razišči, kako pogosta so palindromska števila. Svoje ugotovitve prikaži na čim bolj jasn in zanimiv način.
10. Razišči palindromska praštevila. Razišči, katero je najmanjše trimesno praštevilo. Katero je najmanjše (največje) štirimesno praštevilo?

**Slika 5:**

Primer izdelka
učenke 8. razreda
OŠ Leskovec
pri Krškem
(Mentorica:
Tatjana Kerin)

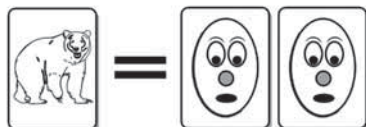
- Obravnavaj enakokrake trapeze s ploščino 24 cm^2 .
- Razišči količnike, ki nastanejo pri deljenju števila 1 z naravnim številom. (Calder, 2011)
- Razišči like, ki nastanejo kot presečišče dveh (enakostraničnih) trikotnikov.
- Na geoplošči razišči pravokotnike s ploščino 6 kvadratnih enot in ugotovi, kolikšen je njihov obseg.
- Kvadrat lahko razdelimo na manjše kvadrate. Razišči, na koliko manjših kvadratov ga lahko razdelimo. Če obstaja več rešitev, zapiši vse. Ali obstaja tako število n , da je razdelitev kvadrata na n manjših kvadratov nemogoča? Zapiši vse rešitve. (Fisch, 2018)
- Kateri jogurti so bolj zdravi: sadni ali navadni jogurti? Utemelji svoj odgovor.
- Za kakšen namen tvoji sošolci največ uporabljajo mobilni telefon (razgovor, SMS, brskanje po internetu ...)?



Slika 6: Primer izdelka učenke
8. razreda OŠ Leskovec pri Krškem
(Mentorica: Tatjana Kerin)

18. Kako vplivajo temperature zraka na obisk lokalnega kopališča?
19. Katera imena so najbolj priljubljena v tvojem razredu, na tvoji šoli, v državi? Pomagaj si z virom na spletni strani Statističnega urada RS <http://www.stat.si/imena.asp>.
20. Nejc je opazil plakat, ki vabi na otroško igrišče na menjavo sličic. Ker je vedel, da njegova mlajša sestra zbira sličice, si je plakat pozorno ogledal. Ugotovil je, da bo menjava potekala čez tri ure. S telefonom je fotografiral del plakata, kjer sta zapisani pravili menjave.

Na otroškem igrišču je stojnica, kjer lahko otroci med seboj menjajo sličice.



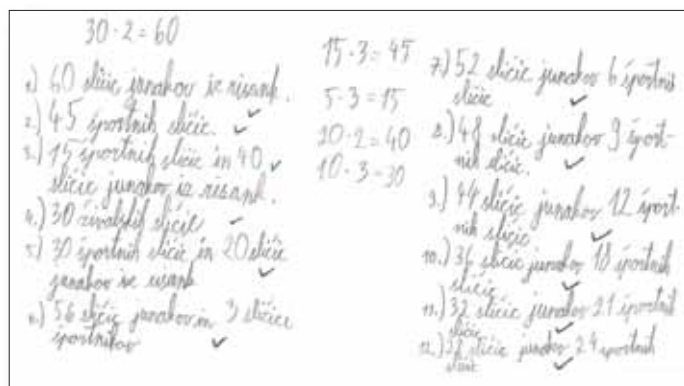
1 živalska sličica je vredna 2 sličici z junaki iz risank.



2 živalski sličici sta vredni 3 športne sličice.

Ko je prišel domov, je fotografijo pokazal Petri, ki se je odločila, da bo šla na otroško igrišče. Nejcju je povedala, da ima 30 živalskih sličic za menjavo na stojnici. Katere sličice ima lahko Petra po menjavi? Razišči vse možnosti. (Nalogo je po TIMSS 2011 (Japelj Pavešić, 2012) priredila mag. Valentina Herbjaj. Primer reševanja učenca je prikazan na sliki 7.)

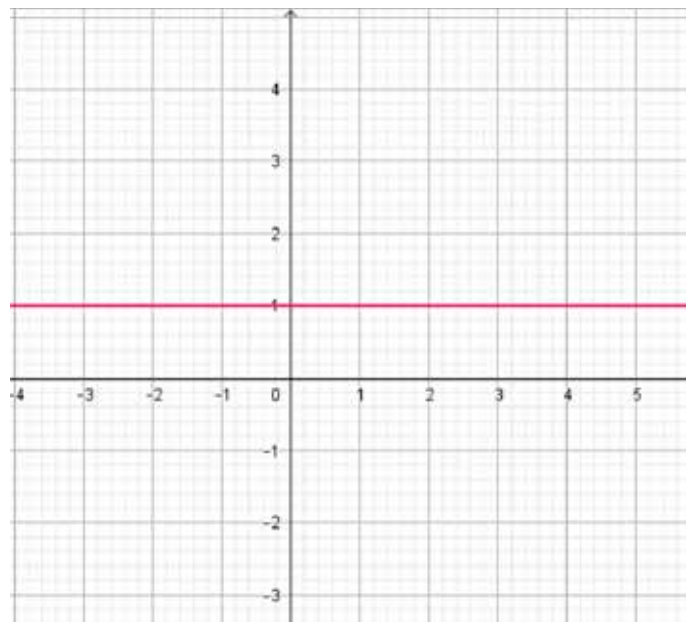
- Ne glede na spreminjanje vrednosti a -ja je vsem funkcijam skupna točka $(2,1)$.
- Vrednost a vpliva na nagnjenost funkcije.
- Če je $a=0$, je funkcija enaka 1 ($f(x) = 1$).
- Če je a več od 0 funkcija narašča, če je a manj od nič funkcija pada.
- V kolikor je a več ali manj od 0, je funkcija vsaj na nekem intervalu negativna.
- Funkcija je splošno, če je $a=0$.
- Če za $f(x)$ vstavimo vrednost nič, dobimo dve funkciji.
- Ne glede na vrednost a , vedno dobiš premico.
- Funkcija je neomejena (na obeh straneh poteka v neskončnost).
- Vsaka premica, ki jo dobimo z različnimi vrednostmi a , je preslikana skozi točko $(2,1)$
- Funkcija ni ne konkavna, ne konveksna, saj je graf te funkcije premica.
- Za vrednost $a=0$ funkcija nima ničel
- Zaloge vrednosti in definicijsko območje sta v primeru, da a ni enako 0 vedno vsa realna števila.
- Če je $a=0$ je $Z_f(x)=1$, $D_f(x)$ pa vsa realna števila.
- Če je $a=0.5$ funkcija poteka naraščajoče skozi koordinatno izhodišče.
- Če je a več od 0.5 ima funkcija negativno začetno vrednost.
- Če je a manj od 0.5 ima funkcija pozitivno začetno vrednost.



Slika 7: Primer izdelka učenca 7. razreda OŠ Sladki Vrh (Mentorica: Lidija Jug). Učenec s sistematičnim zapisovanjem raziše možnosti za menjavo sličic.

Slika 8: Primer izdelka dijakinje Ekonomske šole Novo mesto (Mentorica: Mojca Plut)

21. Razišči lastnosti družine funkcij $\{f_a(x) = ax - 2a + 1; a \in \mathbb{R}\}$. Če si uporabil tehnologijo, napiši, kje in kako. (Avtorica naloge je Mojca Plut. Primera izdelkov dijakov sta na Sliki 8 in Sliki 9.)



V programu Geogebra sem najprej u porabil drsnik (a), s katerim sem ugotavljal premik funkcije glede na a (ko je pozitiven, negativen ali enak 0). Ugotovil sem da, če je $a=0$, je funkcija vzporedna z abscisno osjo ($y=1$).

Če je a negativen, potem je funkcija $f(x)$ padajoča in če je a pozitiven, je funkcija naraščajoča.

Ne glede kakšen a vstavim v funkcijo, pride v koordinatnem sistemu premica. Torej iz tega vem, da funkcija ni omejena.

Ne glede na to ali je a pozitiven, negativen ali nenegativen, gre premica skozi točko $T(2,1)$.

Prikaz funkcije, ko je $a=0$.

Slika 9: Primer izdelka dijaka Ekonomske šole Novo mesto (Mentorica: Mojca Plut)

Viri

- Calder, N. (2011). *Processing Mathematics Through Digital Technologies. The Primary Years*. s.l.: Sense Publishers.
- Fisch, B., Schaetzel, S., Heuskin, K. (2018). *Informatics and Communication Section - Section I ESC - Luxembourg. V International Approaches to STEM Education. CIDREE Yearbook 2018*. Luxembourg: Service de Coordination de la Recherche et de l'Innovation pédagogiques et technologiques, ur. Mysore, S.
- Magajna, Z., Žakelj, A., Petek, P. (2000). *Obdelava podatkov pri pouku matematike 6-9*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Suban, M. (2017). *Vzgoja in izobraževanje, št. 4, let. XLVIII*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Winslow, C. idr. (2017). *Priročnik MERIA za poučevanje matematike s preiskovanjem*. Ljubljana: s.n.

Potenčne funkcije in kovinska razmerja

dr. Marko Razpet
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Izvleček

V članku pokažemo, da obstajajo realne potenčne funkcije f , za katere je inverz f^{-1} enak n -temu odvodu $f^{(n)}$. Eksponent spremenljivke v funkciji se tedaj izraža s kovinskim razmerjem reda n . Pri tem je n naravno število. Obravnavamo tudi geometrijsko razlago kovinskih razmerij.

Ključne besede: potenčna funkcija, inverz, odvod, kovinsko razmerje, verižni ulomek, kovinski pravokotnik

Power functions and metallic ratios

Abstract

In the article we show that there are real power functions / which inverse f^{-1} equals n -th derivative $f^{(n)}$. In this case, the exponent of the variable in / is expressed by the metallic ratio of order n . The number n is natural. A geometric explanation of metallic ratios is discussed, too.

Keywords: power function, inverse, derivative, metallic ratio, continued fraction, metallic rectangle

Uvod

Za boljše razumevanje prispevka ponovimo najnujnejše o potenčnih funkcijah. Realne potenčne funkcije $x \rightarrow f(x) = cx^\alpha$ kjer sta c in α realni števili, so videti preproste, kar pa ni čisto res. Do njih vodi precej dolga pot. Težav ni, če je $\alpha = n$ naravno število. Tedaj je pač potenca x^n produkt n faktorjev, od katerih je vsak enak x . Pri razširitvi potence na cele negativne eksponente že nastopi težava. Za $x \neq 0$ je treba vzeti obratno vrednost ali inverz x^{-1} , ki obstaja po nekem aksiomu za realna števila, in nato definiramo $x^{-n} = (x^{-1})^n$ za vsako naravno število n . Posebej je $x^0 = 1$ za $x \neq 0$. S tem imamo za vsak $x \neq 0$ in vsako celo število m definirano potenco x^m . Naslednji korak je razširitev potence na racionalne eksponente. V tem primeru je treba najprej za naravno število n vpeljati n -ti koren, to se pravi $\sqrt[n]{x}$, za nenegativne x . Eksistenca in enoličnost n -tega korena se dokažeta na podlagi aksiomov realnih števil, lahko pa tudi z uporabo izrekov o zveznih funkcijah na intervalu. Nato definiramo potenco x^r za racionalno število $r = m/n$, kjer je m celo, n pa naravno število, s predpisom $x^r = \sqrt[n]{x^m}$. Vsako racionalno število r lahko predstavimo v obliki m/n , kjer je m celo in n naravno število. Za potrebe tega prispevka se bomo omejili: za $m > 0$ oziroma $r > 0$ na $x \geq 0$ in za $m < 0$ oziroma $r < 0$ na $x > 0$. Pri tem je treba tudi preveriti, da je definicija potence x^r neodvisna od predstavitve eksponenta r z ulomkom m/n . V vsakem primeru je $x^0 = 1$ za $x \neq 0$. Podrobneje o tem na primer v (3). Za računanje s potenami veljajo običajna pravila. Zapomnimo si se zapis $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ za $x \geq 0$.

Resna težava nastane, ko želimo definirati potenco x^α za realne eksponente α . To lahko naredimo šele, ko poznamo pojem limite številskega zaporedja. Ker je množica racionalnih števil gosta v množici realnih števil, vzamemo poljubno racionalno zaporedje $r_1, r_2, r_3, \dots$, ki konvergira k α , nato pa postavimo za x^α limito zaporedja $x^{r_1}, x^{r_2}, x^{r_3}, \dots$, ko n raste prek vseh meja. Če je $\alpha > 0$, to gre za $x \geq 0$, za $\alpha < 0$ pa za $x > 0$. Definicija ni odvisna od zaporedja $r_1, r_2, r_3, \dots$, samo k α mora konvergirati.

Drugi način vpeljave potence x^α za realne eksponente α in za $x > 0$ je možen, ko že dobro poznamo število e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

in eksponentno funkcijo

$$\exp(x) = e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

ki je ena od osnovnih elementarnih funkcij in jo sestavljajo potence z naravnimi eksponenti. Eksponentna funkcija je definirana za vse realne x , zavzame pa pozitivne vrednosti. Ima inverzno funkcijo $\exp^{-1} = \ln$, to je logaritmsko funkcijo z osnovo e . Potem lahko definiramo za vsak realen eksponent n in vsak $x > 0$ potenco

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)},$$

za $\alpha > 0$ pa vzamemo $0^\alpha = 0$. To lahko naredimo zato, ker $\alpha \ln(x) \rightarrow -\infty$, ko $x \rightarrow 0_+$ in $e^x \rightarrow 0$, ko $x \rightarrow -\infty$. Za $\alpha < 0$ pa $\alpha \ln(x) \rightarrow \infty$, ko $x \rightarrow 0_+$ zato tedaj x^α ne moremo razširiti na $x = 0$.

Odvodi in inverz potenčne funkcije

Da bi se izognili vsem neprijetnostim, bomo odslej uporabljali samo potence x^α za $x \geq 0$ in $\alpha > 0$ ter potence x^α za $x > 0$ in $\alpha < 0$. Ogledali si bomo potenčne funkcije $x \rightarrow f(x) = cx^\alpha$, kjer je c pozitivna konstanta. Za $\alpha > 0$ so te funkcije naraščajoče, za $\alpha < 0$ pa padajoče. S tem je poskrbljeno, da $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ za $\alpha > 0$ in $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ za $\alpha < 0$.

Kakorkoli že, odvode znamo izračunati:

$$f'(x) = c\alpha x^{\alpha-1}, f''(x) = c\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, f'''(x) = c\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}.$$

V splošnem je n -ti odvod:

$$f^{(n)}(x) = c\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Navadno definiramo padajočo faktorielo $(\alpha)_n$ s predpisom:

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

Še posebej postavimo: $(\alpha)_0 = 1$. Zato je

$$f^{(n)}(x) = c(\alpha)_n x^{\alpha-n}$$

$n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Brez težav poiščemo funkciji f inverzno funkcijo. Kot po navedi zapišemo $y = cx^\alpha$ in zamenjamo med seboj x in y , to pomeni $x = cy^\alpha$. Iz te zveze je potem $y = (x/c)^{1/\alpha}$, ker je na splošno $(z^\alpha)^{1/\alpha} = z$ za vsak $z > 0$. S tem imamo par inverznih si funkcij iz $[0, \infty)$ na $[0, \infty)$ oziroma iz $(0, \infty)$ na $(0, \infty)$, ki sta definirani s predpisoma:

$$f(x) = cx^\alpha, f^{-1}(x) = c^{-1/\alpha} x^{1/\alpha}.$$

Potemtakem je inverz potenčne funkcije tudi potenčna funkcija.

Enakost inverza in odvodov

Kdaj za dano naravno število n velja enakost $f^{-1}(x) = f^{(n)}(x)$ za vsak $x > 0$? Problem je obravnavan na več spletnih mestih. Pripomnimo, da koeficient $c(\alpha)_n$ pred potenco $x^{\alpha-n}$ ni vselej pozitiven.

Izenačimo inverz f^{-1} in n -ti odvod funkcije f :

$$c^{-1/\alpha} x^{1/\alpha} = c(\alpha)_n x^{\alpha-n}.$$

Ker mora ta relacija veljati za vsak $x > 0$, morata veljati enačbi:

$$c^{-1/\alpha} = c(\alpha)_n, \quad \frac{1}{\alpha} = \alpha - n. \quad (1)$$

To pomeni, da α zadošča kvadratni enačbi

$$\alpha^2 - n\alpha - 1 = 0,$$

ki ima rešitvi

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(n + \sqrt{n^2 + 4} \right), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \left(n - \sqrt{n^2 + 4} \right).$$

Rešitvi sta nasprotno predznačeni iracionalni števili, in sicer velja $\alpha_1 > 0$ in $\alpha_2 < 0$. Njun produkt je po Vietovih pravilih enak -1 , vsota pa n . Druga enačba v sistemu (1) ima za posledico relacijo $\alpha_1 - n > 0$.

Za vsak naraven n je $(\alpha_1)_n$ pozitivno število, $(\alpha_2)_n$ pa ne vedno. Vsi faktorji v definiciji $(\alpha_2)_n$ so namreč negativni. Zato je $(\alpha_2)_n$ za sode n pozitivno, za lihe n pa negativno število.

Sedaj lahko izrazimo še koeficient c . Iz prve enačbe v sistemu (1) dobimo

$$c^{1+1/\alpha} = c^{\alpha-n+1} = \frac{1}{(\alpha)_n}.$$

Rešitvi sta zato

$$c_1 = \frac{1}{((\alpha_1)_n)^{1/(\alpha_1-n+1)}}, \quad c_2 = \frac{1}{((\alpha_2)_n)^{1/(\alpha_2-n+1)}}.$$

S tem smo našli iskani potenčni funkciji

$$f_1(x) = \frac{x^{\alpha_1}}{((\alpha_1)_n)^{1/(\alpha_1-n+1)}}, \quad f_2(x) = \frac{x^{\alpha_2}}{((\alpha_2)_n)^{1/(\alpha_2-n+1)}}.$$

Ne pozabimo: c_2 in f_2 imata smisel za sode n .

V pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu Oxy je pri izbranem n graf dobljene potenčne funkcije simetričen z njenim n -tim odvodom glede na simetralo prvega kvadranta, to je glede na premico $y = x$ (Slike 1, 2, 3).

Z uporabo enačb (1) lahko izračunamo, kje se sekata grafa funkcij f in $f^{(n)}$. Ker sta si to inverzni funkciji, se sekata na premici $y = x$. Za $\alpha > 0$ se sekata v točki $(0, 0)$, za $\alpha < 0$ pa ne. Se pa sekata v točki (ξ, ξ) , kjer je $\xi > 0$. Pogoj za presek je

$$f^{-1}(\xi) = c^{-1/\alpha} \xi^{1/\alpha} = \xi,$$

iz česar dobimo

$$\xi = c^{1/(1-\alpha)} = \sqrt[n]{(\alpha)_n}.$$

Za sode n sta rešitvi

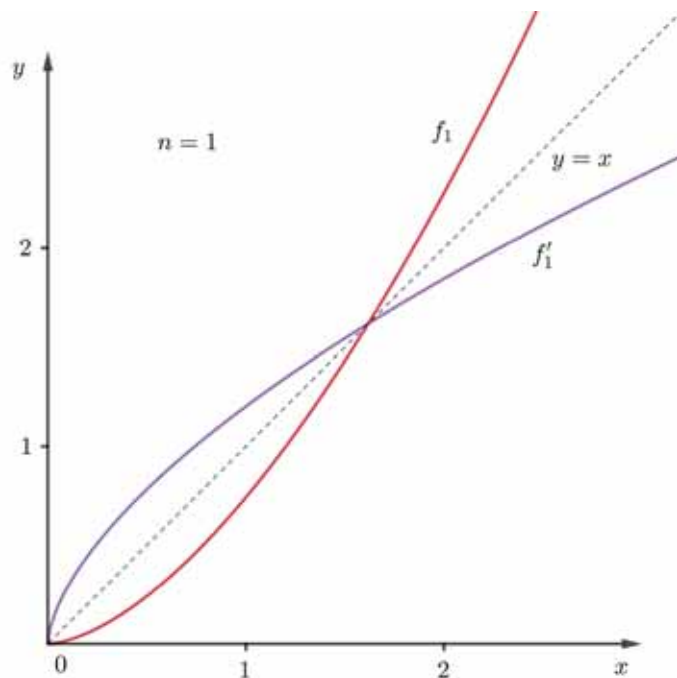
$$\xi_1 = \sqrt[n]{(\alpha_1)_n}, \quad \xi_2 = \sqrt[n]{(\alpha_2)_n},$$

za lihe n pa le

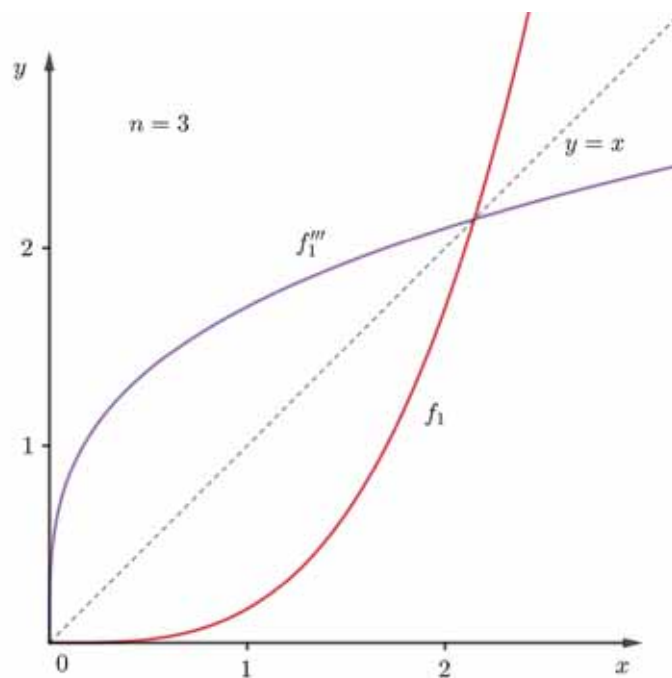
$$\xi_1 = \sqrt[n]{(\alpha_1)_n}.$$

Kovinska razmerja in kovinski pravokotniki

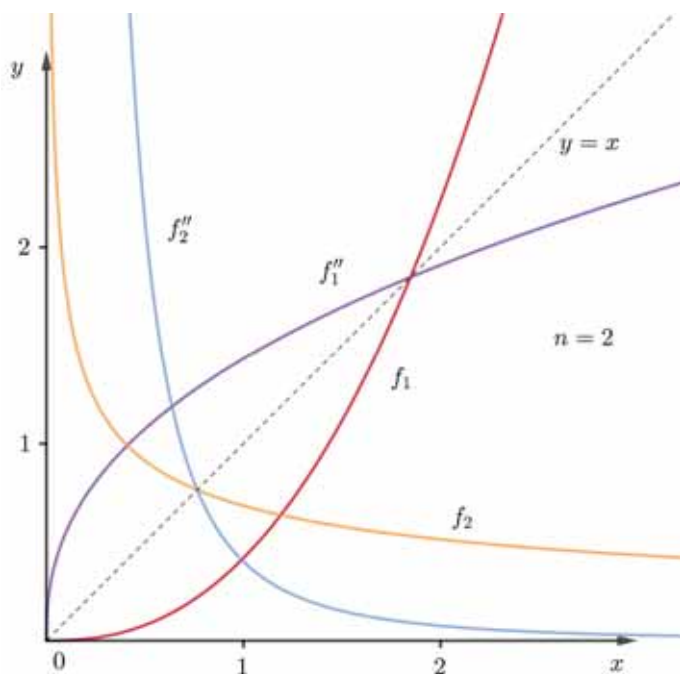
Števili α_1 in α_2 , ki nastopata v dobljenih potenčnih funkcijah, srečamo na primer tudi v geometriji in diskretni matematiki. Izražata se kot funkciji naravnega števila n , česar zaradi enostavnih zapisov nismo posebej označevali.



Slika 1: Primer $n = 1$. Grafi funkcije f_1 in odvoda f_1' .



Slika 3: Primer $n = 3$. Grafi funkcije f_1 in tretjega odvoda f_1''' .



Slika 2: Primer $n = 2$. Grafi funkcij $f_{1,2}$ in drugih odvodov $f_{1,2}''$.

Sedaj številu α_1 dajmo samostojen pomen. Število α_2 ni posebno zanimivo, ker se tako in tako izraža z α_1 zaradi zveze $\alpha_1 + \alpha_2 = n$.

Število

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \left(n + \sqrt{n^2 + 4} \right)$$

imenujemo *kovinsko razmerje* reda n (več o tem na primer v [2]). Zanj velja zveza $\sigma_n^2 = n\sigma_n + 1$, iz katere sledi $\sigma_n = n + 1/\sigma_n$. Če drugo zvezo uporabimo

kar v njej sami, dobimo:

$$\sigma_n = n + \frac{1}{\sigma_n} = n + \frac{1}{n + \frac{1}{\sigma_n}} = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{\sigma_n}}}.$$

Ta postopek lahko nadaljujemo v nedogled. To pomeni, da smo σ_n uspeli razviti v neskončni verižni ulomek:

$$\sigma_n = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \ddots}}}.$$

Po navadi ga zapišemo v krajši obliki:

$$\sigma_n = [n; n, n, \dots].$$

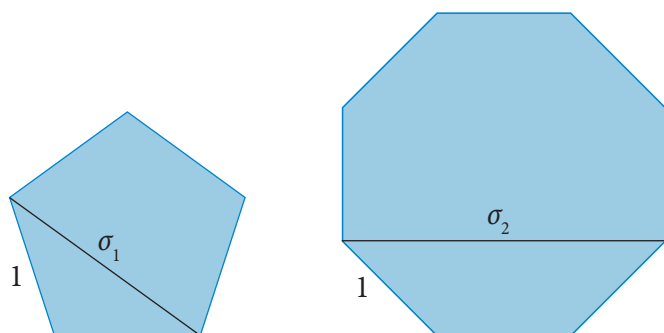
Pred podpičjem je njegov celi del. Za $n = 1, 2, 3$ imamo

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) = [1; 1, 1, \dots], \\ \sigma_2 &= 1 + \sqrt{2} = [2; 2, 2, \dots], \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} (3 + \sqrt{13}) = [3; 3, 3, \dots]. \end{aligned}$$

Po vrsti jih imenujemo *zlato*, *srebrno* in *bronasto razmerje*, kar je v skladu z leskom medalje, ki se na športnih tekmovanjih podeljujejo za osvojeno prvo, drugo in tretje mesto.

