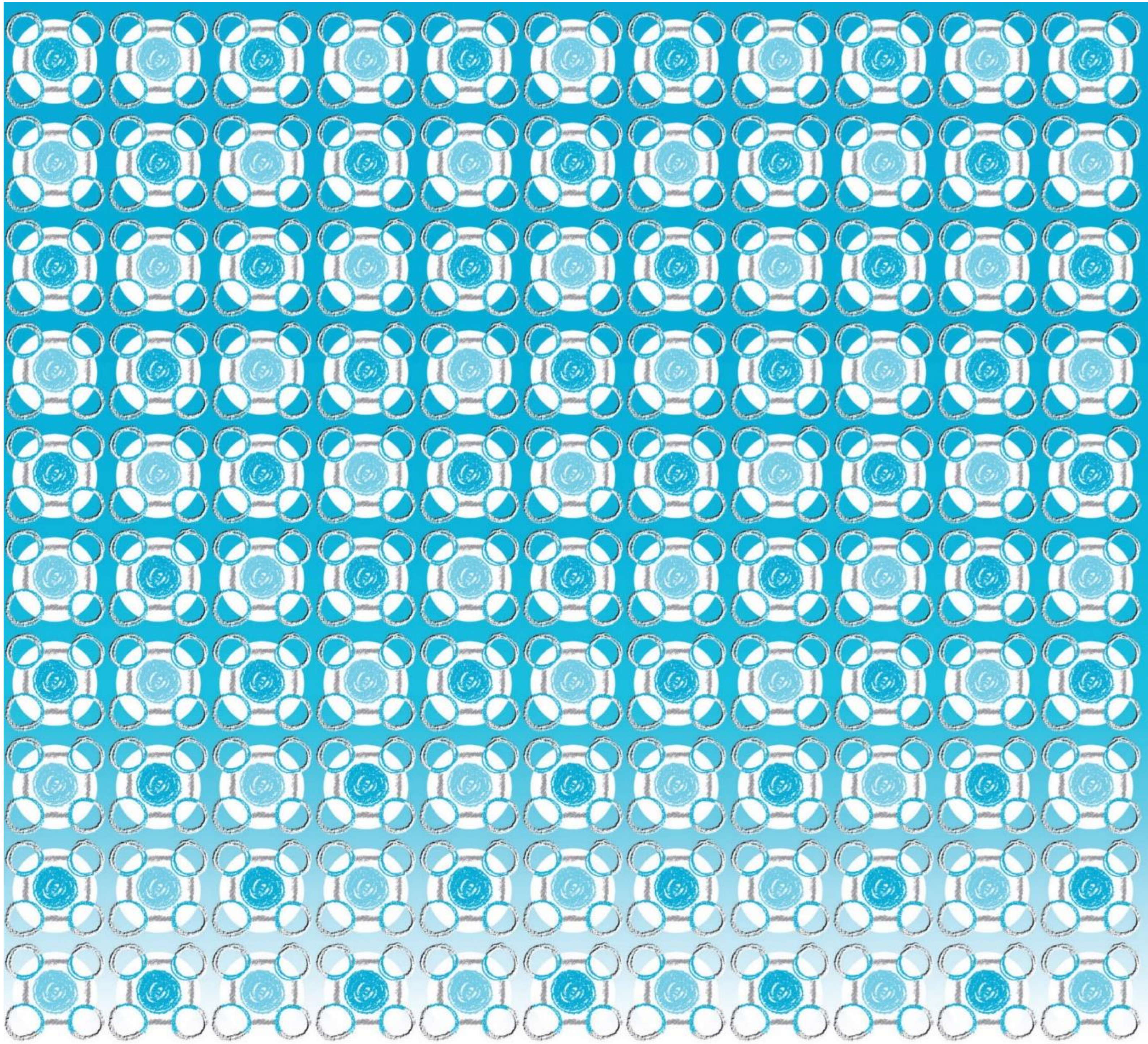


3. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike

KUPM 2016

ZBORNIK IZBRANIH PRISPEVKOV

60 let Zavod Republike Slovenije za šolstvo

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT

EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

3. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM 2016
Zbornik izbranih prispevkov
Brdo pri Kranju, 16. in 17. november 2016

Organizator
Zavod RS za šolstvo

Naložbo sofinancirata Evropski socialni sklad ter Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport, projekt Krepitev kompetenc strokovnih delavcev na področju vodenja inovativnega vzgojno-izobraževalnega zavoda v obdobju od 2016 do 2018

Strokovni pregled: Prispevki so bili strokovno pregledani
Jezikovni pregled prispevkov v slovenščini: Tine Logar
Jezikovni pregled prispevkov v angleščini: Ensitra prevajanje, Brigita Vogrinec s. p.

Izdal in založil: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik dr. Vinko Logaj

Objava na spletnem naslovu: http://www.zrss.si/pdf/zbornik-prispevkov-kupm2016.pdf

Prva izdaja
Ljubljana 2017

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani
COBISS.SI-ID=290305024
ISBN 978-961-03-0369-5 (pdf)

Vsebina

PLENARNI PRISPEVKI

GEOMETRIJA ZA DANES IN JUTRI
Geometry for Today and Tomorrow

Dr. Marjan Jerman
marjan.jerman@fmf.uni-lj.si
Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

Povzetek
V zgodovini matematike najdemo različne poglede na geometrijo: od praktičnega in strogo uporabnega pristopa v Egiptu do začetkov čiste teoretične matematike v stari Grčiji. Geometrija je ena od redkih matematičnih disciplin, ki omogoča naraven prehod od intuitivne ideje do logično pravilnega dokaza. Zato se zdi protislovno, da je geometrijo tako zelo težko učiti in da so rezultati pogosto slabi. V prispevku so prikazane nekatere pomembne faze v zgodovini poučevanja geometrije in ponujeni nekateri pristopi, ki bi lahko vodili do uspešnejšega poučevanja.

Abstract
Since ancient times, we can find very different approaches to geometry: from a very practical and solely applicative use of geometry in Egypt, to the beginnings of pure theoretical mathematics in Ancient Greece. Geometry is one of the few mathematical disciplines which enable a smooth transition of intuitive ideas into a strict logical proof. Therefore, it seems contradictory that it is very difficult to teach geometry and that the results are often disappointing. The article presents some important phases in the history of teaching geometry and suggests some approaches which could make the teaching of geometry more successful.

Ključne besede
geometrija, zgodovina matematike, poučevanje matematike

Keywords
geometry, history of mathematics, teaching mathematics

Zgodovinski uvod
Beseda geometrija izvira iz stare grščine in dobesedno pomeni merjenje Zemlje.

Za uvod si poglejmo dva ilustrativna primera iz zgodovine matematike.

Rhindov papirus je približno 6 metrov dolg in tretjino metra širok zvitek, izdelan približno 1650 pred našim štetjem. Škotski egiptolog Henry Rhind ga je kupil leta 1858 v Luksorju. Pisar Ahmes piše, da je papirus prepis besedila izpred 200 let.

Naloga številka 50 na papirusu sprašuje, kolikšna je ploščina okroglega polja s premerom 9. Pisar zapiše naslednje navodilo: od premera odštej devetino, torej 1. Nato razliko kvadriraj. Ploščina polja je 64.

Egipčani še niso uporabljali spremenljivk in so od bralca pričakovali, da pri drugačnih merah inteligentno zamenja ustrezna števila. Tako bi njihovo formulo za ploščino kroga v moderni notaciji zapisali takole:

$$P = \left(2r - \frac{2r}{9}\right)^2.$$

Danes vemo, da formula ni popolnoma pravilna, je pa

$$\left(2r - \frac{2r}{9}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2 \quad \text{in} \quad \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}16 \approx \pi,$$

zato formula v praksi dobro deluje za vse polmere.

Evklid[1] je približno 300 let pred našim štetjem v trinajstih knjigah Elementov zbral dotedanje znanje matematike in ga postavil na aksiomatske temelje. V dvanajsti knjigi najdemo Evdoksov[2] dokaz s protislovjem, ki pokaže, da je ploščina kroga sorazmerna s kvadratom njegovega premera.

Naj bo P_1 ploščina kroga s premerom 1 in P_d ploščina kroga s premerom d. (V današnjem bolj običajnem jeziku je $P_1 = \frac{\pi}{4}$.) Pa naj bo recimo

$$P_1 d^2 < P_d.$$

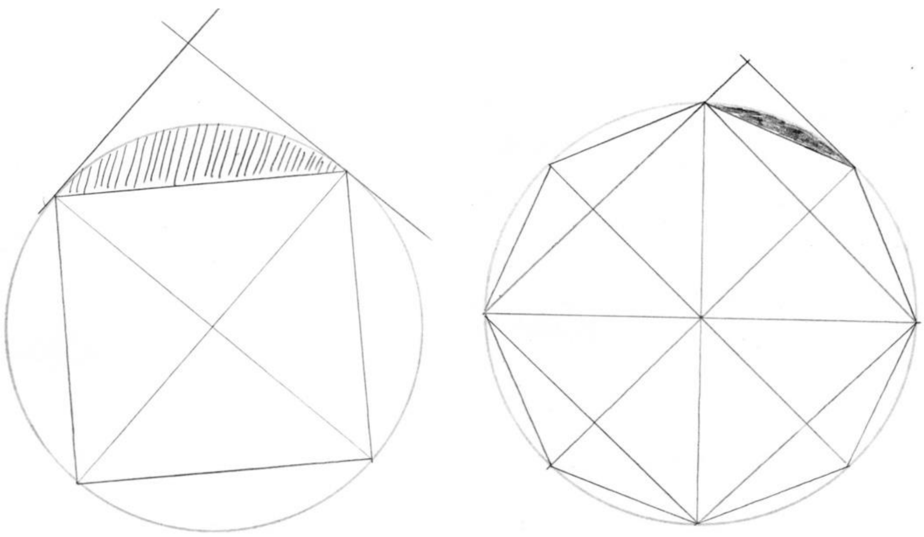
V enotski in v krog s polmerom d včrtajmo pravilna 2^n-kotnika. Ker je po predpostavki razlika $P_d - P_1 d^2 > 0$ strogo pozitivno število, lahko po Arhimedovem aksiomu[3] izberemo tako veliko število n, da bo

$$\frac{1}{2^{n-1}} P_d < P_d - P_1 d^2.$$

Zato je tudi

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) P_d > P_1 d^2.$$

[1] Evklid iz Aleksandrije (približno 300 let pred našim štetjem), grški matematik.
[2] Evdoks iz Knide (410–347 pred našim štetjem), grški matematik in astronom.
[3] Arhimed iz Sirakuze (287–212 pred našim štetjem), grški matematik, fizik in astronom. To obliko kasneje poimenovanega Arhimedovega aksioma so poznali že prej.



Slika 1: Včrtani kvadrat pokrije več kot polovico kroga: $P - S_{2^2} < S_{2^2}$, zato je $S_{2^2} > \frac{1}{2^1}P$. Včrtani osemkotnik pokrije več kot tri četrtine kroga: $P - S_{2^3} < \frac{1}{2}(P - S_{2^2}) < \frac{1}{2}P - \frac{1}{2^2}P = \frac{1}{2^2}P$.

Antifon je pred njim dokazal, da včrtani pravilni 2^n-kotnik zavzame več kot $\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$-kratnik ploščine kroga. Zato je zaradi tranzitivnosti neenakosti ploščina S_d 2^n-kotnika, ki je včrtan v krog s polmerom d, večja tudi od $P_1 d^2$:

$$S_d > \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) P_d > P_1 d^2.$$

Za pravilne like je Antifon vedel, da ploščina narašča s kvadratom stranice, zato je ploščina pravilnega 2^n-kotnika, ki je včrtan v krog s premerom d, d^2-krat večja od ploščine S_1 pravilnega 2^n-kotnika, ki je včrtan v enotski krog. Od tod sledi protislovje:

$$P_1 d^2 > S_1 d^2 = S_d > P_1 d^2,$$

Na enak način do protislovja pridemo s predpostavko, da je

$$P_1 d^2 > P_d.$$

Zato je res ploščina kroga sorazmerna s kvadratom premera,

$$P_1 d^2 = P_d.$$

Primera nam zelo lepo kažeta popolnoma različno obravnavo iste stvari. Egipčani so bili zadovoljni s sorazmerno enostavnim računom, ki je sicer dal približen rezultat, a se je v praksi vedno zelo dobro ujemal s pravim, Grki pa so želeli popoln dokaz.

Kako bi dijakom izpeljali ploščino kroga?

Kakšna je vrednost egipčanskega rezultata? Ali enostavnost in numerična pravilnost odtehtata grško stremljenje k popolnosti?

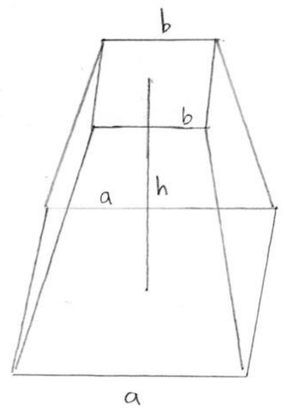
Koliko dijakov bo razumelo Evdoksovo izpeljavo?

Ali je prava rešitev, da od dijakov zahtevamo le Evdoksov rezultat v današnji bolj običajni obliki

$$P_{2r} = \pi r^2$$

in upamo, da bodo vsaj nekateri razumeli dokaz?

Ali bodo preostali dijaki med izpeljevanjem zatavali drugam in od ure odnesli manj, kot če bi naredili nekaj praktičnih primerov uporabe?



Slika 2: Štirinajsta naloga v Moskovskem papirusu pove, kako izračunati prostornino prisekane štiristrane piramide.

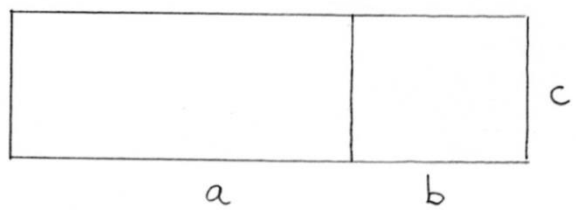
Poučna je tudi 14. naloga iz tako imenovanega Moskovskega papirusa, ki izvira iz približno enakega obdobja. Naloga s pomočjo konkretnih mer $a = 4, b = 2, h = 6$, pove, da je volumen štiristrane prisekane piramide enak

$$V = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3},$$

pri čemer je a stranica spodnjega kvadrata, b stranica zgornjega kvadrata, h pa višina prisekane piramide. Ali so v tem primeru Egipčani prišli do popolnoma pravilnega rezultata s poskušanjem?

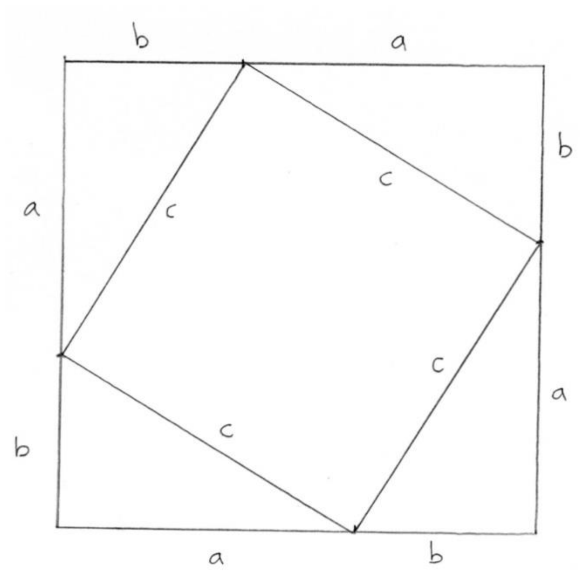
Zgodovina poučevanja geometrije

Geometrija je ena od najlepših in najbolj intuitivnih vej matematike. Grki in Arabci so si celo računske zakone in enačbe, ki danes brez dvoma spadajo pod algebro, predstavljali kot ploščine zlepljenih likov.



Slika 3: Distributivnostni zakon kot vsota ploščin: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$

Skoraj pri nobeni drugi veji matematike ne moremo samo s pomočjo opazovanja dobro narisane slike priti tako neposredno do idej, ki nam pomagajo pri dokazovanju geometrijskih trditev.



Slika 4: Nazorni dokaz Pitagorovega izreka: $(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2}$**, zato je** $a^2 + b^2 = c^2$**.**

Zakaj je torej tako težko poučevati geometrijo in zakaj so rezultati poučevanja tako presenetljivo slabi?

Nekje do osemdesetih let 20. stoletja je geometrija spadala pod klasično izobrazbo. Ponekod po svetu so na najbolj strogih klasičnih gimnazijah namesto učbenika za geometrijo uporabljali kar grški izvirnik Evklidovih Elementov ali pa latinski prevod. Prvi vtis je sicer navdušujoč: s pomočjo geometrije se dijaki na najbolj naraven način mimogrede naučijo tudi logike in standardov strogega matematičnega dokazovanja, po natančnem študiju ravnine sledi trirazsežni prostor in tudi trigonometrija se predela kot sestavni in neločljivi del geometrije.

Žal je takšen način študija za sabo pustil precejšnje opustošenje in večina dijakov ni od pouka odnesla skoraj nič. Glavni razlog za neuspeh kaže na primer bojevita razprava, ko so v 19. stoletju v Angliji šolniki odločali, ali morajo dijaki za pozitivno oceno znati navesti dokaz natanko tako, kot ga je zapisal Evklid.

Kasneje so znanstveniki (npr. Piaget,[4] van Hiele[5]) teoretično in eksperimentalno dokazali, da otroški um in učenje nasploh v veliki večini primerov sledita določenim fazam, ki se začnejo pri enostavnem prepoznavanju oblik in končajo pri konstrukciji lastnega dokaza. Še več, ugotovili so, da velik del populacije tudi po dolgoletnem učenju geometrije ne doseže višjih faz; ne začuti potrebe bo dokazovanju in niti ne loči med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije skoraj nerešljivo zaplete tudi časovna stiska. Od učencev se pričakuje razumevanje in uporaba zapletenih konceptov skoraj takoj po tem, ko smo

[4] Jean Piaget (1896–1980), švicarski klinični psiholog.
[5] Dina van Hiele-Geldof (1911–1958) in Pierre van Hiele (1909–2010), nizozemski par, ki je preučeval matematično izobraževanje, še posebej geometrijo.

jih predstavili. Dodatno težavo predstavljajo nekatere geometrijske trditve, ki so na videz tako očitne, da se zdi, da ne potrebujejo dokaza. Že sam proces poučevanja je zelo zahteven, ker si učitelj zaradi svojega predhodnega znanja med razlago geometrijske situacije predstavlja drugače kot učenci.

Konec petdesetih let se je kot rezultat velikih potreb po naravoslovnih in inženirskih kadrih in kot odgovor na rusko prevlado v vesolju iz Amerike na hitro razširila nova matematika. Zelo popularna je postala tudi v Evropi, predvsem v Franciji, pa tudi k nam je prišla prek Križaničevih učbenikov. Na prvi pogled je na veliko elegantnejši in hitrejši način nadomestila evklidsko geometrijo, ki je hkrati s takratnimi matematičnimi odkritji postala le ena od možnih geometrij. V praksi pa je iz programov skoraj izginila prostorska geometrija, trigonometrija je postala del sklopa elementarnih funkcij, vektorji so bili prikazani kot algebrska struktura, premice in ravnine so bile predstavljene s pomočjo analitične geometrije, več deset generacij dijakov pa nikoli ni razvilo geometrijske intuicije. Že po desetletju uveljavitve so uporabniki matematike, predvsem profesorji fizike in inženirskih predmetov, ugotovili, da velika večina študentov ogromne količine sicer strogo in natančno predelane matematike ne zna uporabiti niti pri najbolj enostavnih praktičnih nalogah. Stvar je šla tako daleč, da je leta 1962 skupina 75 znanih in uspešnih matematikov z vsega sveta napisala ali sopodpisala memorandum v sedmih točkah in pozvala k bistvenim spremembam. Morris Kline je o tem celo napisal knjigo *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*. V njej poudari, da je večina najpomembnejših matematičnih dosežkov prihaja iz intuicije in ne iz logike. Zaradi aksiomatskega pristopa pri poučevanju veliko učencev obupa, ker misli, da so matematiko ustvarili neki geniji naravnost iz aksiomov.

Ena od idej, kako poučevati geometrijo
Že zgodovina kaže različne poglede na geometrijo: od stroge uporabne vrednosti s solidnimi približki do estetskih izpopolnjenih modelov s strogimi matematičnimi standardi.

Da je poučevanje in učenje geometrije zelo težko, kaže tudi Evklidov odgovor kralju Ptolemeju, ki si je zaželel lažje in hitrejše poti v geometrijo: Ni kraljevske poti do geometrije.

Kako torej krmariti med intuicijo, uporabno vrednostjo in matematično strogostjo?

Ali je smiselno različno sposobne dijake po različnih poteh peljati v geometrijo?

Ali bistven napredek pri poučevanju predstavljajo računalniški programi za dinamično geometrijo, ki lahko ob pravilni uporabi izjemno izboljšajo predstavo in porodijo ideje za dokaze?

Sam zagovarjam pot, ki mi jo je pokazala kolegica Olga Arnuš, ki ima izjemen pogled v geometrijo in na njeno poučevanje. Začetni aksiomatski del je treba podati zelo liberalno. Šibkejši dijaki ga lahko razumejo kot prijeten in zanimiv del starogrške zgodovine, boljši pa v njem zagledajo matematični model. Po prvem sklopu incidenčnih aksiomov se recimo lahko glede na vzdušje v razredu odločimo, ali je smiselno kot primere dijakom pokazati nekatere neobičajne modele geometrij na končno točkah in nekatere klasične modele, na primer sfero z antipodnimi točkami ter Poincarejev model z zgornjo polravnino. Bolj strog pristop sledi po aksiomih skladnosti, ko pridejo na vrsto pomembne lastnosti likov.

Zelo koristno lahko uporabimo tudi računalniške pripomočke in delo v skupinah. Če imamo dovolj časa in dovolj zainteresiranih učencev, lahko zelo veliko matematičnih trditev ob naši vodeni pomoči učenci odkrijejo sami. Vsaj nekatere učence bodo eksperimentalni rezultati vodili do tega, da bodo vsaj začutili potrebo po dokazu, nekateri pa bodo morda celo dobili uvid v bistvene dele dokaza.

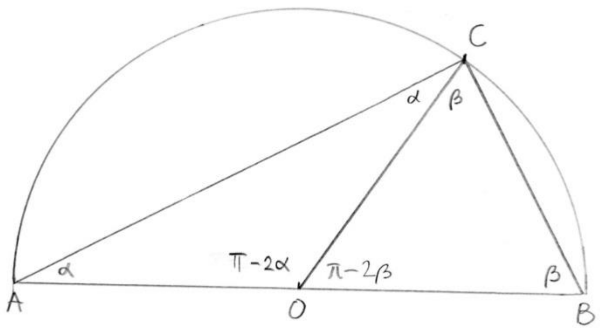
Kasneje se mi zdi koristno, če je le čas in volja dijakov in če so že razvita matematična orodja, prikazati različne pristope. Veliko klasičnih izrekov lahko dokažemo na več bistveno različnih načinov. Uporabimo lahko klasično evklidsko geometrijo, koordinatni sistem, vektorje, trigonometrijo, kompleksna števila ali primerne transformacije. Prav vsak od načinov da nov uvid v matematiko ter nam in dijakom razširi matematična obzorja.

Zelo lep primer je Talesov izrek o pravem kotu nad premerom, prav tako njegov obrat. Najprej lahko učenci s pomočjo ravnila in šestila, še boljše pa z uporabo tehnologije, rišejo različne trikotnike z osnovnico na premeru polkroga in vrhom na obodu. V vsakem od narisanih primerov naj izmerijo kot ob vrhu. Že po nekaj narisanih primerih bodo ugotovili, da se dogaja nekaj nenavadnega. Nekatere bo morda ugotovitev tako presenetila, da bodo postavili hipotezo. Drugi bodo nad izkušnjo tako navdušeni, da bodo narisali še več bistveno drugačnih leg in morda začutili potrebo po dokazu.

Vsak način dokazovanja je posebej zanimiv. Pokažimo le nekaj primerov. Seveda je način dokazovanja bistveno odvisen od snovi, ki jo učenci že obvladajo.

Talesov izrek: *Naj bo AB premer polkroga in C točka na obodu. Potem je kot $\sphericalangle ACB$ pravi.*

Dokaz s pomočjo elementarne geometrije



Slika 5: Dokaz Talesovega izreka s pomočjo elementarne geometrije

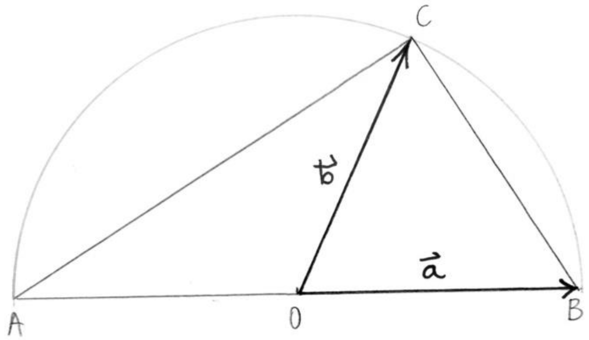
Naj bo O središče polkroga s polmerom r, AB njegov premer in C točka na obodu.

Trikotnika AOC in BCO sta enakokraka s kraki $AO = CO = BO = r$. Zato sta ustrezna kota pri osnovnicah enaka, $\sphericalangle OAC = \sphericalangle ACO = \alpha$ in $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = \beta$. Kot pri O je iztegnjeni kot, zato je

$$(\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta) = \pi.$$

Od tod sledi, da je $\sphericalangle ACB = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Dokaz s pomočjo vektorjev



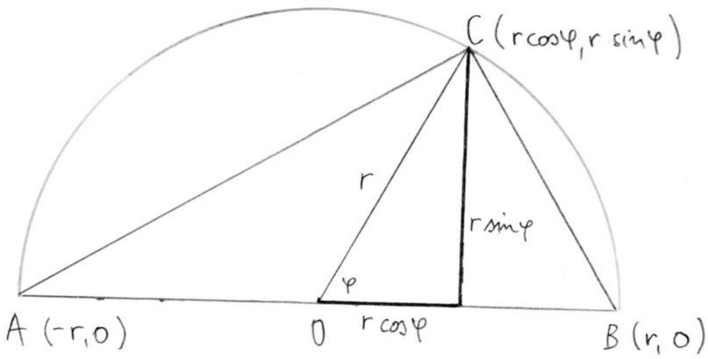
Slika 6: Dokaz Talesovega izreka s pomočjo vektorjev

Naj bo $\vec{a} = \overrightarrow{OB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$. Potem je

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{a} - \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = r^2 - r^2 = 0,$$

zato sta kraka CB in CA pravokotna.