Pogosto označujejo zlato razmerje s φ ali τ , za katero velja osnovna relacija $\varphi^2 = \varphi + 1$. Zlato razmerje je bilo znano že v antičnih časih, le da so ga imenovali *skrajno* in *srednje razmerje*. V obdobju renesanse so mu rekli *božansko razmerje*. Zlati pravokotnik je bil za renesančne umetnike najbolj estetski med vsemi pravokotniki. Izraz *zlato razmerje* se je uveljavil šele v 19. stoletju. Več o tem na primer v [1].

Zlato razmerje $\varphi = \sigma_1$ najdemo v pravilnem petkotniku, kjer sta diagonalna in stranica v zlatem razmerju. Prav tako v pravilnem ikozaedru in dodekaedru. Srebrno razmerje σ_2 je v pravilnem osemkotniku. V njem sta srednje dolga diagonalna in stranica v srebrnem razmerju (Slika 4). To lahko hitro preverimo.



Slika 4: Pravilni petkotnik in pravilni osemkotnik.

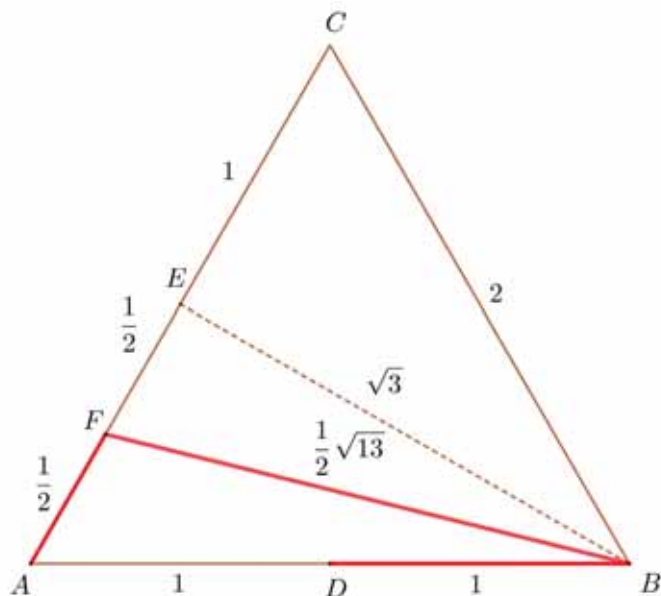
Dokazali so, da bronasto razmerje σ_3 ni v nobenem pravilnem večkotniku razmerje med diagonalno in stranico.

Bronasto razmerje dobimo v enakostraničnem trikotniku ABC s stranico 2 kot vsoto dolžin treh daljic (Slika 5). Najprej poiščemo sredini stranic AB in AC . To sta točki D in E . Nato poiščemo še sredino F daljice AE . Za dolžine dobimo:

$$|AB| = 2, |BD| = 1, |AF| = |FE| = \frac{1}{2}, |EB| = \sqrt{3}, |FB| = \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

S tem imamo:

$$|AF| + |FB| + |BD| = \frac{1}{2} (3 + \sqrt{13}) = \sigma_3.$$



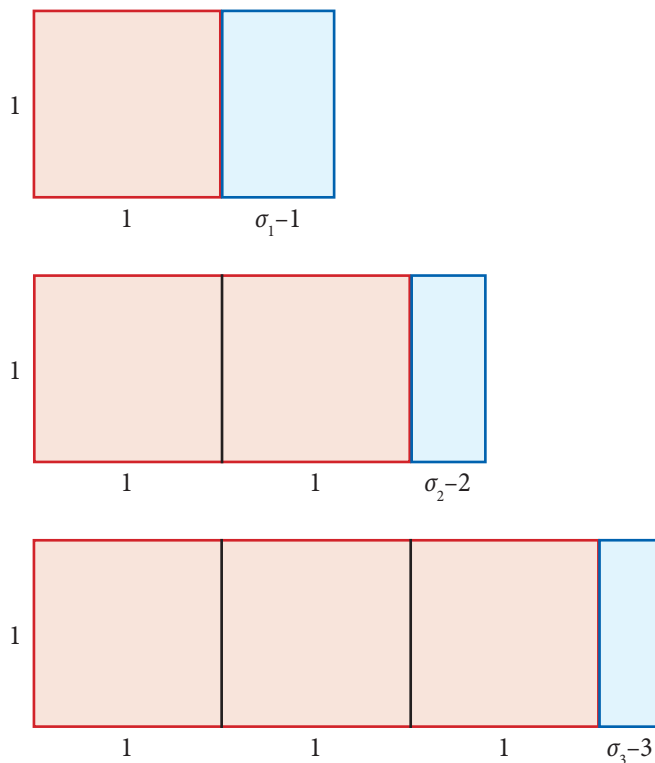
Slika 5: Bronasto razmerje v enakostraničnem trikotniku.

Pokažimo, kako lahko geometrijsko razložimo razmerje σ_n . Ker je $\sigma_n > n \geq 1$, lahko pravokotnik s stranicama σ_n in 1 razrežemo na n enotskih kvadratov ter manjši pravokotnik s stranicama $\sigma_n - n$ in 1. Večji in manjši pravokotnik sta si podobna, ker velja zveza

$$\frac{1}{\sigma_n} = \frac{\sigma_n - n}{1}.$$

Vsak pravokotnik, ki je podoben *tema* dvema, je *kovinski pravokotnik* reda n .

Na sliki 6 so predstavljeni zlati, srebrni in bronasti pravokotnik.



Slika 6: Zlati, srebrni in bronasti pravokotnik.

Ko od kovinskega pravokotnika reda n odstranimo n kvadratov, ostane manjši kovinski pravokotnik reda n . Od tega spet lahko odstranimo n kvadratov in dobimo še manjši kovinski pravokotnik reda n . Ta postopek lahko nadaljujemo v nedogled. S tem dobimo neko samopodobno strukturo, ki spominja na fraktale.

Uporaba GeoGebre

Pri izdelavi slik v prispevku je bila uporabljena GeoGebra. Za računanje padajoče faktoriele $(\alpha)_n$, ki je GeoGebra ne pozna, je bila uporabljena funkcija Γ (za nenegativne cele n je $\Gamma(n+1) = n!$), s katero izrazimo

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}.$$

Funkcijo Γ v GeoGebri priključimo z ukazom **gamma**, na primer **gamma(5)**, kar nam da 24. Potenco s pozitivno osnovo in realnim eksponentom GeoGebra izračuna brez težav.

Zaključek

Spoznali smo, da obstajajo realne funkcije f , katerih inverz je enak n -temu odvodu funkcije f . Take funkcije so preproste potenčne funkcije. Spoznali smo, da so eksponenti v njihovih izrazih v tesni povezavi s kovinskimi razmerji. Teže pa je najti nepotenčno funkcijo f , katere inverz je enak njenemu n -temu odvodu.

Literatura

- [1] Merzbach, U. C., Boyer, C. B. (2011). *A History of Mathematics*. New Jersey: John Wiley & Sons, Hoboken.
- [2] V. M. W. de Spinadel. (1998). *From the Golden Mean to Chaos*, Buenos Aires: Editorial Nueva Libreria.
- [3] Vidav, I. (1968). *Višja matematika I*. Ljubljana: DZS.

Iz digitalne bralnice ZRSŠ

www.zrss.si/strokovne-resitve/digitalna-bralnica

V digitalni bralnici lahko prelistate najrazličnejše strokovne publikacije: monografije in priročnike, ter druge publikacije, ki so izšle na Zavodu RS za šolstvo in so vam BREZPLAČNO dosegljive tudi v PDF obliki.

Priporočamo:

- Posodobitve pouka v gimnazijski praksi MATEMATIKA in CD
- Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi MATEMATIKA in CD
- O naravi učenja
- Razvijanje in vrednotenje znanja
- Ugotavljanje kompleksnih dosežkov
- Izobraževalni lističi Scientix NA-MA
- Razsežnost učnega jezika pri vseh predmetih
- Učne težave pri matematiki in slovenščini – izziv za učitelje in učence



Preiskovalna naloga o množenju z decimalnimi števili v 6. razredu

Loreta Hebar
Osnovna šola Jarenina

Učitelji v razvojni nalogi *Uvajanje formativnega spremljanja in inkluzivne paradigme* so pri svojem pouku uvajali in preizkušali pristop s preiskovanjem v različnih razredih. Predstavljamo primer preiskovanja v 6. razredu za učni sklop Množenje z deci-

malnimi števili (računske operacije in njihove lastnosti) – v tem primeru je bila preiskovalna naloga usmerjena v ugotavljanje novega pravila. Izvedba traja dve šolski uri.

Učni načrt	Oblikovano/načrtovano skupaj z učenci		
Učni cilji: Učenci/učenke: - decimalna števila množijo in delijo s potenco števila 10; - množijo dve decimalni števili.	Nameni učenja: - množim decimalno število s številom 10, s 100, s 1000 ...; - delim decimalno število z 10, s 100, s 1000 ...; - vem, koliko decimalk ima zmnožek dveh decimalnih števil; - množim dve decimalni števili.	Učne dejavnosti, metode: Aktivacija predznanja: Učenci/učenke samovrednotijo svoje dosedanje znanje množenja naravnega števila s potencami števila 10 z metodo semaforja na vstopnem lističu in predvidijo temo. Učenci/učenke: - aktivno raziskujejo v parih s pomočjo prve strani učnega lista, beležijo rezultate, opazujejo vzorec in ubesedijo pravilo, kako množimo in delimo decimalno število s potenco št. 10 (pri tem uporabljajo žepno računalno); - preberejo svoje ugotovitve, si dopolnijo besedilo, če je potrebno, in preverijo svoje razumevanje z danimi nalogami na učnem listu; - nadaljujejo delo in aktivno raziskujejo, beležijo rezultate, opazujejo vzorec in ubesedijo pravilo, kako množimo decimalno število z naravnim številom in še z decimalnim številom; - preberejo svoje ugotovitve, si dopolnijo besedilo, če je potrebno, in preverijo svoje razumevanje z danimi nalogami na učnem listu; - po dejavnostih sooblikujemo namene učenja in kriterije uspešnosti; - zapišejo povzetek teme – množenje decimalnega števila s potencami števila 10 in z decimalnim številom; - sestavijo nalogo ali jo poiščejo v literaturi za svojega sošolca oz. svojo sošolko, nato nalogo pregledajo in zapišejo povratno informacijo (tako izkažejo svoje znanje); - učenci/učenke, ki še niso usvojili/e pravil, naloge rešujejo v paru in se pri reševanju posvetujejo s sošolci/sošolkami, primerjajo rezultate in si tako pregledajo naloge; - z izstopnim lističem 3-2-1 mi dajo povratno informacijo o razumevanju današnje teme.	Učenčevi izdelki oz. dokazi, ki izhajajo iz pogovorov ali opazovanj pri pouku: - izpolnjeni vstopni lističi s semaforjem (Priloga 2) - izpolnjeni učni listi (Priloga 4 in 5) - nameni učenja in kriteriji uspešnosti, ki jih zapišem v tabelo in jo nato natisnem učencem (Priloga 1) - zapisan povzetek pravil z množenje in njihovih ugotovitev v zvezku - zapisana in popravljena naloga s povratno informacijo sošolcu - rešena naloga - izpolnjen izstopni listič 3-2-1 (Priloga 3)
Standardi znanja/učni dosežki: Učenec/učenka: - zanesljivo uporablja računske operacije s števili v decimalnem zapisu; - razvija natančnost in spretnost pri računanju; - napove rezultate računskih operacij; - uporablja žepno računalno; - pozna in uporablja matematično terminologijo.	Kriteriji uspešnosti: Priloga 1		

Priloga 1: Nameni učenja in kriteriji uspešnosti**Decimalna števila: Množenje**

Nameni učenja				Uspešen/a sem, ko vem, da:
Množim decimalno število: - s številom 10, - s 100, - s 1000.				- v rezultatu decimalno vejico premaknem za eno mesto v desno; - v rezultatu decimalno vejico premaknem za dve mesti v desno; - v rezultatu decimalno vejico premaknem za tri mesta v desno;
Delim decimalno število: - z 10, - s 100, - s 1000.				- v rezultatu decimalno vejico premaknem za eno mesto v levo; - v rezultatu decimalno vejico premaknem za dve mesti v levo; - v rezultatu decimalno vejico premaknem za tri mesta v levo;
Vem, koliko decimalk ima zmnožek dveh decimalnih števil.				mora imeti rezultat toliko decimalk, kot jih imata oba faktorja skupaj;
Množim dve decimalni števili.				množim tako kot naravna števila in na koncu v rezultat vstavim decimalno vejico tako, da ima rezultat toliko decimalk, kot jih imata oba faktorja skupaj.

Priloga 2: Vstopni listič**Kako dobro znam množiti naravna števila s potencami števila 10 na pamet?**

Množenje s potencami števila 10	Dobro znam.	Nekaj že znam.	Še ne znam.	Zapiši vsaj dva primera in zapiši pravilo z besedo.
Množenje z 10				
Množenje s 100				
Množenje z 10 000				

Priloga 3: Izstopni listič

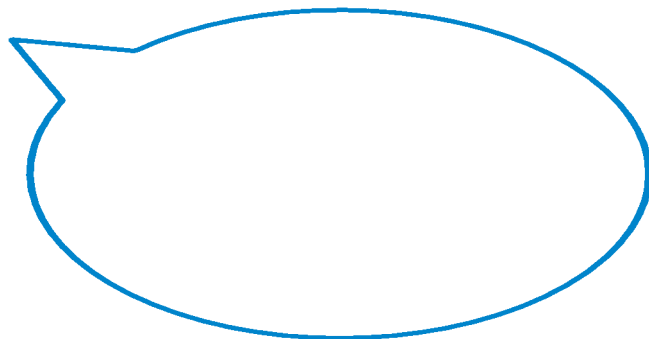
3	Stvari, ki sem se jih naučil/a:
2	Stvari, ki sta se mi zdeli zanimivi:
1	Vprašanje, ki ga še vedno imam:

**Priloga 4: Učni list****Množenje z decimalnimi števili**

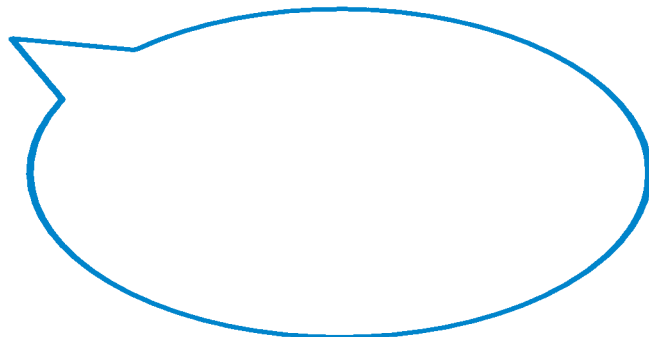
Izračunaj z žepnim računalom. Opazuj rezultate in zapiši ugotovitve.

1. Množenje decimalnih števil z 10, s 100, s 1000 ...

$382,341 \cdot 10 =$	
$382,341 \cdot 100 =$	
$382,341 \cdot 1000 =$	
$382,341 \cdot 10000 =$	

**2. Deljenje decimalnih števil z 10, s 100, s 1000 ...**

$382,341 : 10 =$	
$382,341 : 100 =$	
$382,341 : 1000 =$	
$382,341 : 10000 =$	



Ali znam? Reši brez žepnega računalca.

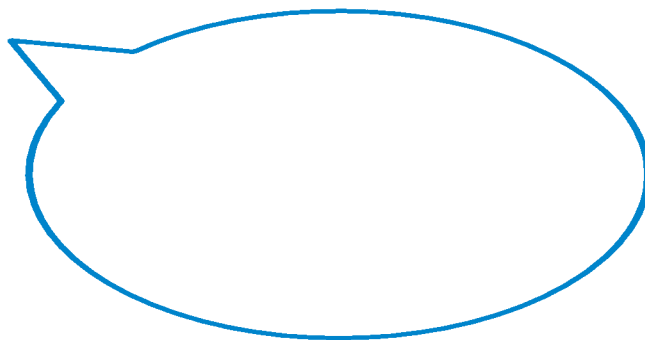
$13,2 \cdot 10 =$	
$0,356 \cdot 100 =$	
$90,2 \cdot 100 =$	
$193,298 \cdot 100 =$	
$83,1109 \cdot 1000 =$	

$13,2 : 10 =$	
$0,356 : 100 =$	
$90,2 : 100 =$	
$193,98 : 100 =$	
$83,109 : 1000 =$	

**3. Množenje decimalnih števil z naravnim številom**

$1823,4 \cdot 3 =$	
$182,34 \cdot 3 =$	
$18,234 \cdot 3 =$	
$1,8234 \cdot 3 =$	

Koliko decimalk ima prvi faktor in koliko produkt?

**4. Množenje decimalnega števila z decimalnim številom**

$1823,4 \cdot 3 =$	
$1823,4 \cdot 0,3 =$	
$1823,4 \cdot 0,03 =$	
$182,34 \cdot 0,03 =$	

Koliko decimalk ima prvi faktor, koliko drugi faktor in koliko produkt?

Beleži v tabeli:

Število decimalk 1. faktorja	Število decimalk 2. faktorja	Število decimalk produkta

Kaj ugotoviš?

Ali znam? Reši brez žepnega računalja.

Izračunaj:

$78,9 \cdot 10 =$	
$41,56 \cdot 100 =$	
$87,32 : 10 =$	
$72,596 : 100 =$	

Vstavi dec. vejico, da bo enakost pravilna:

$3,89 \cdot 4 = 1556$
$13,2 \cdot 1,3 = 416$
$7,35 \cdot 2,4 = 1764$
$854,231 \cdot 0,3 = 2562693$

Priloga 5: Izdelek učenca

Množenje z decimalnimi števili

Izračunaj z žepnim računalom. Opazuj rezultate in zapiši ugotovitve.

1. Množenje dec. št. z 10, 100, 1000...

$382,341 \cdot 10 =$	3823,41
$382,341 \cdot 100 =$	38234,1
$382,341 \cdot 1000 =$	382341
$382,341 \cdot 10000 =$	3823410

Večje množenje, za koliko mest, kolikokrat je v št. ničel, to manjša decimalne dodajam ničle.

2. Deljenje dec. št. z 10, 100, 1000...

$382,341 : 10 =$	38,2341
$382,341 : 100 =$	3,82341
$382,341 : 1000 =$	0,382341
$382,341 : 10000 =$	0,0382341

Večje deljenje, za koliko mest, kolikokrat je v št. ničel, to manjša števe dodamo, ničle spredaj in nato levo v decimali.

Ali znam?

$13,2 \cdot 10 = 132$	$13,2 : 10 = 1,32$
$0,356 \cdot 100 = 35,6$	$0,356 : 10 = 0,0356$
$90,2 \cdot 100 = 9020$	$90,2 : 100 = 0,902$
$193,298 \cdot 100 = 19329,8$	$193,298 : 100 = 1,93298$
$83,1109 \cdot 1000 = 83110,9$	$83,1109 : 1000 = 0,0831109$

3. Množenje dec. št. z naravnim številom

$1823,4 \cdot 3 =$	5470,2
$182,34 \cdot 3 =$	547,02
$18,234 \cdot 3 =$	54,702
$1,8234 \cdot 3 =$	5,4702

Skupaj preštujemo produkt, kot da ni dec. vejice. Ustavimo vejico tako, da izgleda, koliko ima faktor decimali in tudi rezultat jih mora, koliko kot faktor.

Koliko decimalk ima faktor in koliko produkt?

Faktor in produkt imata enako število decimalk

4. Množenje dec. št. z decimalnim številom

$1823,4 \cdot 3 =$	5470,2
$1823,4 \cdot 0,3 =$	547,02
$1823,4 \cdot 0,03 =$	54,702
$182,34 \cdot 0,03 =$	5,4702

*1. Množimo kot da ni dec. vejice.
2. Vstavimo vejico: rezultat mora imeti toliko decimalk, kot vsi faktorji skupaj.*

Koliko decimalk ima prvi faktor, koliko drugi faktor in koliko produkt?

Beleži v tabeli:

Št. decimalk 1. faktorja	Št. decimalk 2. faktorja	Št. decimalk produkta
1	0	1
1	1	2
1	2	3
2	2	4

Produkt ima toliko decimalk kot sta faktorja skupaj.

Ali znam?

Vstavi dec. vejico, da bo enakost pravilna:

$78,9 \cdot 10 =$	$3,89 \cdot 4 = 15,56$
$41,56 \cdot 100 =$	$13,2 \cdot 1,3 = 17,16$
$87,32 : 10 =$	$7,35 \cdot 2,4 = 17,64$
$72,596 : 100 =$	$854,231 \cdot 0,3 = 256,2693$

Preiskovalna naloga v podporo razvoju procesnih znanj v 2. letniku gimnazijskega programa

Urška Rihtaršič
Gimnazija Bežigrad

Učitelji v razvojni nalogi *Uvajanje formativnega spremljanja in inkluzivne paradigme* so pri svojem pouku uvajali in preizkušali pristop s preiskovanjem v različnih razredih. Predstavljamo pri-

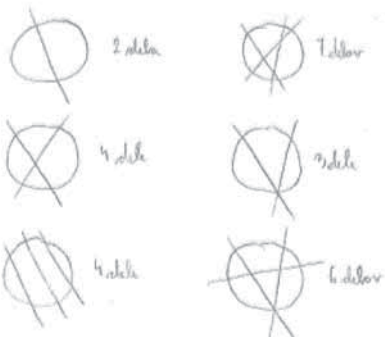
mer preiskovanja v 2. letniku gimnazijskega programa za učni/tematski sklop Preiskovanje v podporo razvoju procesnih znanj. Izvedba traja tri šolske ure.

UČNI NAČRT		OBLIKOVANO/NAČRTOVANO SKUPAJ Z UČENCI	
Učni cilji: - dijake vpeljati v preiskovanje; - jim pomagati, da razvijejo učinkovite strategije za prepoznavanje in opisovanje vzorcev; - pri dijakih spodbujati in razvijati sposobnost prehajanja od konkretnega k splošnemu (posploševanje na podlagi vzorcev, ki jih opazijo na konkretnih primerih).	Nameni učenja: Učim se preiskovanja s poskusi in napakami ter na podlagi povratne informacije s strani učitelja in sošolcev kasneje svoje pristope izboljšam in izpopolnim.	Učne dejavnosti, metode: - Seznanitev dijakov z njihovo nalogo Navodilo: Razišči, na koliko delov lahko razdelimo krog s premicami, ki dvakrat sekajo krožnico. Dijaki se prvič srečajo z nalogo takega tipa. Pred tem se ne pogovarjamo o kriterijih uspešnosti niti o tem, kako se takih nalog lotiti - vsak se je loti, kakor najbolje ve in zna. - Samostojno preiskovanje Dijaki imajo eno šolsko uro časa, da preiskovalno nalogo dokončajo. - Medsebojno deljenje izkušenj, refleksija Naslednja šolska ura je namenjena pogovoru o dani nalogi. Po skupinah se dijaki pogovarjajo o tem, kaj jim je povzročalo največje težave, ter iščejo rešitve in načine, kako se take naloge lotiti čim bolj učinkovito. Svoj način reševanja delijo z drugimi tudi tisti dijaki, ki nalogo opravijo dobro (že v začetku pridejo do nekih ugotovitev, zaključkov, posplošitev). Skupaj na tablo napišemo pravila, korake, po katerih je smiselno pristopiti k preiskovalni nalogi: - naloge se poskusi lotiti čim bolj sistematično; - začni z majhnimi števili in potem postopoma nadaljuj z večjimi; - poišči in preglej vse različne možnosti; - bodi pozoren na vzorce, ki jih opaziš; - ves čas razmišljaj in poskusi ugotoviti, zakaj je tako; - svoje ugotovitve zapiši jasno, razumljivo in matematično pravilno. Vsak dijak dobi povratno informacijo o svojem izdelku tudi s strani učitelja. Njegov izdelek je ovrednoten glede na kriterije, ki smo jih učitelji oblikovali na skupnih srečanjih. - Oblikovanje kriterijev uspešnosti Kriterijev uspešnosti tokrat ne oblikujemo skupaj z dijaki, ampak jih seznanim s tistimi, ki smo jih že prej oblikovali učitelji.	Učenčevi izdelki oz. dokazi, ki izhajajo iz pogovorov ali opazovanj pri pouku: - izdelki dijakov (Priloga 1) - nabor različnih načinov reševanja - pravila in koraki, po katerih je smiselno pristopiti k preiskovalni nalogi - povratne informacije o izdelkih s strani učitelja glede na kriterije uspešnosti
Standardi znanja/učni dosežki: Dijak: - učinkovito pristopi k preiskovalni nalogi; - preiskovanja se loti sistematično; - svoje ugotovitve zapiše jasno, razumljivo in matematično pravilno.	Kriteriji uspešnosti: Dijak: - razume problem (svoje razumevanje pokaže z nekaj konkretnimi primeri); - izbere in uporabi pravilno strategijo, ki vodi do rezultata; - sistematično razišče različne primere; - pričakovane ugotovitve zapiše jasno, razumljivo in pravilno; - ugotovitve, do katerih je prišel iz konkretnih primerov, posploši.		