Dokaz s pomočjo koordinatnega sistema



Slika 7: Dokaz Talesovega izreka s pomočjo koordinatnega sistema

Če postavimo koordinatno izhodišče v točko O in abscisno os na osnovnico AB, lahko točkam določimo koordinate: $A(-r, 0), B(r, 0), C(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Potem sta naklona premic, ki nosita kraka, enaka

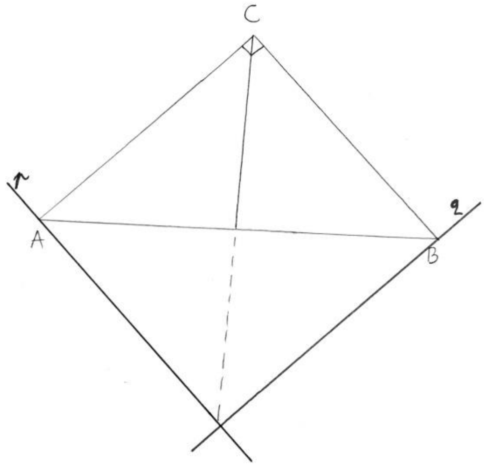
$$k_{AC} = \frac{r\sin\varphi - 0}{r\cos\varphi + r}, \quad k_{BC} = \frac{r\sin\varphi - 0}{r\cos\varphi - r},$$

zato je

$$k_{AC}k_{BC} = \frac{r^2\sin^2\varphi}{r^2(\cos^2\varphi - 1)} = -1.$$

Tako smo videli, da sta premici skozi AC in BC pravokotni.

Dokaz obrata s pomočjo transformacij



Slika 8: Dokaz obrata Pitagorovega izreka s pomočjo transformacij

Obrat Talesovega izreka: *Naj bo ABC pravokotni trikotnik s pravim kotom pri vrhu C in O središče osnovnice. Tedaj točke A, B in C ležijo na krožnici s središčem O in premerom AB.*

Čez točko A potegnimo vzporednico p stranici BC, skozi B pa vzporednico q stranici AC. Presek premici p in q označimo z D.

Potem je lik ADBC zaradi konstrukcije vzporednic pravokotnik s presekom diagonal O. Zato so razdalje od točke O do točk A, B, C enake in točke A, B, C ležijo na krogu s središčem O.

Viri

1. Ahlfors, L. V., ..., Wittenberg, A. (1962): On the Mathematics Curriculum of the High School, Amer. Math. Monthly. Letn. 69, str. 189–193.
2. Anglin, W. S. (1994): Mathematics: A Concise History and Philosophy. Springer, 1994, New York.
3. Kline, M. (1974): Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math. Random House, New York.
4. Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1999): The Child's Conception of Geometry. Routledge, London.

SUPPORTING STUDENT'S LEARNING OF MATHEMATICS

Lorna Harvey
Lorna.Harvey@educationscotland.gsi.gov.uk
Education Scotland

Abstract
This paper relates to a presentation delivered at the 3rd International Conference for Mathematics on 16th November 2016, in Slovenia.

This paper will discuss some effective ways of supporting student's learning of mathematics. It will outline the structure of the curriculum in Scotland-Curriculum for Excellence, highlighting the important role numeracy and mathematics has. Examples of effective practice from Scotland and beyond will be shared. Class groupings and differentiation in the teaching (and learning) of mathematics, drawing on research and with reference to the work of Jo Boaler in particular, will be discussed. The paper will include some recent actions taken by the Scottish Government and Education Scotland to raise attainment. A theme running through this paper will be the importance of positive attitudes to mathematics and to learning.
Throughout the paper reflective questions will be included, which can be used by individuals or staff teams working together to support learning and raise attainment in mathematics.

Keywords
Mindsets, active learning

Education in Scotland

Scotland falls under the jurisdiction of the UK Government, but since 1999 re-established a Scottish parliament. Some functions are totally devolved to the Scottish parliament – one of these is education. Scotland is split into 32 geographic areas. Each area has its own local council who employs education specialists specifically to support education in their area. Local councils have a statutory obligation to support, develop and improve education in their areas. Education Scotland was formed in 2011 and is an Executive Agency of the Scottish Government, tasked with improving the quality of the country's education system.

Curriculum for Excellence

Curriculum for Excellence (CfE) is the curriculum in Scotland which applies to all children and young people age 3-18, wherever they are learning. It aims to raise attainment for all, enabling young people to develop the skills, knowledge and understanding they need to succeed in learning, life and work. Curriculum for Excellence does not advocate one approach; rather it recognises the role of the teacher in exercising professional judgement when planning for learning and in using assessment evidence. We do not have formal examinations until the Senior Phase in secondary school. The Broad General Education provides guidance and advice for learners aged 3 to 15 The curriculum aims for all children to become:

- Successful Learners
- Confident Individuals
- Responsible Citizens
- Effective Contributors

These four capacities are at the core of our curriculum. They focus on learning as a progressive all round development. Knowledge is important but the place of skills – especially higher order thinking skills and skills for learning, skills for life and skills for work are very important. CfE is not a content based curriculum. It is not prescriptive, instead provides a structure within which educators can plan to support the needs of all learners. All learning must take account of these principles of curriculum design:

- Challenge and enjoyment
- Breadth
- Progression
- Depth
- Personalisation and choice
- Coherence
- Relevance

The seven principles highlight the importance of deep conceptual understanding complimented by the importance of the individual learner, taking into account learning styles and ensuring the needs of all learners are met.

These 8 curriculum areas are compulsory within the Broad General Education. Learners specialise in subjects which are assessed via National Qualifications in the Senior Phase (SP). Learning within the SP can take place in a range of establishments, including secondary schools and higher education colleges.

1. Expressive Arts
2. Health and Wellbeing
3. Languages
4. Mathematics
5. Religious and Moral Education
6. Sciences
7. Social Studies
8. Technologies

A unique feature of our curriculum is the responsibility of all aspect. All teachers (BGE) have responsibility to teach literacy, numeracy and aspects of health and wellbeing. We also have 5 themes across learning which are relevant to all curriculum areas:

- Creativity
- Enterprise
- Global Citizenship
- Learning for Sustainability
- Financial Education

All curriculum areas and subjects within them have curriculum guidance in the form of Experiences and Outcomes, ranging from early level to fourth level. In Scotland children start Primary 1 at the ages of 5. Prior to this are two years on pre-school education-all 3 and 4 year old are entitled to this.

- Early Level: pre-school to the end of Primary 1
- First Level: to the end of Primary 4
- Second Level: to the end of Primary 7
- Third and Fourth Levels: Secondary 1- Secondary 3

Further to this guidance are a series of documents called Building the Curriculum. They provide guidance and support on all aspects of learning, teaching and assessment within the Broad General Education.

Mathematics
Mathematics is important in everyday life, allowing us to make sense of the world around us and to manage our lives. Using mathematics enables us to model real life situations and make connections and informed predictions. It equips us with the skills we need to interpret and analyse information, simplify and solve problems, assess risk and make informed decisions.
Mathematics, Principles and Practice Paper, Education Scotland

Mathematics is arranged into a series of Organisers, as stated below (numeracy organisers are in bold font).

Number and Number Processes	Shape, Position and Movement	Information Handling
Estimation and rounding	Properties of 2D shapes and 3D objects	**Data and analysis**
Number and number processes	Angle, symmetry and transformation	**Ideas of chance and uncertainty**
Multiple, factors and primes		
Powers and roots		
Fractions, decimal fractions and percentages		
Money		
Time		
Measurement		
Mathematics-it's impact on the world, past, present and future		
Patterns and relationships		
Expressions and equations		

We are numerate if we have developed:

The confidence and competence in using number which will allow individuals to solve problems analyse information and make informed decisions based on calculations.
Numeracy across Learning, Principles and Practice Paper

Numeracy and mathematical skills are embedded in the curriculum. The following skills can be developed through the planning of activities, questions and assessments which encourage learners to think about the concepts, going beyond the recall of knowledge and encouraging the exemplification of understanding. As learners progress through curriculum for excellence levels, they should demonstrate increasing sophistication in their ability to demonstrate, link, transfer and apply the following skills in a range of increasingly more challenging contexts and with increasing independence.

- Interpret questions
- Select and communicate processes and solutions
- Justify choice of strategy used
- Link mathematical concepts
- Use mathematical vocabulary and notation
- Use mental agility
- Reason algebraically
- Determine the reasonableness of a solution

Reflective Questions

1. What does mathematics mean to you?
2. What does mathematics mean to your learners?
3. What skills are your learners developing? Do they know?

A Mathematically Rich Environment

A mathematically rich environment is stimulating and provides opportunities for mathematics to be explored, enjoyed and celebrated. Confident learners have many regular opportunities to talk about their learning and apply it in a range of contexts. Such an environment should promote challenge and enjoyment for learners. The importance of positive attitudes to mathematics and a growth mind-set approach is vital-especially for younger learners.

Reflective Questions

1. What does a mathematically rich environment look like?
2. How can learners contribute to this?
3. How is learning visible in your classroom and in your establishment?
4. How do you celebrate learning in mathematics?
5. How do your learners know they are learning?

A mathematically rich environment provides the characteristics for effective learning, which is accessible and inclusive. John Hattie has carried out a lot of work in the area, known as “visible learning.” In his latest book, Visible Learning into Action, 2016, he shares effective practice from a range of learning environments from across the world. Visible learning is defined as- *“teachers seeing learning through the eyes of their students, and students seeing themselves as their own teachers.” Hattie, 2016.* The professional development model developed by Hattie consists of a series of workshops that provide school leaders and teachers with the knowledge and tools to engage with research and consider what works best for their students.

One example cited in this book is Hodge Hill Primary School in England.
Evidence of learning was collected in a variety of ways. Two children from each class were asked what makes a good learner. Around 1/3 referenced behaviour such as good lining up, not talking etc. 1/5 of learners said good learning was not making mistakes. Focus Groups of pupils in each year were asked a range of questions about being a good learner. Children did not associate learning intentions and success criteria with being a good learner, children lacked a learning vocabulary, they saw learning as being teacher directed and led and too much focus was on product rather than process.

A Learning Walkthrough of the school was carried out and 70 pupils were spoken to about their learning. Pupils were able to describe what they were doing rather than what they were learning. The majority were unable to explain how they would know when they had learned a concept. Feedback was in relation to grades and marking policy. Over half could not explain their next steps.

Before the interventions children were saying things like;

- I'm scared to put up my hand in case I am wrong
- Sitting at the back is better, because no-one notices your mistakes
- People who are good at learning get everything right

After the interventions there was evidence of raised attainment

- End of key stage 1 Level 2B+ improved by 19% in mathematics
- End of key stage 2 Level 4+ had improved by 19% in mathematics

Learning from Mistakes

Jo Boaler writes a lot about the use of mistakes in mathematics. Here are some of her suggestions on how we can support learners to learn from their mistakes. It is important that a classroom has a positive learning environment where learners feel confident to talk about mistakes and come to learn how these can support learning.

- *Teachers highlight their favourite mistake-conceptual rather than numerical errors*
- *Publicly value mistakes in class*
- *Provide positive messages about mistakes during one-to-one interactions*
- *Opportunities for learners to explain their work (reasoning) is central to the discipline of mathematics*

Mathematical Mind-sets, Jo Boaler, 2016

These points all relate to a positive classroom culture (and a rich mathematical environment). It is important that these values and their benefits are shared with parents and families so that learning can be supported out with the school.

Carol Dweck's work on growth mind-sets is widely used in education. This sits well alongside the advancement in technologies that inform us that the brain can change. This is known as "brain plasticity". Dweck asks, *"How can we help teachers and children believe that maths ability can be developed, and then show teachers how to teach maths in a way that brings this belief to life?"* Dweck, in Boaler 2016. She then goes on to state that this is what Boaler's book, Mathematical Mind-sets, 2016, is all about.

Many Primary Schools in Scotland are developing a growth mind-set approach to learning. One school (Lasswade Primary School in Midlothian) is mentioned in the recent Making Maths Count Report. Making Maths Count is a Scottish Government project involving educationalists, mathematicians and representatives from industry. Their remit includes raising the profile of mathematics and providing support for teachers. The school highlighted has developed eight learning superheroes based upon dispositions and skills which have been demonstrated by research to play a role in the development of a growth mind-set. So, for example, Tough Tina represents resilience and never giving up, while Curious Kevin instils in pupils the importance of asking questions and being inquisitive. These Learning Superheroes have particularly helped pupils develop mathematical resilience and encourage children to use mistakes as opportunities for learning. Learning Lola promotes an enthusiasm for learning in maths and encourages children to use a variety of strategies when faced with a challenge. One P3 pupil commented; “I love maths now because the Superheroes help me!”

Differentiated Learning

In numeracy and mathematics research suggests that the most effective teachers use a range of differentiated strategies with all children, including:

- Flexible grouping
- Ongoing assessment
- A variety of daily numeracy activities that vary in complexity and open-endedness

This is consistent with the 7 principles of curriculum design mentioned previously, which promote flexible approaches to take account of children’s varied learning needs.

Konstnantinou-Katzi et al 2013 recognise that research has also shown that differentiated learning has a positive impact on children’s learning and attitudes towards mathematics, cited in *Knowledge into Action, Briefing 1. (2015): Differentiated Learning in Mathematics, Education Scotland.*

“To meet the diverse needs of all children, teachers can also use interest or learning centres (i.e. where similar materials are grouped together to encourage specific activities and experiences) or using anchor activities (i.e. tasks related to the current topic, which children work on independently.)”Cox, 2008

Education Scotland published a short, practitioner-focused research briefing which summarises research on differentiated learning and considers how it could be used to improve learner outcomes in numeracy and mathematics. It has a particular focus on meeting the needs of children from disadvantaged backgrounds. The article can be accessed on the National Improvement Hub https://education.gov.scot/improvement/Pages/sac36briefing1.aspx

Education Scotland

Recently Education Scotland has been involved in a number of interactions, programmes and projects aimed at raising attainment in numeracy and mathematics. Below is information and links to some of this work.

Making Maths Count- A group set up to encourage greater enthusiasm for mathematics amongst children and young people, their parents and carers and the wider public. Membership includes representatives from Education, Industry and the National Parent Forum for Scotland and the group is chaired by the Director of Education for Glasgow City Council (the area with the largest number of schools in Scotland.) The final report of the group was published in September 2016 and can be accessed at http://www.gov.scot/Publications/2016/09/3014/downloads#res-1

Read, Write, Count is a campaign by the Scottish Government, supported by Scottish Book Trust and Education Scotland. It focuses on the importance of families, parents and carers in children’s education and aims to give advice and materials to help families get involved in their children’s learning. Research tells us that if parents are involved in their child’s learning, their child does better in school. Read, Write, Count aims to contribute to two high-priority aims for education: raising attainment for all and closing the attainment gap. Further information can be accessed from the Read Write Count website- http://www.readwritecount.scot/

National Numeracy and Mathematics Progression Framework- This interactive online resources provides support for teachers working within the Broad General Education. It includes a progression pathway for each of the organisers within the curriculum for mathematics (this includes numeracy.) Each pathway has milestones with building blocks within them which state progression in learning. This resource can be used to inform planning for effective learning and teaching, including identifying next steps for learners. It can also be used as a professional learning resource to develop teacher knowledge and understanding. It can be accessed on the National Improvement Hub- https://education.gov.scot/improvement/Documents/Numeracy/NUM1_NNPF/NNMPF_2016.pdf

National Numeracy and Mathematics Hub- A virtual learning environment for all practitioners in Scotland, which is only accessible via Glow, the Scottish School's intranet. It provides a range of professional learning opportunities in different aspects of numeracy and mathematics throughout Curriculum for Excellence. It also supports professional discussion and the sharing or ideas and effective practice across Scotland.

Parentzone- one of Education Scotland's websites which provides guidance and support for parents. There are specific pages for numeracy and mathematics which include a glossary of mathematical terms and ideas for everyday mathematical activities.
http://www.educationscotland.gov.uk/parentzone/learninginscotland/curriculumareas/mathematics/glossary.asp

References

1. Curriculum for Excellence, Various Guidance Documents. Education Scotland's National Improvement Hub https://education.gov.scot/improvement.
2. Knowledge into Action, Briefing 1. (2015): Differentiated Learning in Mathematics https://education.gov.scot/improvement/Pages/sac36briefing1.aspx.
3. Boaler, J. (2016): Mathematical Mindsets. Jossey-Bass, USA.
4. Boaler, J. (2009, reprinted 2016): The Elephant in the Classroom. Souvenir Press. UK.
5. Cox, S.G. (2008): Differentiated instruction in the elementary classroom-cited in Education Digest: Essential Readings Condensed for Quick Review.
6. Hattie, Masters and Birch. (2016): Visible Learning into Action. Routledge. London and New York.
7. Konstantinou-Katzi, P., Tsolaki, E., Meletiou-Mavrotheris, M., and Koutselini, M. (2012): Differentiation of teaching and learning mathematics: An action research study in tertiary education-cited in International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.
8. Making Maths Count, Final Report, 2016 http://www.gov.scot/Publications/2016/09/3014/downloads#res-1.

OD NEFORMALNEGA DO FORMALNEGA UČENJA MATEMATIKE

From Non-formal to Formal Learning of Mathematics

Izr. prof. dr. Amalija Žakelj
amalija.zakelj@pef.upr.si
Pedagoška fakulteta Koper, Univerza na Primorskem

Povzetek

V prispevku na osnovi izsledkov različnih raziskav – skozi teorijo in s primeri – predstavljamo nekatere značilnosti neformalnega in predformalnega učenja matematike. Za izhodišče smo privzeli »realistično matematiko«, ki jo je že v sedemdesetih letih 20. stoletja razvil Freudenthalov inštitut.
Procese učenja in procese matematizacije predstavljamo znotraj realističnega in matematičnega konteksta, z uporabo modelov. V ospredje tako postavljamo kontekst, ki prevzema vlogo učnega okolja. Formalna matematika je končni cilj.

Abstract

In the present article we will–based on the findings of various studies, through theory and practice–present some characteristics of non-formal, pre-formal, and formal learning of mathematics. We will rest our views on the theoretical premises of the approach to teaching and learning mathematics known as “Realistic Mathematics Education” developed by the Freudenthal Institute as early as in the seventies of previous century, adding and extending certain elements.
The process of learning takes place within a realistic and mathematical context, using models through which the processes of mathematisation take place. The context assumes the role of learning environment and it is a source of learning mathematics. Formal mathematics, conceptual understanding, formal algorithms, etc., are just the “final station”.

Ključne besede

matematika, kontekst, neformalno, predformalno in formalno učenje

Keywords

Mathematics, context, informal, preformal and formal learning

Uvod

Tako kot je nemogoče, da bi funkcionalno uporabljali jezik že, če bi se naučili le veliko besed ter poznali slovnična pravila (Dekker, 2007), je prav tako malo verjetno, da bi razumeli in funkcionalno uporabljali matematiko, če bi učenje matematike skrčili samo na učenje definicij, pravil in algoritmov, le na formalno/abstraktno raven, brez izkušenj z neformalnim in predformalnim učenjem.
V šolski praksi procesi učenja matematike potekajo tako znotraj matematičnega kot realističnega konteksta, pri čemer običajno na višji stopnji šolanja kot ozadje učenja matematike vedno bolj prevladuje formalni matematični kontekst. Deloma verjetno zaradi matematike same, ki je v veliki meri abstraktna, deloma pa verjetno tudi iz razlogov prepričanja, da je prava matematika formalna matematika. Tako matematični kot realistični kontekst imata za učenje matematike poseben in svojstven pomen, se komplementarno dopolnjujeta in prispevata k celostnemu učenju in razumevanju matematike. V nadaljevanju se bomo osredotočili na vlogo realističnega konteksta kot učnega okolja pri učenju in poučevanju matematike, znotraj katerega tečejo procesi

matematizacije na neformalni in predformalni ravni. Npr. izkušnje z opazovanjem, oblikovanjem, prepoznavanjem vzorcev v naravi oz. v realnem okolju prispevajo k razumevanju formalne definicje vzorca, formalna definicja vzorca v šolski praksi pa s pomočjo izkušenj iz okolja dobi pomen.

Neformalno učenje vključuje učne situacije, ki matematične pojme in zakonitosti vpletajo implicitno. Npr. učenci manipulirajo (opazujejo, iščejo primere v okolici idr.) s predmeti iz realnega okolja in jih povezujejo z matematičnimi pojmi. Npr. omara je lahko model kvadra.

Predformalno učenje vključuje učne situacije, ki matematične pojme in zakonitosti vpletajo ob konkretnih primerih. Npr. učenci manipulirajo (opazujejo, oblikujejo, opisujejo idr.) s predmeti iz realnega okolja in uporabljajo določene matematične zakonitosti in lastnsoti. Npr. omara je model kvadra, ker ima 6 ploskev, po dva in dva sta skladna in vzporedna pravokotnika.

Formalno učenje vključuje učne situacije, pri katerih razvijamo in uporabljamo matematične pojme in zakonitosti na formalnem/abstraktnem nivoju (formalno sklepanje, utemeljevanje, uporaba lastnosti matematičnih pojmov, definicij, trditev, izrekov idr.). Npr. kvader je oglato geometrijsko telo, ki ga omejuje šest mejnih ploskev. Po dve in dve mejni ploskvi sta skladna in vzporedna pravokotnika. Podpora k razvoju formalnega znanja so neformalne in predformalne pojmovne predstave.

Kontekst in vrste konteksta

Kaj je kontekst? Kontekst razumemo kot okolje, ki omogoča, da v nekem trenutku znaku, simbolu, besedi ali problemu pripišemo ustrezen pomen. *Van Oers, B. (1998,* v Bezgovšek Vodušek, H., 2015) razlikuje tri vrste razlag pomena konteksta, ki so povezane z različnimi širinami konteksta: kognitivni, situacijski in aktivni.

Kadar gre za *kognitivni vidik*, je upoštevana samo kognitivna struktura. Da določimo pomen trditvi ali da rešimo problem, je potrebno, da poznamo pomen besed oz. da obvladamo strategije reševanja. Primer: Cestno podjetje položi 5 *km* asfalta v 4 urah. Koliko časa potrebuje za 1000 *km* asfalta? Če upoštevamo le kognitivni vidik, je treba poznati količni dolžino in čas, razumeti premo sorazmerje in se odločiti za strategijo reševanja, rešitev 800 *h* pa interpretirati glede na matematični kontekst.

Situacijski vidik poleg kognitivne strukture vključuje situacijo. Različica konteksta določa pomen in smiselnost rešitve ter vpliva na interpretacijo rešitve. Pri določitvi pomena rešitve 800 *h* bi se npr. vživeli v situacijo: »Ali ima podjetje dovolj delavcev; bodo v naslednjih dneh na voljo vsi stroji; bo dovolj upravljalcev strojne opreme idr.?« V pomen vključujemo izkušnje, ki smo jih imeli s tovrstnimi situacijami v preteklosti.

Vidik aktivnosti temelji na teoriji aktivnosti. Rešitev 800 *h* izzove aktivnost. Ko je rešitev 800 *h* določena, se začne realizacija konkretnega dejanja. Realizacija rešitve je odvisna od socioekonomskih aktivnosti in nadalje od vloge posameznega dejanja v vrsti usklajenih dejanj v to aktivnost vključnih oseb. Rešitev sama ne določa detajlov, posebnosti in koherentnosti, ampak šele socioekonomska aktivnost v katero je vključena.

Kontekstualne kategorije (vrste kontekstov). Tudi raziskava PISA naloge postavlja v kontekst. PISA 2012 navaja štiri kategorije konteksta: kontekst je lahko *osebni* in vključuje probleme ali izzive, s katerimi se srečuje posameznik, njegova družina ali vrstniška skupina. Nadalje je problem lahko umeščen v *družbeni* kontekst (in osredinjen na posameznikovo skupnost – bodisi krajevno, nacionalno ali globalno), *poklicni* kontekst (osredinjen na svet dela in poklica) ali *znanstveni* kontekst (povezan s prilagajanjem matematike svetu narave, znanosti in tehnologije). Npr. naloga Televizijski sprejemnik (Primer 1), ki preverja razumevanje sorazmerij na osnovi podatkov, podanih v tabeli, je z vidika raziskave PISA umeščena v *družbeni kontekst.*

<u>Primer 1</u>*: Televizijski sprejemnik (PISA 2012).*

V spodnji tabeli so prikazani podatki o številu gospodinjstev, ki imajo v lasti televizijski sprejemnik (TV-sprejemnik), v petih državah. Prikazan je tudi odstotek tistih gospodinjstev, ki imajo v lasti TV-sprejemnik in so naročena na kabelsko televizijo. Klemen si v tabeli ogleda podatke za Francijo in Norveško. Klemen pravi: "Ker je odstotek vseh gospodinjstev, ki imajo TV-sprejemnik, v obeh državah skoraj enak, ima Norveška več gospodinjstev, naročenih na kabelsko televizijo." Pojasni, zakaj je ta trditev nepravilna. Utemelji svoj odgovor.

Država	*Število gospodinjstev, ki imajo TV-sprejemnik*	*Odstotek gospodinjstev, ki imajo TV-sprejemnik, v primerjavi z vsemi gospodinjstvi*	*Odstotek gospodinjstev, ki so nročena na kabelsko televizijo, v primerjavi z gospodinjstvi, ki imajo TV-sprejemnik*
Japonska	48,0 milijonov	99,8 %	51,4 %
Francija	24,5 milijona	97,0 %	15,4%
Belgija	4,4 milijona	99,0 %	91,7 %
Švica	2,8 milijona	85;8 %	98, %
Norveška	2,0 milijona	97,2 %	42,7 %

Naloga je primer, ko je matematična vsebina umeščena v realistični družbeni kontekst in procesi matematizacije tečejo tako znotraj realističnega kot matematičnega konteksta, kar spodbuja celostno učenje in poglabljanje razumevanja matematike.

Vloga konteksta pri učenju in poučevanju

V šolski praksi je pomembno, da so konteksti vzeti iz okolja, ki je učencem blizu, da jih lahko razumejo in da se v njih lahko vživijo. Z vidika učnja in poučevanja je kontekst pomemben tudi zaradi osmišljanja vsebin, povezovanja znanja in učenja uporabe znanja. Za namene učenja in poučevanja De Lange (1999, v Dekker, 2007) navaja različne namene konteksta: ničelni namen, vpliv ozadja konteksta na rešitev problema ter kontekst kot učno okolje in kot vir učenja matematike.

1. O *ničelnem namenu* konteksta govorimo, ko umetno naredimo zgodbo v želji, da bi problem predstavili kot realni problem. Npr.: *Kateri avtobusi imajo številko, ki je praštevilo?* Tovrstni problemi z vidika povezovanja matematike z življenjskimi sitacijami nimajo prav nobenega pomena. Zaradi slednjega je pametno, da se takih in podobnih nalog izogibamo.
2. *Podobno kot Van Oers, B. (1998,* v Bezgovšek Vodušek, H., 2015) je tudi De Lange (1999, v Dekker, 2007) opozarjal na *vpliv ozadja konteksta na rešitev*

problema. Interpretacija rešitve realističnega problema je odvisna od vrste konteksta, znotraj katerega je problem postavljen.

3. *Kontekst je lahko vir matematike*, idealno *učno* okolje za izkustevno učenje, za razvoj matematičnih pojmov. Smiselno/dobro izbrani kontekst ponuja vrsto dejavnosti, ki spodbujajo izgradnjo matematičnih pojmov, od neformalne do formalne ravni. Npr.: *Let ptic v naravi (Primer 5) je lahko vir učenja vzorcev*. Izkušnje z opazovanjem, oblikovanjem, prepoznavanjem vzorcev v naravi oz. v realnem okolju prispevajo k razumevanju formalne definicje vzorca, formalna definicja vzorca v šolskem kontekstu pa tako dobi pomen.

Pri vpeljavi konteksta v učenje in poučevanje matematike velja opozoriti, da kontekst sam po sebi ne pomeni nujno poenostavljanja ali samo lažje poti do rešitve, temveč predvsem pomembno vpliva, kot pravi Meyer (2001), na motivacijo in na osmišljanje matematike, je vir učenja strategij reševanja problema in sidro za razumevanje matematike.

Kontekstualizacija matematičnih situacij lahko zelo pozitivno vpliva na notranjo motivacijo učencev. Zelo naravna oblika kontekstualizacije je ubeseditev problema skozi zgodbo. Npr. denar, merski enoti za denar (€, cent) ter računanje z denarnimi vrednostmi, lahko vpeljemo skozi kontekst starosti primerne zgodbe. Učenci *skozi vrsto življenjskih situacij spoznavajo vrednosti dobrin in se* učijo računati z denarjem na neformalnem nivoju. Postavljeni so v vlogo potrošnika ter spoznavajo vlogo denarja v družbi, kroženje denarja, zakaj je denar potreben idr. Kasneje dejavnosti preidejo v predformalno učenje: branje in zapisovanje denarnih vrednosti z decimalnimi števili na primerih iz okolja in v končni fazi tovrstno učenje pripelje tudi do formalnega učenja računskih operacij z decimalnimi števili. Vzoredno, znotraj izbranega konteksta, učenci spoznavajo še druge prvine iz realnega življenja: dobrine in storitve, kroženje denarja, cene različnih dobrin in storitev idr. S*kozi vrsto dejavnosti npr. ocenijo skupno vrednost nakupa*, pojasnjujejo in primerjajo cene oz. vrednosti izdelkov, ki vodijo do velikostnih odnosov med števili (<, >, =).

Podobno kot *kontekstualizacija* matematičnih situacij skozi zgodbo tudi *kontekstualizacija simbolnega zapisa problema* v učencu bližji kontekstualizirani obliki pozitivno vpliva na notranjo motivacijo (Cordova in Lepper, 1996, v Lipovec, A., Štukl, M., 2010). Npr. naloga, ki je zapisana v učencu kontekstualizirani obliki, ubesedena skozi življenjsko situacijo (Naloga 2), je učencem bljižja in razumljivejša, kot če je zapisana samo v formalnem matematičnem jeziku (Naloga 1).

Naloga 1: Če nekemu številu prištevaš še polovico tega števila, dobiš 120. Katero število je to?

Naloga 2: Ana in Miha sta zbiratelja znamk. Ana ima trenutno polovico toliko znamk kot Miha. Oba skupaj imata 120 znamk. Koliko znamk ima Ana in koliko Miha?

V obeh primerih se pričakuje prevajanje problema v matematični simbolni jezik, ki je že sam po sebi abstrakten. Ob prevajanju problemske situacije v nalogi 1 v enačbo $\frac{x}{2}+x=120$ gre predvsem za formalno matematiko, tako pri formulaciji naloge kot pri reševanju. V primeru druge naloge je prav tako potrebno prevajanje problema v matematični simbolni jezik, v enačbo, vendar pa je sama formulacija naloge postavljena v življenjski kontekst, ki omogoča, da uvedba spremenljivke in zapis enačbe dobita konkreten pomen.

Lahko sklenemo, da oboji, tako matematični kot realistični konteksti imajo za učenje matematike pomen, se komplementarno dopolnjujejo in prispevajo k celostnemu učenju in razumevanju matematike. S tega vidika sta tako prva kot druga naloga v šolski praksi potrebni in pomembni in vsaka zase razvija potrebne spretnosti, obe skupaj pa poglobita razumevaje.

Po drugi strani pa je ubeseditev problema skozi realno življensko situacijo lahko za reševalce tudi zelo trd oreh. Kontekstualizirana oblika problema omogoča učencu predvsem, da se v problem laže uživi, kontekst mu osmisli matematiko, ponuja mnogo konkretnih situacij, vendar problem naredi tudi bolj kompleksen. Dejstvo, da realistični kontekst sam po sebi ne olajša reševanja, potrjujejo tudi rezultati nacionalnih preverjanj znanja. Tako člani *Predmetne komisije za fiziko* (Nacionalno preverjanje znanje, 2014) opozarjajo, da če učenci nimajo s kontekstom dovolj izkušenj že v fazi učenja in izgrajevanja znanja, se zgodi, da v primeru ko kontekst uporabljajo kot izkazovanje znanja, ko rešujejo besedilne probleme, ki so uporabljeni znotraj konteksta, imajo težave. Tako v sklepnih ugotovitvah o rezultatih nacionalnega preverjanja znanja iz fizike za šol. l. 2013/2014 *Predmetna komisija za fiziko* ugotavlja, da na uspešnost reševanja naloge pogosto bolj kot vsebinsko področje vpliva formulacija naloge oziroma kontekst, v katerem nekaj sprašujemo. Kratko neposredno vprašanje o čemer koli je navadno precej uspešneje reševano od preverjanja enakega cilja v kontekstu neke daljše naloge ali obsežnejšega konteksta naloge. Podobno se izkazuje, da so problematične naloge, v katerih do pravilnega odgovora učenci pridejo le ob natančnem branju besedila naloge in temeljitem premisleku o pojavu oziroma opisanem dogajanju (Nacionalno preverjanje znanje, 2014, v Žakelj, 2016).
Rezultati nakazujejo potrebo po soočanju učencev z realističnimi konteksti oz. s situacijami, pri katerih je problem postavljen v realstični kontekst. V teh primerih ne gre le za osmišljanje formalne matematike, temveč tudi za razvijanje sposobnosti branja, razumevanje prebranega, za luščenje problema.

De Lange (1987, v Dekker, 2007) je že leta 1987 pisal o pozitivnem vplivu umeščenosti začetka učenja matematičnih vsebin v realistični kontekst ter dokazoval, da je realistično okolje lahko tudi učinkovito didaktično učno okolje in vir učenja matematike. Iz učenčevih neformalnih matematičnih dejavnosti se oblikujejo baze neformalnih in predformalnih pojmovnih predstav. Nadalje je De Lange poudarjal, da učenci, ki so in ostanejo povezani s kontekstom, lahko (še naprej) razvijajo občutek in se senzibilizirajo za to, kar počnejo, kaj počnejo, in ni se jim treba zateči k zapomnitvi pravil in postopkov, ki jih ne razumejo (prav tam). V šolski praksi je precej uveljavljen pristop, pri katerem se realistični kontekst uporablja predvsem za motivacijo in uporabo znanja, manj pa kot učno okolje kot vir učenja matematike. Pristop, ki vključuje kontekst tudi kot učno okolje oziroma kot vir učenja matematike, bi lahko povzeli v naslednjih točkah:

1. Proces matematizacije poteka praviloma znotraj realnega/življenjskega konteksta, ki je učno okolje in hkrati vir učenja matematike. Npr. realna življenjska situacija (jata ptic) je lahko vir ali navdih učenja vzorcev, ki se pri matematiki pojavljajo že v prvih razredih osnovne šole.
2. Učenci skozi aktivnosti, postopoma pridobivajo baze neformalnih in predformalnih pojmovnih predstav, ki jih opolnomočijo za razvoj formalnega znanja – formalnih/abstraktnih pojmovnih predstav (Dekker, 2007). Npr. preden učenci lahko dosežejo formalno raven, potrebujejo manj formalne dejavnosti/strategije/reprezentacije, da bi kasneje lahko dosegli konceptualno

razumevanje. Včasih se tudi učenci, ki že dosežejo formalno raven razumevanja, v določenih okoliščinah povrnejo nazaj na manj formalne ravni. Seveda se tega lahko poslužujejo, če imajo izkušnje s predformalnimi in neformalnimi dejavnostmi.
3. Vezi med neformalnim in formalnim učenjem so modeli. To so konkretne, slikovne in druge nazorne predstavitve, ki predstavljajo matematične pojme, situacije in so opora pri reševanju problema. Najprej so modeli neformalni, konkretni predmeti iz realnega okolja, pozneje ti modeli postanejo bolj prefinjena matematična orodja. Neformalne strategije učenja za oporo pogosto vključujejo predmete ali situacije iz realnega sveta, predformalne strategije pa tudi modele, kot so številska os, tabele, geoemetrijski modeli, diagrami idr.

Pomen in uporaba modelov
Med prvimi, ki so zagovarjali uporabo ponazoril pri pouku matematike, so bili Piaget, Bruner, Montessori in Dienes (Mešinovič, 2016). Strinjali so se, da interakcija s konkretnimi objekti zagotavlja osnove abstraktnega mišljenja. Piaget je trdil, da morajo imeti učenci veliko izkušenj s konkretnimi materiali in skicami oz. slikami, da bi razumeli abstraktne matematične koncepte, saj so na tej stopnji nezmožni razumeti le verbalno in simbolično podane razlage (prav tam).

Primer 2: Soda in liha števila
Pokaži, da je vsota dveh sodih števil sodo število in vsota dveh lihih števil sodo število.

Na nivoju *neformalnega* učenja si lahko pomagamo z žetoni, s katerimi ponazorimo soda in liha števila. Soda števila ponazorimo tako, da žetone zložimo v dve vrsti tako, da ima vsak žeton v prvi vrsti svoj par v drugi vrsti. Liha števila prikažemo podobno: zadnji žeton v prvi vrsti nima para v drugi vrsti. *Da je vsota dveh sodih števil sodo število in vsota dveh dveh lihih števil prav tako sodo število, lahko na neformalnem nivoju ponazorimo z dvema vrstama žetonov tako, da spojimo dve in dve vrsti žetonov, v katerih je sodo število žetonov in po dve in dve vrsti žetonov, v katerih je liho število žetonov.*

Na predformalni ravni razmišljamo ob konkretnih primerih. Vsota dveh sodih števil je sodo število (npr. 2 + 4 = 6). Vsota dveh lihih števil je sodo število (npr.: 3 + 5 = 8). *Na formalni ravni* izpeljemo dokaz in trditev posplošimo, z uporabo spremenljivke.

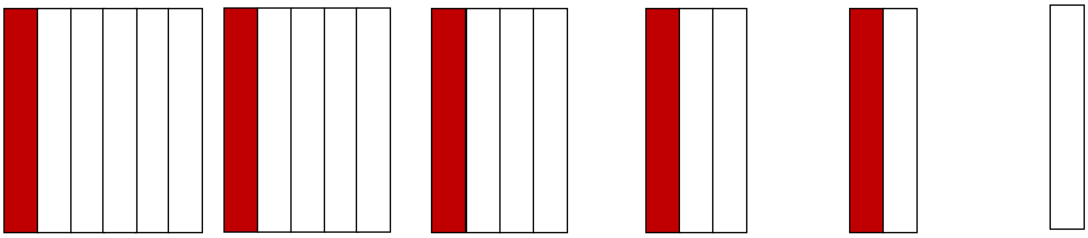
Soda cela števila: 2, 4, 6 .. posplošitev ... $2 \cdot n,\ n \in Z$
Liha *cela* števila: 1,3,5,7 .. posplošitev ... $2 \cdot n + 1,\ n \in Z$

a) *Vsota dveh sodih števil je sodo število:* $2 \cdot n + 2 \cdot m = 2(n + m)$, $(n,\ m \in Z)$
b) *Vsota dveh lihih števil je sodo število*: $2 \cdot n + 1 + 2 \cdot m + 1 = 2 \cdot n + 2 \cdot m + 2 = 2 \cdot (n + m + 1)$ $(n,\ m \in Z)$

Primer 3: Kdo je pojedel hruške?
Neke noči kralj ni mogel spati, zato je šel v kuhinjo, kjer je našel posodo, polno hrušk. Pojedel jih je 1/6. Kasneje je prišla kraljica in pojedla 1/5 preostalih hrušk. Za njo je prišel prvi princ in pojedel 1/4 hrušk, ki jih je pustila kraljica. Za prvim princem je prišel drugi princ in pojedel 1/3 ostanka. Tretji prince je pojedel 1/2 hrušk, ki jih je pustil drugi princ. Zjutraj so v posodi ostale še tri hruške. Koliko hrušk je bilo prvotno v posodi?

Na *predformalnem* nivoju ne rešujemo problema z enačbo, ampak si lahko pogamo z vizualnim modelom. Hruške v posodi ponazorimo z modelom pravokotnika, ki ga razdelimo na 6 med seboj skladnih *manjših pravokotnikov*. Ker je kralj pojedel 1/6 hrušk, jih je v posodi za 1/6 manj, zato izločimo en *manjši pravokotnik* (na sliki je to osenčeni manjši pravokotnik). Ostane še 5/6 sadežev oz. 5 manjših pravokotnikov. Kraljica je vzela 1/5 preostalih hrušk, na modelu pa izločimo manjši naslednji pravokotnik, ostanejo še 4 manjši pravokotniki. Princ je pojedel 1/4 preostalih hrušk, na modelu tako odstranimo naslednji manjši pravokotnik. Ostanejo še 3 manjši pravokotniki. V tem stilu nadaljujemo do faze, ko ostanejo v posodi še tri hruške, na modelu pa en manjši pravokotnik. Le-ta predstavlja 3 hruške, iz česar sklepamo, da je bilo prvotno v posodi 18 hrušk.

Kralj je vzel 1/6 hrušk.	Kraljica je vzela 1/5 preostalih hrušk.	Prvi princ je pojedel 1/4 preostalih hrušk.	Drugi princ je pojedel 1/3 preostalih hrušk.	Tretji princ je pojedel 1/2 preostalih hrušk.	Zjutraj so v posodi ostale še tri hruške.



Slika 1: Kdo je pojedel hruške? Prirejeno po Stonewater, Jerry (1994, v Classroom Cognitive and Meta-Cognitive Strategies for Teachers, 2010)

Na formalni ravni rešujemo s pomočjo enačbe.

$\frac{x}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5x}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4x}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{6} + 3 = x$

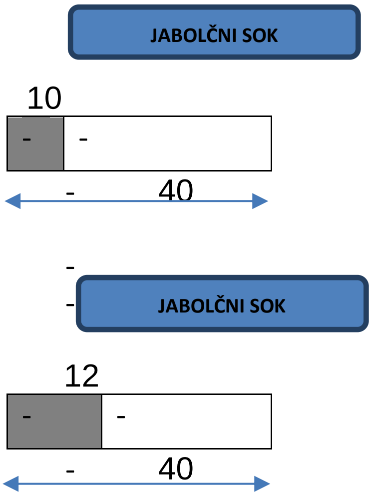
$\frac{5x}{6} + 3 = x$

$x = 18$

<u>Primer 4:</u> V kateri pločevinki je več soka?
Imamo sok v dveh enolitrskih kartonskih embalažah. Prva drži $\frac{3}{10}$ l soka, druga pa $\frac{1}{4}$ l soka. V kateri pločevinki je več soka?

a) Pri neformalnem učenju za modele lahko uporabimo steklenice.
Sok zlijemo iz obeh pločevink v dve enolitrski steklenici in primerjamo količino soka v obeh stekelnicah.

b) Na stopnji predformalnega učnja so lahko modeli pravokotniki. Pravokotnik dolžine 40 enot omogoča primerjavo vsebine.



c) V fazi formalnega učenja učenja uporabimo matematične zakonitosti, pravila, simboliko, terminolgijo.

$$\frac{3}{10}\, l = \frac{12}{40}\, l$$

$$\frac{1}{4}\, l = \frac{10}{40}\, l$$

$$\frac{3}{10}\, l > \frac{1}{4}\, l$$

Realistični kontest kot učno okolje
Prepoznavanje in nadaljevanje vzorca je pomemben proces predalgebrskega razmišljanja, je osnova za učenje algebre. Proces predalgebrskega razmišljanja se lahko začne že zelo zgodaj, v nižjih razredih osnovne šole, npr. pri dejavnostih prepoznavanja, oblikovanja in nadaljevanja vzorca. Vzorci se pojavljali v učnih načrtih za matematiko v večini držav in tudi v slovenskem učnem načrtu za matematiko (Žakelj idr., 2011).

Učenje se začne z realistično situacijo, z opazovanjem jate ptic, s prepoznavanjem pravila v vzorcu, ki ga pri letu oblikujejo ptice. Te neformalne izkušnje nadgradimo z modeli na predformalni ravni. Do dejavnosti formalnega sklepanja (npr. do napovedovanja) oz. do ustvarjanja/izgrajevanja prvih algebrskih pojmovnih predstav (kot so npr. n-ti člen zaporedja, formalni simbolni zapis za n-ti člen zaporedja), do povezovanja pojmov znotraj matematike, ki jih dopuščajo obravnavane situacije, pridemo šele v zadnji fazi.

V nadaljevnju tako na primeru matematične vsebine vzorci, ki so vpeti v realistično situacijo, prikazujemo neformalno in predformalno učenje matematičnih vsebin. Predstavljamo odgovore učencev pri reševanju naloge *Let ptic v naravi* (Dekker, 2007). *Iz formulacije odgovorov lahko sklepamo,* na kateri ravni razvoja pojmov je posamezni učenec: na neformalni, predformalni ali formalni ravni.

<u>Primer 5</u>: Let ptic v naravi
Slika 3 prikazuje let ptic v naravim v obliki V-vzorca. Odgovori na vprašanja:

- *Nariši četrti člen vzorca.*

- *Ali v vzorcu obstaja člen s 84 pikami? Utemelji.*
- *Koliko je pik v 6., 10., 100. členu vzorca? Utemelji.*
- *Dve skupini ptic letita v obliki V-vzorca. Obe skupini se združita. Ali lahko ponovno tvorijo V-vzorec?*
- *Izbrali smo dve celi števili. Če ju seštejemo, je rezultat liho število. Kaj veš o obeh številih, ki smo ju izbrali?*

Slika 2: Let ptic (Dekker, 2007)

Slika 3: Grafična/simbolna ponazoritev slike 2 *(Dekker, 2007)*

V nadaljevanju navajamo primere odgovorov učencev *(Dekker, 2007):*

1. *Vprašanje: Ali v vzorcu obstaja člen s 84 pikami? Utemelji.*

Odgovori:

- »*Ne, ker mora biti ena ptica spredaj.«* Pravilno, neformalna obrazložitev, ki se nanaša na ptice (slika 3) in ne slikovni vzorec (slika 4).
- »*Ne, če 84 delimo z 2, dobimo 42 – to je število ptic na vsaki strani, vendar pa bi morali imeti še eno dodatno, ki leti spredaj.«* Pravilno, predformalno, obstaja že razmišljanje o lastnostih števil, vendar še vedno s konkretnimi ponazoritvami, s pticami (slika 3).
- *»Ne, vsak člen v V-vzorcu ima neparno število pik, 84 pa je sodo število.«* Pravilno, formalno sklepanje, z uporabo lastnosti števil.

2. *Vprašanje: Koliko pik je v 100. členu V-vzorca? Utemelji.*

Odgovori:

- »*Na eni strani 51 in na drugi 49*.« Napačen odgovor na podlagi neformalnih obrazložitev. »*201, ker mora biti na vsaki strani V-vzorca enako število ptic in ena ptica, ki vodi let.«* Pravilno, neformalno sklepanje, ki se nanaša na ptice (slika 3) in ne na V-vzorec (slika 4).
- *»201, ker je število ptic v 100. členu V- vzorca dvakratnik števila 100 in še ena ptica.«* Pravilno, predformalno dokazovanje na podlagi primera.
- $(2n + 1, n = 100)$. Pravilno, formalno dokazovanje, npr. z algebrskim zapisom.

3. *Vprašanje: Dve skupini ptic letita v obliki V-vzorca. Obe skupini se združita. Je možno, da skupaj ponovno tvorijo vzorec v obliki V?*

Odgovori:

- »*Ne vemo, kako ptice letijo*.« Nepravilno, neformalno.
- »*Najprej moram vedeti, koliko je vseh ptic*.« Nepravilno, neformalno.
- »*Ne, ni mogoče, manjka vodja leta*.« Pravilno, neformalno.
- »*Ne, ker je vsota dveh lihih števil sodo število*.« Pravilno, formalno, uporaba lastnosti števil.

4. *Vprašanje: Izbrali smo dve celi števili. Če ju seštejemo, je rezultat liho število. Kaj veš o obeh številih, ki smo ju izbrali?*

Odgovori:

- »*Ne morem vedeti, kateri dve števili ste izbrali*.« Nepravilno, neformalno.
- »*Vem, izbrali ste 3 in 8, ker je 3 + 8 = 11 liho število*.« Pravilno, neformalno.
- »*Eno število mora biti liho, drugo sodo.«* Pravilno, formalno.

Iz odgovorov učenecev lahko povzamemo, da sta pri oblikovanju pojmov zelo pomemba dva procesa: pridobivanje izkušenj in uvrščanje izkušenj v obstoječe okvire izkušenj.
Razvoj pojmov je povezan tako z razvojno stopnjo otrokovega mišljenja kot tudi, po Vigotskem (1983), z okoljem. Vigotski meni, da na kognitivni razvoj posameznika ne moremo gledati kot na plezanje po lestvi, temveč kot razvejeno mrežo, ki predpostavlja več potencialnih začetkov in več možnih poti do konca, na katere pa vplivata organizem in okolje. Veščine se oblikujejo v enem kontekstu, potem pa morajo biti posplošene z rekonstrukcijo še na druga področja, v drugih kontekstih. To se zgodi postopoma, z uporabo veščin v vedno širšem obsegu in počasi, brez podpore učitelja.

Sklep

Lahko sklenemo, da imata tako matematični kot realistični kontekst za učenje matematike pomembno vlogo, se komplementarno dopolnjujeta in prispevata k celostnemu učenju in razumevanju matematike. Matematika je znanost, ki proučuje tako abstraktne strukture kot strukture, ki izhajajo iz realnega sveta, zato moramo pri pouku matematike razvijati tako formalno matematično znanje in matematično mišljenje kot tudi uporabo matematike, prepoznavanje in razumevanje vloge matematike v matematičnih in življenjskih kontekstih.

Viri

1. Bezgovšek Vodušek, H. (2015): *Dopolnitev teorije matematičnega znanja za poučevanje s koncepti s podobo : doktorska disertacija*. [Maribor: H. Bezgovšek Vodušek], 2015. 190 f., [12] f. pril., ilustr. https://dk.um.si/IzpisGradiva.php?id=45236.
2. Classroom Cognitive and Meta-Cognitive Strategies for Teachers (2010): Research-Based Strategies for Problem-Solving in Mathematics K-12. Florida Department of Education, Bureau of Exceptional Education and Student Services, 2010).
3. Dekker, T. (2007): The Dutch Experience, Threat or Treat. V: Proceedings Of 14th and 15th September, 2007. Freudenthal Institute, Utrecht, The Netherlands.
4. Lipovec, A., Štukl, M. (2010): Uporaba tangrama pri pouku matematike na razredni stopnji. *Revija za elementarno izobraževanje*, 2010, letn. 3, št. 1, str. 43–52, ilustr.
5. Mešinović, S. (2016): *Vizualizacija geometrijskih pojmov z uporabo geoplošče v osnovni šoli: doktorska disertacija*. Koper: [S. Mešinović], 2016.
6. Meyer, M., Dekker, T., Querelle, N. (2001): Context in mathematics curricula. Mathematics teaching in the middle school, 9, 522–527.
7. Nacionalno preverjanje znanja (2014). Letno poročilo o izvedbi v šolskem letu 2013/2014. Ljubljana: Državni izpitni center. Pridobljeno 25. 12. 2015 s http://www.ric.si/preverjanje_znanja/statisticni_podatki/.
8. OECD PISA 2012. http://www.pei.si/UserFilesUpload/file/raziskovalna_dejavnost/PISA/PISA2012/PISA%20.
9. Vigotski, L. (1983): Mišljenje i govor, Nolit Beograd, Biblioteka Sazvežda.
10. Žakelj, A. (2016): Jezikovna dimenzija matematike in pouk matematike. V: DEVJAK, T. (ur.), SAKSIDA, I. (ur.), DAGARIN FOJKAR, M. (ur.). Bralna pismenost kot izziv in odgovornost. 1. izd. Ljubljana: Pedagoška fakulteta, 2016.
11. Žakelj, A., Prinčič Röhler, A., Perat, Z., Lipovec, A., Vršič, A. V., Repovž, B., Senekovič, J., Bregar Umek, Z. (2011): Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo, 2011.

MATEMATIČKE AKTVNOSTI U NASTAVI GEOMETRIJE

Mathematics Activities in Geometry Education

Doc. dr. Dubravka Glasnović Gracin

dubravka.glasnovic@ufzg.hr

Učiteljski fakultet, Sveučilište u Zagrebu

Povzetek

Geometrija je oduvijek bila važan dio svih stupnjeva matematčkog obrazovanja. Zadaci koji se koriste u nastavi geometrije učenicima stvaraju sliku što geometrija jest i čime se bavi. U zadacima se mogu tražiti aktvnosti prikazivanja, računanja, interpretacije i argumentacije. Istraživanje predstavljeno u ovom radu obuhvaća identifikaciju koje od tih aktivnosti se od učenika traže u nastavi geometrije 6., 7. i 8. razreda u Hrvatskoj. Rezultati pokazuju da u geometriji prevladavaju aktivnosti računanja, dok su zahtjevi za argumentacijom minimalno zastupljeni. Ovaj nalaz sugerira da nastava geometrije u većoj mjeri stavlja naglasak na baratanje brojevima i izrazma u odnosu na shvaćanje geometrijskih koncepata.