Priloga 1: Izdelka dijakov 2. letnika

PREISKOVALNA NALOGA

1. Razišči, na koliko delov lahko razdelimo krog s premicami, ki dvakrat sekajo krožnico.



Če imajo vsa premice skupno točko: $n+1$ delov
 Če imajo vsaj dve skupne točke na krožnici: $n+2+1$
 Če so vzporedne: $n+1$ delov

1. Če vsa premice na krogu ali če vsa sekajo enkrat: $n+1$
2. Če vsa premice sekajo dvakrat: $2n+1$
3. Če imajo vsa premice vsaj eno skupno točko na krožnici: $2n$

PREISKOVALNA NALOGA

1. Razišči, na koliko delov lahko razdelimo krog s premicami, ki dvakrat sekajo krožnico.

① $1p = 2x$
 ② $2p = 4x$
 $2p = 3x$
 ④ $4p = 5x$
 $4p = 8x$
 $4p = 8x$
 $4p = 9x$
 $4p = 10x$
 $4p = 7x$
 $4p = 9x$
 $4p = 6x$

③ $3p = 6x$ $3p = 5x$
 $3p = 6x$ $3p = 4x$
 $3p = 6x$

$m = \text{množica}$
 $1p = 2x$
 $1m = 1x$
 $2p = 3x$
 $2m = 4x$
 $3p = 4x$
 $1m = 5x$
 $2m = 6x$
 $3m = 7x$
 $4p = 5x$
 $1m = 6x$
 $2m = 7x$
 $3m = 8x$
 $4m = 9x$
 $5m = 10x$

$1p = 2 \} 1$
 $2p = 3 \} 2$
 $3p = 4 \} 3$
 $4p = 5 \} 4$
 $5p = 6 \} 5$
 $6p = 7 \} 6$
 $7p = 8 \} 7$
 $8p = 9 \} 8$
 $9p = 10 \} 9$

$5p = 12 \text{ (2)}$
 št. p + št. točk na krožnici
 =
 št. delov

Problemska naloga v fazi poglobljanja in povezovanja matematičnih znanj

mag. Simona Pustavrh
Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija

Izvleček

V prispevku sta predstavljena primera problemskih matematičnih nalog, ki ju lahko rešimo po različnih poteh. Pri prvem primeru dijaki računajo višino trikotnika v pravokotnem koordinatnem sistemu v ravnini, v drugem primeru pa z različnimi praktičnimi metodami določijo višino drevesa ob šolskem igrišču. Zaradi kompleksnosti sta nalogi primerni za gimnazijske programe. Izvedemo ju lahko tudi v programih srednjega strokovnega izobraževanja, če metode reševanja nalog prilagodimo znanju dijakov.

Ob reševanju nalog dijaki povežejo znanja različnih matematičnih vsebin, pri tem pa spretno uporabljajo informacijsko-komunikacijsko (IKT) tehnologijo, informacije pa iščejo s pomočjo literature in različnih virov. Z iskanjem različnih poti do rešitve razvijajo divergentno mišljenje, metodo analize in sinteze ter kritični odnos do interpretacije rezultatov. Na koncu vsake aktivnosti smo z dijaki analizirali delo. Dijaki so ocenili aktivnosti kot dobrodošli, saj so svoje znanje uporabili na drugačen način, in si želijo še več podobnih nalog.

Ključne besede: matematična znanja, problemska naloga, različni načini reševanja, trikotnik, višina drevesa

Problem-Solving Task in the Phase of Deepening and Integrating Mathematical Knowledge

Abstract

The article gives two examples of mathematical problem-solving tasks that can be solved in different ways. In the first example, secondary school students calculate the height of a triangle in a plane-rectangular coordinate system; in the second example, they determine the height of a tree next to the school recreation ground using various practical methods. Due to their complexity, the tasks are suitable for general secondary schools. They can also be implemented in secondary technical schools by adapting the task-solving methods to the students' knowledge.

When solving the tasks, the students integrate the knowledge of various mathematical contents, while skilfully using information and communication technology (ICT), and searching for information with the help of literature and various sources. By searching for different paths to the solution, they develop divergent thinking, the method of analysis and synthesis, and a critical attitude towards the interpretation of results. At the end of each activity, the teacher and the students analysed their work together. The students assessed the activities as a welcome addition, since they were able to apply their knowledge in a different way. They would like more tasks of this kind.

Keywords: mathematical knowledge, problem-solving task, different problem-solving methods, triangle, height of tree

Višina trikotnika

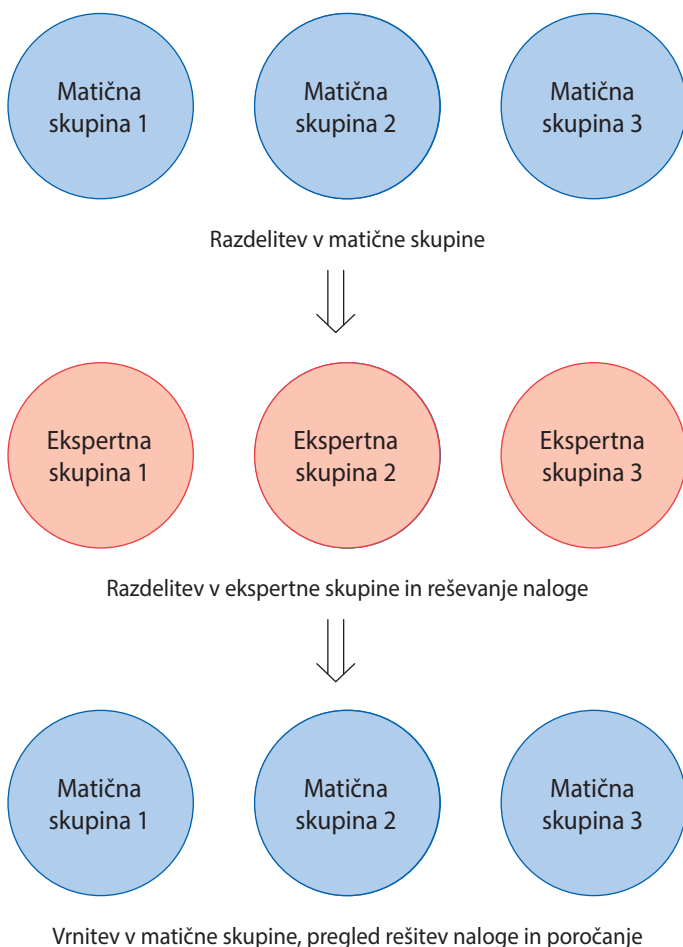
Aktivnost je smiselno izvesti proti koncu tretjega letnika po obravnavi kotnih funkcij in metrične geometrije v ravnini. Dijaki potrebujejo naslednje predznanje: znajo izračunati ploščino trikotnika po različnih obrazcih, izračunajo razdaljo med dvema točkama, uporabljajo kosinusni izrek za izračun velikosti kota v trikotniku, izračunajo kot med vektorjema, znajo zapisati enačbo premice in izračunati kot med premicama, izračunajo oddaljenost točke od premice.

Možen pristop

Zastavitev problema

V uvodnem delu dijake seznanimo z metodo dela in nalogo. Dijake seznanimo s potekom sodelovalnega učenja, in sicer podzvrst sodelovalnega učenja z imenom »sestavljanje«, ki je opisana v [2].

Pri sestavljanju učitelj razdeli dijake v matične skupine, da dijaki vedo, kdo so člani skupine. Nato se dijaki razdelijo v ekspertne skupine in učitelj poda besedilo naloge, za katero imajo dijaki na voljo omejeni čas. Ko poteče čas reševanja naloge, se dijaki vrnejo v matične skupine in drug drugemu predstavijo rešitve, ki so jih oblikovali v ekspertnih skupinah, nato pa skupine poročajo o rešitvah naloge.

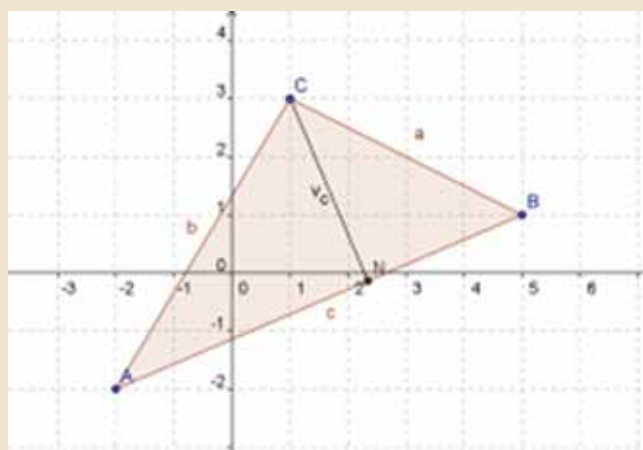


Dijake lahko razdelimo v matične in ekspertne skupine na različne načine. Sama jih razdelim tako, da vsakemu dijaku dam enega od spodnjih lističev (če je dijakov manj, ne razdelimo vseh lističev). Lističi enake barve določajo matične skupine, lističi z enakimi številkami pa ekspertne skupine. V vsaki matični in v vsaki ekspertni skupini so tako po 4 dijaki.

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	5	6
7	8	3	4
1	6	3	8
5	2	7	4
1	2	7	8
5	6	3	4

Ko so dijaki razdeljeni v ekspertne skupine, jim podam besedilo naloge:

V trikotniku z oglišči $A(-2, -2)$, $B(5, 1)$ in $C(1, 3)$ izračunajte dolžino višine na stranico c . Nalogo rešite na čim več različnih načinov.



Razvoj aktivnosti

Dijaki so v svojih ekspertnih skupinah rešili nalogo na več načinov. Ko so se vrnili v matične skupine, so si med seboj predstavili načine, po katerih so reševali naloge v ekspertnih skupinah. Na koncu ure je po en dijak iz vsake matične skupine, ki sem ga poklicala k tabli, predstavil eno od poti do rešitve. Zbrali smo zelo veliko različnih poti reševanja.

Prvi način: Z uporabo formule

$$S = \frac{1}{2} \cdot o \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

izračunamo ploščino trikotnika. Z uporabo formule za razdaljo med točkama izračunamo dolžino stranice c , nato pa iz zveze

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

izrazimo v_c in jo izračunamo.

Drugi način: Zapišemo enačbo premice skozi točki A in B ter enačbo pravokotnice na to premico skozi točko C . Izračunamo presečišče obeh premic, ki je ravno nožišče N . Višina trikotnika na stranico c je enaka razdalji med nožiščem in točko C , izračunamo pa jo po formuli za razdaljo med točkama.

Tretji način: Izračunamo dolžine stranic trikotnika z uporabo formule za razdaljo med točkama, s kosinusnim izrekom izračunamo kot α , nato iz zveze $\sin \alpha = \frac{v_c}{b}$ izračunamo v_c .

Četrti način: Izračunamo komponente vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, njun skalarni produkt in dolžini obeh vektorjev, nato pa kot med vektorjema, ki je enak kotu α . Višino v_c izračunamo iz zveze $\sin \alpha = \frac{v_c}{|\overrightarrow{AC}|}$.

Peti način: Zapišemo enačbo premice skozi točki A in B ter izračunamo oddaljenost točke C od te premice, ki je enaka v_c .

Šesti način: Zapišemo enačbi premic skozi točki A in B ter skozi točki A in C , izračunamo kot med njima, izračunamo dolžino stranice b , nato pa zopet iz zveze $\sin \alpha = \frac{v_c}{b}$ izračunamo v_c .

Sedmi način: Izračunamo dolžine stranic trikotnika z uporabo formule za razdaljo med točkama, s Heronovim obrazcem izračunamo ploščino trikotnika, nato pa zopet iz formule $S = \frac{c \cdot v_c}{2}$ izračunamo v_c .

Osmi način: Izračunamo dolžine vseh treh stranic, s kosinusnim izrekom kot α , ploščino trikotnika po formuli $S = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$, nato pa iz zveze $\sin \alpha = \frac{v_c}{b}$ izračunamo v_c .

Deveti način: Zapišemo enačbo krožnice s središčem v točki C in s polmerom v_c : $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = v_c^2$. Zapišemo še enačbo premice skozi točki A in B . Uporabimo zamenjalni način reševanja sistema enačb in enačbo premice v eksplicitni obliki vstavimo v enačbo krožnice. Ker želimo, da bo premica tangenta krožnice, mora biti diskriminanta nastale kvadratne enačbe enaka 0, rešitev te enačbe pa je ravno v_c .

Do rešitve lahko pridemo seveda še po kakšni od možnih poti.

Vprašanja za razvoj aktivnosti

Dijake sem vzpodbudila k razmišljanju z dodatnimi navodili, naj primerjajo in vrednotijo rezultate naloge, ki so jih dobili po različnih poteh. Usmerila sem jih tudi k primerjanju metod s ciljem, da ugotovijo, katera metoda je krajša oziroma elegantnejša.

Možne razširitve aktivnosti

Nalogo z istimi podatki lahko uporabimo tudi kot povezovalno nalogo v prvih treh letnikih. Dijakom povemo, da bomo isto na-

logo v prvih treh letnikih rešili večkrat. Na ta način zagotovimo spiralno nadgrajevanje znanja.

V prvem letniku nalogo rešimo na prvi in drugi način, v drugem letniku na tretji in četrti način, ostale načine pa v tretjem letniku. Če učitelj razporedi učno snov drugače, seveda prilagodi tudi vrstni red načinov reševanja.

Načrtovanje

Če aktivnost načrtujemo kot ponovitev snovi v tretjem letniku, predvidimo za to dve do tri šolske ure. Čas, ki ga potrebujejo dijaki za reševanje naloge, je odvisen od njihovega predznanja.

Če nalogo izkoristimo za spiralno nadgrajevanje znanja, načrtujemo nalogo v poglavjih, ki so s to nalogo povezana.

Spremljanje dejavnosti in dosežkov

Če aktivnost izvedemo v enem dnevu v blok urah, učitelj spremlja delo dijakov v skupinah. Z razgovorom jih usmerja, če zaidejo s poti ali nimajo več idej. Napoti jih k uporabi literature. Po končani aktivnosti dijaki predstavijo svoje rešitve. Iz vsake skupine učitelj izbere dijaka, ki predstavi enega od načinov, po katerem so prišli do rešitve.

Če celotne aktivnosti ne izvedemo v istem dnevu (če torej ni blok ure), učitelj lahko pobere izdelke ekspertnih skupin in jih pregleda. Poudarek je predvsem na pregledu strategij reševanja ter na sistematičnem in urejenem zapisovanju poti do rešitve. Kot opažam pri svojih dijakih, so njihovi zapiski pogosto nepregledni, nepopolni in nečitljivo zapisani.

Vprašanja za spremljanje

Cilj aktivnosti je bil ponovitev in povezovanje vsebin prvih treh letnikov, zato so se tudi vprašanja nanašala na povezovanje in ponovitev:

- Koliko različnih poti do rešitve ste uspeli poiskati?
- Katera znanja ste pri tem uporabili? Iz katerega letnika je posamezno znanje? Pri katerem poglavju smo se naučili posameznega znanja?
- Katere formule ste znali na pamet in katere ste morali poiskati v literaturi?

Dosežki dijakov pri ugotovljenem in predpostavljene predznanju

Dijaki so najprej narisali trikotnik v pravokotnem koordinatnem sistemu v zvezek, nekateri so celo odprli prenosnik in trikotnik narisali tudi v Geogebri ter prebrali približno rešitev. Nato so reševali nalogo po čim več različnih načinih. S tem so ponovili velik del snovi prvih treh letnikov. Pri svojem delu so povezovali znanja različnih poglavij, primerjali in vrednotili rezultate naloge, ki so jih dobili po različnih poteh, ugotavljali, katera metoda je krajša oziroma elegantnejša in s tem evalvirali svoje delo, kar pomeni razmišljanje na višjih taksnonomskih ravneh znanja. Vsak dijak je bil odgovoren pri reševanju naloge, da razume rešitve, ki jih je oblikovala skupina, saj so se dijaki na koncu vrnili v matične skupine in so morali vsi poročati, kako so nalogo reševali v ekspertni skupini.

Sprva dijaki niso imeli veliko idej. Nalogo so rešili po enem načinu ali dveh. Vzpodbujala sem jih k nadaljnjemu razmišljanju, brskanju po učbenikih, priročnikih in spletu. Kmalu so se spomnili premic, oddaljenosti točke od premice, Heronovega obrazca ... Boljši dijaki so me presenetili z devetimi načinom, saj ga sama nisem predvidela. Največ težav je bilo pri reševanju naloge z vektorji. Čeprav so dijaki sami podali idejo, da bi nalogo lahko rešili tudi z vektorji, so potrebovali mojo pomoč.

Po izvedenih urah sem se pogovorila z dijaki o novi metodi dela. Izrazili so navdušenje, veseli so bili, da so lahko tudi pri matematiki delali v skupinah. Najbolj všeč jim je bilo, da so delali najprej v ekspertnih skupinah, nato pa v matičnih skupinah. Poleg tega se jim je zdelo pomembno tudi, da so ponovili snov za nazaj in da jih je naloga vzpodbudila k širšemu razmišljanju. Pohvalili so me za izvirnost in želijo si več podobnih ur.

Določanje višine drevesa

Aktivnost izvedemo v drugem letniku po obravnavi podobnosti trikotnikov in kotnih funkcij. Ker se aktivnost izvaja na prostem in ob tem izkoristimo sončno svetlobo, je treba izbrati sončen dan. Vsebinsko kotnih funkcij večinoma obravnavamo v zimskih mesecih, zato lahko aktivnost izvedemo tudi na koncu šolskega leta in z njo ponovimo vsebine drugega letnika.

Možen pristop

Zastavitev problema

Dijake v razredu predhodno uro razdelimo v skupine. Skupine dobijo domačo nalogo, da razmislijo in opišejo, kako bi določili višino drevesa na prostem. V zvezek naj narišejo skice, razmislijo, katere količine bi bilo treba izmeriti, kako in s čim bi jih izmerili ter kako bi izračunali višino drevesa.

Razvoj aktivnosti

Na začetku prve ure dijaki po skupinah pregledajo rešitve naloge, ki so jih za domačo nalogo zapisali v zvezek. Vsaka skupina predstavi svoje rešitve. Učitelj po potrebi dopolni metode, če dijaki niso poiskali vseh, ki jih ima učitelj v mislih (dijaki običajno najdejo dve ali tri poti do rešitve). Učitelj dijake vzpodbudi k razmišljanju o potrebnih pripomočkih za merjenje. Učitelj razdeli učne liste, na katere dijaki skicirajo drevo, metode in zapišejo pripomočke. Nato pripravimo pripomočke za merjenje. Veliko pripomočkov lahko dobimo pri učiteljih fizike in pri hišnikih.

Drugo uro se z učnimi listi podamo na teren – na šolska igrišča, kjer so ravna tla in rastejo drevesa skoraj pravokotno glede na tla. Če tla niso ravna in je drevo nagnjeno, so rezultati še manj natančni. S seboj vzamemo pripomočke za merjenje: dve šestili za tablo (za merjenje kotov) ali kotomer, dve vodni tehtnici – libeli, enakokraki pravokotni trikotnik za šolsko tablo, ogledalo, vsaka skupina pa ima meter. Na terenu postavimo delovne točke, in sicer za vsako metodo svojo delovno točko s potrebnimi pripomočki. Dijaki izmerijo potrebne podatke za vsako od metod.

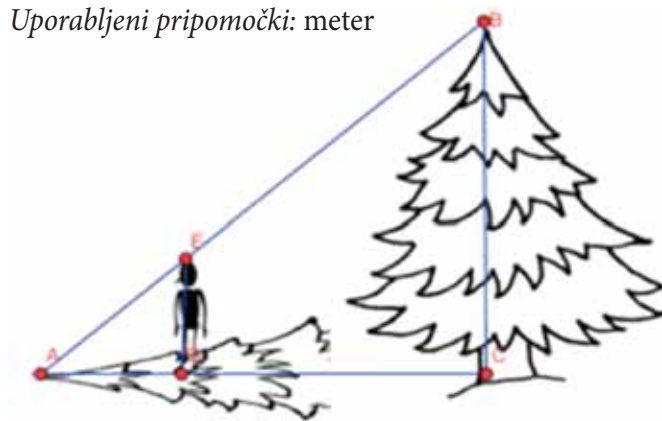
Predlog metod, ki jih lahko izvedemo na terenu:

Prva metoda: Dijak se postavi v senco drevesa tako, da vrh sence njegove glave sovpade z vrhom sence drevesa. Trikotnika ABC in ADE sta podobna. Izmerimo dolžine daljic AD , AC in DE .

Iz razmerja $|AD| : |AC| = |DE| : |BC|$

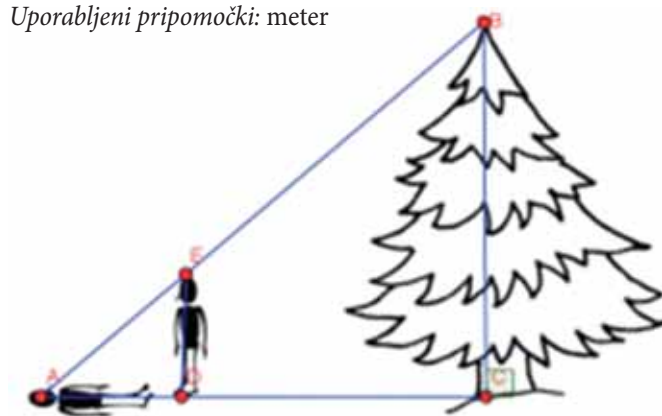
izračunamo višino drevesa BC .

Uporabljeni pripomočki: meter



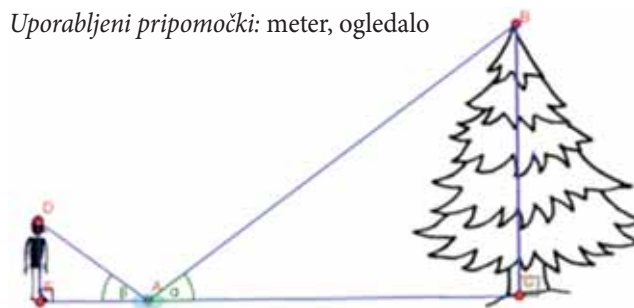
Druga metoda: En dijak leže na tla, drugi dijak se postavi pred njega tako, da ležeči dijak vidi vrh drevesa tik nad glavo dijaka, ki stoji. Trikotnika ABC in ADE sta podobna. Izmerimo dolžine daljic AD , AC in DE . Iz razmerja $|AD| : |AC| = |DE| : |BC|$ izračunamo višino drevesa BC .

Uporabljeni pripomočki: meter



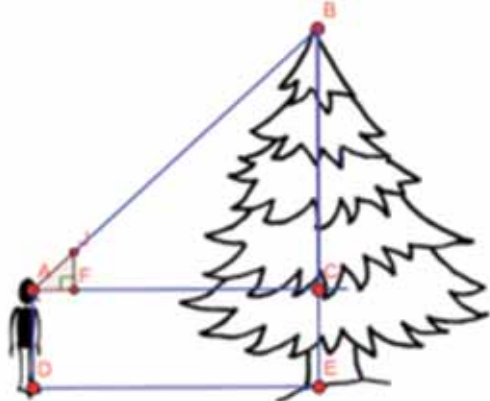
Tretja metoda: Med dijakom in drevesom je ogledalo. Dijak se pomika k ogledalu ali od ogledala, dokler v ogledalu ne vidi vrha drevesa. Ker sta vpadni kot α in odbojni kot β enaka, sta trikotnika ABC in ADE podobna. Izmerimo dolžine daljic AE , ED in AC . Iz razmerja $|AE| : |ED| = |AC| : |BC|$ izračunamo višino drevesa BC .

Uporabljeni pripomočki: meter, ogledalo



Četrta metoda: Dijak vzame enakokraki pravokotni trikotnik AFJ za tablo. Trikotnik poravnava v višini oči tako, da je daljica AF vzporedna s tlemi (konico trikotnika zaščitimo, da se dijak ne zbode v oko). Trikotnika AFJ in ACB sta podobna, zato je daljica AC enako dolga kot daljica CB . Izmerimo dolžini daljic DE in AD . Višina drevesa je enaka $|BE| = |DE| + |AD|$.

Uporabljeni pripomočki: meter, enakokraki pravokotni trikotnik za tablo

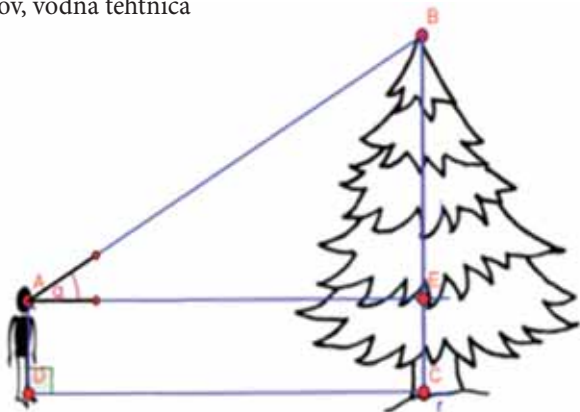


Peta metoda: Dijak s pomočjo šestila, na katerem je mogoče odčitati kot med krakoma, izmeri kot α , pod katerim vidi vrh drevesa. Šestilo poravnava s tlemi s pomočjo vodne tehtnice.

Izmeri še dolžino daljice DC , ki ima enako dolžino kot daljica AE in višino dijaka do njegovi oči, kar je daljica AD .

Najprej iz zveze $\tan \alpha = \frac{|BE|}{|AE|}$ izračunamo dolžino daljice BE , nato pa višino drevesa $|BC| = |BE| + |AD|$.

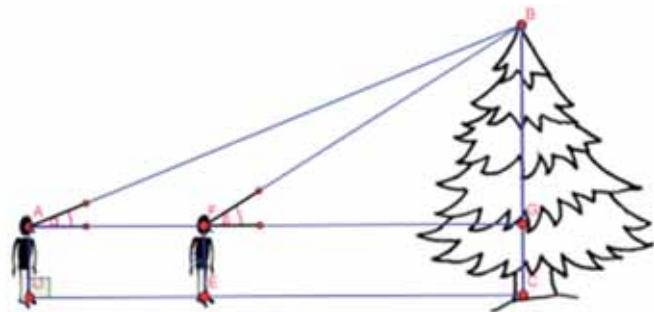
Uporabljeni pripomočki: meter, šestilo ali kotomer za merjenje kotov, vodna tehtnica



Šesta metoda: Predpostavimo, da je drevo na drugi strani reke in dijak ne more izmeriti svoje oddaljenosti od drevesa. Dijak s pomočjo šestila, na katerem je mogoče odčitati kot med krakoma, izmeri kota α in β iz dveh različnih položajev glede na drevo. Izmerimo še dolžini daljic AD in $DE = AF$.

Višino drevesa izračunamo kot rešitev sistema $\tan \alpha = \frac{|BG|}{|AG|}$, $\tan \beta = \frac{|BG|}{|FG|}$, pri čemer je $|AG| = |FG| + |AF|$ in dolžino daljice AF poznamo. Višina drevesa je $|BC| = |BG| + |AD|$.

Uporabljeni pripomočki: meter, šestilo ali kotomer za merjenje kotov, vodna tehtnica



Po opravljenih meritvah si dijaki razdelijo delo. Vsak dijak v skupini obdelava domačo nalogo eno metodo. Opisati morajo tudi uporabnost metode in podati svoje mnenje o natančnosti meritev. Vodja skupine zbere vse učne liste in jih odda učitelju.

Vprašanja za razvoj aktivnosti

Preden se podamo na teren, vzpodbudimo dijake k razmišljanju o sami izvedbi posamezne metode. Zastavimo nekaj vprašanj:

- Za katere metode za določanje višine drevesa pričakujete, da bodo bolj primerne in katere manj?
- Kaj lahko vnaprej poveste o natančnosti meritev, ki jih boste izvedli?
- Predpostavite, katere težave pričakujete pri meritvah na terenu.

Možne razširitve aktivnosti

Pri izvedbi ure na terenu lahko povabimo tudi gozdarja, da izmeri višino drevesa z teodolitom. Dijake lahko napelujemo še na več metod določanja višine drevesa: slikarski način, s fotografiranjem drevesa in dijaka – nato izračunamo višino drevesa s podobnostjo, izdelamo še kakšen pripomoček za merjenje kotov – npr. s kotomerom in vrstico ...

Načrtovanje

Uro načrtujemo v primernem mesecu, da lahko izvedemo metodo s senco drevesa. Primerni meseci so september in oktober na začetku šolskega leta ali maj in junij na koncu šolskega leta. Za izvedbo potrebujemo dve šolski uri. Namesto določanja višine drevesa se lahko odločimo tudi za določanje višine npr. stebra za občestno svetilko.

Spremljanje dejavnosti in dosežkov

Delo dijakov je treba ves čas opazovati, saj ni pomemben le končni cilj določitev višine drevesa. Pri tem:

- Zabeležimo število metod in ovrednotimo smiselnost metod, ki jih je skupina predlagala pred izvedbo aktivnosti.
- Opazujemo delo posamezne skupine dijakov pri terenskem delu in sodelovanje posameznega dijaka s skupino.
- Pregledamo učne liste.
- Ocenimo delo posamezne skupine po pripravljenem opisnem kriteriju (Tabela 1).
- Po pregledu učnih listov podamo dijakom splošno povratno informacijo o njihovem delu in oceno posamezne skupine.

Če želimo oceniti delo dijakov, lahko ocenimo delo posameznega dijaka ali pa delo celotne skupine. Z ocenjevanjem dela celotne skupine dijake vzpodbudimo k sodelovanju, saj vsak dijak doprinese k oceni skupine. Vendar ne ocenjujmo, če z dijaki predhodno nismo izvedli še nobene aktivnosti z delom v skupini. Pred izvedbo aktivnosti je treba dijake seznaniti z opisnim kriterijem.

Opisni kriterij je treba prilagoditi sposobnostim in izkušnjam dijakov.

Če aktivnosti dijakov ne bomo ocenili, jim podamo le povratno informacijo na podlagi opisnega kriterija. Če želimo delo dijakov oceniti, oblikujemo številčno oceno tako, da postavimo meje za ocene. Po zgornjem kriteriju je mogoče doseči 14 točk. Če se nam zdi katero od področij spremljanja bolj pomembno in želimo, da več prispeva h končni oceni, zgornje točke dodatno ponderiramo (obtežimo).

Če je pri izvedbi aktivnosti sodeloval tudi gozdar, lahko na učnih listih dodamo nalogo, naj dijaki primerjajo svoje rezultate z meritvijo gozdarja. Izračunajo lahko absolutno in relativno napako svojih meritev glede na gozdarjevo meritev.

Vprašanja za spremljanje

Na učnih listih lahko dijakom zastavimo vprašanja, s katerimi preverimo razumevanje problemske naloge. Nekaj primernih vprašanj:

- Katera matematična znanja ste uporabili pri določanju višine drevesa?
- Ocenite natančnost rezultatov in primerjajte med seboj rezultate različnih metod. Kaj ugotovite?

Tabela 1: Predlog opisnega kriterija za ocenjevanje dela skupine

Področje spremljanja	2	1	0
število predlaganih metod	Skupina predlaga vsaj tri metode.	Skupina predlaga eno ali dve metodi.	Skupina ne predlaga nobene metode.
izvirnost predlaganih metod	Predlagane metode so dobre, med njimi tudi kakšna izvirna.	Predlagane metode so dobre, vendar nobena ni prav izvirna.	Predlagane metode niso matematično pravilne.
izvajanje terenskega dela in sodelovanje dijakov v skupini	Vsi dijaki v skupini sodelujejo in skrbno izvajajo meritve. Pri delu se med seboj posvetujejo.	Ne sodelujejo vsi dijaki ali meritve izvajajo neresno.	Ne sodelujejo vsi dijaki in meritve izvajajo neresno.
izpolnjevanje učnih listov	Vsi učni listi so natančno in pregledno izpolnjeni. Vse naloge na vseh učnih listih so rešene.	Učni listi so izpolnjeni nenatančno ali slaba oblika zapisov ali niso rešene vse naloge.	Učni listi so izpolnjeni nenatančno in slaba oblika zapisov in niso rešene vse naloge.
pravilnost uporabe matematičnih znanj in pravilnost izračunov	Vse naloge na vseh učnih listih so matematično pravilno rešene.	Več kot polovica nalog je rešenih matematično pravilno.	Polovica ali manj nalog je rešenih pravilno.
ocena uporabnosti metode	Na vseh učnih listih so podane ocene uporabnosti metod. Ocene so utemeljene.	Uporabnost metod je na vseh učnih listih zapisana, vendar brez utemeljitev.	Uporabnost metod ni podana na vseh učnih listih.
opis težav pri izvedbi in predlogi za izboljšanje meritev	Opis težav pri vseh metodah in podani izvirni predlogi za izboljšanje.	Na vseh učnih listih je le opis težav brez predlogov za izboljšanje.	Naloga ni rešena na vseh učnih listih.

- Katere metode za določanje višine drevesa so se izkazale za bolj primerne in katere manj?
- Opišite težave, ki ste jih imeli pri merjenju na terenu, in podajte predloge za izboljšanje natančnosti meritev.

Dosežki dijakov pri ugotovljenem in predpostavljene predznanju

Delo je potekalo brez posebnih zapletov. Dijaki so bili zelo motivirani. Na terenu so opravili vse meritve in oddali učne liste, ki so bili skrbno izpolnjeni. Z opazovanjem dela dijakov in pregledom izpolnjenih učnih listov sem ugotovila, da so bili cilji ure doseženi: dijaki so uporabljali matematično znanje za rešitev avtentične situacije, sodelovali so v skupini in kritično ovrednotili rezultate. Dosegali so rezultate na višji taksonomski ravni: dijaki so analizirali problem, naredili sintezo in ovrednotili rezultate z vidika uporabljenih metod in natančnosti rezultatov.

Dijaki so ocenili terensko delo kot zelo dobrodošlo, saj pri matematiki običajno sedimo v učilnici. Najbolj jim je bilo všeč, da so lahko pri nalogi uporabili veliko matematičnega znanja in spoznali, kako matematika pride prav. Želijo si več podobnih primerov.

Gradivo

Dijaki so izpolnili učne liste. Vsaka skupina je izpolnila šest učnih listov – za vsako metodo en učni list.



Učni list

Metoda: _____

Člani skupine:

Slika in meritve:

Potrebščine:

Opis metode:

Izračun višine drevesa:

Odgovor:

Ocena uporabnosti metode in natančnosti rezultatov:

Opis morebitnih težav pri praktični izvedbi:

Viri

- [1] Pavlič, G., Kavka, D., Rugelj, M., Šparovec, J. (2012). *Linea nova*. Ljubljana: Modrijan založba.
- [2] Pavlič, G., Kavka, D., Rugelj, M., Šparovec, J. (2012). *Planum novum*. Ljubljana: Modrijan založba.
- [3] Pavlič, G., Rugelj, M., Šparovec, J., Kavka, D. (2012). *Spatium novum*. Ljubljana: Modrijan založba.
- [4] *Posodobitve pouka v gimnazijski praksi: Knjižnično informacijska znanja* (str. 128). Dostopno na: <http://www.zrss.si/projektiess/default.asp?pr=2&iz=b3>

Od načrtovanja do poučevanja verjetnosti v 9. razredu

Anamarija Cencelj
Osnovna šola Griže

Za učitelje matematike so bila spomladi 2019 organizirana izobraževanja z naslovom **Načrtovanje vzgojno-izobraževalnega dela s sodobnimi učnimi pristopi pri matematiki**, kjer smo aktivno sodelovali v delavnici *Do kakovostnega znanja matematike preko učnega načrta*. Namen srečanja je bil:

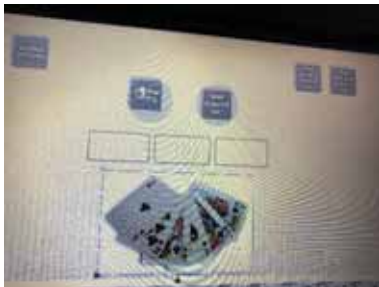
- poglobitev razumevanja učnega načrta za matematiko,
- nadgradnja procesa načrtovanja učnega procesa,
- oblikovanje in usklajevanje meril priprave na pouk,
- izdelava priprave za učni sklop.



Za izdelavo priprave na učni sklop smo imeli navodila: *Oblikujte pripravo na pouk za učni sklop ali del učnega sklopa. Pri zapisu naj bo poudarek na dejavnostih učenca, upoštevanju didaktičnih priporočil. Upoštevajte tudi priporočilo, da bo bralec iz zapisov lahko dobil dovolj podatkov, da učno uro/e tudi sam izvede. Pripravi v isti dokument dodajte priloge (npr. učne liste, dodatna gradiva ...).*

V taki obliki sem zapisala pripravo za tematski sklop **Verjetnost** v 9. razredu osnovne šole. Izvedba traja dve do tri šolske ure.

UČNI NAČRT		OBlikOVANO/NAČRTOVANO SKUPAJ Z UČENCI	
Učni cilji:	Standardi znanja:	Nameni učenja:	Kriteriji uspešnosti:
• pridobijo izkušnje o številsko izraženi verjetnosti, • ocenijo verjetnost s sklepanjem in utemeljevanjem (življenjske situacije), • izvajajo poskuse (met kocke, met žebličkov, met kovanca, met valja idr.), • opazujejo izbrane dogodke, zapišejo izide in napovedujejo verjetnost dogodka, • zberejo, uredijo, analizirajo rezultate poskusa in ob konkretnih primerih (poskusih) spoznajo statistično verjetnost dogodka, • povežejo pojma statistična in matematična verjetnost.	• matematični jezik uporablja pri sporazumevanju, • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja • uporablja IKT pri reševanju problemov • kritično vrednoti informacije na spletu in drugje	• poznal in uporabljal bom osnovne pojme v verjetnosti • z izvajanjem poskusov in z matematičnimi postopki bom poiskal verjetnost	• Ločim poskus in dogodek. • Znam določiti vrsto dogodka (gotov, slučajen, nemogoč). • Z izvajanjem poskusov znam priti do statistične verjetnosti. • Znam izračunati matematično verjetnost dogodka. • Znam primerjati statistično in matematično verjetnost.

UČNE DEJAVNOSTI/METODE	
Dejavnost 1: Učenci si na tablicah/i-tabli ogledajo definicije in zglede osnovnih matematičnih pojmov, potrebnih za nadaljnje delo: poskus, dogodek, slučajen dogodek, gotov dogodek, nemogoč dogodek, matematična verjetnost, statistična verjetnost. Na podlagi teorije rešijo naloge 1–5, ki jih učitelj posreduje preko Smart Notebook aktivnosti. Naloge so prikazane na koncu tega prispevka. S tem kvizom/temi nalogami preverijo svoje razumevanje prebranega. Metoda: Učenci si v skupini razlagajo in razpravljajo o nalogah v kvizu.	Učenčevi izdelki oz. dokazi, ki izhajajo iz pogovorov ali opazovanj pri pouku: Reševanje nalog.  

UČNE DEJAVNOSTI/METODE																																					
Dejavnost 2: Po navodilih učitelja, učenci skupaj z učiteljem oblikujejo namene učenja. Metoda: Razprava učencev.	Zapis namenov učenja v zvezek.																																				
Dejavnost 3: Učenci v skupinah obiščejo 6 delovnih postaj: MET KOCKE, BONBONI, MET KOVANCA, KUBOOKTAEDER, ZNAKI in KAMEN, ŠKARJE, PAPIR z mikrobitem. Na vsaki delovni postaji najprej izračunajo matematično verjetnost, nato pa na podlagi poskusov zapišejo še statistično verjetnost. Na koncu vsake postaje primerjajo matematično in statistično verjetnost ter zapisujejo ugotovitve. Metoda: Izvajanje poskusov, razprava.	Rešeni delovni listi po posamezni postaji (priloga). 2. POSTAJA BONBONI 1. V vrečki sta dve oranžni, dve zeleni in en modri bonbon, izvlačeno en bonbon. Kolikšna je matematična verjetnost, da bo izvačen bonbon: oranžen $\frac{2}{5}$ zelen $\frac{2}{5}$ rumen $\frac{0}{5}$ modri $\frac{1}{5}$ 2. Vse bonbone daj v vrečko, trikrat en bonbon, zapli barvo in ga vrni nazaj v vrečko. To ponovi še enkrat. <table><tr><td>Z</td><td>Z</td><td>O</td><td>R</td></tr><tr><td>Z</td><td>Z</td><td>O</td><td>R</td></tr><tr><td>Z</td><td>Z</td><td>O</td><td>R</td></tr><tr><td>Z</td><td>Z</td><td>O</td><td>R</td></tr></table> 3. Na podlagi rezultatov v tabeli zapiši, kolikšna je statistična verjetnost, da je izvačen bonbon: oranžen $\frac{2}{25}$ zelen $\frac{2}{25}$ rumen $\frac{0}{25}$ modri $\frac{1}{25}$ 4. Primerjaj matematično in statistično verjetnost izvačenega bonbona. Oranžen: $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$ Zelen: $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$ Rumen: $\frac{0}{5} \times \frac{0}{5} = \frac{0}{25}$ Modri: $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ 4. POSTAJA KUBOOKTAEDER 1. Kubooktaeder ima 14 ploskev. Kolikšna je matematična verjetnost, da bo kubooktaeder padel na: TRIKONKE $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ KVADRAT $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ 2. Sedaj dvakrat vrzi kubooktaeder. Ugotovi tabelo in zapiši svoje merje. <table><tr><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td></tr><tr><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td></tr><tr><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td></tr><tr><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td><td>Trikotnik</td></tr></table> 3. Glede na merje, zapiši statistično verjetnost, da bo kubooktaeder padel na: TRIKONKE $\frac{8}{10} = 0,8$ KVADRAT $\frac{6}{10} = 0,6$ 4. Primerjaj matematično in statistično verjetnost mero kubooktaeder. Matematična in statistična verjetnost sta enaki, saj so vsi izvačeni enaki.	Z	Z	O	R	Z	Z	O	R	Z	Z	O	R	Z	Z	O	R	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik
Z	Z	O	R																																		
Z	Z	O	R																																		
Z	Z	O	R																																		
Z	Z	O	R																																		
Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik																																	
Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik																																	
Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik																																	
Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik	Trikotnik																																	
Dejavnost 4: Pogovor o kriterijih/merilih uspešnosti.	Zapis kriterijev uspešnosti.																																				
Dejavnost 5: Svoje znanje učenci preverijo z reševanjem QR nalog, zbranih iz nacionalnih preverjanj znanj (NPZ). Rešitve preverijo pri učitelju in pri tem ovrednotijo svoje znanje (glede na merila uspešnosti, ki so zapisana na tabli). Metoda: Samostojno delo z mobilnim telefonom in delovnim listom.	Primeri rešenih delovni list učencev. PREVERJANJE ZNANJA 1. 24 učencev 3 uroci 3 dni Črna in bela a) koliko je učencev b) koliko je dni c) ali je večje 2. 12 bonov 1 uro 1 dan 1 teden 1 mesec a) 12 bonov b) 1 uro c) 1 dan d) 1 teden e) 1 mesec 3. 5 bonov a) 1 dan b) 1 teden c) 1 mesec 1. 24 učencev 3 uroci 3 dni Črna in bela a) koliko je učencev b) koliko je dni c) ali je večje 2. 12 bonov 1 uro 1 dan 1 teden 1 mesec a) 12 bonov b) 1 uro c) 1 dan d) 1 teden e) 1 mesec 3. 5 bonov a) 1 dan b) 1 teden c) 1 mesec																																				
Dejavnost 6: Učenci preko SHOUT OUT aplikacije pošljejo svoja mnenja o učni uri na učiteljev zaslon.	Povratne informacije učencev na zaslonu učitelja.																																				



1. POSTAJA – MET KOCKE

1. Vržemo običajno igralno kocko. Kolikšna je matematična verjetnost, da bo padla:

1 _____ 2 _____ 3 _____

4 _____ 5 _____ 6 _____

2. Sedaj dvajsetkrat vrzi kocko. Uporabi preglednico in zabeleži svoje mete.

Podatke v preglednici vsaka skupine vpiše še v skupno preglednico na dani povezavi.

3. Za zbrane podatke v skupni preglednici zapiši statistično verjetnost, da bo padla:

1 _____ 2 _____ 3 _____

4 _____ 5 _____ 6 _____

4. Primerjaj matematično in statistično verjetnost meta kocke. Zapiši, kaj ugotoviš.

2. POSTAJA – BONBONI

1. V vrečki sta dva oranžna, dva zelena, trije rdeči in en moder bonbon. Izvlečemo en bonbon. Kolikšna je matematična verjetnost, da bo izvlečen bonbon:

oranžen _____ zelen _____

rdeč _____ moder _____

2. Vse bonbone daj v vrečko. Izvleci en bonbon, barvo zapiši v preglednico in ga vrni nazaj v vrečko. To ponovi še enajstkrat.

Podatke v preglednici vsaka skupine vpiše še v skupno preglednico na dani povezavi.



3. Za zbrane podatke v skupni preglednici zapiši, kolikšna je statistična verjetnost, da je izvlečen bonbon:

oranžen _____ zelen _____

rdeč _____ moder _____

4. Primerjaj matematično in statistično verjetnost izvlečenega bonbona za posamezno barvo. Zapiši, kaj ugotoviš.

3. POSTAJA – MET KOVANCA

1. Vrzi kovanec. Kolikšna je matematična verjetnost, da bo padel:

GRB _____ GLAVA _____

2. Sedaj dvajsetkrat vrzi kovanec. Uporabi tabelo in zabeleži svoje mete.

Podatke v preglednici vsaka skupine vpiše še v skupno preglednico na dani povezavi.

3. Za zbrane podatke v skupni preglednici zapiši statistično verjetnost, da bo padel:

GRB _____ GLAVA _____

4. Primerjaj matematično in statistično verjetnost meta kovanca. Zapiši, kaj ugotoviš.



4. POSTAJA – KUBOOKTAEDER

1. Kubooktaeder ima 14 ploskev. Kolikšna je matematična verjetnost, da bo kubooktaeder padel na:

TRIKOTNIK _____ KVADRAT _____

2. Sedaj dvajsetkrat vrzi kubooktaeder. Uporabi tabelo in zabeleži svoje mete.

Podatke v preglednici vsaka skupine vpiše še v skupno preglednico na dani povezavi.

3. Za zbrane podatke v skupni preglednici zapiši statistično verjetnost, da bo kubooktaeder padel na:

TRIKOTNIK _____ KVADRAT _____

4. Primerjaj matematično in statistično verjetnost meta kubooktaedra. Zapiši, kaj ugotoviš.

5. POSTAJA – ZNAKI

1. V vrečki so naslednje črke: P, R, O, B, A, B, I, L, I, T, Y

Izveleci črko. Kolikšna je matematična verjetnost, da bo izvlečena črka:

P _____ I _____

B _____ L _____

2. Vse črke daj v vrečko. Izveleci črko, jo zapiši v tabelo in vrni nazaj v vrečko. To ponovi še enajstkrat.

Podatke v preglednici vsaka skupine vpiše še v skupno preglednico na dani povezavi.



3. Za zbrane podatke v skupni preglednici zapiši statistično verjetnost, da je izvlečena črka:

P _____ I _____

B _____ L _____

4. Primerjaj matematično in statistično verjetnost izvlečene črke. Zapiši, kaj ugotoviš.

6. POSTAJA – KAMEN, ŠKARJE, PAPIR

1. Zatresi mikrobit, ki naključno prikaže kamen, škarje ali papir.
Kolikšna je matematična verjetnost, da bo mikrobit prikazal:

KAMEN _____

ŠKARJE _____

PAPIR _____

2. Dvajsetkrat zatresi mikrobit in zabeleži prikaze.



Podatke v preglednici vsaka skupine vpiše še v skupno preglednico na dani povezavi.

3. Za zbrane podatke v skupni preglednici zapiši statistično verjetnost, da je mikrobit prikazal:

KAMEN _____ ŠKARJE _____ PAPIR _____

4. Primerjaj matematično in statistično verjetnost izvlečene črke. Zapiši, kaj ugotoviš.

Naloge, ki so jih učenci prejeli s skeniranjem QR kod

QR1

V 9. a razredu je 24 učencev. Za domačo nalogo so reševali 3 matematične naloge. Vsaka naloga je bila sestavljena iz treh delov (a, b, c), pri vsakem izmed teh delov pa je bilo treba zapisati in izračunati 2 računa.



- a) Koliko računov je izračunal Miha, če je naredil domačo nalogo v celoti?

Reševanje:

Odgovor:

- b) Koliko računov je izračunal Tadej, če ni rešil 1. naloge?

Reševanje:

Odgovor:

- c) Učenci so v šoli brali rešitve nalog, Tadej je bil izbran, da prebere rešitev enega računa. Kolikšna je verjetnost, da je bil Tadej izbran za branje računa, ki ga je naredil?

Reševanje:

Odgovor:

QR2

Ana ima v peresnici 12 barvic naslednjih barv: modre, rdeče, zelene in rumene. Na slepo izbere eno od barvic. Verjetnost, da bo izbrala modro, je $1/2$, verjetnost, da bo izbrala rdečo, je $1/6$. Rumena barvica je samo ena.



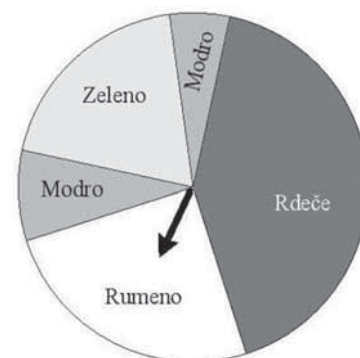
- a) Koliko modrih barvic je v peresnici?
b) Koliko je rdečih barvic?
c) Kolikšna je verjetnost, da izbere rumeno barvico?
d) Koliko je zelenih barvic?

QR3

Na sliki je krožna plošča, razdeljena na 5 pobarvanih polj. V središču je pritrjen kazalec. Kazalec zavrtimo. Opazujmo in ocenimo:



- a) Kakšne barve je polje, na katerem se bo kazalec najverjetneje ustavi?
b) Kaj je bolj verjetno: da se ustavi kazalec na modrem ali na zelenem polju?
c) Jana trdi: verjetnost, da se kazalec ustavi na rumenem polju, je $1/5$, ker je krog razdeljen na 5 delov. Ali sklepa prav? Odgovor utemelji.



QR4

Matej bo zakotalil kroglico tako, da se bo ustavila na osenčeni plošči, prikazani na sliki spodaj. Dolžina osenčene plošče je 60 cm.

Če se kroglica ustavi na črti med posameznima področjema, mora Matej poskus ponoviti.



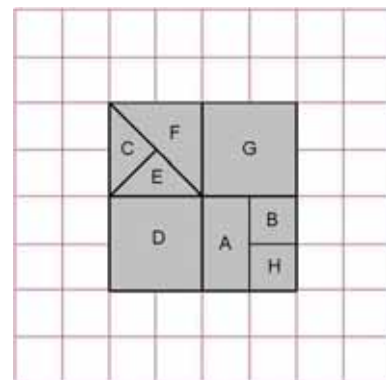
- a) Ugotovi, s kolikšno verjetnostjo bo Matej zadel posamezno področje na osenčeni plošči, in izpolni preglednico.

Področje	A	B	C	D
Verjetnost zadetka				

- b) Izračunaj ploščino področja A.

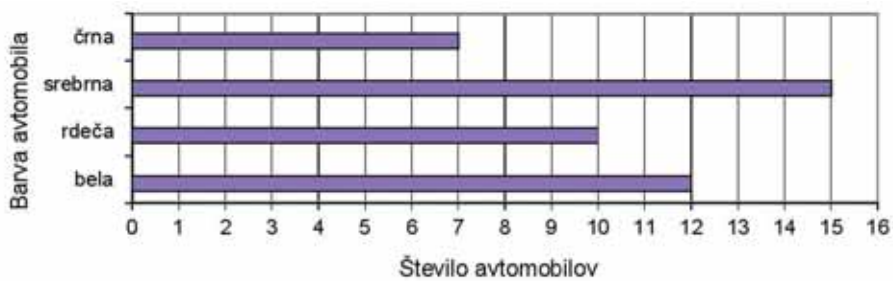
Reševanje:

Rešitev:



QR5

S prikaza je razvidno, koliko avtomobilov posamezne barve je na parkirišču.