Abstract

Geometry topics have always been an important part on all levels of mathematics education. Tasks used in geometry education create students' opportunities for learning geometry. They may require from students to carry out activities such as representation, computation, interpretation and argumentation. The study involved identifying which of these activities are required in the geometry education of middle-grade mathematics in Croatia. The results show that the geometry tasks predominantly require computation, while activities requiring argumentation are underrepresented. This finding reveals that the geometry tasks put emphasis on dealing with numbers and terms rather than mastering geometric concepts.

Ključne besede

nastava geometrije, matematičke aktivnosti, analiza

Keywords

geometry education, mathematical activities, analysis

Uvod

Geometrija se proteže kroz sve stupnjeve matematičkog obrazovanja, od neformalnog predškolskog učenja u obitelji, preko usvajanja prvih oblika u školi, crtanja i konstruiranja do vrlo složenih geometrijskih odnosa i pojmova. Zato je vrlo važno održavati kontinuitet geometrijskih pojmova, terminologije i aktivnosti na svim stupnjevima obrazovanja. Tu važnost kontinuiteta u sadržajima ne samo u geometriji, već u cijeloj matematici osjetio je još prije sto godina i slavni Felix Klein (Glasnović Gracin, 2010). On je u tzv. Meranskom nastavnom planu iz 1905. godine ukazao na važnost vizualizacije, primjene, finkcijskog mišljenja te korištenja tehnologije u nastavi matematike (Klein i Schimmak, 1905).

Tradicija nastave geometrije

Osim cijele obrazovne vertikale kroz koju se proteže geometrija, ona se također proteže i kroz povijest poučavanja matematike. Možemo reći da otkad u drevnim civilizacijama postoji formalno matematičko obrazovanje, u njemu su geometrijski sadržaji imali vrlo važnu ulogu (Dadić, 1982). Dok su u Mezopotamiji na matematiku gledali kao na praktičnu disciplinu, u Staroj Grčkoj matematika je shvaćana kao deduktivna znanost postavljena na aksiomatskim temeljima. Ove povijesne okolnosti doprinijele su da geometrija ima veliku tradiciju u matematičkoj edukaciji, što joj može biti i prednost i mana. Prednost stoga što je postala kulturom nastave matematike (Prediger, 2004), a mana jer je tradicija toliko jaka da ju je teško mijenjati i o njoj kritički promišljati s distance. Uz to, već neko vrijeme postoji potreba da se u nastavu matematike uključe i „mlađe" matematičke discipline poput vjerojatnosti i statistike te diskretne matematike.

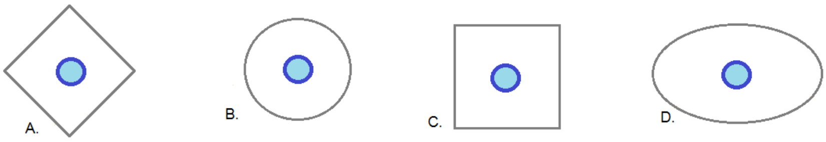
Možemo reći da je nastava geometrije već neko vrijeme u krizi jer se događa da se često baš geometrijski sadržaji reduciraju kako u satnicu matematike bi mogli ući neki drugi sadržaji. Upravo iz tog razloga potrebno je dobro i kritički promisliti o smislu i zahtjevima u nastavi geometrije. Prije svega potrebno je dobro snimiti postojeće stanje po cijeloj obrazovnoj vertikali, a posebice na mjestima transfera, npr. prelasku iz nižih u više razrede ili na prelasku iz osnovnu u srednju školu.
Povijesni razvoj ukazuje da možemo govoriti o dva aspekta nastave geometrije koje osjeećamo i danas u nastavi: geometrija koja izvire iz potreba svakodnevnog života i geometrija koja teži u strogu apstrakciju. Oba aspekta trebaju biti prisutna u nastavi geometrije, prožimati se i povezivati se gdje god je to moguće i smisleno.

Matematičke aktivnosti i geometrija
Fokus ovog rada je stavljen na aktivnosti kao važnom dijelu matematičke kompetencije. Razlikujemo četiri osnovne matematičke aktivnosti koje se pokazuju značajnima tijekom matematičkog školovanja (IDM, 2007). To su (1) prikazivanje, (2) računanje i operiranje, (3) interpretiranje te (4) argumentiranje i obrazlaganje.

Prikazivanje i modeliranje
Prikazivanje se odnosi na „prebacivanje" danih matematičkih podataka u drugi matematički oblik. Tu, primjerice, spadaju crtanja ili skiciranja, te prebacivanja iz jednog prikaza u drugi. Modeliranje se ovdje odnosi na prepoznavanje relevantnih matematičkih odnosa iz danog zadatka i na odabir pripadnih matematičkih sredstava te postupka rješavanja sa ciljem uspješnog rješavanja problema.

Primjer 1 (zadatak prikazivanja):
Konstruiraj kvadrat *ABCD*. Nađi njegovu osnosimetričnu sliku obzirom na pravac *DE*. Točka *E* je polovište dužine $\overline{AB}$.

Primjer 2 (zadatak prikazivanja):
U sredini parka se nalazi fontana. Želimo postaviti ogradu parka na udaljenosti 5 m od fontane tako da ograda na svakom mjestu bude jednako udaljena od fontane. Kako će izgledati park iz zraka?



Primjer 3 (zadatak prikazivanja):
Nacrtaj graf funkcije $f(x) = x^2 + 5x + 1$.

Računanje i operiranje
Računanje se odnosi na provođenje elementarnih računskih operacija s konkretnim ili općim brojevima. Operiranje se odnosi na korektno, smisleno i efikasno provođenje računskih ili konstrukcijskih koraka.

Primjer 4 (zadatak računanja):
Izračunaj opseg i površinu jednakokračnog trokuta s krakom dugim 73 cm i osnovicom 55 cm.

Primjer 5 (zadatak računanja):
Riješi jednadžbu $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Interpretiranje
Interpretiranje se odnosi na prepoznavanje odnosa i relevantnih podataka danih u obliku matematičkih prikaza (grafičkih, simboličkih) i na njihovo tumačenje u danom kontekstu. To je, primjerice, očitavanje podataka s grafičkih ili simboličkih prikaza i njihovo tumačenje u danom kontekstu te raspoznavanje točnih od netočnih interpretacija.
Primjer 6 (zadatak interpretiranja):
Bačva oblika valjka je visoka 82 cm i ima promjer 82 cm. Bačva je do polovice napunjena vodom. Što je prikazano izrazom $\left(\frac{82}{2}\right)^2 \cdot \pi$?

Argumentiranje i dokazivanje
Argumentiranje se odnosi na opisivanje matematičkih aspekata koji govore u prilog ili protiv neke određene odluke, a dokazivanje na niz istina koje vode do određenih zaključaka.

Primjer 7 (zadatak argumentiranja):
Dan je sljedeći izraz: $\frac{5^5}{5^3} = 5^2$. Pokaži da gornja tvrdnja vrijedi!

Istraživanje o matematičkim aktivnostima u geometriji
Gledajući ove matematičke aktivnosti, pitali smo se koje matematičke aktivnosti prevladavaju u nastavi geometrije. Istraživanje od Glasnović Gracin (2011a; 2011b) pokazuje da se udžbenici najviše koriste kao izvor zadataka za vježbu, stoga su ispitani svi geometrijski zadaci (primjeri, zadaci za vježbu i ponavljanje itd.) iz triju najzstupljenijih odobrenih udžbenika u Republici Hrvatskoj od 6. do 8. razreda. Tako je analizirano ukupno preko 5800 geometrijskih zadataka. Rezultati su prikazani u Tablici 1.

Tablica 1. Udjeli matematičkih aktivnosti u pojedinoj temi.
(R=razred; K1-razina reprodukcije, K2-povezivanja, K3-refleksija)

R	Tema	Prikaz.	Račun.	Interpr.	Arg.	K1	K2	K3
6	Trokut	30 %	68 %	41 %	3 %	50 %	49 %	1 %
6	Četverokut	22 %	75 %	32 %	3 %	65 %	35 %	0 %
7	Mnogokuti	23 %	73 %	18 %	2 %	70 %	30 %	0 %
7	Krug	25 %	62 %	22 %	0 %	72 %	28 %	0 %
7	Sličnost	33 %	50 %	50 %	15 %	45 %	55 %	0 %
8	Pitagorin t.	8 %	92 %	13 %	0 %	41 %	59 %	0 %
8	Izometrije r.	69 %	7 %	49 %	0 %	46 %	54 %	0 %
8	Pravci u prostoru	41 %	21 %	62 %	0 %	89 %	20 %	0 %
8	Geom. tijela	4 %	86 %	32 %	0 %	59 %	41 %	0 %

Tablica 1, osim matematičkih aktivnosti prikazivanja, računanja interpretiranja i argumentiranja, kao dopunu sadrži i razine kompleksnosti K1, K2 i K3. Razina K1 se odnosi na zahtjev reprodukcije u zadatku, K2 se odnosi na one zadatke koji zahtijevaju povezivanja među matematičkim pojmovima i pravilima, a K3 na refleksivna znanja (IDM, 2007). Primjerice, u temi Trokut koja se po Nastavnom planu i programu obrađuje u 6. razredu osnovne škole, u 30% svih ispitanih zadataka se od učenika traži aktivnost prikazivanja (Tablica 1). To su zadaci u kojima se uglavnom traži crtanje ili konstruiranje raznih vrsta trokuta. Čak 68% zadataka zahtijeva računanje, uglavnom traženje opsega ili površine danog rokuta. U 41% zadataka traži se interpretacija dane slike trokuta, dok je samo 3% ispitanih zadataka zahtijevalo aktivnosti argumentiranja ili dokazivanja. Dodajmo tome da se otprilike jednak udio zadataka iz cjeline Trokut odnosi na jednostavna znanja reprodukcije kao i znanja povezivanja. Dublja refleksivna znanja u kojima se do rješenja dolazi koracima koji nisu direktno vidljivi iz iskaza zadatka se od učenika ne traže. Slično je i u drugim cjelinama iz geometrije. Razliku možemo pronaći u Cjelini Sličnost u 7. razredu, gdje se 15% zadataka odnosi na argumentiranje. Radi se o zadacima u kojima se, na temelju teorema o sličnosti trokuta, treba zaključiti da su i zadani trokuti slični ili opovrgnuti da tomu nije tako.

Ovi rezultati pokazuju da se geometrija uglavnom radi kroz jednostavne zadatke dominantnog računanja i operiranja. Računanje se odnosi na uvrštavanje u formule za opseg, površinu, volumen ili oplošje te za računanje korištenjem Pitagorinog teorema. Prikazivanje se uglavnom odnosi na crtanje geometrijskih likova koristeći ravnalo i šestar, i to dominantno samo u nekim geometrijskim poglavljima poput izometrijskih preslikavanja ravnine u 8. razredu. Aktivnosti argumentacije nisu uopće ili gotovo da nisu prisutne u zadacima iz geometrije.

Rezultati također ukazuju da se u nastavi geometrije ne njeguje konceptualno razumijevanje, već dominiraju procedure računanja po formuli ili konstrukcije po zadanom nizu koraka. Takav pogled na geometriju može utjecati na učenikov pojam o tome što geometrija jest, i to baš na srednjem stupnju obrazovanja (6. do 8. razred školovanja) kada je važno razviti matematičke kompetencije potrebne za više stupnjeve obrazovanja.

Zaključak

Analiza prema matematičkim aktivnostima pokazuje da se različite aktivnosti trebaju uključiti ravnomjerno na svim stupnjevima geometrijskog obrazovanja kako bi učenik dobio cjelovitu sliku matematičkih koncepata. Primjerice, aktivnosti prikazivanja bi se trebale smisleno protezati po cijeloj obrazovnoj vertikali u nastavi geometrije. Na nižim stupnjevima obrazovanja to može biti izrada geometrijskih tijela od plastelina i papira, slaganje složenih geometrijskih tijela od jednostavnijih, skiciranje i crtanje geometrijskih likova te jednostavna modeliranja (npr. koju računsku operaciju odabrati). Na srednjim stupnjevima obrazovanja prikazivanje se može odnositi na konstruiranje geometrijskih tijela, isticanje dijelova likova i tijela (npr. visina, težišnica, pravokutni trokuti…), razne projekcije te modeliranja vezana uz osnovnoškolske sadržaje. Na višim stupnjevima obrazovanja prikazivanje se može odnositi na složenije konstrukcije, prijelaz iz tekstualnog ili simboličkog ili tabličnog oblika u grafički i obratno te modeliranja vezana uz sadržaje srednje škole. Na sličan način bi i interpretiranje i argumentiranje trebalo biti zastupljeno na svim razinama obrazovanja u nastavi geometrije, poštujući dob, razvoj i sposobnosti učenika na pojedinom stupnju obrazovanja.

Izvori

1. Dadić, Ž. (1982): Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata. Sveučilišna naklada Liber, Zagreb.
2. Glasnović Gracin, D. (2010): Meranski nastavni plan iz 1905. godine. Matematika i škola, 56, 8–12.
3. Glasnović Gracin, D. (2011a): Teacher and textbook in geometry education. Izašlo u: M. Pavleković (ur.) The Third International Scientific Colloquium Mathematics and Children (The Math Teacher) Osijek, 234-241. Zagreb: Element.
4. Glasnović Gracin, D. (2011b): Requirements in mathematics textbooks and PISA assessment. (Doctoral dissertation, University of Klagenfurt). University of Klagenfurt, Klagenfurt.
5. IDM – Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – IFF, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt (Hrsg.) (2007): Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe, Version 4/07. Klagenfurt.
6. Klein, F., Schimmack, R. (1905): Der Meraner Lehrplan für Mathematik. Izašlo u: *Der mathematische Unterricht an höheren Schulen, Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts Der Meraner Lehrplan für Mathematik*, Wiederabdruck, str. 213–216.
7. Prediger, S. (2004): Mathematiklernen in interkultureller Perspektive. Mathematikphilosophische, deskriptive und präskriptive Betrachtungen. Profil-Verlag, München-Wien.

INQUIRY BASED LEARNING AS A NATURAL VEHICLE FOR CROSS-CURRICULAR INTEGRATION: THE BULGARIAN EXPERIENCE

Evgenia Sendova
jenny@math.bas.bg; jenny.sendova@gmail.com
Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences

Abstract
The paper presents a short review of the inquiry based learning within various educational projects in Bulgarian and European context being carried out in the recent 30 years. Good practices and resources for cross-curricular integration making use of digital technologies are shared. The new role of the mathematics teachers in technological enhanced environments is emphasized on.

Keywords
Inquiry based learning, cross-curricular integration, technology-prompted curriculum

Introduction

One of the most serious problems of the contemporary education is that it neutralizes the potential of the digital technologies as intellectual laboratories or vehicles of self-expression, and reduces their role to delivering knowledge and evaluating achievements. A good metaphor for the current situation is proposed by McLuhan, as quoted in [1]): *it is as if we are driving a multi-million-dollar sports car, screaming, 'Faster! Faster!' while peering fixedly into the rear-view mirror*.

Below, we are discussing the roots and the state-of-the-art of the inquiry based learning (IBL) in Bulgaria as an approach which was first experienced in the context of an experiment of the Research Group on Education (RGE) carried out in the period of 1978-1989 [2], and recently being developed within a series of European educational projects (DALEST, InnoMathEd, DynaMAT, Fibonacci, Mascil, Scientix, KeyCoMath). Examples of good practices initiated by these projects can be found in [3-11].

The Research Group on Education − a model for an ICT-prompted curriculum

The RGE experiment was launched jointly by the Bulgarian Academy of Sciences and the Ministry of Education. It comprised 29 pilot schools (2% of the Bulgarian K-12 schools) and its main goal was to develop a new curriculum designed to make the use of computers one of its natural components [12, 13]. The educational materials developed specially for the experimental schools included textbooks, teacher guide-books, a bulletin *Informatics and mathematics* for teachers, and unified (Logo-based) computer environments tuned to specific subject domains and still allowing exploratory activities in a broader context.

The guiding principles of RGE were *learning by doing* and *integration of the school subjects*. During the first four years, informatics was introduced as a part of an encyclopedic education. One of the main integrated disciplines in the primary cycle was “I read, write and calculate”. A good example of activities within this subject would be creating a situation, in which children would decode a letter (matching numbers with letters), read, write, and code a return message in a context of interest to them.

An innovative idea of integrating the study of mathematics, natural languages (Bulgarian, English and Russian), and a computer language (Logo in this case) was launched in 1984 by creating the textbook Language and Mathematics for 5th and 6th grade (Fig. 1).

Figure 1: Experimental textbooks in the *Language and Mathematics* subject

Designed to show the intersection of language study with mathematical thinking in the context of informatics, these experimental textbooks included problems on translating from a natural to a formal language, algorithmic description of basic grammar rules, and ways to extend the Logo vocabulary to several languages. Informatics notions, such as *coding, decoding, tree-graphs, algorithms, variables, tables, procedures, recursion, data*, etc. were applied in the context of playing, editing and creating linguistic games, coding and decoding secret texts, describing and executing algorithms in mathematics, language and music.

Here is what Paul Goldenberg (invited as an expert in mathematics and informatics education) wrote about the RGE approach [14]:

> *One's own natural language is best for conveying the semantics of a mathematical idea or situation; algebraic language is best at expressing and transforming quantitative or structural relationships; and computational language is optimal for describing processes and algorithms. That – especially the last two paragraphs – I feel like I learned in Sofia!*

Specifically designed microworlds provided tools for the students to deal with new notions from a procedural rather than from a declarative point of view. This has already had an impact on the way we started teaching mathematics, literature, art and music.

The newly developed curriculum enabled students to pass gradually from constructing controllable models (in Lego-Logo context), through *turtle geometry* and other problem-oriented microworlds (for explorations in natural languages, music and art) to a fully programmable microworld (for explorations in Euclidean geometry) – *Geomland* [15]. The *Geomland* microworld was launched in 1986 as a language based computer laboratory enabling pupils to construct and experiment with Euclidean objects, to investigate their properties, to formulate and verify conjectures, i.e. to do and discover mathematics.

The RGE experiment emerged as a model for a technology-prompted educational reform. Although it did not lead to essential changes in the Bulgarian educational system as a whole, RGE set a good ground for a number of European projects involving inquiry base mathematics and science education, in which the author has been actively involved.

Good practices of IBL in the STEAM education in Bulgarian setting
The current activities of the Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of sciences (IMI-BAS) as a center for inquiry based learning (IBL) include various types of PD courses and events, as well as open access learning environments (VirMathLab, VivaCognita, and BG Mascil) related to STEAM (science, technology, engineering, arts and mathematics).

It is sometimes believed that in order to be engaged in inquiry oriented activities students need to design scientific investigations from scratch and carrying them out on their own. In fact, there are different levels of inquiry that students can progress through as they move toward deeper scientific thinking [16, 17].

- Level 1 - **Confirmation Inquiry**, in which students confirm a principle through an activity such that the results are known in advance;
- Level 2 - **Structured inquiry**, in which students investigate a question presented by the teacher through a prescribed procedure;
- Level 3 - **Guided inquiry**, in which teacher provides students with an open research question, and students design the method to solve the problem with mentoring support;
- Level 4 - **Open inquiry**, in which students can act like scientists, formulating their own hypotheses, carrying out investigations and communicating their results.

The highest IBL levels require experienced scientific reasoning and domain competences from students, which in turn poses specific challenges for the teachers and the teacher educators. With this in mind a research team of IMI-BAS (including the author) has been involved in organizing novel PD courses and events in support of all levels of IBL as well as in developing relevant resources.

Here follows a short description of activities and resources:

Professional development (PD) courses for teachers in mathematics and IT
These PD courses are being organized by IMI-BAS in the frames of European projects (InnoMathEd, Fibonacci, Mascil, KeyCoMath and Scientix), as well as by the Union of Bulgarian Mathematicians (UBM), by the Ministry of Education and Science, by publishing houses for educational literature, and by PD centers. The main goal of the courses is in harmony with the most recent educational strategies for updating the

math and science education in the EC countries: the development of key-competences by implementing the inquiry based learning in integration with the world of work. These PD courses are based on a team work (of the lecturers and the participants alike) and implement educational models adaptable to various school settings. The crucial part of the courses is for the participants to experience different stages and levels of IBL. The teachers work on pedagogical problems related with: reformulating of math problems in IBL style so as to enhance the development of specific key competences; formulating their own math problems reflecting real-life situations, not solvable with the current math knowledge of the students but allowing for explorations (by means of dynamic geometry models) leading to a good enough approximation of the solution; studying and proposing methods for tackling problems which are unstructured, or whose solutions are insufficient or redundant; solving "traditional problems" with "non-traditional" data, for which the use of a computing device is necessary; applying game-design thinking so as to engage better the students in the problem solving; formulating more relevant evaluation criteria for the students' achievements; assessment of learning resources in terms of formation and development of IBL skills and key competences; project-based work with presentation of the results [18, 19].

PD seminars and workshops in the frames of conferences

The key feature of these events is that the teachers act as partners in a research team, i.e. they *enter the shoes* of their students in an IBL environment. They work in groups, use brainstorming technique to generate ideas for solving specific tasks and present their ideas to the rest of the participants. Typical examples include the *Scientix National Conference* within the *National seminar on Inquiry Based Mathematics Education* [20], the *Dynamic Mathematics in Education* conference [21] (Fig. 1), the seminars within the Spring conferences of UBM.

Figure 2: The *Scientix National Conference* and *Dynamic Mathematics in Education* as forums for good practices of teachers implementing IBL

The inquiry based learning, its connection with the world of work, good practices and problems in its implementation in a class- and out-of-class setting have been the focus of our work with teachers.

Learning scenarios in support of cross-curricular integration

A good repository of such resources is the *Virtual School Mathematics Laboratory* (VirMathLab) being developed by IMI-BAS [22], which contains over 900 scenarios with dynamic files transparent for the users (http://www.math.bas.bg/omi/cabinet).

A lot of mathematic notions are presented in their connection with nature, fine art, archeology and art. For instance, geometric transformations such as congruences (translations, rotations, reflections and compositions of those) are presented in the context of comparing and creating snowflakes, restoring broken archeological artifacts [23], studying fine-art compositions and photographs by means of dynamic geometry constructions [24, 25], creating virtual drawings in the style of M.C. Escher [26, 27], Piet Mondrian [28], Andy Warhol [29]. The design and the implementation of these scenarios is just an element of a more ambitious goal − we expect our students to look for manifestations of geometric congruences, discover them and use them in various activities, and thus – to be able to find patterns and relationships deepening their knowledge and understanding of the surrounding world.

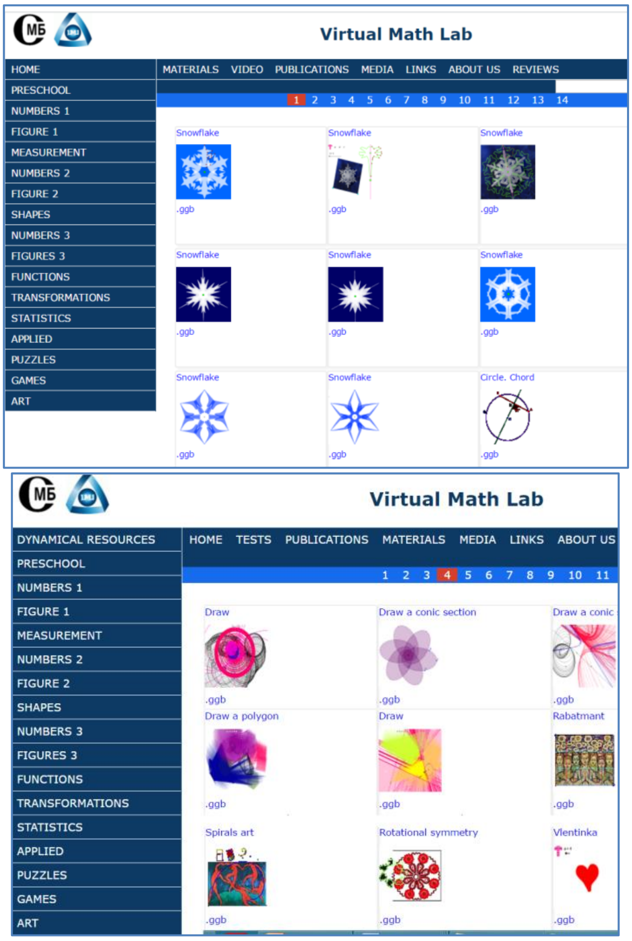


Figure 3: Virtual School Mathematics Laboratory: dynamic files for cross-curricular integration

Furthermore, the dynamic files from the art section of VirMathLab provide good ground for artistic explorations based on play with mathematics functions (Fig. 4):

Figure 4: Art photos by means of GeoGebra

New types of mathematics contests

Mathematics with a computer and *Theme of the month* are new type of contests based on the VivaCognita computer platform (Fig. 5). Students (3-K12) are invited to work on a chain of problems in increasing difficulty. Some of the problems in both competitions are accompanied by GeoGebra files which facilitate the exploration of the mathematical essence of the problem [30-32].

Figure 5: *Theme of the month*: a long-term activity on a real-life math problem (left) and *Virtual repository* of math problems (right)

Mathematics performances

These events aim at raising the awareness of the general public about the role of mathematics for enhancing children's scientific curiosity and endeavor to learn. The examples include: Performance at the History Museum in Stara Zagora, organized by the UBM section in the town, performances during the Researchers' Nights (2011-2014), Science festivals (in Italy, Romania, Greece). It is important to note that the teachers act as multipliers of the IBL ideas during these events as well – they participate with their students, and occasionally lead the performance.

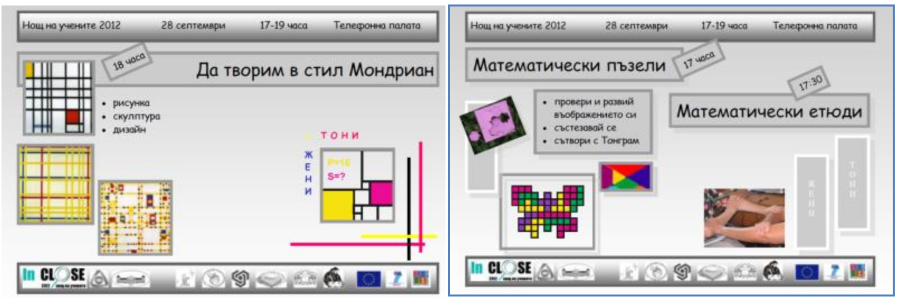


Figure 6: Posters for math performances within Science Fairs and Researchers' nights

Conclusions

With all our efforts we are trying to help teachers create an atmosphere where the students would not tell themselves: *I am a good student, because I got such and such grade, so many points on the test, I'll take the exam, I'll enter the university*… But they would rather think about the excitements the genuine learning offers: *How interesting, I wonder what will happen if… I feel like a real scientist! I am not afraid to try something nobody has tried before…*

References

1. Postman, N., Weingartner, C. (1969): Teaching as a Subversive Activity, Dell, New York
2. Sendova, E. (2013): Assisting the art of discovery at school age – a Bulgarian experience, Third chapter of Talent Development Around the World, coordinator Pedro Sánchez-Escobedo, Mérida, Yucatán, pp. 39–98
3. Boytchev, P., Chehlarova, T., Sendova, E. (2007): Virtual Reality vs. Real Virtuality in Mathematics Teaching and Learning. Boytchev, Mathematics and ICT: a 'golden triangle', Boston. 2007.
4. Chehlarova, T., Dimkova, D., Kenderov, P. Sendova, E. (2011): Seeing the innovations as an opportunity, not a threat: lessons from the InnoMathEd European project. 40th Spring Conference of UBM, pp. 347–355, ISSN 1313-3330.
5. Chehlarova, T. (2012): IBME in Primary Schools in Bulgaria: Some Examples of Dynamic Scenarios and Their Implementation in a Class Setting. In: Baptist, P., D. Raab (Eds.). Implementing Inquiry in Mathematics Education, Bayreuth 2012. pp. 106–113.
6. Sendova, E., Chehlarova, T. (2012): The specifics of the teacher education within the Fibonacci project in Bulgaria. In: Baptist, P., D. Raab (Eds.). Implementing Inquiry in Mathematics Education, Bayreuth. pp. 154–162, ISBN 978-3-00-040752-9
7. Kenderov, P., Sendova, E., Chehlarova, T. (2012): IBME and ICT – the experience in Bulgaria. In: Baptist, P., Raab, D. (Eds.). Implementing Inquiry in Mathematics Education, Bayreuth 2012. pp. 47–54.
8. Chehlarova, T., Sendova, E. (2013): Finding geometric patterns as a game of dynamic explorations. Scientia iuvenis, Book of Scientific Papers, Scientific guarantee: prof. RNDr. Lubomir Zelenicky, CSc. Slovak republic, Constantine the Philosopher University in Nitra, 2013, pp. 487-494 ISBN 978-80-558-0390-6.
9. Sendova, E., Chehlarova, T. (2014): Enriching the mathematics resources of the Scientix2 repository: a Bulgarian approach to the many levels of the inquiry based learning, Proceedings of the 6th International Mathematical Week, 29.–31. 03. 2014, Thessalonica.
10. Kenderov, P., Sendova, E., Chehlarova, T. (2015): Communities within the European projects Mascil and Scientix, 44th Spring Conference of the UBM, Sofia, pp. 151–154.
11. Zehetmeier, S., Piok, M., Holler, K., Kenderov, P., Chehlarova, T., Sendova, E., Gehring, C., Ulm, V. (2015): Concepts for In-Service Mathematics Teacher Education: Examples from Europe. In: Gehring, C., Ulm, F. (Eds.). Developing Key Competences

by Mathematics Education. ISBN 978-3-00-051067-0 University of Bayreuth, Germany pp. 23–33.
12. Sendov, Bl. (1987): Education for an Information Age, in Impact of Science on Society, v37, n2, 1987, pp.193–201
13. Nikolov, R. (1987): Integrating Informatics into the Curriculum, in Education & Computing, North-Holland, 1987, pp. 369–374.
14. Goldenberg, E. P. (1999): Bringing Back Formal Language: A Use to Counter my Worries about Computers in the Mathematics Classroom”. In: R. Nikolov, E. Sendova, I. Nikolova, I. Derzhanski (Eds.) EUROLOGO'99, Proceedings of the Seventh European Logo Conference, Sofia, Bulgaria, pp. 22–25.
15. Sendov, B., Dicheva, D. (1988): A Mathematical Laboratory in Logo Style, in Lovis, F. and Tagg E.D. (Eds.), Computers in Education – Proceedings of the ECCE’88, Lausanne, Switzerland, North Holland, p. 213.
16. Banchi, H., Bell, R. (2008): The-Many-Levels-of-Inquiry, Science and Children, 46(2), 26–29.
17. Sendova, E. (2014): You do – you understand, you explore – you invent: the fourth level of the inquiry-based learning. In: Futschek, G., Kynigos, C. (Eds.). Contructionism and Creativity, Proceedings of the 3d International Constructionism Conference, August 19-23, Vienna, Austria, pp. 103–112.
18. Kenderov, P., Sendova, E., Chehlarova, T. (2014): Development of key competences by mathematics education: The KeyCoMath European project (in Bulgarian), Proceedings of the 43d Conference of the Union of the Bulgarian Mathematicians, Borovets, 2-6 April, pp. 99–105.
19. Chehlarova, T., Sendova, E. (2014): Developing Communication Competences in the Context of Mathematics Education, V Congress, Скопје, Македонија, pp.127–235
20. National seminar in education: The Inquiry Based Mathematics Education http://www.math.bas.bg/omi/nso/?cat=14 (31. 01. 2017).
21. Dynamic Mathematics in Education, http://www.math.bas.bg/omi/dmo/ (31. 01. 2017).
22. Kenderov, P., Chehlarova, T., Sendova, E. (2015): A Virtual Math Laboratory in support of educating educators in IBL style. In: Maaß, K., Barzel, B., Törner, G., Wernisch, D., Schäfer, E., Reitz-Koncebovski, K. (Eds.). International approaches to scaling-up professional development in mathematics and science education, pp. 167–176.
23. Chehlarova, T., Sendova, E. (2010): Stimulating different intelligences in a congruence context. In: Constructionist approaches to creative learning, thinking and education: Lessons for the 21st century. Proceedings for Constructionism 2010. The 12th EuroLogo conference. 16-20 August, Paris, France. ISBN 978-80-89186-65-5 (Proc) ISBN 978-80-89186-66-2.
24. Sendova, E., Chehlarova, T. (2013): Studying fine-art compositions by means of dynamic geometry constructions. Scientia iuvenis, Book of Scientific Papers, Scientific guarantee: prof. RNDr. Lubomir Zelenicky, CSc. Slovak Republic, Constantine the Philosopher University in Nitra, a. 495-502 ISBN 978-80-558-0390.
25. Chehlarova, T., Chehlarova, K. (2014): Photo-pictures and dynamic software or about the motivation of the art-oriented students. In: International Journal for Technology in Mathematics Education. vol. 21, no. 1, Plymouth, England, ISSN 1744-2710.
26. Chehlarova, T., Sendova, E., Stefanova, E. (2012): Dynamic tessellations in support of the inquiry-based learning of mathematics and arts. In: Theory, Practice and Impact – Proceedings of Cosntructionism 2012, Athens, Kynigos, C., Clayson, J., Yiannoutsou, N. (Eds.) August 21-25, pp.570–574.
27. Chehlarova, T. (2013): Problems with fractions in the style of Escher. In Inquiry based mathematics education, Regalia 6. Sofa, pp. 127-132 ISBN 978-954-745-224-4.
28. Чехларова, Т. (2015): Формиране на математическа и дигитална компетентност чрез творчество в стил Мондриан. В: ИКТ в библиотечно-информационните науки, образованието и културното наследство, УниБИТ, София, Съставители:

Тодорова, Т., Ковачева, Е., Николов, Р., София, Издателство „За буквите – О писменехь” с.263-272 ISBN 978-619-185-164-5.
29. Чехларова, Т., Чехларова, Н. (2013): Динамични композиции в стил Анди Уорхол. В: Педагогически форум. Тракийски университет, Стара Загора, бр.2. с. 56–62.
30. Chehlarova T., Kenderov, P. (2015): Mathematics with a computer–a contest enhancing the digital and mathematical competences of the students. In: Kovatcheva, E., Sendova, E. (Eds.). UNESCO International Workshop: Quality of Education and Challenges in a Digitally Networked World. Za Bukvite, O'Pismeneh. Sofia, 2015, pp. 50–62.
31. Kenderov, P., Chehlarova, T., Sendova, E. (2015): A Web-based Mathematical Theme of the Month. Mathematics Today, vol. 51, no. 6, pp. 305–309 ISSN 1361-2042.
32. Kenderov, P., Chehlarova, T. (2016): Extending the class of mathematical problems solvable in school. Serdica Journal of Computing, Volume 9, No. 3-4, 2015, pp 191–206, ISSN 1312-6555.

OD BESED K POJMOM IN STRATEGIJAM PRI RAZVOJU MATEMATIČNE PISMENOSTI

From Words to Concepts and Strategies for Developing Mathematical Literacy

Silva Kmetič
silva.kmetic@guest.arnes.si

Povzetek
V prispevku bomo predstavili matematično pismenost kot uporabo matematike pri reševanju problemov v vsakdanjem življenju in v matematičnem kontekstu. Zato potrebujemo poleg matematičnega znanja še matematični jezik in zmožnost transformiranja oz. prehajanja med pojmovnimi reprezentacijami in problemskimi situacijami, pri čemer reprezentacije in dejavnosti z njimi pojmujemo kot del jezika. Osredotočili se bomo na nekatere vidike razvoja pojmov v povezavi z jezikom in na reševanje problemov.
Predstavili bomo nekaj izkušenjskih spoznanj in jih povezali s strokovnimi mnenji drugih avtorjev. Predstavljena spoznanja lahko upoštevamo pri načrtovanju pouka, lahko so dopolnitev elementov spremljav, analiz in interpretacij razvoja matematične pismenosti učencev.

Ključne besede
matematična pismenost, reševanje problemov, matematični pojmi in jezik

Abstract
In this article we present mathematical literacy as an individual's capacity to use mathematics for problem solving in everyday life and within mathematical context. In order to become mathematically literate, students need in addition to mathematical knowledge also the language of mathematics and the transforming ability or the ability to transition between concept representations and problem situations, whereby the representations and related activities are considered part of the language. We will concentrate on some aspects of concept development in connection with the language, and on problem solving. We present some findings that come from experience, and connect them with relevant expert opinion. These findings can be used for lesson planning, as well as for evaluation, analysis and interpretation of mathematical literacy development in students.

Keywords
Mathematical literacy, problem solving, mathematical concepts and language

O matematični pismenosti

Pojem matematična pismenost si je pri nas utrl pot v izobraževanje z mednarodno raziskavo matematične pismenosti PISA, in sicer kot uporaba matematike v realnih kontekstih. Pogosteje se je začel pojavljati kot dopolnitev pojma bralna pismenost ob predpostavki, da je uspešnost učenja odvisna od učenčevih bralnih strategij. Matematična pismenost se prepleta s pojmom matematična kompetenca, ki je opredeljena v različnih izobraževalnih dokumentih, med drugim tudi v aktualnih učnih načrtih za osnovno šolo (2011) in gimnazijo (2008) ter katalogih znanja za srednje strokovno in srednje poklicno izobraževanje (2007). Podobno je z matematično pismenostjo, ki je opredeljena v učnem načrtu za osnovno šolo in v katalogih znanja za srednje strokovno in srednje poklicno izobraževanje. V gimnazijskem učnem načrtu pismenost ni poimenovana, se pa pojavlja posredno prek njenih gradnikov. V matematični didaktični stroki je matematična pismenost razširitev predhodnega pojma računska ali včasih imenovana kar številska oz. količinska pismenost, ki se je nanašala na razumevanje števil in računanje. Njena definicija se neprestano razvija in se dopolnjuje, podobno kot se izpopolnjuje v raziskavi PISA. Matematična pismenost je kompleksen pojem, zato se za potrebe posamezne raziskave pogledi nanjo izostrijo na njenih različnih posameznih gradnikih (elementih).

V povezavi s pismenostmi različnih vrst (naravoslovna, digitalna, finančna, bralna …), ki se v definicijah razlikujejo zaradi različne narave posameznih strok, se poudarja bralno razumevanje kot sinonim za bralno pismenost, ki naj bi jo v šoli razvijali vsi predmeti in se lahko izboljša npr. z obvladovanjem enega gradnika: strategij branja. Bralno razumevanje pogojuje tudi poznavanje matematičnega ali realističnega konteksta, obvladovanje naravnega in strokovnega jezika ter razumevanje pojmov, ki se skrivajo za njihovimi imeni – besedami, oznakami in simboli, slikami in drugimi reprezentacijami.

Poučevanje in učenje matematike se od nekdaj izvaja z besedami, govorjenimi ali zapisanimi. Podpora govorjeni besedi so dejavnosti z učnimi pripomočki in nezveznim besedilom: zapisi formul in drugih simbolov, slike, skice, grafi, diagrami …, ki dajo pojmom njihov pomen. Pisano besedno razlago prav tako dopolnimo z nezveznim besedilom. Tehnološki razvoj različnih strok vpliva na kakovost zapisov, predvsem nezveznega besedila, tako se v zadnjem času razlage in navodila dopolnjujejo tudi z gibljivimi ponazoritvami in interaktivnimi elementi.

Nobena pismenost ni samo obvladovanje branja (in pisanja) razlag, navodil, (besedilnih) nalog, sestavkov in člankov, kjer nastopa zvezno in nezvezno besedilo, ampak kompleksno znanje, ki ga učenec lahko uporabi v novih šolskih ali zunaj šolskih (problemskih) situacijah. Slednje je odvisno od konceptualne globine usvojitve posameznih pojmov, od univerzalnosti konceptualnih predstav in zmožnosti transformiranja tako problemskih izhodišč kot pojmov in strategij iz ene situacije v drugo. Razvoj jezika je sestavni del razvoja znanja. V različnih fazah ima različno in prepletajočo se vlogo, včasih pomaga znanje poglobiti, drugič pa ima sporočilno funkcijo. Van Hiele (v Meng, 2009) trdi, da če učenca, ki je na neki stopnji matematičnega razvoja, poučujemo v jeziku, ki ni v skladu z njegovo doseženo matematično stopnjo, ne razume ne pojmov, ne jezika in ne more matematično sklepati. Neusklajenost stopenj med razlago učitelja in učenčevo stopnjo je morda razlog, da se posledično mnogokrat vprašamo, kam se izgubijo učiteljeva prizadevanja.

Konceptualni vidik matematičnega besedišča
Razlage lahko razdelimo v znanstvene in didaktične. Za znanstveno privzamemo matematično definicijo, medtem ko didaktična upošteva razvojno stopnjo otroka in njegovo predznanje, zato se postopoma bogati in izpopolnjuje do definicije pojma, skratka v procesu poučevanja in učenja omogoči čimbolj popolne konceptualne predstave. V okviru konceptualnega vidika pojma, ki je osnovno matematično 'besedišče', se v vertikalnem oblikovanju pojmov prepletajo didaktični pripomočki, modeli in reprezentacije, metafore in metonimije. Pojmovne predstave in prototipe pojmov lahko posameznik dopolnjuje in poglablja tudi s komunikacijskimi dejavnostmi v naravnem oz. strokovnem jeziku.

Ko razpravljamo o pomenu posameznega pojma, ki se skriva za besedo, je težko razmejiti 'golo' branje besede od razumevanja pojma. Pomen pojma je povezan z besedo, reprezentacijami, simboli …, je pa mnogo več, odvisen je od miselne pojmovne predstave posameznika (concept image[1]). Beseda kot sredstvo komunikacije povezuje tudi učence in učitelje, ki presojajo razumevanje. Ob tem se je treba zavedati, da če učenec ne izkaže razumevanja z besedami, še ne pomeni, da res ne razume. Govor je samo eden od načinov za izražanje misli, ni pa mišljenje samo (Labinowicz, 1989: 145). Raziskovalci (Threlfall, 1983, v Orton in Wain, 1994: 96) so ugotovili, da je imenovanje pojma, npr. kvadrat, kot lepljenje imena k sliki pojma, vedno manj uspešno od prepoznavanja pojma oz. njegovega modela, če je beseda, ki pojem označuje, povedana. V kolikšni meri je morda pri prepoznavanju pojma res 'pomembna' strategija branja oz. osnovna bralna pismenost, je težko presoditi brez za to posebej načrtovanih dejavnosti. Na branje z razumevanjem gotovo vpliva poleg strategij branja še poznavanje posameznih pojmov in pričakovanje bralca o zapisanem, kar je posledica njegovega širšega konceptualnega znanja in zmožnosti prehajanja in povezovanja med pojmi, situacijami in konteksti.

Primera:

Nek m _ ž je h _ _ _ l po c _ _ _ i in n _ _ il v r _ _ i č _ n _ _ _ _ _ _.

Krožnica je m _ _ _ _ _ a t _ _ k v r _ _ _ _ _ i, ki so enako odd _ _ _ _ _ e od t _ _ _ e *S* v isti r _ _ _ _ ni.

Povedi zlahka preberemo kljub manjkajočim črkam, če nekatere vključene pojme prepoznamo, druge pa predvidevamo. Kaj je mož nosil v roki? Na pridevnik črn lahko vežemo besedo klobuk. Izkušeni bralci vidijo več možnosti (dežnik, kovček, zvezek…). Z drugim stavkom ne bo imel težav učenec, ki pojem pozna, v prvem primeru pa si je treba situacijo miselno prislikati in sklepati.

Razumevanje konteksta, besed in besednih zvez, pojmov, simbolov, reprezentacij
Začnimo z razumevanjem konteksta. Če učenci konteksta ne poznajo, se morajo z njim seznaniti, podobno je s posameznimi pojmi.

Primer: Revija GEA (NPZ, 2009 za 6. razred)

Založba na leto izda 12 številk revije GEA. Mesečna naklada revije GEA je $14\,500$ izvodov. Cena enega izvoda v prosti prodaji je $3{,}88$ €, cena izvoda za naročnike pa $3{,}59$ €. Na Osnovni šoli Grede je na revijo GEA naročenih 65 učencev.

a) Kolikšna je skupna letna naročnina na revijo GEA za učence na Osnovni šoli Grede?

b) Založba proda naročnikom štiri petine mesečne naklade revije GEA. Desetino preostale naklade revije GEA zadrži in jo uporabi v promocijske namene. Preostale številke revije GEA proda v prosti prodaji.

Koliko številk revije GEA proda založba v prosti prodaji?

[1] S. Vinner (1983) je izpostavil razliko med definicijo pojma in individualno predstavo o pojmu. Pri uporabi pojmov ima individualna predstava močnejši vpliv kot poznavanje formalne definicije. Poincaré (1908) pa je zapisal, da je dobra definicija v šolski matematiki tista, ki jo razumejo učenci (eden od virov: D. Tall: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988e-concept-image-icme.pdf).

Za šestošolce je kontekst naloge s številnimi pojmi s področja založništva vsaj toliko zahteven kot potrebno znanje matematike. Jezikovno je tudi zapleten opis deležev v točki b, ki se dvakrat zapored opiše kot 'preostale' naklade in številke (podčrtala avtorica v izvirnem besedilu naloge) in še desetina preostalega. Na nizko uspešnost je verjetno najbolj vplival kontekst, predvsem številni založniški pojmi, nekateri zelo podobni ali enaki (številka, izvod, preostale številke, naklada, mesečna naklada, preostala naklada, prosta prodaja, naročnik, letna naročnina, promocijski namen). Zapleteni in manj običajni opisi deležev na nepoznanih pojmih pa zakrijejo matematične težave s povezovanjem deležev po besedilu. Na osnovi obvladovanja strategij branja učenci ne morejo razumeti pojmov in situacije, če nimajo možnosti vprašati ali se kako drugače seznaniti, kaj posamezni neznani pojmi pomenijo. Načeloma naj bi bili v fazi preverjanja znanja učencem konteksti poznani, v fazi učenja pa je spoznavanje konteksta in novih pojmov ena od dejavnosti. Torej v fazi preverjanja prihaja stroka sama s sabo v konflikt, če ne dopušča uporabe temeljne veščine, to je učenja novih pojmov in spoznavanja novih kontekstov.

Poglejmo še nalogo z učencem znanim kontekstom. Učenci imajo izkušnje z izbiro in naročanjem kosil.
Primer: Kosila (NPZ, 2014 za 6. in 9. razred)

V restavraciji ponujajo kosila, sestavljena iz juhe, glavne jedi in sladice.

Juha		Glavna jed		Sladica	
Zelenjavna	1,50 €	Rižota in solata	4,80 €	Palačinke	2,10 €
Goveja	1,30 €	Puranji zrezek s krompirjem	4,90 €	Jabolčni zavitek	1,75 €
Gobova	1,75 €				

a) Koliko različnih kosil ponujajo?

b) Jure ima 8 evrov. Katera kosila lahko izbere? Zapisuj v preglednico.

Izbira kosila			Vrednost kosila (€)
Juha	Glavna jed	Sladica	

Sestava kosila[2] je v nalogi definirana oz. 'osebni' jedilni list je določen s tremi zvrstmi jedi. Zapis jedilnika je nenavaden tako po obliki kot po številu posameznih jedi in navajanju cen za posamezne jedi, iz katerih sestavljamo jedilni list svojega kosila. Pri kvalitativni analizi večjega števila nalog smo ugotovili, da je oblika zapisa jedilnika

[2] Prvi pomen besede po SSKJ: **kosílo** -a s (í) **1.** *obrok hrane, ki se jé opoldne ali zgodaj popoldne.* Ena od rab po SSKJ: sestaviti jedilni list za kosilo.

vplivala na rezultata obeh (a in b) vprašanj. Na uspešnost vprašanja b je najbolj vplival koncept sestave jedi za kosilo, ki je sicer v nalogi opisan kot ponudba, ne pa kot obveza za Juretovo izbiro jedi v času kosila. Zapis cen za posamezno jed in dejanske izkušnje otrok z naročanjem kosil so logiko definicije sestave jedi za kosila izključevali. Učenci so upoštevali omejitev v denarnem znesku, vsote pravilno izračunali, pogosto pa niso sestavili kosila glede na vrsto predpisanih jedi. Obrok v času kosila so sestavili tudi samo iz dveh jedi: juhe in sladice ali iz glavne jedi in sladice, kar je tudi bilo plačljivo s predvidenim zneskom. Da ima ceno posamezna jed in si kljub temu ne moreš izbrati želene sestave kosila, ampak 'po matematično', je bilo nelogično mnogim učencem. Če restavracija ponuja sestavljena kosila, po navadi ni cen za posamezne jedi. Če pa so cene za posamezne jedi, si lahko izbiraš sestavo kosila sam, tudi dve juhi ali dve sladici. Glede na analizo nabora rešenih nalog lahko trdimo, da je bil pogostejši kontekstualni problem kot pomanjkljivo matematično znanje, gotovo pa ne pogosta in posplošena opredelitev vzroka 'površno in nenatančno branje'. Brez kvalitativne analize ne moremo razmejiti razumevanja konteksta od usvojenosti matematičnega znanja ter zmožnosti reševanja matematičnih kontekstualnih nalog. Najnatančnejši vpogled v razumevanje pojma kosila pa bi lahko pridobili z dobrimi intervjuji.

Razumevanje prebranega in posameznih besed je odvisno od velikosti in bogatosti besedišča, od 'splošnih' izkušenj učenca in njegovega poznavanja pojmov. K temu sodi tudi zmožnost povezovanja in transferja na področje obravnave. Za ilustracijo zapišimo stavka iz prispevka o kotu (Lipovec, A., 2013: 51), kjer večkrat uporabljena beseda kot pomeni različne pojme, kar dobro predstavlja kar sam zapis razlage. 'Četrtošolci pojem kot običajno zaznavajo kot vrh, tj. točko kot vogal v sobi ali točko, na kateri stoji nogometaš, ko izvaja kot ...' in dalje, ko govori o merjenju velikosti kota: '… Kot večjega torej zaznavajo kot, ki ima narisane daljše krake.' (Različni pomeni besede kot: primerjalni veznik, položaj (točka) za nogometni strel ali določen prostor v sobi, pojem kot).

Nekatere besede imajo v vsakdanjem življenju, matematiki in drugih strokah različne pomene. Razmislimo, kaj vse pomenijo besede kot npr. točka, mreža, stopinja, telo, kombinacija, pozitiven, razlika, ostanek, krog, kroženje … Tudi v sami matematiki imajo nekatere besede različne pomene (obseg, kolobar, razlika, podoben …). Posebna skupina besed so imena za pojme, ki zvenijo enako: sovršna kota, sokota, sosedna kota, kvader in kvadrat … Tem besedam nekateri učenci pogosto pripisujejo samo enega od pomenov ali pa pomene zamenjujejo zaradi podobnega zvena besed in ne zaradi nepoznavanja pojmov. Torej do pomenskih razlik iste besede ne prihaja samo v različnih strokah in v vsakdanjem življenju. V povezavi z besedami in pojmi za njimi mora biti učenec glede na kontekst problema sposoben ustrezne interpretacije ali pa transferja pomenov.[3]

Pri pouku matematike so pogosti element didaktičnih razlag *metafore in metonimije.* (Po predstavitvi ju nadaljnjem besedilu zaradi podobnosti ne bomo vedno razlikovali.) Učencu lahko pomagajo razumeti matematični koncept, lahko pa povzročajo tudi napačne predstave. *Metafora*[4] je uporaba določene besede (besedne zveze) namesto druge na podlagi ene ali več njunih skupnih pomenskih značilnosti. Zaradi neke podobnosti prenesemo pomen z enega predmeta na drugega. Metafor se bolj

[3] Metalingvistične zmožnosti ima učenec, ki zlahka razume različne pomene besed in simbolov v povezavi z vsebino, s katero se srečuje, in ima razvito tudi ustrezno intuicijo …

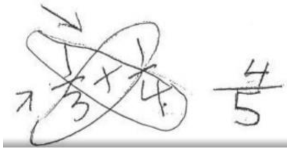
[4] SSKJ: **metáfora** -e ž (á) lit. *besedna figura, za katero je značilno poimenovanje določenega pojava z izrazom, ki označuje v navadni rabi kak drug podoben pojav.*

zavedamo v vsakdanjem življenju: kislo vreme, trmast je kot osel … so pa pogostejše, kot bi pričakovali tudi v matematiki, npr. okroglo ali lepo število. *Metonimija* je zamenjave imena ali preimenovanje v povezavi z neko dejavnostjo. Je retorična figura, v kateri je ime za neko stvar zamenjano z drugim imenom, ki je s prvim v vzročni ali kateri drugi zvezi. Ilustrirajmo s primeroma metonimij iz vsakdanjega življenja: bral je Cankarja, vsa dvorana je ploskala. V šolski matematiki jih je tudi veliko. Ena takšnih je 'križno množenje'.