- a) Katero sredino lahko določiš danim podatkom o barvi avtomobilov?

Obkroži črko pred parvilnim odgovorom.

- A aritmetično sredino (povprečno vrednost)
 B središčno (mediano)
 C gostišnico (modus)

- b) Za vsak avtomobil je enako verjetno, da prvi odpelje s parkirišča.

Kolikšna je verjetnost, da s parkirišča najprej odpelje avtomobil črne barve?

Kolikšna je verjetnost, da s parkirišča najprej odpelje avtomobil bele barve ali rdeče barve?

QR6

Na neki šoli so raziskali, katero prevozno sredstvo imajo učenci najraje. Vsak učenec je izbral le eno prevozno sredstvo. Zbrane podatke so prikazali na sliki.



a) Katero sredino lahko določiš danim podatkom o izbranih prevoznih sredstvih?

Obkroži črko pred pravilnimi odgovorom.

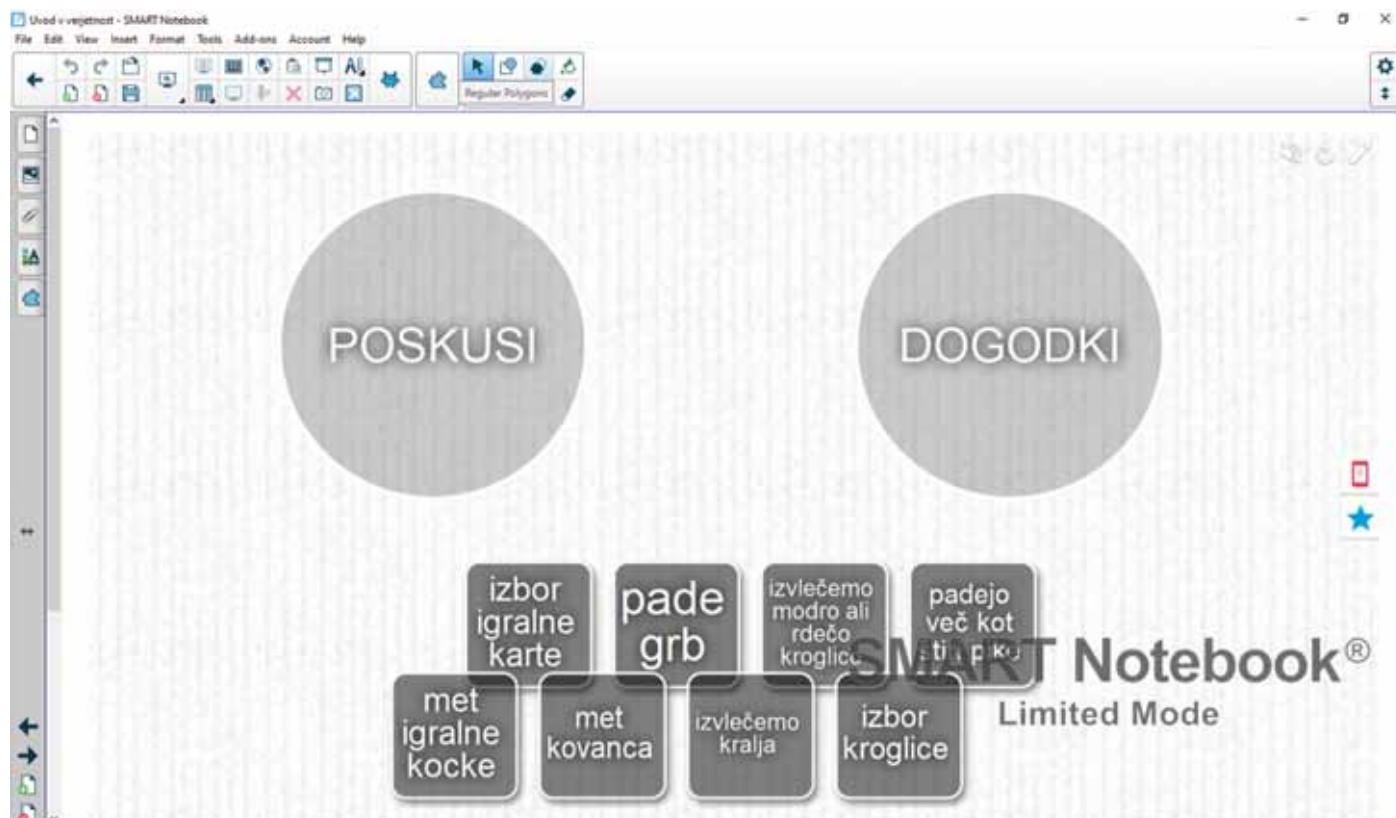
- A aritmetično sredino (povprečno vrednost)
- B središčnico (mediano)
- C gostiščnico (modus)

b) Koliko učencev je sodelovalo v raziskavi?

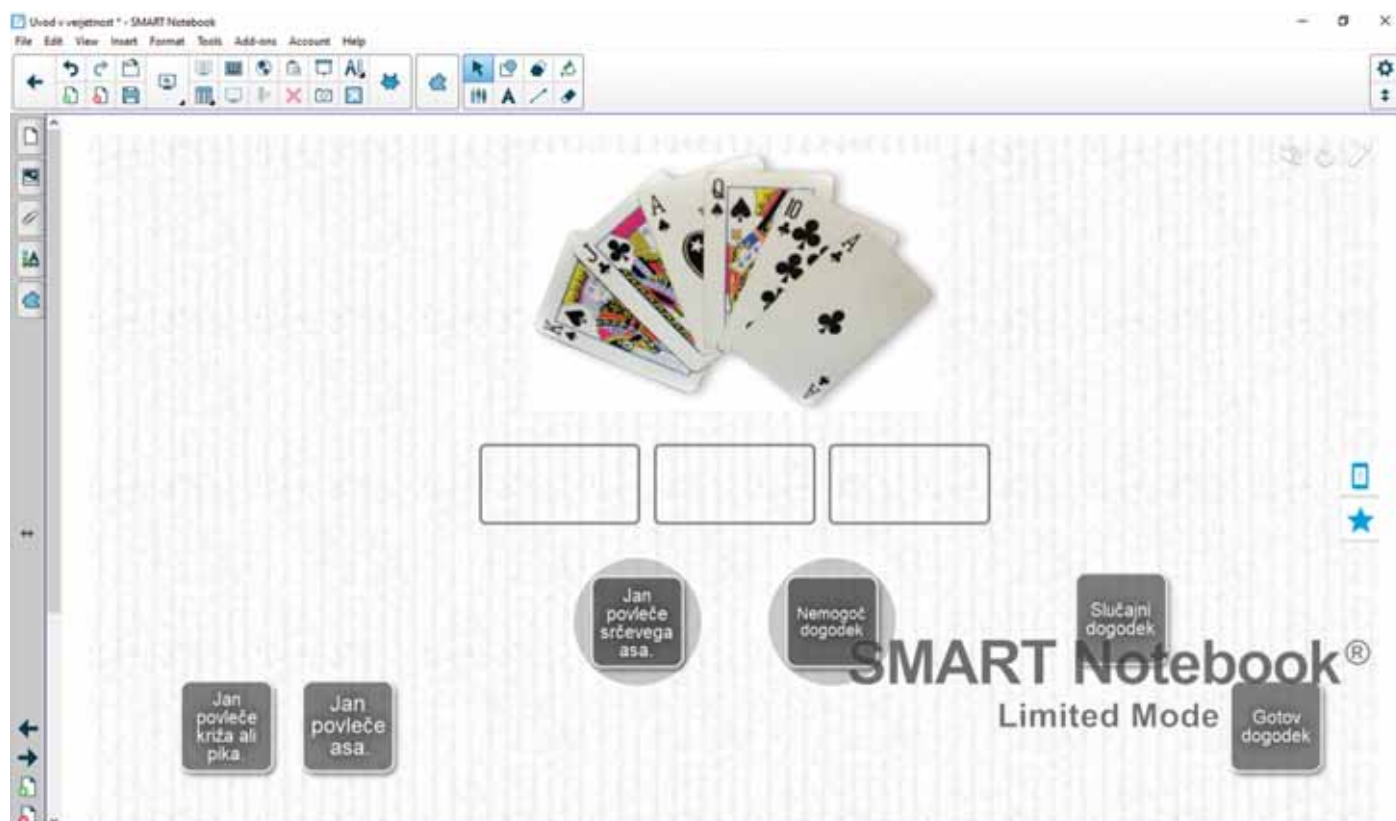
c) Kolikšna je verjetnost, da ima naključno izbrani učenec najraje letalo kot prevozno sredstvo?

č) Kolikšna je verjetnost, da ima naključno izbrani učenec najraje avto ali kolo kot prevozno sredstvo?

Naloge pri dejavnosti 1:



Naloga 1: Kateri izmed pojmov v kvadratih so poskusi in kateri dogodki? Ustrezno povleci in prenesi pojme.



Naloga 2: Glede na sliko poišči ustrezne pare.

Uvod v vejetnost - SMART Notebook

File Edit View Insert Format Tools Add-ons Account Help

Kolo sreče se ustavi na sodem številu.

Kolo sreče se ustavi na pozitivnem številu.

Kolo sreče se ustavi na 8.

Kolo sreče se ustavi na lihem številu.

Kolo sreče se ustavi na praštevilu.

Kolo sreče se ustavi negativnem številu.

SMART Notebook®

Limited Mode

Naloga 3: Glede na sliko ugotovi vrsto dogodka. G – gotov dogodek, S – slučajni dogodek, N – nemogoč dogodek

Uvod v vejetnost - SMART Notebook

File Edit View Insert Format Tools Add-ons Account Help

V posodi so tri modre in dve rdeči kroglici. Izvleci eno kroglico. Izračunaj matematično verjetnost, da je izvlečena kroglica modra.

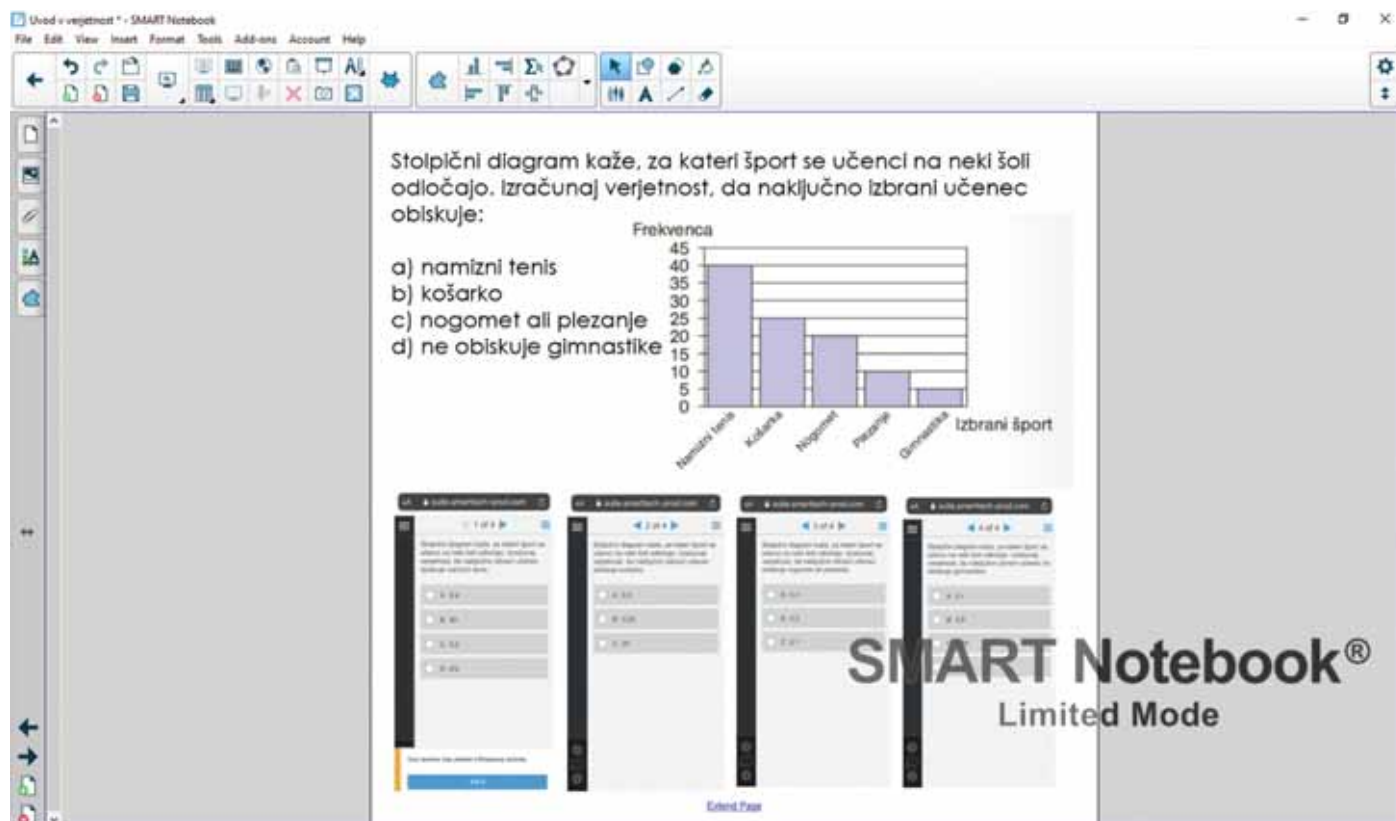
3/5

3/5

SMART Notebook®

Limited Mode

Naloga 4: Izračunaj verjetnost dogodka.



Naloga 5: Izračunaj verjetnosti (na sliki je oblika kviza na mobitelu/tablici).

Viri in literatura

Nacionalno preverjanje znanja. Preizkusi znanja. Matematika. Pridobljeno maj 2019, https://www.ric.si/preverjanje_znanja/predmeti/ in Banka nalog <https://bankanalog.ric.si>

Žakelj, A., idr. (2011). Matematika. Učni načrt. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

Jožef Stefan predava matematiko

dr. Stanislav Južnič
Univerza v Oklahomi

Izvleček

Stefan je bil vodilni slovenski fizik, manj znano pa je, da si je pot utrl tudi kot uspešen profesor matematike na realki ob objavah temeljnih razprav o integralih. Siromašni predmestni celovski Slovenec Jožef Stefan je uprizoril bliskoviti učiteljski uspeh od srednješolskega učitelja do poglobitnega profesorja učenjaka v Habsburški monarhiji predvsem s pomočjo tedaj vodilnega svetovalca pri ministrstvu za izobraževanje, bohinjskega benediktinskega astronoma Mariana Kollerja. Pripovedujemo domala fantastično zgodbo o vrhunskem sodelovanju obeh vodilnih slovenskih strokovnjakov, saj je Koller, tako kot pred njim Valvasor in Hallerstein, veliko objavljaj v Londonu, kjer so radi brez zamude povzemali tudi Stefanove dunajske dosežke v *Philosophical Magazine*.

Gljučne besede: Jožef Stefan, Marian Koller, predavanja o algebri in geometriji, razprave o integralih

Josef Stefan Lectures Mathematics

Abstract

Stefan was once a leading Slovenian physicist, but it is not widely known that he began as a successful professor of mathematics who published fundamental mathematical papers about integral calculus. Josef Stefan, a Slovene from Klagenfurt, achieved lightning-fast pedagogical success from a secondary school professor to a leading scholar in the Habsburg Monarchy. He mainly relied on the help of a fellow Slovene, Marian Koller, a Benedictine astronomer from Bohinj and a leading adviser at the Ministry of Education. The article talks about the unique cooperation of both leading Slovenian experts. Koller published a great deal in London, just like Valvasor and Hallerstein before him, and the British physicists almost simultaneously abstracted Stefan's papers for the *Philosophical Magazine*.

Keywords: Josef Stefan, Marian Koller, lectures on algebra and geometry, papers on integral calculus

Uvod

Marsikdo se sprašuje, kako je Jožefu Stefanu (1835–1893) uspel preskok od nezakonskega edinca predmestne samohranilke Marije Startinikove do vodilnega srednjeevropskega akademika. Odgovor je enostaven, čeravno doslej ni bil očiten: Marian Koller. Še več: Stefanova ključna odskočna deska je bila pravzaprav matematika.

Koller za Stefana

Kot prvorojenec upravnika Zoisovih gorenjskih fužin je bil M. Koller precej bogatejši od sprva dokaj ubožnega J. Stefana. Po dveh desetletjih predavanj na visoki šoli v Kremsmünstru je Koller vodil posodobitve habsburških tehniških šol, vključno z ustanovitvijo realk v Mariboru in Ljubljani (sedanja Vegova). Zdravnik Ernst Wilhelm vitez Brücke je Stefana priporočil svetovalcu na ministrstvu za uk in bogočastje M. Kollerju. Seveda je Koller

zvedel za Stefana [2] že od učiteljev Antona Janežiča, Andreas Ettingshausna in razrednika Karla Robide kljub opazki v končnem spričevalu o Stefanovi nedovzetnosti za dobre nasvete. Koller je že 17. 5. 1860 obiskal Stefanova predavanja na Dunajski realki Bauernmarkte, ustanovljeni leta 1586, ki jo je povzdignil iz nižje v višjo realko z dekretoma ministrstva za uk in bogočastje 2. 4. 1858 št. 1192 in 6. 2. 1859 št. 1422. Realno so vodili z najboljšimi mladimi predavatelji; zato je Stefan tam dobil svojo prvo plačano namestitev v letu 1857/58 s štirimi urami tedenskih predavanj fizike v 4. razredu. Leta 1858/59 je kot razrednik v petem razredu učil dodatnih osem urah matematike, medtem ko je istočasno na univerzi poučeval matematično fiziko tri ure na teden in hidromehaniko eno uro na teden, stanujoč med letoma 1857–1860 na Alservorstadt št. 288 severno od realke v središču mesta; tam so bili že poldrugo stoletje naseljeni predvsem Slovenci, Hrvati in Slovaki.

— 53 —

Konstruktion und Berechnung aller Arten Mauerwerke. Einiges über Steinschnitt. Die verschiedenen Details. Schliessen, Tram und Dippelböden, Stiegen, Fenster, Türen, Tore, Retiraden, Oefen, Küchen, Brunnen u. s. w. Anleitung zu Entwürfen kleinerer Objekte sammt Vorausmass und Kostenausweis. Das Bauzeichnen hatte die eben angeführten Details zum Gegenstande, welche aber nicht mechanisch nach Originalen kopiert, sondern nach kotirten Skizzen der Schüler entworfen wurden. Woch. 4 Stand. G. Kahrer.

Freies Handszeichnen. Die bereits erworbene Fertigkeit wurde durch Kopieren von mehr ausgeführten Köpfen, Figuren und Tierstücken weiter ausgebildet und dabei strengte darauf gesehen, dass bei allem ein Verstehen der Form zu Grunde liege, und besonders auf bestimmte und reine Konturen grosser Wert gelegt. Woch. 6 Stand. J. Quester.

Kalligraphie. Die deutsche Kurrent- und englische Kursivschrift nach Muck's Vorlagen. Die Rotund, Blockschrift und französische Ronde nach jedesmaligen Vorschriften an der Schultafel. Woch. 2 Stand. J. Quester.

Vierte Realklasse.

Religionslehre. Die katholische Glaubenslehre wurde nach Anleitung des Lehrbuches von Dr. K. Martin 2. Teil, 1 Abteilung vorggetragen. Woch. 2 Stand. M. Linzbauer.

Deutsche Sprache. Behandlung grösserer Satzkomplexe, der Periode. Schematische Darstellung und Vergleichung solcher Komplexe. Sprachliche und sachliche Erklärung der im Lesebuch enthaltenen prosaischen und poet. Lesestücke. Schriftliche Aufsätze aus der Lektüre genommen. Uebungen im mündlichen Vortrage. Woch. 4 Stand. L. Chevalier.

Geschichte. Geschichte der vorderasiatischen Völker, der Meder, Perser, Griechenlands, des macedonischen Reiches, römische Geschichte. Das Mittelalter vom Beginn bis zur Zeit Karls des Grossen. Woch. 3 Stand. F. Krautschneider.

Geographie. Fisikalische und politische Geographie von Asien und Afrika und den drei südlichen Halbinseln Europa's. Die historische Geographie zur Grundlage des geschichtlichen Studiums. Woch. 1 Stand. F. Krautschneider.

Mathematik. Algebra. Einleitendes über Terminologie und Symbolik. Geschichtliches. Die vier Grundoperationen mit allgemeinen Zahlen. Gemeinschaftliches grösstes Mass und kleinstes Vielfache. Teilbarkeit der Zahlen. Zahlensysteme. Dezimalzahlen. Eigenschaften periodischer Dezimalbrüche. Rechnen mit unvollständigen Dezimalbrüchen. Po-

— 54 —

tenzen und Wurzelgrössen. Die Verhältnisse und ihre Anwendung. Lineare Bestimmungsgleichungen. Logarithmen und ihre Anwendung.

Geometrie. Einleitung. Beziehungen zwischen den Geraden. Kongruenz der geradlinigen Figuren. Ähnlichkeit derselben. Einige Sätze über Transversalen des Dreiecks. Harmonische Teilung. Ausmessung, Verwandlung und Teilung der geradlinigen Figuren. Vom Kreise. Beziehungen der Geraden zu demselben. Konstruktion und Berechnung der regulären Poligone. — Beziehungen der Geraden zur Ebene und der Ebenen unter einander. Die Raumecke. Vergleichung und Ausmessung der Polieder. Die runden Körper. Berechnung ihrer Oberflächen und Rauminhalte. Reguläre Polieder. Woch. 8 Stand. Dr. J. Stefan.

Zoologie. Nach gegebener wissenschaftlicher Erklärung der Naturkörper folgte die der einzelnen Organsysteme im Allgemeinen, sodann kamen die einzelnen Tierklassen zur näheren Beschreibung, mit besonderer Rücksicht des innern Baues. Woch. 2 Stand. E. Döll.

Chemie. Als Einleitung das Wesen der Materie, Begriff der Eigenschaften, Manifestierung der Materie durch eine Summe von Eigenschaften qualitative und quantitative Verschiedenheit der letzteren. Nach einer vorausgeschickten Erklärung in der Chemie häufiger vorkommenden Operationen folgten die Aequivalentlehre und einschlägige Rechnungsübungen. In der speziellen Chemie bildeten die Metalloide den Lehrstoff des Jahres. Salz - Salpeter - Schwefelsäure - Fabrikation, Leuchtgasbereitung, wurden ihrer technischen Wichtigkeit gemäss weitläufiger behandelt. Woch. 2 Stand. L. Mayer.

Darstellende Geometrie. I. Semester. Konstruktives Zeichnen: Die Kegelschnittlinien, Zykloiden, Spirallinien, Evoluten und Evolventen.

II. Semester. Perspektivisches Zeichnen: Die wichtigsten Sätze der Perspektivlehre, Zeichnen nach Draht- und Holzmodellen, Ausführen und Schattiren ganzer Gruppen. Woch. 3 Stand. J. Schantroch.

Freies Handszeichnen. Solchen, die im Freihandzeichnen an der Unterrealschule zurückgeblieben oder von Gymnasien übergetreten waren, wurden zur Festigung im elementaren Teile des Unterrichts noch ähnliche Vorlagen wie in der III. Klasse zugeteilt, den talentvollen jedoch wurden teils schwierigere Vorlagen gegeben, teils grössere Modelle in verschiedenen Stellungen und vollendeter Ausführung als Aufgabe gestellt; unstreitig wird damit der Formensinn geweckt, die Anschauungsweise lebendiger. Woch. 6 Stand. F. Maass.

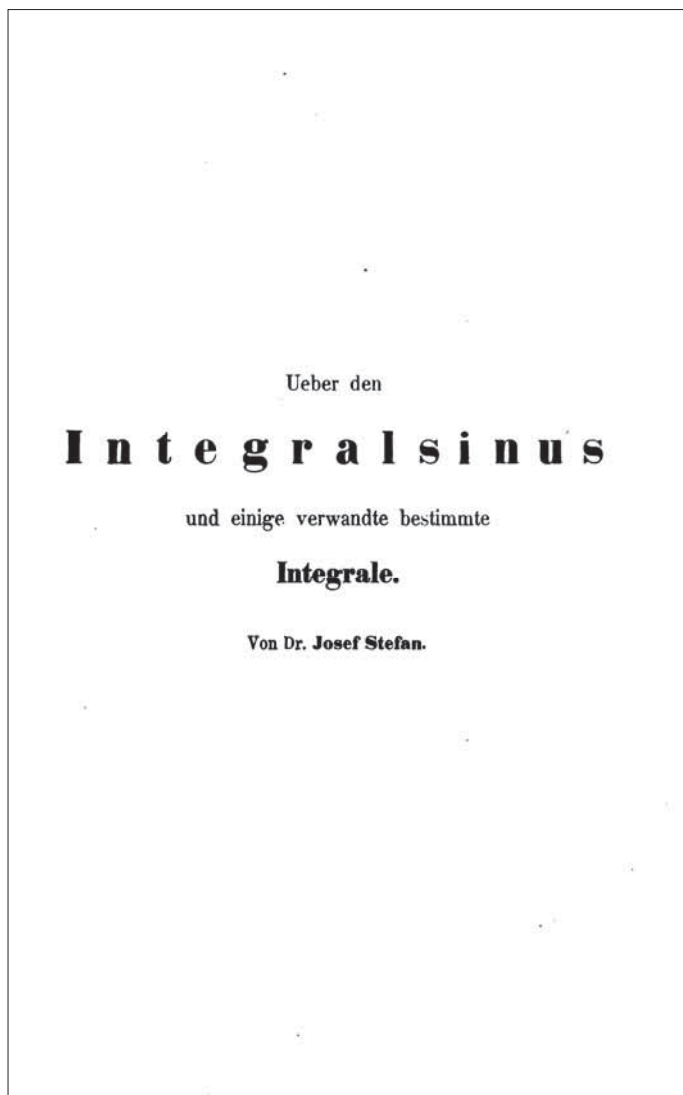
Kalligraphie. Die deutsche Kurrent- und englische Kursivschrift, die Rotund, Italienische, Französische, Römische und Lapidarschrift nach Vorschriften an der Schultafel. Entwerfen, zeichnen und ansarbeiten von kalligraphischen Schriften. Woch. 1 Stand. F. Maass.