Enakost ulomkov: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Ulomka sta enka, če je nakazani 'križni' produkt enak. Učenec lahko zanesljivo izvaja primerjanje ulomkov, v bistvu pa ne razume odnosov med njimi. Podobno je tudi deljenje ulomkov kot 'križno' množenje.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

Učenje receptov pogosto ne prispeva znanju z razumevanjem pojmov (slika 1).



Slika 9: Napačna uporaba metuljčka

Metafora X (poznan objekt ali pojem) za Y (nov objekt ali pojem) je način tvorbe novih matematičnih pomenov z že znanimi v matematiki, včasih tudi z izkušnjami v realnem življenju. Metaforo uporabimo, da bi razumeli dejstvo Y z uporabo pomena oz. lastnosti poznanega dejstva X, vendar lahko povzroči nepopolne ali napačne pojmovne predstave.

Primeri:

- Integrali so ploščine.
- Zveznost funkcije kot povezanost skice grafa pomeni biti v enem kosu, zato napačen sklep npr. f(*x*) = 1/*x* ni zvezna funkcija.
- 5a + 3b je 5 ananasov in 3 banane, kar lahko vodi v 8 ab, čeprav je namen drugačen. Če sta a in b spremenljivki, potem je a število ananasov in b število banan, ker algebra generalizira števila.
- Dogovor za zapis pozitivnega števila, npr. +2 = 2 , ki ne velja na enak način za zapis negativnega števila.
- Enakosti 3 – 2 = 1 in 2 – (–3) = 5 'metaforično' beremo kljub različnemu pomenu znaka minus enako.
- Orientacija se definira s smerjo urnega kazalca.
- Sekanti se srečata, vzporednici se nikoli ne srečata.
- Graf je slika.
- Funkcija je rastoča, če se po njej vzpenjamo (smučarji na 'funkcijskih' strminah).
- Enakost (enačbo) povežemo s tehtnico.
- Krajšanje enačbe (črtanje členov) nadomesti sklepa: a + (–a) = 0 ali a/a=1
- Člen ali spremenljivko prenesemo z ene strani na drugo stran enakosti.
- Enaka simbola nimata istega pojmovnega pomena:
  $a^{-1} = \frac{1}{a}$ in $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$
- Začetno vrednost funkcije izračunamo tako, da skrijemo x-se.

- *sposojanje* in *prenašanje* ter *pripisovanje* (števila) desetic (ali višjih enot) pri pisnih algoritmih.

Primer: Učenca je uporaba metaforičnega jezika ovirala pri razvoju razumevanja delovanja algoritma seštevanja v stolpcu. Števila desetic ne prišteje, ampak števko pripiše oz. doda, zato pri seštevanju desetic upošteva 11 namesto 2.

$$
\begin{array}{r}
6\ 9 \\
+1\mathbf{1}\ 6 \\
\hline
\mathbf{1\ 7\ 5}
\end{array}
$$

Nekatere metafore so neeksaktne, zato so lahko neprimerne za razlago matematike. Po drugi strani pa lahko dobra metafora pomaga razumeti matematično vsebino. Primeri dobrih tvorb novih matematičnih pomenov z že znanimi v realnem življenju ali matematiki se ujemajo v bistvenih lastnostih matematičnega pojma. Primer je metafora kot analogija, ki je povezava med odnosi A:B in C:D. Pomen pojma z besedno reprezentacijo lahko spremeni, npr. pridevnik. Sferični trikotnik je primer analogne metafore: 3 točke na sferi in razdalje med njimi je analogno kot 3 točke na ravnini in razdalje med njimi (Pimm, 1990: 100). Sferični trikotnik je na neki način 'razširitev' pojma trikotnik iz ravnine na sfero. Pojmi točke in najkrajše razdalje med njimi se ohranijo, razlikuje pa se pojem ravna črta.

Besedne okrajšave oz. jezikovne poenostavitve prav tako lahko umestimo med metafore ali metonimije. Poglejmo nekatere:

- Pozitivna funkcija – pozitivna funkcijska vrednost
- Odvod dane funkcije – beseda odvod ima pomen funkcije, ki jo dobimo z odvajanjem.
- Odvod je pozitiven – vrednost funkcije odvod je pozitivna.
- Odvod v stacionarni točki je 0. – odvod kot vrednost funkcije pri neki abscisi *x* in točka kot ordinata točke.

Primer napake, ki je morda v nekaterih primerih posledica jezikovnih poenostavitev v 'metaforičnem' branju matematičnih pojmov:

Če je $f(x) = x^3$, izračunaj $f'(4)$.
$f(x) = x^3 = f'(x) = 3x^2 = 3 \cdot 16$
$= 48$

Samokontrola strokovnega jezika in razmišljanje o njegovih različnih pomenih in posledično motečih vplivih lahko prispeva k boljšemu razumevanju posameznih pojmov in povezav med njimi.

Poglejmo še zelo kompleksen pojem 'je enako'.

- 3 + 4 = 7 (simbol = se bere kot glagol biti, če beremo ‚3 plus 4 je 7' ali kot glagol dobiti, če beremo: 'če seštevješ 3 plus 4, dobiš 7'.)
- Oče = 34 let – pri izpisu podatkov simbol za ‚je enako' nadomesti glagol ‚je star'.

Mlajši otroci simbol = razumejo na podlagi danih zapisov kot npr. 3 + 4 = , kot simbol za izvajanje računske operacije in ne kot enakost vrednosti leve in desne strani.
V nadaljnjem razvoju tega pojma se ne poudarjajo različni pomeni enakosti.

Primerjajmo nekatere:
3 + 4 = 7 – vrednost na levi je enaka vrednosti na desni, 3 + □ = 7 – predvidena enakost je pravilna, če v okenček zapišemo 4, enako je v primeru enačbe 3 + x = 7, v primeru $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pa enakost velja za vsak realen x in ne samo za eno vrednost spremenljivke. Enakost $\frac{x^2-4}{x+2} = x - 2$, ki nastane kot rezultat krajšanja algebrskega ulomka, ne velja za vsak realen x.

Zamenjava med pojmom in simbolom oz. med pojmom in njegovim imenom ter operacije s simboli namesto s pojmi
Za simboli in zapisanimi odnosi so matematični pojmi, zato so simboli nosilci pomena in ne samo črke na papirju, s katerimi izvajamo nematematične operacije. Ilustrirajmo z nekaj primeri.

Pri množenju s številom 10 se številu, ki ga množimo, na koncu doda števka 0 (konec števila, množenje kot dodajanje števke 0). Namesto dodajanja števke se pojavlja tudi pripisovanje števke 0. Pripisati ali dodati ničlo 'na koncu' pomeni množiti z 10.
Podobna je npr. situacija, če se definirajo soda števila kot števila, ki se končujejo z 0, 2, 4, 6, 8, kar ni matematična definicija sodosti števila, ki razlaga koncept sodosti. Za produktivno znanje ni dovolj samo prepoznavanje sodih števil po zapisu, ampak tudi po bistveni matematični lastnosti glede na operacije (sodo število se da zapisati kot vsota enakih števil, kot zmnožek s številom 2, sodo število je deljivo z 2).

V kategorijo operiranja s simboli (in ne s pojmi) spada tudi naraščanje oz. padanje linearne funkcije, ki se 'empirično' definira z opazovanjem strmine grafa funkcije (premice) in (predznaka) smernega koeficienta funkcije. Ta razlaga ne omogoča niti specifičnega, predvsem pa ne splošnega razumevanja koncepta naraščanja funkcije, torej ne omogoča povezovanja. Večanja funkcijskih vrednosti na opazovanem intervalu (urejenih vrednosti neodvisne spremenljivke), je samo opazovanje števil, ki je po definiciji enako za vse vrste realnih funkcij.

Dogovori o imenovanju in označevanju
Z dogovori o imenovanju in označevanju pojmov in odnosov ustvarjamo nove možnosti za njihovo predstavljanje. Imena in simboli služijo kot podpora ali opora razmišljanju pri izvajanju operacij in za medsebojno komunikacijo. Besedo ali simbol učenec laže trajno poveže s pojmom, ki je neke vrste nosilec pomena, če je aktivno vključen v soustvarjanje dogovora o imenovanju in izbiri oznake. Na pomen učenčeve aktivne vključenosti v pojmovni razvoj opozarjajo številne študije, manj pa jih je usmerjenih v jezikovni vidik. Aktivna vključenost v poimenovanje, posebej v pomen besed, je mogoča že v predšolskem obdobju, od spontanega prek osmišljenega poimenovanja novih pojmov vse do strokovno formaliziranega jezika (Pimm, 1995 in 1990).

Slika 1: Spontano sporočanje/ustvarjanje, 5 let

Pred obravnavo in imenovanjem pojmov je treba previhariti pojmovne predstave in njihova imena, posebej ko se pomeni v strokah razhajajo ali pa so možni pomenski šumi (npr. debela, tanka, prekinjena, pikčasta, kriva ali ukrivljena … črta, mreža, sinus, relacija, višina …).

Navedimo še nekaj primerov pogostih imenovanj (označevanj) pojmov in situacij z velikimi tiskanimi črkami. Mlajšim otrokom predstavlja drugačen pomen črke oviro pri izkazovanju razumevanja oznak oz. pojmov (Hodnik Čadež, 2014: 44). Pogosto so tudi v matematiki zelo podobna simbolna imena nosilci številnih različnih pojmov in objektov.

- Točka A ali točka (A) kot alineja pri naštevanju
- Slika A, lik A
- Daljica AB, stranica AB, rob AB
- Dolžina daljice |AB|
- Razdalja d(A,B)
- Premica AB
- Kot ABC, kot B
- Trikotnik ABC

Primer težave s pomenskim transferjem med pojmom in oznako, ki je posledica dogovora o imenovanju točk:

Koliko daljic z dolžino 4 cm lahko narišemo iz točke A?
Odgovor učenca: 25. V naslednjem hipu dopolni: Ne, 27.

Učenec je povezal število možnosti s številom črk v slovenski abecedi in nato to število popravil s številom črk angleške abecede. Morda bi natančnejša formulacija vprašanja usmerila učenca v pravilno razmišljanje: Največ koliko daljic s krajiščem v točki A in z dolžino 4 cm obstaja?

Različnost (sestavljenih) simbolov pogosto ustvarimo npr. s položajem zapisa simbola. Preprost primer je kar zapis števila, ki temelji na pojmu mestne vrednosti. S položajem števke in smerjo razvrščanja števk je določena velikost števila: 123 ni enako 231. Podobno opredelimo s položajem števke za stopnjo potence zapis potence, ki je po videzu enak kot zapis velikosti kota v stopinjah in za izmero temperature, kjer je znak za enoto prav tako v istem položaju kot stopnja potence. V rokopisu je npr. težko ločiti 3^0 od 3°. V urejevalnikih besedil je zapisu nadpisanega znaka za stopinjo namenjen poseben znak. Zapis 3^0 opredeljuje potenco, 3° pa npr. velikost kota v stopinjah. Razen tega poznamo poleg kotnih še temperaturne stopinje, ki so lahko različne glede na temperaturno lestvico, in stopinje, npr. v snegu.

Zavedati se je treba, da je matematični strokovni jezik zelo zgoščen. Zapis 3 + 4 lahko dobesedno preberemo od leve proti desni 'tri plus štiri' in od desne proti levi 'štiri plus tri'. Zapis pa je tudi nosilec številnih drugih informacij: vsota števil 3 in 4, nadalje vsota dveh zaporednih števil, vsota dveh števil, ki se razlikujeta za 1, prvi seštevanec je 3, drugi seštevanec pa je za 1 večji, vsota drugega lihega in drugega sodega števila …

Pri vertikalni izgradnji pojmov se je treba zavedati situacij, ko za učence kvadrat ni pravokotnik in kocka ni kvader, tako z vidika poučevanja kot zmožnosti razumevanja matematičnih definicij.

Nemi privzetki in opuščeni kvantifikatorji
Opozorimo še na učne situacije z zamolčanimi predpostavkami. Te pogosto nastanejo zaradi izpuščanja kvantifikatorjev, ki so pomemben element razumevanja trditev.

Primerjajmo naslednje tri različice naloge.

Različica 1

V košari je 30 jabolk. Tina jih bo dala v štiri vrečke. V vsaki vrečki bo enako število jabolk.
- Koliko jabolk bo v vsaki vrečki?
- Koliko jabolk bo ostalo v košari?

Različica 2

V košari je 30 jabolk. Tina jih bo dala v štiri vrečke. V vsaki vrečki bo enako število jabolk.
- **Največ** koliko jabolk bo v vsaki vrečki?
- Koliko jabolk bo ostalo v košari?

Različica 3

V košari je 30 jabolk. Tina jih bo dala v štiri vrečke tako, da jih **ostane v košari najmanj**. V vsaki vrečki bo enako število jabolk**.**
- Koliko jabolk bo v vsaki vrečki?
- Koliko jabolk bo ostalo v košari?

Naloga v različici 1 se pogosto rešuje, kot bi bila zapisana v različici 2 ali 3, ki imata enako in eno samo rešitev za vsako vprašanje (7, 2). V takšnem primeru se privzame brez navedbe, kar je poudarjeno zapisano v različicah 2 in 3. Naloga v različici 1 ima dejansko sedem rešitev (1, 26; 2, 22 … ; 7,2).

Čeprav je pri matematiki beseda splošen[5] (splošna formula, splošno pravilo, posplošitev in druge fraze s tem pridevnikom) zelo pogosta, so redke dejavnosti z izjavami, kjer moramo presojati, kdaj nekaj velja 'splošno', kdaj samo za nekatere objekte in kdaj za nobenega. Redka je tudi uporaba kvantifikatorjev kot vsi, vsak, nobeden, nekateri, poljuben, obstaja … Težave pri razumevanju pomena z matematičnim opisom povzročajo tudi vezniki ali, vsaj toliko, največ toliko, najmanj toliko … in zanikane izjave.

Tudi reševalce z izkušnjami spravi v zagato odločitev ob izjavah: Obkroži ali izjava drži ali ne drži:
Kovanci in bankovci imajo enako vrednost.
V vseh državah Evropske unije ne plačujemo z evri.

Preprosti primeri dejavnosti za razvoj razumevanja matematičnih 'splošnih' resnic, s katerimi razvijamo tudi razumevanje posameznih pojmov.

Ali velja vedno, včasih ali nikoli?
- $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
- Večkratniki števila 5 so tudi večkratniki števila 10.
- Večji je obseg lika, večja je ploščina tega lika.

[5] SSKJ: **splôšen** -šna -o prid., splôšnejši (ó) **1.** *ki se nanaša na vse ljudi, stvari, ne na posameznika, posamezno:*

- Pri množenju poljubnega števila z 2 je rezultat večje število.
- 0 deljeno z 0 je enako 1.

Matematične pismenosti kot reševanje matematičnih problemov

Mnogi menijo, da je pot za razvoj matematične pismenosti oz. učenčeve sporazumevalne in 'prenosljive' zmožnosti (Bešter Turk, 2011) reševanje matematičnih problemov in problemov v kontekstu, ker kot najkompleksnejša dejavnost pri pouku matematike prepleta faze od beri, misli, sklepaj, načrtuj in računaj do piši, riši, konstruiraj, evalviraj (Baranović, 2014; Borasi, 1990). Za uspešno reševanje problemov je potrebno: poznavanje in razumevanje matematičnih pojmov, zmožnost njihovega povezovanja in uporabe, problemska in procesna znanja, metakognitivne zmožnosti (Magajna, 2003) in učenčeve osebne karakteristike kot npr. vztrajnost pri reševanju matematičnih problemov, notranja motivacija za ukvarjanje z matematiko ter drugi vplivi, kot so čustva, odnos, prepričanje, vrednote (Nosrati in Waege, 2014). Omenili smo že zmožnosti transferja in transformiranja, ki sta poleg konceptualnega razumevanja pojmov in obvladovanja različnih strategij dve pomembnejši zmožnosti matematično pismenega človeka, to je reševalca problemov.

Poglejmo si nalogo z nizkim mednarodnim (27 %) in slovenskim (21 %) dosežkom.

Primer: Nogometni turnir (M051001 Matematika 4,Timss 2012)

Na nogometnem turnirju moštvo dobi:

3 točke za zmago
1 točko za neodločen rezultat
0 točk za poraz

Zedland ima 11 točk.

Katero je **najmanjše** število tekem, ki jih je lahko igral Zedland?

Raziskovali smo možne razloge za težavnost naloge. Ugotovili smo, da so razlogi številni in raznoliki. Poleg preverjanja razumevanja konteksta in posameznih besed ter kompleksnosti naloge in matematičnega ozadja lahko še izpostavimo dosledno izvajanje korakov reševanja problemskih nalog z namenom, da izboljšamo matematično pismenost. V raziskavi TIMSS opišejo znanje na najvišji ravni, kamor sodi ta naloga za četrti razred, da učenec zna situacijo analizirati, povezovati pojme in situacije, vključevati ali izpeljevati, ocenjevati, presojati, sklepati, posploševati, preverjati oz. utemeljevati.

Tabela 1: Preglednica dejavnosti in znanj na najvišji ravni v okviru raziskave TIMSS ter možne miselne in operativne dejavnosti

Analiziraj	Vživljanje v kontekst: tekma ali igra, turnir, rezultat (zmaga, neodločeno ali izenačeno, poraz) Neznane ali manj znane besede: moštvo, ekipa, Zedland Elementi problema, situacija, vprašanje. Podatki, spremenljivke oz. neznanke, odnosi med podatki in spremenljivkami. Vprašanja kot: Ali je pomembno število nasprotnikov? Kdo so nasprotniki? Kombiniranje števil 3, 1, 0 z 11**.** Bistveno spoznanje: Najmanjše število tekem dobim takrat, ko čim večkrat zmagam in ne smem izgubiti. *V tej fazi se zgodi razumevanje problema, ki posledično nakazuje uporabo modela (računskih operacij in načina sklepanja).*
Poveži, vključi, izpelji	Izberemo računsko operacijo in povežemo točke posameznih tekem v skupno število točk ter štejemo tekme … Učenci lahko sistematično ali s poskušanjem seštevajo točke za zmage in ugotovijo število tekem.
Oceni, presodi	Razmislimo o primernosti računskih operacij in o rezultatu.
Sklepi, rezultati	Seštevanje, odštevanje, deljenje, množenje, štetje, poskušanje, sklepanje … Ali dajo različni pristopi isti rezultat?
Posplošitev	Ali lahko na enak način pridem do rezultata, če ima Zedland npr. 10, 12 ali 13 točk (drugačno število točk)? $t = 3 \cdot z + 1 \cdot n$, $z + n$ je število tekem, t je število točk, z je število zmag, n pomeni število neodločenih tekem.
Preverjanje	Matematični argumenti, dokaz, podpora strategiji, rešitvi ali izjavi. Sklepanje nazaj: 5 tekem lahko pomeni 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 točk. Ali res dobimo 11 točk, če odigram izračunano število tekem, 3 zmagam 2 pa sta izenačeni? Ali je 5 res najmanjše število tekem?

Pregled izdelkov (70) ni pokazal niti enega preverjanja rezultata. Ko učenec pride do rešitve, zapiše odgovor, ki ga ne preverja v pisni obliki. Prav tako ni bilo zaznati nobenega poskušanja. Večina učencev je prišla do rezultata brez zapisov sklepanja ali računanja. Kljub temu na osnovi nizke uspešnosti sklepamo, da učenci ne analizirajo, ne poskušajo ali raziskujejo in ne preverjajo svojega razmišljanja, računanja in rezultatov. Število pravilnih rešitev je bilo v okviru obeh objavljenih dosežkov tudi na tem vzorcu učencev.

Naslednji problem je v enostavnem in razumljivem kontekstu. Učenci nimajo težav z branjem in razumevanjem zapisa problema, kljub temu pa se ga mnogi ne znajo lotiti.

Primer: Koliko let imajo deklice?

Na cesti se srečata prijatelja, ki se že dolgo nista videla. Najprej se pogovarjata o svojih družinah.
Koliko otrok imaš?
Tri, tri hčerke.
Koliko so stare?

Produkt njihovih let je 36, vsota let pa je enaka številu, ki se zapiše kot tista hišna številka.

Nisi mi povedal dovolj.

Najstarejša igra klavir.

Koliko so deklice stare?

Naloga ne spada v nabor tistih, kjer bi lahko razvili razumevanje problema s ponovnim branjem, podčrtavanjem podatkov in ključnih besed. Nalogo je treba začeti reševati, torej analizirati, poskušati, računati, sklepati ... Kaj lahko izračunam, kaj vem … skratka, razumevanje naloge se razvije skozi proces reševanja. Ko ugotovimo, kolikšna je hišna številka, nalogo razumemo. Zelo pomembno je vživljanje v problemsko situacijo, v pogovor prijateljev. Oba govorca namreč hišno številko vidita, reševalci naloge pa lahko na osnovi besedila in delnih reševalnih rezultatov sklepamo, katero število vidita.

Matematično je to problem s tremi neznankami (starosti deklet: x, y, z), zato potrebujemo tri enačbe, ki pa jih ne moremo izluščiti neposredno iz besedila. Zapišemo lahko naslednje zveze, ki problem 'povečajo' za eno spremenljivko, določilni pogoji za potrebno število enačb pa nam manjkajo.

$x\,y\,z = 36$ (produkt let)
$x + y + z = d$ (hišna številka)
$x > y$ in $x > z$, če je x starost najstarejše, veljata zapisana odnosa.

Vrnimo se k besedilu in postopajmo po običajnih navodilih za reševanje besedilnih nalog.

Podatki :

- 3 hčerke
- Najstarejša igra klavir.

Odnosi/povezave:

- Produkt njihovih let je (enak) 36.
- Vsota njihovih let je enaka številu, ki je hišna številka.

Vprašanje
Koliko so deklice stare?

Ključne besede: produkt, vsota, ena deklica je najstarejša
Sklepamo o 'skritih' podatkih in odnosih: ker je najstarejša samo ena deklica, dekleta niso trojčice, 2 deklici sta lahko dvojčici.

Razumevanje problema se ne aktivira s ponovnim branjem, ampak se ‚zgodi' v procesu reševanja. Manjkajoča numerična podatka za enolično rešitev problema odkrijemo s sklepanjem in rešitev lahko razberemo iz preglednice (tabela 2), če se lotimo reševanja sistematično in po načelu, kaj pa lahko izračunam.
Manjkajoča številska podatka sta hišna številka in 'najstarejša igra klavir'. Preglednica vseh možnih produktov in vsot nam pomaga ugotoviti hišno številko, razumeti pripombo 'nisi mi povedal dovolj' in pomen odgovora 'najstarejša igra klavir' ter izbrati rešitev problema. Rešitev 2, 2, 9 je intuitivno logična, zato je mogoče, da jo učenec ugane, vendar naloge ne razume. Zato sta pomembna končna analiza naloge in reševanja ter preverjanje razumevanja naloge. Primeri vprašanj za preverjanje

razumevanja: Koliko bi bila hišna številka, če bi bila dekleta stara 3, 3, 4 ? Koliko bi bile deklice stare, če bi bila hišna številka 14? Kako bi se lahko spremenilo besedilo naloge v teh primerih? Spremeni besedilo naloge, da bo rešitev 1, 6, 6.

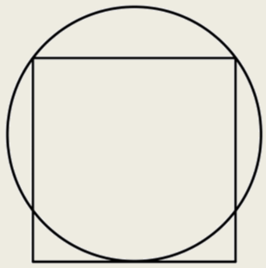
Tabela 2: Preglednica vseh možnih produktov in vsot nam pomaga izbrati rešitev problema.

36 kot nakazan produkt	Vsote faktorjev
1·1·36	1 + 1 + 36 = 38
1·2·18	1 + 2 + 18 = 21
1·3·12	16
1·4·9	14
1·6·6	**13**
2·2·9	**13**
3·3·4	10
6·2·3	11

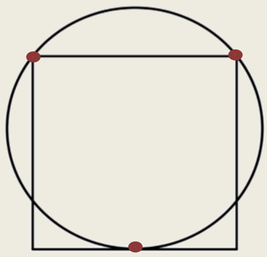
Poglejmo si še geometrijsko problemsko nalogo, ki je v tesni povezavi s predstavo o matematičnih pojmih.

Primer: Premer krožnice

Dana je stranica kvadrata: a = 20 enot. Koliko meri premer krožnice na sliki 2?



Slika 2: Slika k nalogi

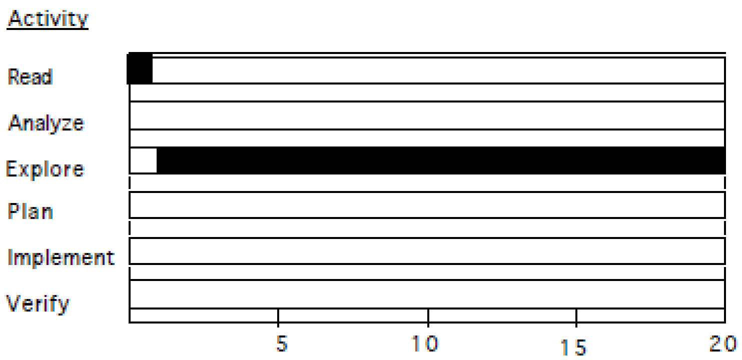


Slika 3: Skica za izvajanje načrta reševanja

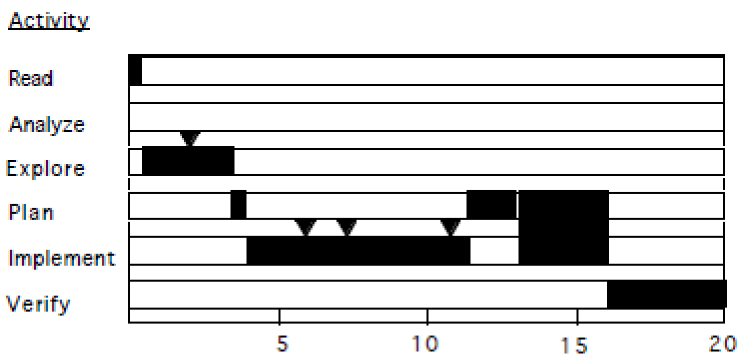
Tokrat je treba znati brati tudi sliko. Ena od poti reševanja lahko poteka prek načrtovanja (transfer). Simuliramo notranji pogovor reševalca: S podatkom je kvadrat določen. Ali znam načrtati krožnico? Videti je treba simetrijo in 3 od 5 skupnih točk kvadrata in krožnice (slika 3). Ali znam oceniti rezultat? Če je d premer krožnice, potem lahko na osnovi slike in podatka ocenim dolžino premera: $20 < d < 20\sqrt{2}$. Kje je središče krožnice?

Označene točke na sliki 3 povežejo novo problemsko situacijo z že znano: Krožnica je določena s tremi nekolinearnimi točkami, torej tudi središče in njen premer, ki ga lahko izračunamo, če znamo Pitagorov izrek. (d = 25 enot in ta rezultat pade v predviden interval za pričakovano rešitev).

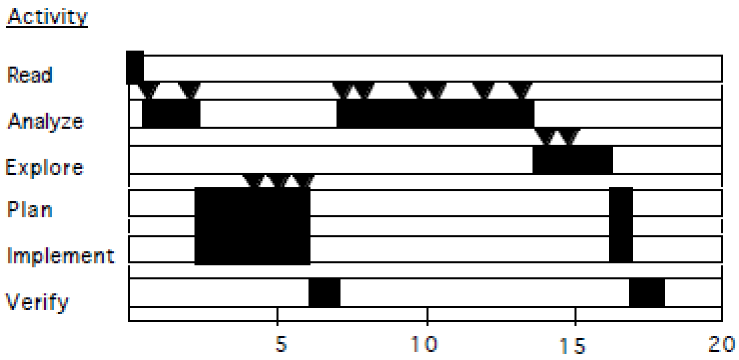
Če primerjamo predstavljene naloge Revija GEA, Kosila, Starost deklic, Nogomet in Premer krožnice, ugotovimo, da na razumevanje prebranega vplivajo različni parametri. Včasih oteži razumevanje kontekst (Revija GEA), drugič pa enostaven kontekst oteži matematizacija situacije (Kosila). Naloge oteži sintaksa, npr. zanikanih trditev ali celo vprašalnic in drugače oteženih formulacij kot 'preostalo od preostalega', desetina od preostalega, še posebej takrat, ko se deleži vežejo na neznane pojme. Težavnost je odvisna od števila kontekstualnih in matematičnih pojmov in podajanja teh pojmov ter oblike zapisa naloge, posebej podatkov. Starost deklic je prototip naloge, kjer razumevanja ne razvijemo z branjem, ampak z analizo in reševanjem. Za mlajše učence je podobna naloga Nogomet. Na uspešnost reševanja vpliva tudi zmožnost transferja in povezovanja, predvsem pa zmožnost analize dane situacije pri predpostavki, da je osnovna baza matematičnega znanja usvojena. V primeru deklic nam ponovno branje ne da uvida v razumevanje problema, če ne zapišemo nakazanih zmnožkov in izračunamo vseh vsot, v drugih primerih pa se razumevanje problema in vprašanj razvije ob analizi problema. Za načrtovanje in izvajanje ter verificiranje postopka in rezultata so potrebne določene matematične spretnosti in metakognitivna znanja, vendar je analiza problema ključen korak, ker je pogoj za vse nadaljnje faze v iskanju rešitve. Za dopolnitev razumevanja 'faz', predvsem pa miselnih procesov bomo primerjali faze reševanja problema, kot to pogosto naredijo učenci, s fazami reševanja eksperta (Schoenfeld, 1992). Schoenfeld je izpeljal številne študije, v okviru katerih je opazoval razvoj zmožnosti reševanja problemov in primerjal odzive študentov z odzivi ekspertov. Grafi (slike 4, 5, 6) prikazujejo razlike v miselnih procesih in dejavnostih reševalcev od branja, analize, raziskovanja, načrtovanja in izvrševanja do preverjanja. Na grafih prikazane dejavnosti (ki so podobne stopnjam znanja po TIMSS-u) ob reševanju nestandardnega problema so opazovane 20 minut (Schoenfeld, 1992: 358–360). Ne vemo, ali je bil posamezni problem uspešno rešen. Prikazane dejavnosti dejansko opisujejo možnost, da reševalec najde pravo pot do rešitve. Trikotne oznake označujejo mesta, ko so reševalci glasno komentirali svoja dognanja.



Slika 4: Dejavnosti študenta pri reševanju nestandardnega problema pred tečajem v reševanju problemov



Slika 5: Dejavnosti dveh študentov pri reševanju nestandardnega problema po tečaju v reševanju problemov



Slika 6: Dejavnosti eksperta pri reševanju težkega problema

Schoenfeld je ugotovil (prav tam), da so skromne dejavnosti (samo branje in raziskovanje) na sliki 4 značilne za več kot 60 % študentov. Dejansko gre za odločitev o načinu raziskovanja, napačni poskusi se ne analizirajo in ne iščejo se druge poti reševanja. Vztrajanje na izbrani napačni strategiji ni iskanje poti, zato tudi ne vodi do rešitve. Ekspert (slika 6) prepleta vse faze. Branje je v enaki meri zastopano na vseh treh grafih. Na sliki 5 ni analize. Pri ekspertu pa je najdaljša faza analize, verifikacija nastopi že po peti minuti reševanja in ne samo na koncu. Prva verifikacija usmeri eksperta v ponovno analizo primera. Zadnji graf kaže, da reševanje nestandardnih problemov tudi za eksperta ni linearen proces, zato te zmožnosti ne razvijamo z linearnimi usmeritvami in poudarjenim branjem, ampak s celostnim razvojem vseh in posameznih komponent zmožnosti, kar učni načrt opredeljuje kot problemska in procesna znanja.

Sklep

V delu prispevka smo se osredotočili na nekatere komponente jezikovnega razvoja pojmov in posledično bralne zmožnosti v smislu prepoznavanja, povezovanja in uporabe pojmov. Predstavili smo, da se neusvojenost pojmov ali drugačna pojmovna predstava lahko navidezno izkazujeta kot jezikovni vidik. V kontekstualiziranih nalogah je treba za končno presojo vzrokov razmejiti matematične in kontekstualne. Uporabo matematičnega jezika lahko izboljšamo z aktivnim vključevanjem učencev v oblikovanje dogovorov o imenih in simbolih ter z osmišljanjem teh dogovorov. Pri poučevanju uporabljamo (metaforične) razlage za nove pojme, učenci pa ustvarjajo svoje (metaforične) predstave, ki so lahko popolnoma ali deloma napačne. Zavedati se je treba, da jih lahko razvijamo z nepremišljenimi metaforami in neustreznimi modeli. Za besedami in simboli so pojmi, ki morajo imeti osmišljen matematični pomen.

Razvoj razumevanja pojmov in problemskih situacij ter reševanje problemov ni linearen proces, predvsem pa se miselne poti reševalcev razlikujejo. Miselna dejavnost, ki omogoči razumevanje problema, ni pogojena samo z 'natančnostjo' branja, ampak s številnimi drugimi miselnimi dejavnostmi, tudi s poskusi računanja oz. reševanja.

Matematična pismenost je celostni in dolgoročen cilj, dosegljiv z zapleteno učno potjo. Od besed k pojmom in strategijam pomeni tudi od besed k dejanjem: to so dejavnosti za razvoj konceptualnih znanj z razumevanjem in razvoj matematičnega mišljenja z reševanjem problemov, vse pa se prepleta z razvojem jezika, tako naravnega kot simbolnega. Za razvoj pismenosti si moramo najprej ustvariti dovolj širok pogled na pismenost (Hodnik Čadež, 2016; Žakelj, 2016) in nato načrtovati sistematično, vendar fleksibilno pot do zastavljenih ciljev na osnovi ugotovljenega predznanja in izkušenj učencev. V kombinaciji s spoznanji formativnega spremljanja začrtane poti, delnih oz. trenutnih in končnih pričakovanih dosežkov so lahko ta prizadevanja do želenih ciljev vidnejša in zato učinkovitejša. V pomoč sta tudi sistematično uzaveščenje lastnega pedagoškega pogleda na učenje in poučevanje ter pogleda na matematiko kot znanost in na matematiko kot šolski predmet.

Viri

1. Baranović, N. (2014): Učenje temeljeno na čitanju s razumijevanjem. Zbornik prispevkov, 2. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike, KUPM 2014. Pridobljeno 8. 8. 2016 na http://www.zrss.si/pdf/zbornik-prispevkov-kupm2014.pdf, str. 75–99.
2. Bešter Turk, M. (2011): Sporazumevalna zmožnost – eden izmed temeljnih ciljev pouka slovenščine. Jezik in slovstvo, letn. 56, št. 3-4, str. 111–130.
3. Borasi, R. (1990): Reading to learn mathematics: new connections, new questions, new challenges. For the Learning Mathematics, letn.10, št. 3, str. 9–16.
4. De Lange, J.: Mathematics for Literacy. Pridobljeno 7. 10. 2015 na http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/QL/pgs75_89.pdf.
5. Hodnik Čadež, T. (2014): Poučevanje matematike na razredni stopnji v luči sodobnih raziskav, Zbornik prispevkov, 2. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike, KUPM 2014. Pridobljeno 8. 8. 2016 na http://www.zrss.si/pdf/zbornik-prispevkov-kupm2014.pdf, str. 33–47.
6. Hodnik Čadež, T. idr. (2016): Bralna pismenost pri pouku matematike v 5. razredu osnovne šole. V: Devjak, T., Saksida, I. (ur.). Bralna pismenost kot izziv in odgovornost, str. 177–194.
7. Japelj Pavešić, B. (2012): Matematične naloge raziskave TIMSS: mednarodna raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja. Ljubljana: Pedagoški inštitut.
8. Labinowicz, E. (1989): Izvirni Piaget. DZS, Ljubljana.
9. Magajna, Z. (2003): Problemi, problemsko znanje in problemski pristop pri pouku matematike. Matematika v šoli, letn. 10, št. 3/4 (2002/2003), str. 129–138.
10. Nosrati, M., Wæge, K. (2014): What characterises good learning and teaching in mathematics? – A research based perspective. Pridobljeno 7. 6. 2016 na https://nettsteder.regjeringen.no/fremtidensskole/files/2014/05/Status-rapport-matematikksenteret.pdf.
11. Orton, A., Wain, G. (1994): Issues in Teaching Mathematics, Cassell, London.
12. Pimm, D. (1990): Speaking Mathematically, Routledge, London.
13. Pimm, D. (1995): Symbols and meaning in school mathematics, Routledge, London.
14. Schoenfeld, A. H. (1992): Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. V: Grouws, D. (ur.). Handbook for research on mathematics teaching and learning, str. 334–370, MacMillan, New York.
15. Stacey, K. (2012): The international assessment of mathematical literacy: PISA 2012 framework and items. Pridobljeno 7. 8. 2016 na https://www.researchgate.net/publication/300175793_The_International_Assessment_of_Mathematical_Literacy_PISA_2012_Framework_and_Itemsn.
16. Žakelj, A. (2016): Jezikovna dimenzija matematike in pouk matematike. V: Devjak, T., Saksida, I. (ur.). Bralna pismenost kot izziv in odgovornost, str. 143–176.

GEOMETRIJA ZA DANES IN JUTRI

DOKAZOVANJE OD MOČNIKA DO RAČUNALNIKA
Proving from Močnik to Computers

Dr. Zlatan Magajna
zlatan.magajna@pef.uni-lj.si
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Povzetek
V zadnjih dveh stoletjih se je funkcija dokazov in dokazovanja v šolski geometriji spreminjala bolj kot same geometrijske vsebine. Po odpravi formalne obravnave geometrije kot aksiomatskega sistema v drugi polovici 20. stoletja novejši učni načrti, bolj kot predhodni, spet poudarjajo pomen dokazov in dokazovanja v geometriji. Verjetno se bo spremenila tudi funkcija dokazov, kot nakazuje v prispevku predstavljena analiza odnosa med sodobnimi učnimi pripomočki (kot so programi dinamične geometrije in programi za avtomatsko dokazovanje) in današnjim pojmovanjem funkcije dokazov.

Abstract
In the last two centuries the function of proof and proving in school geometry has changed even more than the very content of geometry. A major change occurred after 1960 when the formal axiomatic was replaced with a more empirical and investigative approach. However, the recent mathematics curricula again emphasize the role of proof and proving in geometry. In the article we present an analysis of the relationship between modern teaching aids (such as dynamic geometry software and automated theorem provers) and the current conception of the function of proof in geometry. According to the analysis, further changes in the function of proof and proving in geometry may be expected.

Ključne besede
geometrija, funkcija dokaza, avtomatsko dokazovanje izrekov

Keywords
geometry, function of proofs, automated theorem proving

Uvod

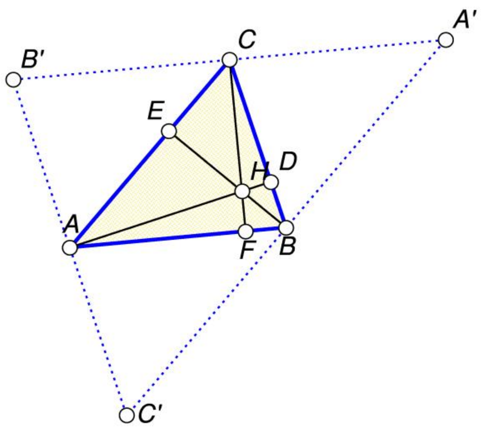
Sodobni učni načrti za matematiko obravnavajo dokazovanje kot eno ključnih procesnih znanj, geometrijske dokaze pa kot eno od pomembnejših sredstev za razumevanje pojma dokaza in za pridobivanje izkušenj o dokazovanju. V slovenskem učnem načrtu za osnovne šole (Ministrstvo za šolstvo in šport, 2008) sicer ne zasledimo formalnega dokazovanja, je pa na več mestih omenjeno utemeljevanje in argumentiranje matematičnih trditev. Učni načrti za srednjo šolo (npr. Ministrstvo za šolstvo in šport, 2011) pa predpisujejo glede na vrsto programov bolj ali manj temeljito in sistematično obravnavo formalnega dokazovanja. Podobne opise zasledimo v učnih načrtih mnogih primerljivih držav.

Kaj pa je pravzaprav namen dokazov izrekov v šolski matematiki? Deduktivni dokaz povezuje dane pogoje s posledico prek vmesnih trditev. Vsaka vmesna trditev na poti od pogojev do dokaza mora biti logična posledica pogojev, predhodnih trditev ali pa aksiomov in predhodno dokazanih izrekov. Za matematike je dokaz predvsem način utemeljitve pravilnosti matematične trditve. A kakor se šolska matematika razlikuje od matematike profesionalnih matematikov, tako se razlikuje tudi funkcija dokaza v šolski in v profesionalni matematiki. Kakšen je oz. naj bi bil pomen dokaza v sodobni šolski matematiki, sta opisala Hanna in De Villiers (De Villiers, 1990; Hanna, 2000). Med funkcijami dokaza, ki jih navajata, so najpomembnejše:

- verifikacija pravilnosti matematične trditve,
- razlaga oz. vpogled v razloge, zakaj je trditev pravilna,
- sistematizacija trditev v sistem, temelječ na dedukciji,
- odkrivanje novih trditev, ki jih lahko izpeljemo iz dokaza,
- sporočanje utemeljitev na način, ki je dogovorjen v matematični skupnosti,
- razjasnjevanje in raziskovanje pomena definicij in predpostavk v trditvah.

Poudarjanje navedenih funkcij dokaza se odraža v specifičnih načinih in stilih njihove obravnave. Nekateri učitelji poudarjajo temeljno idejo dokaza, brez tehničnih podrobnosti, nekateri povezovanje ali pa razjasnjevanje uporabljenih pojmov, nekateri formalne zapise dokazov ipd. (Hemmi, 2010).

Naj ponazorimo zgoraj navedene funkcije dokaza z naslednjim preprostim primerom (slika 1). Vsi vemo, da se simetrale stranic trikotnika sekajo v skupni točki in da je ta točka središče trikotniku očrtane krožnice. To je tudi zelo enostavno utemeljiti. Malo manj očitno pa je, da se tudi *nosilke višin trikotnika sekajo v skupni točki*. Po navadi to trditev dokažemo takole: Skozi vsako od oglišč danega trikotnika ABC potegnemo vzporednico s stranico, ki je nasproti oglišča. Te vzporednice kot nosilke stranic določajo trikotnik A'B'C' (slika 1). Trdimo, da so višine trikotnika ABC simetrale stranic trikotnika A'B'C'. Res: Nosilka višine na stranico AB je pravokotna na AB in torej tudi na njej vzporedno stranico A'B'. Dalje: po konstrukciji sta ABA'C in ABCB' paralelograma, torej je B'C ≅ AB ≅ CA', zato je C razpolovišče A'B'. Nosilke višin trikotnika ABC so torej simetrale stranic trikotnika A'B'C', te pa se, kot vemo, sekajo v skupni točki.



Slika 10

Ob tem dokazu izvemo ne le, da se nosilke višin trikotnika sekajo v skupni točki, temveč predvsem, zakaj je tako. Predstavljeni dokaz povezuje številna predhodno obravnavana geometrijska znanja (npr. simetrala stranic, središče očrtane krožnice, lastnosti paralelogram). Pri pouku lahko ta dokaz izvedemo zelo formalno (sistematično in urejeno argumentiramo vsak korak v dokazu), tako da se učenci ob tem učijo, kako zapisujemo natančno utemeljevanje geometrijskih trditev. Lahko pa pri obravnavi poudarimo le osnovno idejo brez natančnega zapisovanja utemeljitev.

Predstavljeni dokaz nas tudi privede do novih spoznanj, na primer: če leži višinska točka trikotnika znotraj trikotnika, potem to velja tudi za središče trikotniku očrtane krožnice.

V nadaljevanju bomo pokazali, da se je vloga dokaza v geometriji v obdobju sodobne šole, torej v zadnjih 200 letih, spreminjala, nemara bolj kot sama vsebina pouka geometrije. Zagotovo bo v prihodnjih letih in desetletjih treba ponovno premisliti o vlogi dokazov in dokazovanja v geometriji, saj so, kot bomo predstavili v zadnjem delu prispevka, na obzorju novosti, s katerimi se bo moral tako ali drugače soočiti pouk geometrije v šolah.

Geometrijski dokazi v nekdanji šoli
Vlogo dokazov in dokazovanja v geometriji v obdobju 1800–1950 je preučil Herbst (2002). V svoji analizi, ki se sicer nanaša na ameriški izobraževalni sistem, a je uporabna tudi za evropski prostor, je v pogledu funkcije dokaza in dokazovanja identificiral tri obdobja, vsako je okvirno trajalo 50 let.

Prvo obdobje je imenoval *obdobje prevzetih dokazov*. Učbeniki geometrije so v tem obdobju vsebovali izvirne trditve in dokaze iz Evklidovih Elementov. Avtorji se niso ukvarjali z razumljivostjo dokazov (nekatere izpeljave so bile hudo zapletene) in še manj z dokazovanjem kot procesnim znanjem. Preprosto ni bilo videti razlike med 'znati geometrijo, znati dokazati izreke in spomniti se dokazov izrekov' (Herbst, 2002: 289). Slike v učbenikih so bile redke, ni bilo nalog, povezanih z dokazovanjem.

Drugo obdobje je Herbst imenoval *obdobje prirejanja dokazov.* V ospredje je stopilo prizadevanje, da bi učeči se razumeli dokaze in da bi se ob dokazih tudi učili dokazovanja. Avtorji učbenikov so si prizadevali poenostaviti dokaze, včasih so zahtevne izpeljave opustili, na slikah so z različnimi oblikami črt vrisovali podane objekte in hipotetične objekte, katerih obstoj je treba šele dokazati. Poleg tega so enostavnejše dele dokazov prepustili bralcu, ki naj bi tako razvijal dokazovalne sposobnosti.

Tretje obdobje po Herbstu sega v 20. stoletje in ga poimenuje *obdobje vaj.* V tem obdobju je znanje dokazovanja postalo del geometrijskega znanja, v nekem smislu neodvisno od predstavljenih dokazov. Učeči se naj bi razumeli ne le pomen dokaza, temveč tudi strategije dokazovanja in naj bi znali tudi sami dokazovati geometrijske trditve. Šele v tem obdobju so se v učbenikih pojavile naloge, ki so namenjene dokazovanju in so neodvisne od predhodno predstavljenih dokazov. V tem obdobju so tudi razvili v našem prostoru malo poznan dvokolonski zapis geometrijskih dokazov.

Na prostoru bivše avstro-ogrske monarhije je pouk geometrije pomembno zaznamoval Franc Močnik. Na ravni nižje gimnazije (današnje predmetne stopnje osnovne šole) je Močnik zagovarjal na intuiciji in sistematičnem opazovanju temelječe učenje geometrije (Močnik, 1868). Preprosta oz. 'očitna' dejstva naj bi učenci ozavestili z opazovanjem, manj očitna dejstva pa naj bi utemeljili (dokazali). Do skladnostnih izrekov o trikotnikih tako pridemo z opazovanjem oz. izkušnjo (npr. vsak učenec v razredu načrta svoj trikotnik s podatki *sas*; izkaže se, da so vsi nastali trikotniki med seboj skladni). Pravilnost konstrukcije razpolovišča daljice z dvema enakokrakima trikotnikoma (oz. simetralo) pa Močnik v učbeniku dokaže s skladnostnimi izreki. V učbeniku geometrije za nižje gimnazije tako najdemo dokaze (teh je precej več kot v današnjih učbenikih). Sicer pa naj bi bilo v tedanji nižji gimnaziji naučeno natančno poznavanje dejstev o geometrijskih objektih priprava za formalno obravnavo geometrije v tedanji višji gimnaziji. V učbenikih za višjo gimnazijo in učiteljišča je Močnik izhajal iz poenostavljenega sistema Evklidovih aksiomov (Močnik, 1911). Obravnava je deduktivna in formalna, dokazi v učbenikih so zelo premišljeni in razumljivo predstavljeni, ni pa nalog o dokazovanju.

V Močnikovih učbenikih zlahka prepoznamo značilnosti *obdobja prirejanja dokazov.* Dokaz in dokazovanje sta bila bistven del geometrije, in to deloma že na ravni današnje predmetne stopnje osnovne šole. V značilnostih obravnave (v učbenikih in navodilih za izvajanje pouka, ne pa nujno v glavah učencev) lahko prepoznamo tako rekoč veliko elementov današnje funkcije dokazov in dokazovanja v šolski matematiki. Principi poučevanja geometrije, kakršne je zagovarjal Močnik in so bili kasneje oplemeniteni z učenjem samega dokazovanja, so se obdržali vse do šestdesetih let 20. stoletja, ko je prevladalo spoznanje, da so v praksi dokazi v šolski geometriji bolj kot z razumevanjem deduktivnih sklepov povezani z učenjem na pamet. Iz tega obdobja je znan Dieudonnejev rek: »Evklid mora oditi.« (Lingefjard, 2011)

Obdobje eksperimentiranja
Drugi del 20. stoletja so pouk geometrije zaznamovale spremembe, ki naj bi po eni strani pri učencih vodile do boljšega razumevanja geometrijskih pojmov in do razvijanja procesnih znanj, ki bi omogočala samostojno odkrivanje in tudi reševanje geometrijskih problemov. Po drugi strani pa naj bi skrčile ali celo ukinile formalno obravnavo geometrije kot aksiomatski sistem, saj naj bi taka obravnava pri pomembnem delu učencev vodila do pomnjenja brez poglobljenega razumevanja. Nekateri avtorji ali šolski sistemi so zato obravnavo geometrije osnovali na drugačnih temeljih (npr. na vektorskih prostorih), obravnava geometrije kot aksiomatski sistem se je zelo skrčila in poenostavila, prav tako tudi obseg sintetičnih dokazov, kakršni so prej prevladovali pri geometriji. Geometrija je postala učencem dostopnejša, razumljivejša, bližja njihovemu dojemanju sveta, in to predvsem na račun aksiomatske obravnave in dokazovanja.

V opisani okvir spada pomemben učni pripomoček, ki je konec 20. stoletja vstopil v šolsko geometrijo. Gre za računalniške programe dinamične geometrije. S temi programi je možno na dostopen način izjemno učinkovito ponazarjati geometrijske pojme. Z dinamičnimi slikami lahko raziskujemo pomene definicij, ponazarjamo trditve, predvsem pa enostavno eksperimentiramo. Na primer: veljavnost trditve, da se nosilke višin trikotnika sekajo v skupni točki, eksperimentalno preverimo tako, da izdelamo dinamično konstrukcijo trikotnika in nosilk njegovih višin, nato pa z 'vlečenjem' oglišč trikotnika vizualno preverimo trditev na ogromnem številu primerov. Nedvomno so programi dinamične geometrije odlično sredstvo za učenje geometrijskih pojmov in za razumevanje pomena geometrijskih trditev. Tega pa ne moremo trditi za učenje dokazovanja.

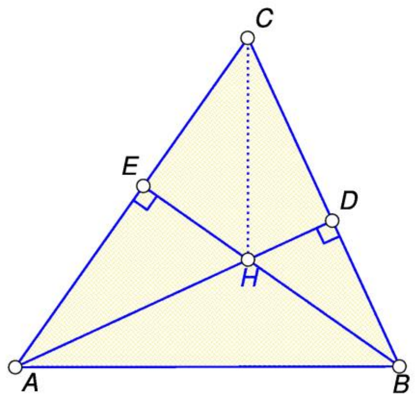
Programi dinamične geometrije pri učencih ne vzbujajo potrebe po deduktivni utemeljitvi geometrijskih trditev. Prvi razlog za to je podobnost med objekti na računalniško izdelanih slikah in tem, kar je na slikah predstavljeno. Slike na računalniškem zaslonu so izjemno natančne in podrobnosti na slikah (npr. presečišča nosilk višin) lahko 'poljubno' povečujemo. To je povsem drugače kot pri prostoročno narisani skici na papirju. Ko učenec interpretira prostoročno narisane objekte na skici, seveda razlikuje med sliko objekta (npr. črto) in tem, kar slika predstavlja (npr. premico). Kaj je na sliki, izve z opazovanjem, kaj velja za matematične objekte, pa izve z argumentacijo. Računalniške slike na zaslonih pa so tako natančne, da učenec ne čuti potrebe po razlikovanju med sliko objekta in tem, kar slika predstavlja. Slika je tako prepričljiva in tako 'enaka' matematičnim objektom, da učenci ne čutijo potrebe po dodatnem utemeljevanju. Drugi razlog je eksperimentalna učinkovitost programov dinamične geometrije. S pomikanjem prostih točk lahko neko trditev preverimo na ogromno primerih geometrijske konstrukcije. Na voljo so tudi številni ukazi za merjenje geometrijskih količin. Skladnost dveh kotov v konstrukciji enostavno preverimo tako, da ju izmerimo (do natančnosti računalniškega programa, tj. 14 veljavnih števk). Če se izmere ujemajo tudi pri vlečenju prostih točk v konstrukciji, je to zelo prepričljiva eksperimentalna potrditev trditve. Seveda pa to ni deduktivni dokaz.