Slika 1: Stefanova matematična predavanja na realki – učni načrt pouka algebre leta 1861/62 [1].

V knjižnici realke so bili naročeni na Schlömilchovo matematično revijo, v kateri je objavljala tudi Stefan [3]. 30. 9. 1858 je šolski svetnik in inšpektor realk nekdanji Liechtensteinov zasebni učitelj Moritz Alois Becker (1812 Staré Město na Moravskem–1887 Lienz) organiziral posebno sejo učiteljev na realki, za kar se je ravnatelj prisrčno zahvalil njemu, Kollerju, dunajskemu pomožnemu škofu kanoniku-kantorju pri svetem Štefanu Franzu Ksaverju Zennerju (1794 Dunaj–1861 Dunaj) in komisarju za dunajske srednje šole Josephu Scheinerju (1798 Česká Lípa–1867 Dunaj). Scheiner je bil rimskokatoliški duhovnik, teolog in univerzitetni profesor, od leta 1855 kanonik dunajske stolnice sv. Štefana, nadškofov konzistorialni svetnik, pooblaščenec za katoliške izobraževalne ustanove, dunajske gimnazije in srednje šole. Skupaj s Kollerjem je bil svetovalec pri Ministrstvu za šolstvo [3]. Becker je nato organiziral še par sestankov na realki, 18. 5. 1860 pa sta s Kollerjem inšpicirala realko, za kar se je obema ravnatelj znova posebej zahvalil [3]. Becker je bliskovito napredoval: takoj po Stefanovem odhodu z realke je leta 1864 postal zasebni učitelj nesrečnega prestolonaslednika Rudolfa in njegove sestre Gisele, leta 1867 pa je postal vitez kot topograf in dopisnik dunajskega dnevnika *Die Presse*.

Slika 2: Stefanova matematična predavanja na realki – učni načrt pouka geometrije leta 1861/62 [1].

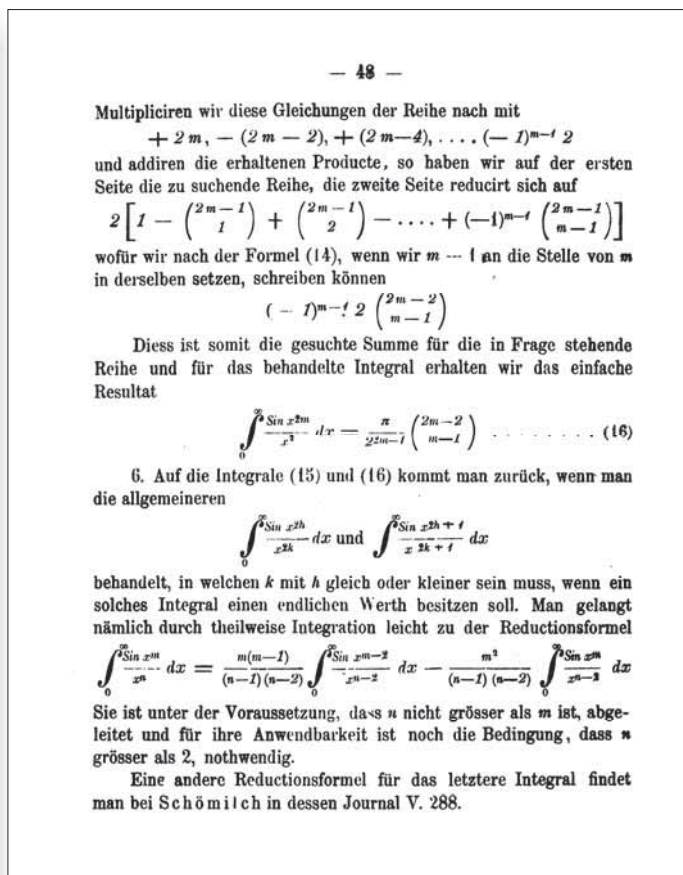
Med letoma 1859/60 in 1862/63 je Stefan na dunajski realki predaval tudi matematiko v 4. razredu po 8 ur tedensko kot redni profesor VI. klase, kar je bilo višje od večine njegovih sodelavcev in je prinašalo večje dohodke dotlej ne ravno premožnemu Stefanu. Skupno je predaval po 16 ur na teden, dodatno še na univerzi. Pri pouku matematike je začel z algebro in končal z geometrijo. Najprej je vpeljal algebrske simbole in oznake, nato pa je pripovedoval o njeni zgodovini. Obravnaval je temeljne operacije s splošnimi števili, največje skupne delitelje, najmanjše skupne večkratnike, deljivost števil in številske sisteme, o katerih je objavil razpravo. Nato so njegova predavanja zaobjela decimalna števila, periodične desetiške ulomke ob računanju z njimi, potence in korene, verjetnostni račun, linearne enačbe ter končno še logaritme. Pri geometriji je najprej pojasnil pojem daljice, nato konstrukcijo pravokotnih likov, Cevov izrek ravninske geometrije o treh prečnicah trikotnika (če prečnice izhajajo iz njegovih oglišč in se sekajo v eni točki, so zmnožki odrezanih odsekov stranic enaki), projekтивно harmonično četverko, odmere, oblike in delitev pravokotnih likov, krog, medsebojne relacije daljic, konstrukcijo in preračunavanje pravokotnih likov. Sledila so razmerja med



Slika 3: Naslovna stran Stefanove razprave o integralih v Izvestjih realke [4].

daljicami in ravninami ter medsebojna razmerja ravnin, presečišča (v prostoru), primerjava in merjenje poliedrov, okrogla telesa, računanje obsegov in prostornine ter končno še pravilni poliedri. Prvi semester se je končal šele 26. februarja, drugi pa nadaljeval 6.3.1860, Moritz A. Becker pa je znova opravil inšpekcijsko šolo. Sledila je ravnateljova zahvala Kollerju, Beckerju, gospodarskemu svetniku Paulu Schmidtu in Scheinerju. Stefan je medtem postal ravnatelj namestnik, docent matematične fizike na univerzi in dopisni član akademije; preselil pa se je v boljše stanovanje na Laimgrube št. 16, medtem ko je 2. 4. 1858 nastavljeni ravnatelj *Gustav Skřivan* (*Skrivan*, 1831 Kruceburk na Češkem–1866 Praga) stanoval na Laimgrube št. 214 kot profesor matematike v 5. in 6. razredu [3]. *Skřivan* je pohvalil Stefana:

»Redni višji predavatelj dr. J. Stefan, dopisni član Akademije, je bil z najvišjim odlokom imenovan za rednega profesorja matematike in fizike na dunajski univerzi, zato je ob koncu 1. semestra zapustil Realko. Njegova odlična učiteljska uspešnost, uspešno delo na področju znanosti, izredno ljubeče vedenje do učencev, trdnost značaja



Slika 4: Omemba Kollerjevega prijatelja Schömilcha na zaključni strani Stefanove razpravi o integralih v Izvestjih realke [4].

in resnična kolegialnost so mu v največji meri priskrbeli splošno priznanje in spoštovanje.»

Stefan je knjižnici šole podaril Mothov učbenik algebre [8], po katerem se je učil med študijem; ni ga več potreboval, saj je kot predavatelj matematike zaključil kariero za vselej. 1. semester se je tako končal s Stefanovo poslovitvijo 11. februarja 1863, 2. semester pa se je brez Stefana na realki začel 19. februarja 1863. Član inženirskega društva, geografskega in srednješolskega društva *Skřivan je nadomestil lastnika šole botanika fizika Karla Schelivskega* (1814 Kyjov na Moravskem–?), ki je odtlej vodil le sosednjo glavno šolo. *Skřivan* se je kot študent udeležil praških demonstracij na barikadah leta 1848; skupaj s Stefanom je zapustil dunajsko realko in postal prvi profesor matematike na Praški Politehniki leta 1863. Kot novi ravnatelj ga je nadomestil Georg Kahrer, ki je pri pouku strojništva v 6. razredu posebej obravnaval enačbe Kollerjevega prijatelja Ferdinanda Redtenbacherja, čeravno Stefan ni več resno jemal Redtenbacherjevih *Dynamid* [3].

Ni čudno, da je Kollerju srce zaigralo ob Stefanovi nadarjenosti. Talent pa ni dovolj, je kvečjemu predpogoj za resen uspeh: zato se je uveljavljeni profesor Koller podal kar v študentske klopi začetnika Stefana, da je izposloval Stefanovo redno profesuro in članstvo v akademiji. Zadetek v polno!

Stefan učitelj

Dandanes še ni na voljo spletnih videoposnetkov Stefanovih predavanj, ne bo pa jih težko računalniško animirati. Sedaj imamo namreč na voljo natančne zapiske, ki jih je mogoče kombinirati s Stefanovimi slikami in znanimi opisi njegove postave ter načinov gibanja z eno ramo nekoliko povešeno za voljo mladostnega tovorjenja težkih očetovih pekovskih vreč z moko. Veselo na delo!

Matematika v Stefanovi teoriji prevajanja toplote: kazalo predavanj

Stefan je kmalu tako zaslovel, da so večino njegovih razprav Britanci kar sproti prevajali [6]. Kot da bi slutil bližajoče se Stefanove mednarodne uspehe, si je Koller vestno zapisal ducat izmed Stefanovih štirinajstih predavanj v zimskem semestru 1862/63 o matematični teoriji prevajanja toplote, pri čemer so bila tedanja polletja nekoliko premaknjena glede na naša, saj se niso končala januarja, temveč ob veliki noči [2].

Matematične vsebine štirinajstih Stefanovih predavanj o toploti so si sledile takole:

V. predavanje 18. 11. 1862: **Integracija diferencialne enačbe za temperaturo zelo tanke palice ob zanemarjanju toplote, ki odteka od medija**, strani 37–50.

IX. predavanje 16. 12. 1862: **Integriranje za določitev toplote v dani točki X glede na prevodnost λ** , strani 91–105.

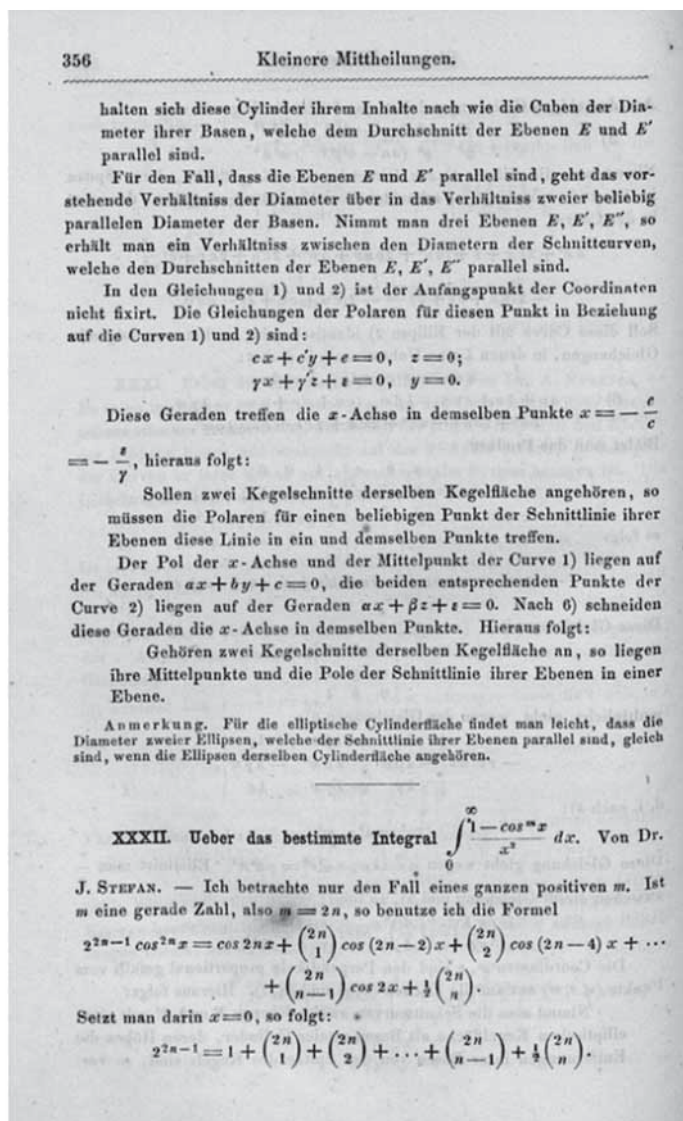
XI. Predavanje 20. 1. 1863: Stefan je uvodoma podal **seznam simbolov**, nadaljeval pa je z **integriranjem kosinusne funkcije prevajanja toplote po navodilih Stefanovega urednika Oscarja Xaverja Schlömilcha** [5], strani 109–117.

XII. predavanje 27. 1. 1863: **Določeni integrali in limite prevajanja**, strani 117–127.

XIII. predavanje 3. 2. 1863: **Določena integrala iz prejšnjega predavanja kot lihi trigonometrični-eksponentni funkciji prevajanja toplote na prostornine in površine telesa**, strani 127–140.

XIV. zaključno predavanje 10. 2. 1863: **Integracija Laplaceove eksponentne enačbe za prevajanje toplote, v desnem stolpcu opomb ob strani prečrtana posplošitev v D. Poissonovo enačbo teorije potenciala kot parcialne diferencialne enačbe 2. reda**, strani 140–142.

Koller je svoje zapiske s Stefanovih predavanj o toploti začel s temperaturo telesa ob meritvah temperature. Prvo predavanje je obiskal 21. 10. 1862, zadnje, 14. predavanje, pa 10. 2. 1863. Tisti čas so bili habsburški semestri drugačni kot danes v Sloveniji. Sodobni nemški in nekdanji habsburški zimski semester (WiSe), s katerim večina študentov začne pouk na univerzi, je pogosto potekal od 1. 10. do 31. 3. Predavanja so začeli okoli 15. 10., da so lahko trajala 14 tednov, kar je bilo enako številu Stefanovih štirinajstih vsakotedenskih dvournih predavanj, ki se jih je Koller udeleževal. Zabeležil je dvanajst predavanj in zagotovil prazne strani za nadaljnje 10. predavanje brez danes dostopnih zapiskov, medtem ko je zadnje decembrsko predavanje bržkone



Slika 5: Uvod Stefanove razprave o določenem integralu v slovitom Schlömilchovem časopisu [5].

zamudil zavoljo praznikov. Okoli božiča in novega leta je bil običajno dvotedenski premor, ki se ni štel v 14-tedenski semester. Habsburški in sodobni nemški poletni semester je nato običajno potekal od 1. 4. do 30. 9. 12 tednov predavanj so začeli nekaj dni po veliki noči, zato so bila predavanja v poletnem semestru dva tedna krajša od zimskega. Med 12- do 14-tedenskima prekinitvama predavanj med semestroma so opravljali izpite, prakse, tečaje.

Stefanov predavateljski slog

Stefan je po Josephu Fourieru (1768 Auxerre–1830 Pariz) povzel *Théorie analytique de la chaleur* iz leta 1822. Mož je tedaj postal stalni tajnik pariške akademije; položaj, ki ga je Stefan kmalu zasedel pri dunajski akademiji. Pravzaprav je bil Fourier edina avtoriteta, ki jo je Stefan navajal v svojih predavanjih o teoriji toplote, vsaj glede na Kollerjeve zapiske.

Stefanova integriranja in diferencialne enačbe so bila matematično nekoliko nad ravni današnjih brucev, kar je bil lahko sad Kollerjevih povečevanj Stefanovih zmožnosti. Koller si ni toliko želel naučiti Stefanove kalorimetrije za lastno izobraževanje, saj je o Fourierjevih teorijah že dovolj izvedel kot študent na liceju v Linzu in je kot profesor fizike predaval to in drugo matematiko v Kremsmünstru desetletje in pol. Koller je pisal svoje knjižice polne Stefanovih predavanj za prepričevanje svojih sodelavcev na ministrstvu, da bi Stefanu dodelili piedestal dunajske univerze, četudi Kollerjevi sodelavci v administraciji niso razumeli dolgih matematičnih formul, oziroma ravno zaradi tega. Anton Peterlin je z istim pristopom stoletje pozneje skušal privabiti Borisa Kidriča in Borisa Kraigherja, da bi dala več denarja za Peterlinove projekte, medtem ko je Oppenheimer uporabil enak prijem za ponižanje in hkrati vabo generala Leslie Grovesa (1896 Albany, New York–1970 Washington DC) v zgodnjih štiridesetih letih 20. stoletja.

Fourier je svojo matematično teorijo toplote oprl na svojo teorijo vrst. V nadaljevanju je Stefan postregel z matematičnimi enačbami kot ilustracijo moderni atomistični teoriji prirejenih Fourierjevih idej. Namesto Fourierjevih vrst je raje uporabil na videz priročajši diferencialni račun za definicijo koeficienta prevajanja toplote. Ker ni uporabljal tenzorskega računa, so bile Stefanove izpeljave izredno dolge. Izraz tenzor je sicer uporabil že Irec William Rowan Hamilton (1805 Dublin–1865 Dublin) med prvim letom Irske krompirjeve lakote leta 1846 kot razširitev svojih kvaternionov, ki sta jih propagirala tudi Thomas Andrews (1813 Belfas–1885 Belfast) v Belfastu in Kelvinov škotski sodelavec Peter Guthrie Tait. Med fiziki so tenzorji postali splošno znani šele po Einsteinovi uporabi v splošni teoriji relativnosti v Pragi in Zürichu tik pred prvo svetovno vojno; zato so ostali tuji celo dolgoveznemu Boltzmannu, ki je nekaj časa predaval matematiko na dunajski univerzi.

Stefanovi matematični spisi in recenzije

Stefan je začel objavljati o matematiki že kot študent. V članku *Delivnost* je sicer imel v mislih bolj fizikalno delilnost snovi kot njene matematične osnove; mesec dni pozneje je v naslednjem zvezku iste revije profesor s celovške gimnazije Stefanov razrednik Robida opisal Foucaultovo nihalo [7].

V svojem prvem tiskanem nemškem spisu je Stefan poročal bolj o tehniških vprašanjih koroškega dela dunajske kmetijsko-gozdarske razstave. Leta 1856 je prebiral *Diferencialni (Integralni) račun* svojega profesorja Franza Motha [8] in *Geometrijo* sorednika gimnazije v Cottbusu Karla Friedricha Schulza ali novejši učbenik nekdanjega ljubljanskega matematika Leopolda Carla Schulza von Strassnitzkega, nakar je oktobra leta 1857 [9] za prvo številko novega *Glasnika* svojega učitelja zeta M. Kollerjevega brata Janežiča pisal o številskih znamenjih in sestavah; članek je bil objavljen tik pred znamenitim Levstikovim *Popotovanjem* [10].

Ko je leta 1858/59 za tri leta in pol prevzel pouk matematike na realki, je Stefan v glasilu avstrijskih realk pisal o uporabi geometrije v fiziki [11].

Stefan je leta 1862 v poročilih svoje dunajske realke [4] objavil razpravo o integralu sinusa in o določenem integralu $\int_0^\infty \left(\frac{1 - \cos^m x}{x^2}\right) dx$, ki jo je sočasno skrajšano objavil še v sloviti Schlömilchovi reviji [5]. Pri reševanju določenega integrala:

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos mx}{x^2} dx = \frac{m \cdot \pi}{2}$$

Na območju od nič do neskončnosti je Stefan upošteval le cele pozitivne eksponente m . Pri $m = 2 \cdot n$ je uporabil enačbo za potence kosinusov. Z razvojem v vrsto in preurejanjem je dobil pravi rezultat $\frac{m \cdot \pi}{2}$. Obravnaval je še določeni integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

na območju od nič do neskončnosti. Integral je reduciral na:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{x^2} dx = \frac{m \cdot \pi}{2}.$$

V vsoti neskončne vrste je potem iskal vrednosti binomskih koeficientov, ki jih je njegov učitelj Andreas pl. Ettingshausen prvi vpeljal leta 1826, in dobil s pomočjo integriranja *per partes*:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^{2m+1}}{x} dx = \frac{\pi}{2^{2m+1}} \cdot \binom{2m}{m}$$

in

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^{2m}}{x^2} dx = \frac{\pi}{2^{2m-1}} \cdot \binom{2m-2}{m-1}.$$

Čim je postal redni univerzitetni profesor, je Stefan svoje izkušnje srednješolskega predavatelja unovčil z recenzijami v glasilu habsburških gimnazij. Najprej je ocenil učbenik svojega vrstnika, tedanjega direktorja trgovske šole v Aachnu, poznejšega profesorja tamkajšnje politehnike Adolfa Wüllnerja (1835 Düsseldorf–1908 Aachen). Učbenik je kljub naslovu temeljil na Gilles Celestine Jaminovem (1818–1886) delu zgolj v uvodu in v prvem poglavju o ravnovesju in gibanju tekočin in trdnin. Sledila je Wüllnerjeva razlaga atomizma, ki jo je Stefan še posebej odobral. Pri določitvi povprečne gostote Zemlje je navajal tako Cavendisheve poskuse, kot meritve Kollerjevega prijatelja Airyja. Pri obravnavi kapilarnosti je upošteval poskuse Kollerjevih prijateljev Savarta in Magnusa. V tretjem poglavju je obravnaval vakuumsko črpalko, Renaultove poskuse in Bunsenovo raziskovanje absorpcije plinov podobno kot Stefanovo doktorsko delo. V poglavju o valovanju je upošteval poskuse Kollerjevega znanca Charlesa Wheatstonea in Helmholtzeve poskuse z zvokom. V naslednji knjigi o optiki je upošteval Cauchyjevo valovno teorijo disperzije proti delčni optiki ob napovedi odločilnih Foucaultevih in Fraunhoferjevih poskusov. Upošteval je Brewsterjeve poskuse in Kirchhoffov zakon o ekvivalentnosti absorpcije in sevanja svetlobe. Obravnaval je tudi Fresnelova zrcala, ki so bila bistveni del tedanjih Stefanovih predavanj. Za zaključek Stefan ni pohvalil le Wüllnerja, temveč še njegovega leipziškega založnika B. G. Teubnerja, ki je tiskal tudi knjige Clebscha in Schlömilchovo matematično revijo [12]. V tretjem delu svoje najbolj znamenite razprave iz leta 1879 je Stefan začel s poročilom o Wüllnerjevi učbeniški prilagoditvi Tyndallovih poskusov, soglasnih s Ste-

fanovim zakonom; ta polovica tiskane strani je bila bistveni del Stefanovega prispevka. Vendar Stefan v rokopisnem povzetku svojega dela ni omenil ne Wüllnerja ne Tyndalla. Tudi v njegovem objavljenem članku se je zdel njun rezultat manj pomemben od meritev Johna Williama Draperja in Johna Ericssona, s katerimi je Stefan nadaljeval tretje poglavje svojega prispevka. Najbrž je Stefan izvedel za Wüllnerjevo objavo rezultatov Tyndalla šele potem, ko je že napisal svoj rokopis, vendar pred končno objavo; zato je Stefan Wüllnerjeve podatke dodal svojemu delu bolj kot manjši dokaz, saj je bila nenatančnost Tyndallovih meritev očitna. V poznejšem razvoju je prav prispevek slavnega Tyndalla najbolj podpiral Stefanov zakon.

Leta 1865 je Stefan ocenil Schellbachov berlinski učbenik eliptičnih integralov in (Riemann-Sieglove) θ funkcije v glasilu avstrijskih gimnazij [13]. Karl Heinrich Schellbach (1805 Eisleben–1892 Berlin) se je učil matematike in elektrike v Halleju pri Johannu Salomu Christophu Schweiggerju (1779 Erlangen–1857 Halle), potem ko je Schweigger leta 1820 sestavil svoj znameniti občutljivi galvanometer. Med letoma 1855 in 1889 je Schellbach v svojem berlinskem matematično-pedagoškem seminarju začetnikom predstavljal težko učiteljsko umetnost. Iz Schellbachovih seminarskih vaj, ki so jih obiskovali tudi Clebsch, Carl Neumann, Koenigsberger in Georg Cantor, je nastala knjiga o doktrini eliptičnih integralov in θ funkcije s poudarkom na praktični plati uporabe v mehaniki, astronomiji in fiziki. V prvem delu svoje knjige je podal teorijo eliptičnih integralov, v drugem delu pa je nanizal možnosti njihove uporabe, ki so Stefana najbolj zanimala. Seveda je delo mojstra Schellbacha priporočal vsem ljubiteljem matematike!

V isti reviji je Stefan ostro kritiziral učbenik Alberta Ferdinanda Trappeja, profesorja in prorektorja višje realke prvega razreda na Plac Teatralny w Wrocławu, upokojenega po 38 letih poučevanja matematike in fizike na veliko noč 1876 [14]. Stefan je bil kritičen do matematično preveč zapletene Trappejeve razlage, ki naj bi presejala možnosti dijakov in spravljala profesorje v časovno stisko zavljo preobilice predavane snovi. Še ostreje se je Stefan obregnil ob ohlapne definicije gibalne količine kot sile, odvečnega naštevanja strojev s proizvajalci vred, nepopolnega zapisa Keplerjevih zakonov in mehanskega dela s kinetično energijo. Tako Stefan ni bil kritičen zgolj do učbenikov svojega slovenskega rojaka Simona Šubica, temveč je bil tudi sicer strog.

V istem letniku revije habsburških gimnazij je graški univerzitetni profesor matematike, Slovencem naklonjeni alpinist Johan Johann Frischauf (1837–1924), dokaj ostro ocenil razpravo češkega profesorja ljubljanske gimnazije Nejedlija [15], češ da ni dovolj upošteval Harriot-Descartesovega pravila znakov iz Descartesove *La Géométrie*, tiskane leta 1673, in *Artis Analyticae Praxis* angleškega utemeljitelja algebre Thomasa Harriota (1560 Oxford–1621 London), objavljenega posmrtno leta 1631. Frischauf je bil Ettingshausnov dunajski študent kmalu za Stefanom, zasebno pa je učil tudi Boltzmannovo napol slovensko nevesto Jetti. V poročilih ljubljanske gimnazije je Josip Nejedli (1821 Praga–1919 Ljubljana) objavil številne razprave o algebraini analizi. Leta 1863 se je ukvarjal z Eulerjevim postopkom za reševanje nedoločenih enačb prvega reda. Močnikovo obravnavo Cauchyjevih metod je leta 1865 nadgradil z razpravo o Budanovem in Hornerjevem algoritmu za reševanje numeričnih enačb višjih vrst. Angleški matematik William George Horner (1786 Bristol–1837 Bath) je danes bolj znan kot francoski amaterski matematik zdravnik Ferdinand François Désiré Budan de Boislaurent (1761 Limonade, Haiti–1840 Pariz), ki je svojo metodo razvil leta 1803 s končno objavo leta 1807.

V istem letniku revije je Stefan pohvalil delo tedanjega predavatelja matematike na univerzi Halle Carla Gottfrieda Neumanna (Karl, 1832 Kaliningrad–1925 Leipzig), sina slovitega mineraloga Franza Ernsta Neumanna (1798–1895). C. Neumann se je izobrazil kot študent Schellbachovega berlinskega seminarja; postal je eden od iniciatorjev teorije integralnih enačb. Tri leta po Stefanovi recenziji, tj. 1868, je skupaj z Alfredom Clebschom soustanovil revijo *Matematični Anali*, ki je še dandanes ena od dvajsetih najpomembnejših matematičnih publikacij na svetu. C. Neumann je izhajal iz idej Wilhelma Webra o pomenu hitrosti in pospeška delcev elektrike, ki skupaj z razdaljo med njimi opredeljujeta silo: seveda je po tedanji navadi razmišljal o Ampèrevih magnetnih molekulah in delcih svetlobnega etra. Ščasoma je Maxwelllov pristop, utemeljen na matematiki C. Neumanna, izpodrinil Webrova tudi s Stefanovo pomočjo; Stefan je svojemu najboljšemu učencu Boltzmannu dal angleški slovar za prebiranje Maxwelllovih del. Seveda je Stefan dobro vedel, s kolikšno avtoriteto ima opravka, zato je delo Neumanna toplo priporočil prijateljem matematičnih ved. V nadaljevanju istega letnika revije so poročali o Stefanovem povišanju v akademika [16].

Zaključek

Stefanov uspeh je tlakoval Koller, ki je po velikonočni nedelji 27. 3. 1864 od 12. 4. 1864 do 10. 5. 1864 poslušal prvih pet Stefanovih predavanj o interferenci; ducat od skupno 14 predavanj o toploti je obiskoval leto in pol prej, tik preden je Stefan postal najmlajši profesor fizike-matematike na dunajski univerzi in sodirektor Fizikalnega inštituta 9. 3. 1863. Stefan je predaval po dve uri zapored enkrat na teden, navdušujoč Kollerja in mlajše občinstvo.

Literatura

- [1] *Jahres-Bericht der Öffentlichen Ober-Realschule (Bauernmarkt(e) Nr. 11) zu Wien*. Wien: Anton Schweiger, 1861/62, str. 53–54.
- [2] Koller, M. (1862-1864). Zapiski s predavanj Dr. Jožefa Stefana: »Über die Theorie der Wärme«. 1862/63, vseh štirinajst predavanj z izjemo osmega desetega v zimskem semestru 1863, 35 folijev (=140 strani), Koller-Manuskripte, 31, Direktions-Archiv der Sternwarte Kremsmünster.
- [3] *Jahres-Bericht Bauernmarkte*, 1859: 39, 53-54, 62; 1860: 101–103, 107.
- [4] Stefan, J. (1862). Ueber (Über) die Integralsinus und einige verwandte bestimmte Integrale. *IV Jahres-Bericht Bauernmarkte*. 41–48.
- [5] Stefan, J. (1862). Kleinere Mittheilungen XXXII. Ueber (Über) ein bestimmtes Integral $\int_0^\infty (1 - \cos^m x/x^2) \cdot dx$, *Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik*, zvezek 7 (1862): 356–359.
- [6] Najmanj 20 angleških povzetkov Stefanovih razprav v *Philosophical Magazine* je bilo zvečine prevedeno iz *Anzeiger der (Kaiserlichen) Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse*. Največ matematike je vseboval Stefanov Problem v prvem in devetem prevodu:
- Stefan, J. (1873). *Poskusi o izparevanju (Versuche über die Verdampfung)*, SAW, 68 (seja 23. oktobra, natis novembra 1873), II, str. 385–423. Povzetek: LXIV. Intelligence and miscellaneous articles. Experiments on evaporation. *Philosophical Magazine*, 4. serija, 46. Zvezek (volumen), številka 308 (December 1873) str. 483–484.
- Stefan, J. (1889). O izhlapevanju in raztapljanju kot pojavih difuzije (Über die Verdampfung und die Auflösung als Vorgänge der Diffusion), SAW II a, 98 (21. november 1889), str. 1418–1442; Ponatis: WA 41 (1890), str. 725–747. Prevod: On evaporation and solution as processes of diffusion, *Philosophical Magazine*, 5. serija, 29. Zvezek, številka 176 (januar 1890) str. 139–140.
- [7] Robida, K. (1855). Foucaultov dokaz. (*Šolski Prijatelj*). *Časopis za šolo in dom*, 4/4 (15. 4. 1855): 125–127.
- [8] Moth, F.K. (1827). *Theorie der Differenzial-Rechnung und ihre Anwendung zur Auflösung der Probleme der Rectification, der Complanation und der Kubierung unabhängig von der Betrachtung der unendlich kleinen oder verschwindenden Grössen, der unendlichen Annäherung, oder der Grenzverhältnisse u. s. w.* Praga: Kronberger & Weber.
- Moth, F. K. (1852) *Lehrbuch der Algebra für den Gymnasial-Unterricht bearbeitet von Fr. Moth*, Linz: F. Eurich. Stefan je svoj izvod podaril šoli (*IV Jahres-Bericht Bauernmarkte*, 1862, str. 60).
- [9] Šubic, I. (1902). Dr. Josip Stefan. *Zbornik znanstvenih in poučnih spisov* (Ljubljana: Slovenska Matica), 4: 62–85.
- [10] Stefan, J. (1858). Številne (sic!) znamenja in sostave, (*Slovenski Glasnik za literaturo in umetnost* (Celovec: Janez Leon) 1858, 1/3 (1. 3. 1858): 75–80; 1/4 (1. 4. 1858): 105–109.
- Levstik, F. (1858). Popotovanje od Litije do Čateža, nadaljevanje, *Glasnik za literaturo in umetnost*, 1/3 (1. 3. 1858): 81–84;
- [11] Stefan, J. (1855). Delivnost. (*Šolski Prijatelj*). *Časopis za šolo in dom*, 4/3 (15. 3. 1855): 84–85.
- Stefan, J. (J. St. Wien, Četrtek 4. 6. 1857). Feuilleton. Die land- und forstwirtschaftliche (= forstwirtschaftliche) Ausstellung in Wien in Rücksicht auf Kärnten. *Klagenfurter Zeitung*, no. 125: 493–495.
- Stefan J. (1859). Geometrische Darstellung physikalischer Probleme. *Zeitschrift für Realschulen (Zeitschrift für die österreichischen Realschulen und verwandte Lehranstalten)*. Wien: Sallmayer, 1: 176–.
- [12] Stefan, J. (1864). Recenzija: Ad. Wüllner. Lehrbuch der Experimentalphysik mit theilweiser benutzung von Jamin's cours de physique de l'École Polytechnique (prva dva dela: mehanika, optika). Leipzig: B.G. Teubner, 1863, *Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien*, 15: 158–166.
- [13] Stefan J. (1865). Recenzija: Schellbach, K. H. 1864. Die Lehre von den elliptischen Integralen und der Thetafunctionen (Funktionen). Berlin: Reimer. *Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien*. 16: 747–748.
- [14] Stefan J. (1865). Recenzija: Trappe, Albert Ferdinand. 1865. Die Physik für den Schulunterricht bearbeitet von Albert Ferdinand Trappe, 3. Izdaja 296 strani. Breslau (Wrocław): Ferdinand Hirt. *Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien*. 16: 670–673.
- [15] Frischauf J. (1865). Recenzija: K. Nejedli, Elementäre Ableitung der Budar-Horner'schen Auflösungsmethode Höherer Zahlengleichungen (22 strani), *Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien*. 16: 865–866.
- [16] Stefan J. (1865). Recenzija: Neumann, Carl. 1863. Die Magnetische Drehung des Polarisationsebene des Lichtes: Versuch Einer Mathematischen Theorie. Halle: Waisenhausen, VIII + 82 strani. *Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien*. 16: 305-306. Na strani 472 o Stefanu akademiku.

Evropske statistične igre, tekmovanje srednješolcev

Simona Klasinc
Statistični urad Republike Slovenije

Evropske statistične igre so srednješolsko tekmovanje iz poznavanja statistike in statističnih podatkov in se razlikujejo od večine drugih tekmovanj. Tekmovanje je mednarodno. Organizira ga Eurostat, statistični urad Evropske unije, in sicer skupaj s statističnimi uradi nekaterih evropskih držav, med katerimi je tudi slovenski Statistični urad RS (SURS). Leta 2017, ko je bilo tekmovanje izvedeno prvič, je Statistični urad za tekmovanje navdušili 400 dijakov, leta 2019 pa že več kot 900. Upamo, da jih bomo v 2020 navdušili najmanj 1200.

Tekmovanje je namenjeno srednješolcem, da usvojijo dodatna znanja iz statistike in spoznajo pomembnost statističnih podatkov in pomembnost njihovega pravilnega razumevanja. Za srednješolske profesorje pa pomeni izziv, s katerim dijakom – z uporabo uradnih statističnih podatkov – približajo statistiko, jim pomagajo razvijati nove veščine in zamisli ter pridobivati vpogled v nova področja raziskovanja. Med pomembnejšimi cilji tekmovanja je tudi priložnost, da dijaki in učitelji spoznajo vlogo statistike v družbi in da se jim jo predstavi kot univerzitetni študij ter se tako spodbuja skupinsko delo v smislu sodelovanja za doseganje skupnih ciljev.

Zakaj je tekmovanje drugačno od večine drugih srednješolskih tekmovanj?

- Dve tekmovalni kategoriji: A (dijaki 3. in 4. letnikov), B (dijaki 1. in 2. letnikov);
- tekmujejo ekipe, sestavljene iz enega, dveh ali največ treh članov;
- vsaka ekipa mora imeti mentorja, srednješolskega profesorja;
- šolska, državna, evropska raven tekmovanja;
- bronasta, srebrna, zlata priznanja;
- tekmovanje poteka na daljavo: reševanje spletnih testov (šolska raven), priprava raziskovalne naloge (državna raven), priprava videa (evropska raven);
- dosežek najboljših šteje za pridobitev štipendije;
- nagrade za vse sodelujoče (majica) in posebne nagrade za najboljše dijake in mentorje (elektronska naprava).

Kaj pridobite z mentorstvom dijakom?

Dijakom lahko s sodelovanjem na tekmovanju posredujete znanja in veščine, ki so sicer zelo malo zastopana v rednih učnih programih (delo s podatki, obdelava podatkov, prikaz podatkov), so pa nujna pri izdelavi seminarских nalog, v večji meri pa tudi kasneje, na fakultetah. Tudi vi pridobite nova znanja in utrjejo se vam lahko ideje, kako nadgraditi podajanje snovi.

Urniki in vsebina tekmovanja

Zbiranje prijav se vsako leto prične okoli 20. oktobra, ko statistiki praznujemo svetovni oziroma evropski dan statistike. S šolskim delom tekmovanja pričnemo decembra, ko dijaki 14 dni rešujejo spletne teste. Spletni test sestavljajo trije sklopi vprašanj: z njimi se preverja osnovno znanje iz statistike, poznavanje in uporaba uradnih statističnih virov in razumevanje vsebine ene izmed publikacij s statističnimi podatki. Ekipe, ki presežejo prag za uvrstitev na državno raven, se nato januarja lotijo priprave raziskovalne naloge, kjer analizirajo statistične podatke in predstavijo rezultate v obliki predstavitve PowerPoint. Ta del tekmovanja traja približno 4 tedne. Podatkovni niz, ki ga analizirajo, je pripravljen na Statističnem uradu in je enak za vse tekmovalce.

V evropski finale, ki sledi državnemu tekmovanju in poteka od sredine marca do začetka maja, se uvrstijo le najboljše ekipe iz vsake države. Na tej ravni pa tekmovanje poteka v angleškem jeziku. Naloga vsake ekipe je, da posname video, v katerem mora razložiti določen statistični koncept.

Več informacija na:

Primeri nalog, pravila tekmovanja, raziskovalne naloge ter videoposnetki so dostopni na spletni strani <https://www.stat.si/igre>

Dva primera nalog s šolskega tekmovanja:

7. V spodnji tabeli so navedene starosti zaposlenih v nekem podjetju.

24	30	29	26	22	21	32	27	47	52
26	28	55	32	44	26	58	22	41	35
25	59	28	22	23	31	27	24	31	29
27	29	45	26	31	26	36	41	26	27
23	34	53	31	25	49	28	35	26	45

Kateri od spodnjih rezultatov je pravi? Obkrožite pravilno trditev (standardni odklon je zaokrožen na dve decimalni mesti):

- Aritmetična sredina: 31,18; modus: 22; variacijski razmik: 38.
- Aritmetična sredina: 32,78; standardni odklon: 11,81; modus: 26.
- Aritmetična sredina: 32,78; standardni odklon: 10,18; mediana: 29.
- Aritmetična sredina: 31,18; mediana: 29; variacijski razmik: 39.

Naloga 4)

Število obolelih za COVID-19 je slučajna spremenljivka. Katere vrste?

- Opisna spremenljivka.
- Diskretna številska spremenljivka.
- Zvezna številska spremenljivka.
- Ordinalna spremenljivka.

Rešitev:

Osnovni tipi spremenljivk so:

- Glede na tip izražanja vrednosti

Pisne (atributivne) spremenljivke – vrednosti lahko opišemo le z besedami (npr. poklic, uspeh).

Številske (numerične) spremenljivke – vrednosti lahko izrazimo s števili (npr. starost, telefonska številka).

Med njimi ločimo:

zvezne: teoretično lahko zavzame katerokoli vrednost na nekem intervalu (neskončno število vrednosti). Npr. višina z vrednostmi npr. 178, 176,5 ali 179,512 (odvisno od natančnosti merjenja).

diskretne: na nekem intervalu lahko zavzame le določeno število vrednosti (končno število vrednosti). Npr. število otrok v družini z vrednostmi 0, 1, 2, 3, ... (ne more biti npr. 2,5 ali 3,842).

- Glede na tip merjenja:

Nominalne spremenljivke oz. nominalna merska lestvica (angl. nominal scale) – vrednosti razvrščamo v kategorije brez posebnega vrstnega reda ali strukture (npr. regije, stranke) zato ne moremo določiti vrstnega reda, povprečij in razmerij. Posebna vrsta nominalne merske skale je dihotomna. Ima samo dve kategoriji (npr. da/ne, moški/ženski ...).

Ordinalne spremenljivke oz. ordinalna merska lestvica (angl. ordinal scale) – vrednosti lahko uredimo od najmanjše do največje (npr. stopnja izobrazbe, uspeh, strinjanje z vrednostmi "sploh se ne strinjam", "ne strinjam se", "niti niti", "strinjam se", "zelo se strinjam").

Intervalne spremenljivke oz. intervalna merska lestvica (angl. interval scale) – lahko primerjamo razlike med vrednostima dvojic enot; lahko povemo, za koliko vrednosti spremenljivke se neka enota loči od druge (npr. temperatura v °C, koledarsko leto).

Razmernostne spremenljivke oz. razmernostna merska lestvica (angl. ratio scale) – lahko primerjamo razmerja med vrednostima dvojic enot; lahko povemo, kolikokrat večja/manjša je vrednost neke enote od druge enote (npr. starost, čas, telesna teža). Pri razmernostnih spremenljivkah je ničla absolutna ("naravno" določena in ne stvar dogovora kot pri intervalnih).

V našem primeru gre za diskretni, števeni tip spremenljivke, saj število obolelih za COVID-19 lahko zavzame katerokoli celoštevilsko vrednost do skupnega števila potencialno obolelih, ne more pa zavzeti vrednosti, ki ni celoštevilska (denimo 130,4352). Pravilni odgovor je b.

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2020

dr. Borut Jurčič Zlobec
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je čim zgodnejše uvajanje mladih v znanost, popularizacija znanosti in tehnike, odkrivanje nadarjenih učencev in dijakov na posameznih področjih in njihovo spodbujanje k poglobljanju znanja in raziskovalne dejavnosti.

Na to državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge z regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2020 je potekalo že 54. državno srečanje v Murski Soboti. Organizator je dobil v pregled 13 nalog, ki so prišle v končni izbor za priznanja, od teh je 3 določil za bronasto priznanje.

Ostale naloge so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, izr. prof. dr. Marko Jakovac, dr. Borut Jurčič Zlobec, doc. dr. Mateja Grašič in asist. Simon Brezovnik.

Komisija je izbrala 6 nalog za srebrno priznanje, 4 naloge pa so dobile zlato priznanje.

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo nalog, ki so dosegle zlato priznanje. Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi strani pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda bomo z opisom dela najboljših dali kakšno idejo tudi drugim in jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja tudi zanje.

Z zlatim priznanjem so mladi raziskovalci dobili pohvalo za svoje dosežke. Na tem mestu pa jim želimo sporočiti, kaj bi lahko popravili, izboljšali, da bi bili še bolj uspešni.

Pojdimo k nalogam. Teme nalog, ki so bile predstavljene pred državno komisijo, so bile geometrijske (5 nalog), algebrske (4 naloge), aritmetične (3 naloge) in ena anketna.

Tudi letos smo dobili eno anketno nalogo. O neprimernosti teh nalog smo že govorili, vendar povejmo še enkrat, zakaj se nam zdijo neprimerne. Anketne naloge so privlačne, ker ustrezajo nalogi, da je treba v raziskovalni nalogi narediti kaj izvirnega, kar pa v matematiki ni tako lahko. Zato stalno poudarjamo, da tovrstna inovativnost za matematične naloge ne pride v poštev. Tudi kakovost teh nalog je vprašljiva. Vprašljive so tudi statistične metode, ki jih uporabljajo. Zato mentorjem priporočamo, da se takim temam izogibajo. Pri matematičnih raziskovalnih nalogah je pomembno, da se učenci naučijo nekaj novega iz ma-

tematike in da znajo to lepo predstaviti. Če pa jim uspe kakšen izvirni problem opisati matematično in ga tako rešiti, so dosegli največ, kar se od njih pričakuje. Veliko je odvisno od mentorjev. Prav je, da ti pustijo učencem, da delajo samostojno, vendar pa pričakujemo, da je končni izdelek narejen matematično korektno in da mentor svetuje, kako bi se določene stvari izboljšale in poenostavile. Pomembno je tudi, da mentorji opozarjajo na lep in razumljiv jezik. Raziskovalne naloge so priložnost, da se učenci naučijo kaj novega s pomočjo mentorja. Zato je pomembno, da jih mentorji pri tem usmerjajo in jim svetujejo kako in kaj.

Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2020

Nagrajene so bile štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski:

(1) Ploščina tetivnega večkotnika

Avtorici: **Katarina Lija Hrastnik** in **Marija Papa**

Mentorja: **Igor Blažič** in **mag. Alojz Grahor**

Šola: Montessori inštitut, Zavod – Zasebna OŠ Montessori

(2) Koliko je ulomkov

Avtorja: **Črt Cigale** in **Aleksander Kalacun**

Mentor: **Jožef Senekovič**

Šola: Osnovna šola Bojana Illica, Maribor

(3) Postavitve večdimenzionalnih kock

Avtor: **Gal Zajc**

Mentor: **dr. Tilen Marc** in **Jasna Kos**

Šola: Gimnazija Bežigrad

(4) Splošni kriterij deljivosti

Avtorja: **Jurij Grohar** in **Matej Kompara**

Mentor: **mag. Anton Grahor**

Šola: Škofijska gimnazija Vipava

Kratek opis nagrajenih nalog

1. Naloga z naslovom: Ploščina tetivnega večkotnika

V raziskovalni nalogi avtorici obravnavata formulo za ploščino tetivnega petkotnika, izraženo le z dolžinami stranic. Znani sta Heronova formula za ploščino trikotnika in Brahmaguptova formula za ploščino tetivnega štirikotnika, ki sta predstavljali izhodišče za raziskavo.

Predstavimo jo z nekoliko skrajšanim povzetkom k nalogi.

S pregledom literature sva ugotovili, da za izračun ploščine tetivnega petkotnika obstaja zapleten postopek. V raziskovalni nalogi pa sva izpeljali dokaj preprosto formulo, za njen približek. Novo formulo sva utemeljili s pomočjo programa GeoGebra. Meniva, da je izpeljana formula primerna za uporabo.

Formula se zgleduje po natančni formuli za trikotnik in tetivni štirikotnik, kjer se ploščina izraža z dolžinami stranic. Formula za trikotnik je dobro znana Heronova formula:

$$p_{He} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kjer je

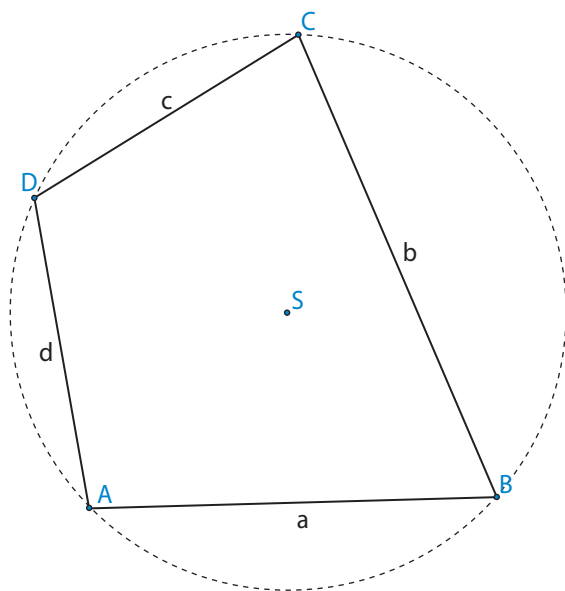
$$s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Tetivni štirikotnik je štirikotnik, ki ima očrtano krožnico. Z drugimi besedami, oglišča tega štirikotnika se nahajajo na krožnici. Brahmanova formula za ploščino tetivnega štirikotnika je:

$$p_{Br} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

kjer je

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$



Raziskovalki je vodila primerjava Heronove in Brahmanove formule. V Heronovi formuli je produkt $(s-a)(s-b)(s-c)$ pod korenem pomnožen s polovičnim obsegom s . V Brahmanovi formuli pa lahko rečemo, da je produkt pod korenem $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ pomnožen s faktorjem 1. Zato sta sklepali, da bi formula za petkotnik imela pod korenem faktor $1/s$. To formulo je zapisala Shahbazi. Formula za ploščino tetivnega petkotnika bi potemtakem lahko bila

$$p_{Sh} \approx \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)/s},$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c+d+e),$$

vendar pa ta formula ni več natančna. Tudi če je vseh pet stranic enakih, če imamo opravka s pravilnim petkotnikom, formula ne da točne vrednosti. Točna vrednost za pravilni petkotnik je:

$$p_{p5} = \sqrt{25 + 105/4}a^2$$

Če izračunamo približno vrednost ploščine za pravilni petkotnik po gornji formuli, dobimo:

$$p_{Sh} \approx 9/4 \sqrt{3/5}a^2$$

Relativna napaka je 0.0223651. Avtorici sta naredili popravke Shahbazijeve formule, tako je nastala Lija–Majina formula:

$$p_{LM} \approx \left(1 - \frac{abcde}{s^5}\right) \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)/s},$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c+d+e),$$

ki pa še vedno ni natančna. Porodila se je ideja, da bi dodali konstanto tako, da bi bila formula natančna za pravilni petkotnik:

$$p_{LM} \approx \left(1 - K \frac{abcde}{s^5}\right) \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)/s}.$$

Če je

$$K = \frac{3125}{864} \left(27 - 5\sqrt{15 + 6\sqrt{5}}\right),$$

potem je formula res natančna za pravilni petkotnik. Vendar avtorici nista vzeli te vrednosti, ampak njen racionalni približek $5/4$. Za tiste, ki ne vedo, kaj je verižni ulomek, naj povemo, da je ta ulomek tretji konvergent verižnega ulomka za konstanto K . Tokrat je bila relativna napaka pri računanju ploščine pravega petkotnika enaka 0.0000567211. Predlagamo še izboljšano formulo, kjer se $5/4$ nadomesti z $99/79$ (peti konvergent). Ime formule pa prepuščamo avtoricama. Računi v nalogi niso natančni, zato smo jih ponovili. Zanimivo je dejstvo, da je formula s konstanto K točna, če je vseh pet stranic enakih oziroma, če je dolžina ene od njih enaka 0. V tem primeru dobimo formulo za tetivni štirikotnik. Nekje vmes pa bi bila napaka največja. Pri poskušanju s programom *Mathematica* smo dobili največjo relativno napako okoli 0.00065, in to za vrednost konstante $99/79$.

Naloga je zanimiva, zato smo podrobneje opisali pot, ki sta jo avtorici prehodili do končne formule. Ker je to osnovnošolska naloga, je popolnoma dosegla svoj namen. Čestitamo.

2. Naloga z naslovom: Koliko je ulomkov

Nalogo bomo predstavili z njenim povzetkom.

Vemo, da je naravnih števil neskončno mnogo. Poznamo tudi racionalna števila. Vsako racionalno število lahko zapišemo z ulomkom ali z decimalno številko, za desetiške ulomke neperiodično, s končnim številom decimalnih mest, za nedesetiške ulomke pa periodično. V raziskovalni nalogi raziskujemo, kako število, ki se zapiše s periodično decimalno številko, zapišemo z ulomkom. Raziskati želimo število ulomkov za izbrano periodo. Recimo, koliko nedesetiških ulomkov ima enomestno periodo.

V nalogi se avtorja na široko ukvarja s preštevanjem nedesetiških ulomkov, ki imajo v decimalnem zapisu dano dolžino periode. Omenjena je tudi pretvorba iz periodičnega decimalnega zapisa v ulomek in obratno. Med drugim sta dokazala, da periodični decimalni zapis $0.9999\dots$, kjer se števka 9 ponavlja v nedogled, predstavlja število 1.

3. Naloga z naslovom: Postavitve večdimenzionalnih kock

Začnimo s povzetkom k nalogi.

V nalogi obravnavamo dvodimenzionalne mostove iz kock 2×1 , ki predstavljajo osnovo za izračun števila večdimenzionalnih mostov, ki ustrezajo določenim pogojem. Za število mostov v dvodimenzionalnem in tridimenzionalnem prostoru so dobljene konkretne formule, v večdimenzionalnih prostorih so dobljene formule rekurzivne. Pripeljejo nas do zaporedij, ki jih primerjamo s tistimi, ki so v bazi OEIS¹. Naloga se zaključi s postavitvijo kock v dvodimenzionalnem prostoru, ki se imenuje zid.

Avtor se je omejil na kocke dimenzije 2×1 . Dolžina v smeri osi x je enaka 2, medtem ko je višina v smeri osi y enaka 1. Z urejenim parom števil (a, b) , imenujemo ju koordinati, lahko natančno opredelimo položaj kocke na ravnini. Točka $T(a, b)$ je spodnje levo oglišče opisane kocke.



Slika 1: Pravilna postavitve kock 2×1

Prva definicija je definicija pravilne postavitve kock:

Kocka A se dotika kocke B , če ima kocka A koordinati (a, b) in točka B koordinati $(a \pm 1, b \pm 1)$ oziroma $(a \mp 1, b \pm 1)$. Postavitve je pravilna, če lahko iz vsake kocke na vsako drugo kocko pride mo s premiki po dotikajočih se kockah.

Druga definicija je most: Most je pravilna postavitve kock 2×1 , pri kateri ni kock 2×1 z isto prvo koordinato a .



Slika 2: Most v dvodimenzionalnem prostoru

Most začnemo graditi z eno kocko in vsako nadaljnjo postavimo za eno enoto desno ter eno enoto navzgor ali navzdol glede na prejšnjo. To pomeni, da je vektor premika posamezne kocke glede na prejšnjo $\vec{d} = (1, \pm 1)$.

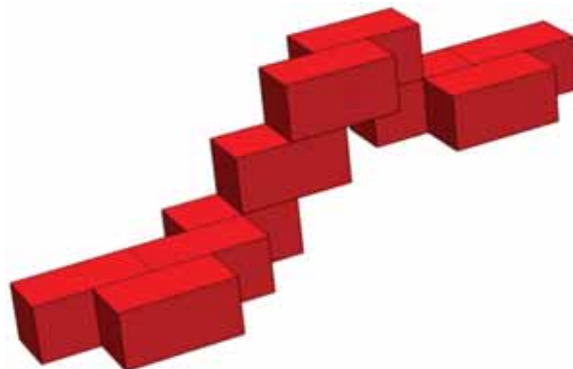
Pravilni in nepravilni most:

Most imenujmo *pravilen*, če je zadnja kocka v enaki višini kot prva, ostale pa so v enaki višini ali višje od prve kocke. Most, ki temu ne ustreza, je *nepravilen*.

V nadaljevanju imamo natančen izračun vseh možnosti sestave kock pri določenih pogojih.

Avtor je pokazal, da obvlada kombinatoriko. Dela se je lotil zelo natančno in rezultat je malodane impozanten. Ni dovolj prostora, da bi vsaj približno opisali vse, kar je avtor naredil v nalogi.

Med drugim je sestavljal kocke tudi v treh dimenzijah in na nekaterih mestih posplošil še na več kot tri dimenzije. Sledi slika tridimenzionalnega mostu in na koncu še avtorjev opis svojega dela. Čestitamo.



Ko sem se lotil raziskovanja in si ustvaril pregled nad obsežnostjo primerov, ki so me zanimali, sem si moral postaviti izvedljive cilje. Ti so bili:

- Poiskati število različnih mostov iz danega števila dvodimenzionalnih kock.
- Posplošiti problem na večdimenzionalne prostore.
- Napisati program za rešitev problema pri velikem številu kock. Cilje sem izpolnil. Naloga je izvirna in pravilnosti rešitev nisem mogel preveriti iz virov, preveril pa sem rešitve na manjšem številu konkretnih primerov. Za zaporedja, ki sem jih našel v bazi OEIS, so rešitve preverjene pri večjem številu primerov. Rekur-

¹ Baza OEIS: THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES: <http://oeis.org/>

zivne formule, ki sem jih izpeljal, so sicer drugačne od tistih, ki so v bazi OEIS, dajo pa enake rezultate pri vseh izračunanih vrednostih.

4. Naloga z naslovom: Splošni kriterij deljivosti

Začnimo s povzetkom k nalogi:

Kriterij deljivosti je algoritem, s katerim preverimo s pomočjo števk danega naravnega števila n , ali je to število deljivo z danim naravnim številom p . Pri tem uporabljamo seštevanje, odštevanje ali množenje majhnih števil, ki jih predstavljajo števke danega števila. V raziskovalni nalogi smo razvili in utemeljili splošni kriterij deljivosti, s katerim lahko za vsako naravno število n in vsak naravni delitelj p preverimo deljivost. Z uporabo tega splošnega kriterija deljivosti smo dokazali znane kriterije za deljivost s števili 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 in 11. Ker sta tako dokaz kot izvedba splošnega kriterija deljivosti za majhna praštevila zelo preprosta, predlagamo, da se v srednješolske učbenike uvrsti te kriterije za preverjanje deljivosti s števili 7, 11, 13, 17 in 19.

Glede na dostopne vire je eden prvih kriterijev zapisan v Babilonskem talmudu, med tretjim in petim stoletjem našega štetja.

»/.../ stotice dajte na stran kot jubilejske cikle in preostanek pretvorite v sabatske cikle (vsak po sedem let), potem ko k temu dodate

dve leti za vsako dopolnjeno stoletje; preostanek vam poda številko leta v tekočem sabatskem ciklu«.

$$100a + b \equiv 2a + b \pmod{7},$$

Poljubno število n , zapisano z dvomestno številko, se da zapisati v obliki

$$n = 10a + b = 7(a - 2b) + 3(a + 5b).$$

Od tu sledi, da bo število deljivo s 7 takoj, ko bo število $a + 5b$ deljivo s 7.

Najprej sta avtorja dokazala, da poljubno naravno število n lahko zapišemo v obliki

$$n = 10a + b = 7(a - 2b) + 3(a + 5b).$$

Če sta števili p in q tuji, od tod sledi, da je število n deljivo s p , ko je $(a - 2b)$ deljivo s p .

Pri dokazovanju sta si pomagala z diofantsko enačbo.

$$ax + by = c, \text{ kjer so } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Sledi izpeljevanje kriterija za majhna praštevila.

V spomin na dr. Marjana Jermana

Dr. Marjan Jerman, asistent na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, je v letih sodelovanja z Zavodom Republike Slovenije za šolstvo pustil neizbrisen pečat v pedagoški stroki.

Ob njegovi smrti (v novembru 2020) smo zaposleni na Zavodu RS za šolstvo in člani uredniškega odbora revije *Matematika v šoli* zapisali naše utrinke.



Foto: Drago Jovič

Slika 1: Dr. Marjan Jerman na 3. mednarodni konferenci o učenju in poučevanju matematike KUPM 2016, Brdo pri Kranju.

Skupaj v uredniškem odboru revije *Matematika v šoli*

Aprila 2009 se je dr. Marjan Jerman odzval povabilu takratne odgovorne urednice Jerneje Bone in sprejel članstvo v uredniškem odboru revije *Matematika v šoli*. V enajstletnem neprekinjenem sodelovanju je reviji pustil neizbrisen pečat. Kot recenzent je s svojo strokovnostjo pomagal avtorjem dvigniti kakovost prispevkov. Spomnimo se ga kot odzivnega člana uredniškega odbora, ki si je zelo prizadeval, da bi revijo vpisali v vidnejše baze revij. Pri tem se je zavedal, da edino kakovostni prispevki, tudi znanstveni in ne samo strokovni, pomagajo k dvigu didaktičnega in vsebinskega znanja slovenskega učitelja matematike. Njegova vedrina, optimizem in zagon sta vedno odsevala na sejah uredniškega odbora. Znal je navduševati, bil je iskričev človek.

S človeškega vidika smo Marjana videli kot kolega, ki ni bil nikoli vzvišen, zato smo se ob njem počutili varno in sprejeto. Z izborom pravih besed je znal spodbuditi sogovornika k razmišljanju in doseganju meja nemogočega.

Z Marjanom smo bili povezani tudi posredno, preko mlajših profesorjev matematike, diplomantov Fakultete za matematiko in fiziko, ki so ga nam opisovali kot predanega pedagoga, od katerega so se marsikaj naučili, saj jim je dal zgled dobrega in skrbnega učitelja.

Jerneja Bone,
svetovalka za matematiko na ZRSŠ

Im memoriam dr. Marjan Jerman

Nemogoče, nepojmljivo se zdi, da smo se morali v novembru posloviti od dr. Marjana Jermana, profesorja na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, ki je v letih sodelovanja z Zavodom Republike Slovenije za šolstvo pustil sledi dragocenega in izjemnega kolega med matematiki in v pedagoški stroki.

Dr. Marjana Jermana sem spoznala leta 2006 kot vodja predmetne skupine za matematiko na Zavodu RS za šolstvo v Komisiji za spremljanje in posodabljanje učnih načrtov za predmet matematika. V Komisiji smo v okviru smernic za prenovu učnih načrtov pregledali številne tuje učne načrte za matematiko ter skupaj pripravili analizo nevrvalgičnih točk obstoječih učnih načrtov za matematiko po vertikali in predlagali ustrezne rešitve. V nadaljevanju smo se v Komisiji delili na dve podskupini – program osnovna šola in program gimnazija. Dr. Marjan Jerman je bil ključen v podskupini za prenovu učnega načrta za matematiko v programu gimnazija, kjer je bil njegov prispevek neprecenljiv – strokoven, prepričljiv z argumenti in dokazi v prid nekaterim spremembam, sicer pa človeško topel, sproščen in nadvse kooperativen. Z nami je vedno z veseljem sodeloval tudi na številnih strokovnih izpopolnjevanjih srednješolskih učiteljev matematike.

Odšel je na vrhuncu svojih profesionalnih moči, sredi ustvarjalne in življenjske poti. In čeprav še ni dopolnil niti 49 let, so ga odlikovali kot predavatelja in raziskovalca zlasti analitična iskricost, izjemen nastop, doslednost pri uporabi matematičnega jezika ter pritrčen odnos do študentov in sodelavcev.

S spoštovanjem in z veliko hvaležnostjo bo dr. Marjan Jerman vedno prisoten v svetu matematike in tudi povsod drugod, kjer je pustil svoje sledi.

V naših spominih ostaja kot mojster matematike, ki je zaplul na odprta morja znanstvenega uma in se neprecenljivo angažiral pri intelektualnem razvoju svojih študentov.

Alica Prinčič Röhler,
predstojnica OE Koper na ZRSŠ

Od posodabljanja učnega načrta do razvoja in uvajanja sprememb

Dr. Marjana Jermana poznam skozi nekajletno sodelovanje v različnih delovnih skupinah Zavoda RS za šolstvo. Najprej sem pobrskala po svojih asociacijah nanj, nato sem se lotila najinega sodelovanja sistematično.

Vse skupaj se je pričelo s sodelovanjem v Komisiji za spremljanje in posodabljanje učnih načrtov za predmet matematika (2006). Bili smo v podskupini za gimnazijski program. Dr. Marjan Jerman je bil za nas strokovni novinec, ki je skupaj z nami odkrival šolsko politično-strokovno delovanje. Ko se je pojavil v delovni skupini, je sprostil ozračje s svojim optimizmom, in kot sam pravi, za šolarje liberalnim pogledom na strogost matematike. Na enak način se je nadaljevalo delo v Predmetni razvojni skupini za matematiko v gimnazijah, ki je imela za nalogo implementirati novosti iz učnega načrta. Tako je dr. Marjan Jerman postal formalni in neformalni sodelavec ZRSŠ v različnih vlogah.

V obdobju 2006 do 2014 je poleg soavtorstva Učnega načrta za matematiko (gimnazija) napisal še kot avtor ali soavtor prispevka v revijo Matematika v šoli: Prenovljeni učni načrt za pouk matematike v gimnazijah (2008, letnik 14, številka 1-2 M. Jerman, S. Repolusk) ter Obnavna normalne porazdelitve v gimnaziji (2008, letnik 14, številka 3-4) in Vhodno-izhodni matematični model ekonomije (priročnik, več avtorjev, (2010): Posodobitev pouka v gimnazijski praksi Matematika Ljubljana, Zavod RS za šolstvo).

Če mu je čas dopuščal, je sodeloval s sodelavci tudi pri izvedbi seminarjev za učitelje (Avtonomija načrtovanja pouka (primer načrtovanja pouka pri geometriji, nekateri primeri organizacije snovi v prvem letniku in ustrezne vertikalne povezave), Novosti posodobljenih učnih načrtov ...).

Poleg papirnatih hranim tudi elektronsko gradivo. Najino dopisovanje odpira poleg strokovnega pogleda tudi njegov odnos, odnos univerzitetnega učitelja matematike do šolske dodiplomske matematike. Kljub temu da se profesionalno na fakulteti ni ukvarjal s pedagoškim vidikom poučevanja, se je z veseljem vključeval in poglobljal v probleme pouka preduniverzitetne matematike. Problemi šolske matematike so mu bili enako pomembni kot univerzitetni problemi pouka matematike. Videl je vertikalo matematičnega izobraževanja in smisel v sodelovanju.

Za zaključek navajam njegovo praktično misel o definiciji kota:

»Kar pa se tiče 'prave' definicije kota, je stvar lahko zelo problematična, ker obstajajo različni pristopi h geometriji. Vedeti je treba, da obstajajo konsistentni geometrijski modeli, ki se jih ne da enostavno razlagati s človeškimi pojmi kot levo, desno, navzgor, navzdol, bližje, veliko stvari pa je pogosto na prvi pogled skreganih z intuicijo.«

(Iz najine e-razprave o definiciji kota, kjer predstavi Hilbertovo definicijo.)

Silva Kmetič,
upokojena svetovalka za matematiko na ZRSŠ

Skupaj v programskem odboru konference KUPM

V Predmetni skupini za matematiko na Zavodu RS za šolstvo smo z dr. Marjanom Jermanom v preteklih letih odlično sodelovali ob različnih priložnostih: pri posodabljanju UN za gimnazijo, izobraževanju učiteljev, reviji Matematika v šoli in pri pripravi ter izvedbi konferenc o učenju in poučevanju matematike KUPM 2014 in KUPM 2016. Sodelovanje z njim je bilo vedno zelo sproščeno, prijazno in preprosto. Vsaki nalogi se je posvetil z veliko mero predanosti, strokovnosti in zanesljivosti. Skozi svoje strokovno delo je izžareval ljubezen do matematike in do njenega poučevanja.

Posebej tesno sem z dr. Jermanom sodelovala pri konferencah KUPM, kjer je v letih 2014 in 2016 sodeloval kot član programskega odbora. Z velikim veseljem in skromnostjo je sprejel povabilo k plenarnem prispevku in tako je kot plenarni predavatelj na 3. mednarodni konferenci o učenju in poučevanju matematike (KUPM 2016) spregovoril v prispevku z naslovom *Geometrija za danes in jutri*. Iz povzetka prispevka navajam:

»Geometrija je ena od najlepših in najbolj intuitivnih vej matematike. Grki in Arabci so si celo računske zakone in enačbe, ki danes brez dvoma spadajo pod algebro, predstavljali kot ploščine zlepljenih likov. Skoraj pri nobeni drugi veji matematike ne moremo samo s pomočjo opazovanja dobro narisane slike priti tako neposredno do idej, ki nam pomagajo pri dokazovanju geometrijskih trditev. Zakaj je torej tako težko poučevati geometrijo in zakaj so rezultati poučevanja tako presenetljivo slabi?«

V nadaljevanju zapiše še:

»Kako torej krmariti med intuicijo, uporabno vrednostjo in matematično strogostjo? Ali je smiselno različno sposobne dijake po različnih poteh peljati v geometrijo? Ali bistven napredek pri poučevanju predstavljajo računalniški programi za dinamično geometrijo, ki lahko ob pravilni uporabi izjemno izboljšajo predstavo in porodijo ideje za dokaze? ... Kasneje se mi zdi koristno, če je le čas in volja dijakov, prikazati različne pristope. Veliko klasičnih izrekov lahko dokažemo na več bistveno različnih načinov. Uporabimo lahko klasično evklidsko geometrijo, koordinatni sistem, vektorje, trigonometrijo, kompleksna števila in prav vsak od načinov da nov uvid v matematiko in nam in dijakom razširi matematična obzorja.«

Zastavljal je prava vprašanja in ponudil tudi rešitve. V slovenski matematični krajini za njim ostaja velika vrzel.

Mojca Suban,
vodja Predmetne skupine za matematiko na ZRSŠ



Foto: Drago Jovič

Slika 2: Dr. Marjan Jerman in Mojca Suban na konferenci KUPM 2016

Od študentskih let dalje

Moj prvi spomin na Marjana sega v študentska leta. Prijaznost, preprostost, neposrednost, empatičnost in pravičnost, široka razgledanost, spoštovanje ter pripravljenost priskočiti na pomoč v vsakem trenutku so samo nekatere od vrlin, zaradi katerih smo Marjana vsi poznali in ga preprosto imeli radi. Kljub temu da je Marjan svojo pot nadaljeval kot asistent na Fakulteti za matematiko in fiziko, so se naše poti vedno znova križale. Marjan je svoje res bogato znanje in izkušnje uspešno predajal tudi naslednjim generacijam dijakov in študentov ter učiteljem na različnih izobraževanjih. Skupaj sva sodelovala v uredniškem odboru revije Matematika v šoli. Čeprav je minilo precej let, je bil Marjan še vedno isti, sproščen, prijazen, predvsem pa enak do vseh. Kljub njegovi širini in akademskemu nazivu si se v pogovoru z njim vedno počutil enakovrednega. Tako se spomnim ene od recenzij za revijo Matematika v šoli. Ker je bil članek napisan zelo strokovno in teoretično, sem sklepala, da je avtor članka univerzitetni profesor (recenzija je slepa) in sem s strahom zapisala v recenzentski obrazec prošnjo po dopolnitvi članka s konkretnim primerom. Avtor je pripombo sprejel dobronamerno in me s svojim odgovorom nasmejal: »Sem se danes cel dan matral s popravki. Recenzentu sem hvaležen za dobre opombe.« To je bil Marjan.

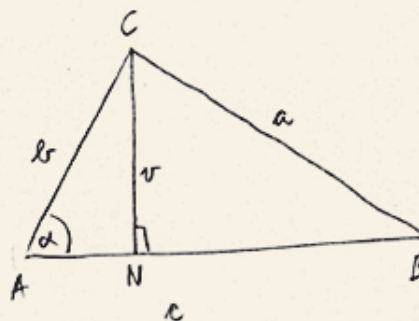
Simona Vreš,
profesorica matematike
na Gimnaziji Ravne na Koroškem

Od asistenta na fakulteti do recenzenta pri reviji Matematika v šoli

Dr. Marjan Jerman, študentom poznan kot asistent, pri katerem ti v predavalnici vse postane jasno in razumljivo. V študentskih letih nisem bila na seznamu Marjanovih študentov, vseeno pa sem večkrat zavila v predavalnico na njegove vaje iz algebre. V nalogah je vse pojme, postopke, izreke tako razumljivo povezal med seboj, da je bilo skoraj nemogoče s kakšnim vprašanjem na koncu oditi iz predavalnice. Za vse, kar smo ga vprašali, si je vzel čas in nam pojasnil.

Leta 2008 je v polni predavalnici srednješolskih učiteljev matematike predaval o pouku geometrije v gimnazijskem programu ob uvajanju posodobljenega učnega načrta za gimnazijo (Slika 4). Posebej je kazal interes za pouk geometrije.

Kosinusni izrek



$$a^2 = h^2 + NB^2$$

$$h = b \sin \alpha$$

$$NB = c - AN = c - b \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 \sin^2 \alpha + (c - b \cos \alpha)^2 = \\ &= \underline{b^2 \sin^2 \alpha} + c^2 - 2bc \cos \alpha + \underline{b^2 \cos^2 \alpha} = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

Slika 4: Izpeljava dokaza kosinusnega izreka

Najino strokovno sodelovanje se je zadnja tri leta križalo v uredniškem odboru revije Matematika v šoli. Marjan je recenzije vedno naredil natančno in hitro. Recenziral je prispevke, ki so bili z matematičnega vidika zahtevnejši. Poglobil se je v vsebino, izračune, da se ne bi kje skrila kakšna matematična napaka. Za njim bo ostala praznina, ki jo bodo poskušali zapolniti spomini na naša strokovna druženja.

Mateja Sirnik,
svetovalka za matematiko na ZRSŠ in
odgovorna urednica revije Matematika v šoli



Foto: Drago Jovič

Slika 3: Plenarno predavanje dr. Marjana Jermana na konferenci KUPM 2016 z naslovom Geometrija za danes in jutri.

Seminar v januarju 2020

**Učenje in poučevanje matematike na daljavo
(25. 1. 2020 in 28. 1. 2020)**

Prijava v
Katisu na povezavi



• Posnetki krajših usposabljanj za strokovne delavce (e-urice)

www.zrss.si/objava/posnetki-krajsh-usposabljanj-e-urice-za-strokovne-delavce

Posnetki krajših usposabljanj ponujajo uporabne primere za pripravo in izvedbo pouka na daljavo. Izbrane teme e-uric izhajajo iz konkretnih potreb strokovnih delavcev in so usmerjene v pristope pouka na daljavo. Ogled posnetka bo gledalcem prikazal neposredno izkušnjo izobraževanja na daljavo (učitelji kot učenci) ter priložnost, da se ob razlagi in demonstraciji predavateljev učijo.

• Izobraževalni posnetki

www.zrss.si/objava/podpora-uciteljem-za-izobrazevanje-na-daljavo

Krajši izobraževalni posnetki so v veliki meri načrtovani nadpredmetno, namenjeni so strokovnim delavcem v vzgoji in izobraževanju. Uporabijo jih lahko v različnih fazah izobraževalnega procesa, predvsem so namenjeni poglobljenemu razmisleku pri načrtovanju pouka. Vključujejo najnovejše smernice in izsledke raziskav z vzgojno-izobraževalnega področja.



• Izvedbeni modeli poučevanja matematike na daljavo

Gradiva za izobraževanje na daljavo:

- Valj na daljavo
- Kvadratna funkcija na daljavo
- Racionalne funkcije na daljavo
- Statistika na daljavo
- Enačbe in neenačbe v 9. razredu osnovne šole
- Eksponentne enačbe in neenačbe
- Logaritemske enačbe in neenačbe
- Trigonometrijske enačbe in neenačbe

Na povezavi



v zavihku **Matematika**

Več gradiv je objavljenih v spletni skupnosti [Matematika](#).

CONTENTS

Mateja Sirnik
What is zero?

FROM THE THEORY FOR PRACTICE

Samo Repolusk Developing Mathematical Knowledge through Problem Solving	2
On the Handbook <i>Ugotavljanje matematičnega znanja</i> (Determining Mathematical Knowledge)	9
Mojca Suban Investigative Tasks in Mathematics	10
Marko Razpet Power Functions and Metallic Ratios	16

FROM THE CLASSROOM

Loreta Hebar Investigative Task on Multiplying Decimals in 6th Grade	21
Urška Rihteršič Investigative Task Supporting the Development of Process Knowledge in the 2nd Year of the General Secondary School Programme	26
Simona Pustavrh Problem-Solving Task in the Phase of Deepening and Integrating Mathematical Knowledge	28
Ana Cencelj From Planning to Teaching Probability in the 9th Grade	35

MATHEMATICS THROUGH HISTORY

Stanislav Južnič Josef Stefan Lectures Mathematics	47
--	----

NEWS

Simona Klasinc European Statistics Competition: A Secondary School Student Competition	54
Borut Jurčič Zlobec Research Papers in Mathematics at Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2020 (Meeting of Early-Stage Researchers of Slovenia 2020)	56
In Memory of Marjan Jerman, PhD	60



Formativno spremljanje v podporo učenju

Priročnik za učitelje in druge strokovne sodelavce

Priročnik obsega 7 zvezkov, zbranih v mapi,
cena 12,40 €

- Zakaj formativno spremljati
- Nameni učenja in kriteriji uspešnosti
- Dokazi
- Povratna informacija
- Vprašanja v podporo učenju
- Samovrednotenje, vrstniško vrednotenje
- Formativno spremljanje v vrtcu



Priročniki po predmetih in področjih

Formativno spremljanje kot podpora učencem s POSEBNIMI POTREBAMI

Formativno spremljanje na RAZREDNI STOPNJI

Formativno spremljanje pri MATEMATIKI

Formativno spremljanje pri ZGODOVINI

Formativno spremljanje pri delu SVETOVALNIH DELAVCEV



Naročanje:

- po pošti (Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana)
- po faksu (01/3005-199)
- po elektronski pošti (zalozba@zrss.si)
- na spletni strani (<http://www.zrss.si>)



revije ZRSŠ



facebook ZRSŠ



twitter ZRSŠ