Mnogi didaktiki so raziskovali, ali učenci uporabljajo dinamično geometrijo pri dokazovanju trditev in kako. Dejansko je dinamična geometrija lahko pomembna pomoč pri dokazovanju. Deduktivni dokaz povezuje dane pogoje s posledico prek vmesnih trditev. S pomočjo slike, ki jo generira program dinamične geometrije, opazujemo lastnosti, ki bi lahko služile kot vmesne trditve. Najpomembneje pa je, da z dinamično geometrijo enostavno in zanesljivo preizkusimo, ali neka opažena trditev drži. Če ne drži, se to hitro izkaže ob vlečenju prostih točk v konstrukciji. Z drugimi besedami, dinamična geometrija pomaga pri dokazovanju s tem, da omogoča zelo enostavno in učinkovito empirično preverjanje hipotetiziranih vmesnih trditev v dokazu (DeVilliers, 2010; Laborde, 2001).

V celoti vzeto pa je pristop, ki je značilen za obdobje eksperimentiranja, postavil v ozadje cilje, ki jih v šolski matematiki skušamo doseči z učenjem dokazov in učenjem dokazovanja. Če je nekoč del učencev deduktivne vidike geometrije jemal kot učenje na pamet, pa so ob spremenjenem pristopu imeli zmožnejši učenci bistveno manj priložnosti za razvijanje miselnih procesov, ki so značilni za dokazovanje.

Dokazovanje z računalnikom

Kot smo omenili v uvodnem razdelku, novejši učni načrti po svetu bolj kot predhodni poudarjajo pomen dokazov in učenje dokazovanja, tudi v geometriji. Seveda pa je ob tem treba poskrbeti, da se ne bi ponovile z dokazi povezane težave iz nekdanjih obdobij. Poleg vsebinsko-kurikularnih vprašanj in odločitev, povezanih z dokazi in dokazovanjem, je treba tudi razviti za današnji čas primerne načine obravnave. Dokazovanje se pravzaprav začne s tem, da učenci začutijo potrebo po deduktivni, neeksperimentalni argumentaciji (Hadas et al., 2000; Jahnke, 2007). Raziskujejo se tudi načini zapisovanja dokazov, ki bi pripomogli k čim lažjemu zapisovanju in k čim boljšemu bralnemu razumevanju geometrijskih dokazov (Wong et al., 2011). Z vidika funkcije dokaza pa so najbolj zanimive novosti, ki jih v šolsko geometrijo prinašajo programi dinamične geometrije. Pri orisu teh postopkov si bomo pomagali s trditvijo o višinah trikotnika, ki jo bomo zapisali nekoliko drugače (slika 2):



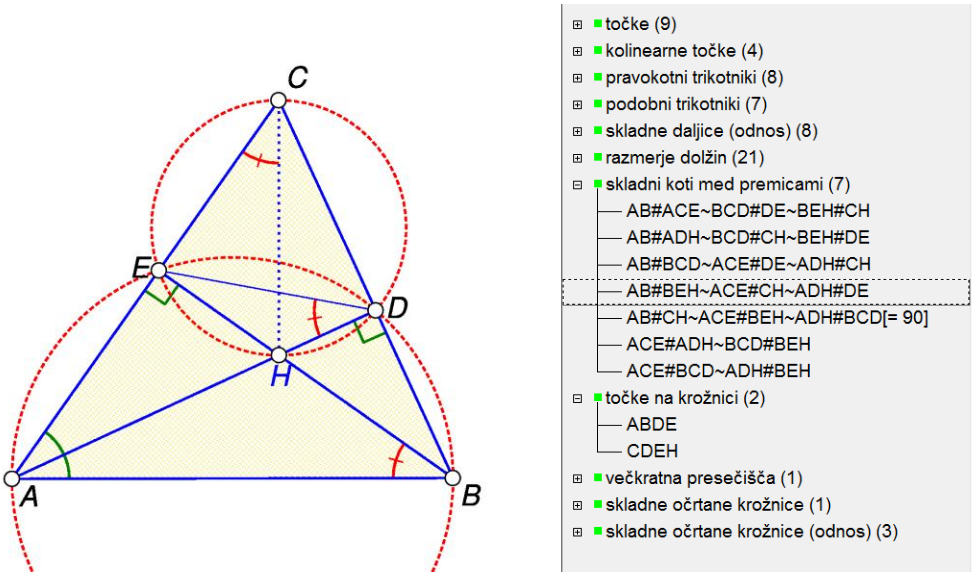
Slika 2

Pogoj*. Dan je trikotnik ABC. Naj bo D nožišče višine tega trikotnika iz oglišča A, E naj bo nožišče višine iz oglišča B, točka H pa naj označuje presečišče premic AD in BH.*
Posledica*. Premica CH je pravokotna na nosilko stranice AB.*

Trditev dokažemo tako, da z deduktivnimi sklepi povežemo pogoj s posledico. Kot smo že omenili, lahko učenec s pomočjo programa dinamične geometrije hitro eksperimentalno ugotovi, ali je hipoteza vredna preučitve. Če se na primer v naši nalogi učenec sprašuje, ali bi mu pri dokazu nemara pomagala hipotetična trditev, da se točka H nahaja na tretjini vsake od višin, bo z dinamično sliko in vlečenjem (ali kako drugače) svoje predvidevanje hitro ovrgel.

Če učenec ne opazi lastnosti, ki velja pri danih pogojih in bi mu lahko pomagala pri dokazu, potem to predstavlja oviro pri dokazovanju trditve. Kot pomoč pri preseganju te ovire je bil razvit program OK Geometry, ki učencu pomaga pri iskanju lastnosti dinamičnih konstrukcij. Preprosto povedano, program v dinamični konstrukciji pomika vse proste točke konstrukcije in preverja, katere lastnosti konstrukcije se ohranjajo pri pomikih. Pozoren je torej na veliko število lastnosti in eksperimentalno (torej numerično in z 'vlečenjem') ugotavlja, katere od teh lastnosti se ohranjajo pri vlečenju. Program torej ne dokazuje lastnosti, le opazi jih.

Poglejmo, kako si z OK Geometry lahko pomagamo pri naši nalogi. Odnos pravokotnosti premice HC in AB dokažemo tako, da dokažemo komplementarnost kotov $\angle$BAC in $\angle$ACH. OK Geometry najde številne lastnosti konstrukcije, med njimi poiščemo tisto ali tiste, ki se nanaša/-jo na $\angle$BAC. Program opazi, da je $\angle$ACH skladen $\angle$EDA, slednji pa $\angle$EBA, ki je očitno komplementaren $\angle$BAC. Pri dokazovanju skladnosti kotov $\angle$ACH, $\angle$EDA in $\angle$EBA si pomagamo z drugimi opaženimi lastnostmi, na primer z dejstvom iz nabora opažanj, da točke E,H,D,C in A,E,D,B ležijo na krožnicah in izrekom o obodnih kotih. Da točke A,H,D,C in A,E,D,B ležijo na krožnicah, utemeljimo s Talesovim izrekom o kotih nad premerom krožnice in pogojema pravokotnosti v nalogi.



Slika 3

Izkušnje kažejo, da je avtomatsko opazovanje velika pomoč pri opazovanju, ne pa nujno pri dokazovanju. Osnovna težava je veliko število lastnosti, ki jih zazna program. Manj vešči reševalci se ne znajo osredotočiti na tiste, ki so vsaj potencialno pomembne za dokaz neke trditve, in se enostavno zgubijo v veliki množici avtomatsko opaženih lastnosti (Magajna, 2013).

V preteklih desetletjih je več raziskovalnih skupin razvijalo postopke, ki bi omogočili avtomatsko dokazovanje geometrijskih trditev. Razviti postopki so konceptualno tako zahtevni, da ne sodijo v srednješolsko matematiko. Do nedavnega so bili tudi tako računsko zahtevni, da jih ni bilo moč izvajati na osebnih računalnikih. Danes pa nekateri programi dinamične geometrije, ki jih uporabljamo v šolski matematiki, vsaj v nekem obsegu že omogočajo avtomatsko dokazovanje geometrijskih trditev. Geogebra, pri nas in v velikem delu sveta najbolj razširjeni program dinamične geometrije, tako že vključuje dokazovanje geometrijskih trditev. Preden se posvetimo razmisleku o didaktičnem pomenu tega dejstva, orišimo ozadje avtomatskega dokazovanja v geometriji.

Pri avtomatskem dokazovanju se najbolje izkažejo algebrajske metode, ki so tudi najbolj razširjene. Ko želimo dokazati lastnost dane (dinamične) konstrukcije, najprej identificiramo vse proste točke konstrukcije. Proste točke predstavimo v kartezični ravnini kot točke, katerih koordinate so spremenljivke $A_1(x_1,x_2)$, $A_2(x_3,x_4)$,... Pogoje dokazovane trditve zapišemo kot polinomske enačbe $p_1(x_1,x_2,\ldots) = 0$, $p_2(x_1,x_2,\ldots) = 0$ … Prav tako lahko zapišemo s polinomsko enačbo $s(x_1,x_2,\ldots) = 0$ posledico, ki jo dokazujemo. Če uspemo zapisati polinom $s(x_1,x_2 \ldots)$ kot vsoto večkratnikov polinomov $p_1(x_1,x_2,\ldots)$, $p_2(x_1,x_2,\ldots)$, torej

$$s(x_1,x_2,\ldots) = r_1(x_1,x_2\ldots) \cdot p_1(x_1,x_2,\ldots) + \ldots + r_n(x_1,x_2,\ldots) \cdot p_n(x_1,x_2,\ldots),$$

pri čemer so $r_i(x_1,x_2,\ldots)$ polinomi, potem očitno pogoji $p_i(x_1,x_2,\ldots) = 0$ implicirajo posledico $s(x_1,x_2,\ldots) =0$ in trditev je s tem dokazana. A to ne gre vedno, zato skušamo izraziti kak večkratnik posledice kot vsoto večkratnikov polinomov, torej

$$q(x_1,x_2,\ldots)\cdot s(x_1,x_2,\ldots)=r_1(x_1,x_2,\ldots)\cdot p_1(x_1,x_2,\ldots)+\ldots+r_n(x_1,x_2,\ldots)\cdot p_n(x_1,x_2,\ldots).$$

Taka enačba pa pove, da iz pogojev $p_i(x_1,x_2,\ldots) = 0$ sledi posledica $s\boldsymbol{(x_1,x_2,\ldots)} = 0$, če je izpolnjen dodatni pogoj $q(x_1,x_2,\ldots) \neq 0$. Dodatni pogoj $q(x_1,x_2,\ldots) \neq 0$, zapisan v obliki polinoma, seveda terja geometrijsko interpretacijo, ki je lahko vse prej kot enostavna. Algebrajski postopki za izražanje večkratnika posledice kot vsote večkratnikov pogojev so konceptualno zahtevni in računsko lahko izjemno potratni. Dokaz je tudi v razmeroma preprostih primerih dolg in nepregleden nabor izračunov s polinomi.

Avtomatsko dokazovanje v programu Geogebra temelji na algebrajski metodi in je za uporabnika pravzaprav enostavno (Batana et al., 2015). Z ukazom Preveri (angl. Prove) preverimo, ali velja neka lastnost oz. pogoj, z ukazom PodrobnostiDokaza (angl. ProveDetails) pa izvemo za morebitne pogoje, pri katerih je bila trditev dokazana. V našem primeru o skupnem presečišču višin bi lahko postopali takole: V trikotniku ABC konstruiramo vse tri višine. Presečišče višin iz A in iz B označimo s H, presečišče višin iz B in C pa s K. Z ukazoma Preveri in Podrobnosti dokaza izvemo ali program uspe dokazati, da sta točki H in K enaki.

> **Ukaz:** Preveri[H$\stackrel{?}{=}$D]
> **Odgovor:** {true}
> **Ukaz:** PodrobnostiDokaza[H$\stackrel{?}{=}$D]
> **Odgovor:** {true, »SoKolinearne[A,B,C]«}

Izvemo torej le, da je računalniški program dokazal pravilnost trditve, in to pri pogoju, da točke A, B, C niso kolinearne (privzet je tudi pogoj, da so točke med seboj različne). Prav lahko pa se zgodi, da program ne uspe niti sprejeti niti zavrniti trditve. Možno je tudi, da je program dokaže trditev, a ne najde geometrijske interpretacije dodatnih pogojev, pri katerih dokaz velja. Avtomatsko dokazovanje v programih dinamične geometrije je šele v začetni fazi in se razmeroma pogosto zgodi, da program ne najde dokaza.

Programi za avtomatsko dokazovanje geometrijskih trditev uporabljajo tudi drugačne postopke dokazovanja. Posebej zanimivi sta metoda kotov in metoda ploščine. Ti metodi že v načelu nista uspešni v vseh primerih, njuna dobra stran pa je, da je pridobljeni dokaz mogoče predstaviti v obliki, ki je geometrijsko pomenska. Tako dobljeni dokazi so lahko dolgi in zelo drugačni od »človeške oz. šolske poti reševanja«.

Glede na razvoj metod avtomatskega dokazovanja v geometriji lahko pričakujemo, da bodo v nekaj letih v šolah najbolj razširjeni programi dinamične geometrije omogočali avtomatsko dokazovanje vseh ali vsaj večine geometrijskih trditev iz srednješolske matematike in tudi izdelali kolikor toliko berljive in razumljive dokaze (Janičić, 2014).

Programi za avtomatsko dokazovanje sicer lahko uspešno izdelajo dokaz geometrijske trditve. Očitno pa imajo tako dokazovanje in tako pridobljeni dokazi bolj malo skupnega s funkcijo dokaza, kakršno poznamo danes v šolski matematiki. Pridobljeni dokazi so – glede na uporabljeno metodo – lahko tako rekoč skriti ali odkriti zapleteni polinomski izračuni, v najboljšem primeru pa izpeljave, ki jih je sicer mogoče »dešifrirati«, a ne odražajo običajnega načina razmišljanja in ne poudarjajo didaktično pomembnih elementov.

Sklep

Dinamična geometrija kot učni pripomoček je nedvomno povezana s pomembnimi premiki pri učenju geometrije. Pred nami je, sicer še v začetni fazi, opremljanje programov dinamične geometrije s postopki avtomatskega dokazovanja trditev. To se dogaja v obdobju poudarjanja pomena dokazov in učenja dokazovanja v geometriji. Za zdaj dokazovalni postopki pri avtomatskem dokazovanju ne podpirajo funkcij dokazov, kot jih dojemamo danes. Verjetno je nemogoče napovedati, kako se bo v prihodnosti razvijala zgodba z dokazi in dokazovanjem v šolski geometriji. V prispevku smo prikazali, da se je pomen dokazov in dokazovanja spreminjal, vse odkar obstaja sodobna šola, zato lahko pričakujemo spremembe tudi v prihodnosti.

Možno je, da bo avtomatsko dokazovanje postalo del (srednje)šolske matematike. V tem primeru bo treba doseči, da bodo učenci zelo dobro razumeli pojem dokaza, zelo poglobljeno bo treba obravnavati preproste dokaze, tako da bodo učenci lahko osmislili postopek in rezultate avtomatskega dokaza. Zelo dobro bodo morali tudi razumeti pomen pogojev in znati interpretirati dodatne pogoje. Zahtevnejše dokazovalne postopke bodo nemara prepustili računalniku. V tem primeru se bo funkcija dokaza v šolski matematiki bistveno spremenila. Možno je, da se avtomatsko dokazovanje sploh ne bo dotaknilo (srednje)šolske matematike kljub prisotnosti avtomatskega dokazovanja v uporabljanih programih dinamične geometrije. In možno je tudi, da bo avtomatsko dokazovanje v šolski matematiki uporabljano kot povsem zanesljivo orodje za preverjanje, ki bi pri šolskem dokazovanju nekako nadomestilo vlečenje pri preverjanju vmesnih hipotetičnih trditev v dokazu. Pri uvajanju raznih tehnoloških novosti v šolsko matematiko so se odvijali zelo različni scenariji, tako da bosta čas in razvoj didaktike na tem področju pokazala, ali se bo funkcija dokaza in dokazovanja v šolski matematiki spremenila in kako.

Viri

1. Botana, F., Hohenwarter, M., Janičić, P. et al. (2015): Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements. *J Autom Reaso*ning, 55 (1), 39–55.
2. De Villiers, M. (1990*):* The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17–24.
3. DeVilliers, M. (2010): Experimentation and Proof in Mathematics. V: G. Hanna et al. (ur.), *Exploration and proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Springer.
4. Hadas, N., Hershkowitz, R., Schwarz, B. (2000): The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 127–150.
5. Hanna, G. (2000): Proof, Explanation and Exploration: an Overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 5–23.
6. Hemmi, K. (2010): Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics,* 75, 271–291.
7. Herbst, P. G. (2002): Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 283–312.
8. Jahnke, H. N. (2007): Proofs and Hypotheses. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *39* (1-2), 79–86.
9. Janičić, P. (2014): Computer Algebra and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education. http://cadgme2014.cermat.org/content/keynote-predrag-jani%C4%8Di%C4%87, (15. 4. 2017).
10. Laborde, C. (2001): Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Context for the Complex Activity of Proving. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 151–161.

11. Lingefjard, T. (2011): Rebirth of Euclidean Geometry? V: L. Bu, R. Shoen (ur.), *Model Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding using GeoGebra.* Sense Publishers, str. 205–215.
12. Magajna, Z. (2013): Overcoming the obstacle of poor knowledge in proving geometry tasks. *CEPS Journal*, 3 (4), 99–116.
13. Ministrstvo za šolstvo in šport (2008): Učni načrt. Matematika: gimnazija: splošna, klasična in strokovna gimnazija, Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
14. Ministrstvo za šolstvo in šport (2011): Učni načrt. Program osnovna šola. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
15. Močnik, F. (1868): *Geometria intuitiva per ginnasio inferiore*. Parte prima. Vienna: Carlo Gerold Tip.
16. Močnik, F. (1911): *Geometria per gli istituti magistrali.* Vienna: I.R. Deposito dei libri scolastici.
17. Wong, W. K., Yin, S. K., Yang, H. H., Cheng, Y. H. (2011): Using Computer-Assisted Multiple Representations in Learning Geometry Proofs. *Educational Technology & Society*, 14 (3), 43–54.

GEOMETRIJA IN KOMBINIRANO IZOBRAŽEVANJE
Geometry and Blended Learning

Nika Tajnikar, dr. Darja Antolin Drešar
nika.tajnikar@gmail.com, darja.antolin@um.si
Fakulteta za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru

Povzetek
Množično izvajanje elektronskega izobraževanja in uporaba elektronskih gradiv vedno bolj nadomeščata klasična tiskana gradiva in tradicionalno poučevanje. Zaradi teh sprememb smo se odločili preveriti, kakšne so prednosti sodobnejšega načina izobraževanja in ali je pouk z elektronskimi gradivi res kakovostnejši. V ta namen smo izvedli pedagoški eksperiment v programu splošne gimnazije, s pomočjo katerega smo primerjali učne dosežke dijakov pri poučevanju z elektronskimi gradivi v primerjavi s tradicionalnim poučevanjem s tiskanimi učbeniki. Ob analizi rezultatov raziskave smo ugotovili, da uporaba interaktivnih gradiv vpliva na učne dosežke učencev, saj so ti s pomočjo i-učbenika dosegli boljše učne rezultate.

Abstract
The use of electronic materials increasingly replace traditional printed materials and traditional teaching. Due to these changes, we decided to check what are the advantages of modern way of education and if teaching with electronic materials is really better. For this purpose, we conducted an educational experiment in general gymnasium program, through which we compared the learning achievements of students who were tought with electronic materials compared to traditional teaching with printed textbooks. Analyzing the results of the survey, we found that the use of interactive materials has an impact on students learning achievements, because students who were using the i-textbook achieved better learning outcomes.

Ključne besede
kombinirano izobraževanje, i-učbenik, poučevanje geometrije

Keywords
Blended learning, i-textbook, geometry teaching

Namen raziskave o vplivu kombiniranega izobraževanja na znanje dijakov

Danes je v šolah zelo prisotna izobraževalna tehnologija, ki močno posega v učni prostor, učiteljevo delo in učenje učencev. Na razpolago je vse več digitalnih medijev, vedno bolj pa učitelji izvajajo kombinirano izobraževanje z elektronskimi učnimi gradivi, saj jim omogoča posredovanje informacij na različne, učencem privlačnejše in zanimivejše načine. Ker naj bi po mnenju mnogih avtorjev e-učna gradiva prispevala h kakovostnejšemu izobraževanju, smo izvedli raziskavo, s katero smo želeli preveriti učinkovitost uporabe Vegovega interaktivnega učbenika v gimnaziji. Raziskavo smo si zamislili v obliki pedagoškega eksperimenta, pri katerem smo dva paralelna oddelka drugega letnika obravnavali kot eksperimentalno in kontrolno skupino ter nato preverjali njune rezultate. V eksperimentalno skupino smo vnesli eksperimentalni faktor i-učbenik.

Vpliv kombiniranega izobraževanja vsebin s področja geometrije v i-učbeniku Vega 2 na znanje dijakov

Tehnološki dosežki na področju komunikacije, informacije in računalništva danes ne spreminjajo le življenja slehernega posameznika in družbe kot celote, temveč vedno močneje posegajo tudi v vzgojno-izobraževalni sistem. Napredovanje izobraževalne tehnologije lahko opazimo v moderniziranih učilnicah z računalniki, diaprojektorji, interaktivnimi tablicami idr., prav tako pa tudi učenci pri svojem učenju in vsakdanjih dogodivščinah uporabljajo novodobno tehnologijo v obliki pametnih tablic in telefonov ter drugih tehnoloških izdelkov, ki so na voljo. Vdor tehnologije v izobraževanje prinaša s sabo tudi spremembe v obliki in načinu poučevanja ter uporabi sodobnejših pedagoških sredstev. Na temo implementacije IKT v vzgojno-izobraževalnih procesih je bilo izvedenih mnogo raziskav. Mednarodna raziskava SITES 2006 (Second International Information Technology in Education Study), v kateri je med 18 državami oz. izobraževalnimi sistemi sodelovala tudi Slovenija, je izpostavila, da so slovenske šole sicer dobro opremljene tako s strojno kot s programsko opremo, a da so učitelji bistveno bolj kompetentni na področju splošne uporabe IKT kot na področju uporabe IKT v pedagoške namene (Brečko in Rožman, 2006).

Novejša mednarodna raziskava ICILS 2013 (International Computer and Information Literacy Study), s katero je Mednarodna organizacija za evalviranje izobraževalnih dosežkov želela preveriti računalniško in informacijsko pismenost učencev, je bila izvedena v 21 državah in je pokazala, da so dosežki slovenskih osmošolcev relativno dobri – imamo npr. samo 8 % učencev, ki ne dosegajo niti prve zahtevnostne ravni, medtem ko je mednarodno povprečje 17 % (Mednarodna raziskava računalniške in informacijske pismenosti ICILS 2013 – Izročki za novinarje, 2014). Množično izvajanje elektronskega izobraževanja in uporaba elektronskih gradiv, katerih medij predstavljajo računalnik ali pametne tablice, nadomeščajo klasična tiskana gradiva in tradicionalno poučevanje. In prav zaradi teh sprememb smo se odločili preveriti, kakšne so prednosti sodobnejšega načina izobraževanja in ali je pouk z elektronskimi gradivi res kakovostnejši. V ta namen smo izvedli raziskavo v programu splošne gimnazije, s pomočjo katere smo želeli primerjali učne dosežke dijakov pri tradicionalnem poučevanju s tiskanimi učbeniki in poučevanju z elektronskimi gradivi, natančneje z i-učbenikom za matematiko Vega 2. Raziskavo smo si zamislili v obliki pedagoškega eksperimenta, pri katerem smo dva paralelna oddelka drugega letnika obravnavali kot eksperimentalno in kontrolno skupino ter nato preverjali njune rezultate. Za izpeljavo pedagoškega eksperimenta smo potrebovali pametno tablico za vsakega izmed dijakov, internetno povezavo, računalnik in projektor. Pouk v eksperimentalni skupini je potekal po načelih kombiniranega e-izobraževanja, pri čemer so se tradicionalne oblike in metode (npr. načrtovanje z geometrijskim orodjem) prepletale z e-učenjem in smiselno uporabo i-učbenika. Pedagoški eksperiment sta sestavljala začetno in končno preverjanje znanja ter 5 šolskih ur pouka. Pred začetkom obravnave nove učne vsebine so učenci obeh skupin reševali začetni test oz. predtest, dolg 45 minut. Njegov namen je bil ugotoviti splošno matematično znanje učencev. Začetni preizkus znanja je bil sestavljen iz nalog nacionalnega preverjanja znanja za deveti razred iz leta 2014. Ker je za reševanje tega preverjanja praviloma namenjeno 60 minut, mi pa smo imeli časa le eno šolsko uro, smo za začetni test izbrali le 7 nalog od 11. Reševanje je potekalo individualno, za pomoč so imeli le list z obrazci, ki je priložen tudi nacionalnemu preverjanju znanja. Naloge so bile točkovane z 2, 4 ali 5 točkami, odvisno od njihove zahtevnosti in dolžine. Nato pa smo začeli z obravnavo novega poglavja, in sicer z *Evklidsko geometrijo*. Učna vsebina, ki smo jo v času raziskave poučevali, je bila sestavljena iz povezanih tem poglavja *Evklidska geometrija*, in sicer *Osnove geometrije v ravnini*, *Koti* ter *Togi premiki in skladnost*. Končni preizkus znanja je obsegal 6 nalog, za reševanje pa so imeli od 30 do 35 minut časa. Sestavili smo ga sami, naloge so bile sestavljene tako, da so zadoščale vsaki taksonomski stopnji znanja (konceptualno, proceduralno in problemsko znanje) in so ustrezale vsebinam, ki smo jih obravnavali v času pedagoškega eksperimenta. Točkovane so bile z 2, 3, 4 ali 6 točkami, prav tako odvisno od njihove zahtevnosti in dolžine.

<u>Postopki obdelave podatkov</u>

Razlike v znanju eksperimentalne in kontrolne skupine so bile izmerjene z metodami deskriptivne in inferenčne statistike. Pri analizi smo se najprej osredotočili na obdelavo podatkov začetnega in končnega preizkusa znanja, nato pa smo se poglobili tudi v primerjavo posameznih nalog. Pridobljene rezultate smo obdelali in analizirali s statističnim programom SPSS na podlagi zastavljenih hipotez. V našem primeru smo uporabili T-test za neodvisne vzorce, s katerim smo ugotavljali, ali pride do statistično pomembnih razlik v povprečjih dveh skupin. V izračunani tabeli smo se osredotočili na vrednost signifikance (stopnja zaupanja), in sicer:

- za vrednost > 0,05 smo obdržali ničelno hipotezo glede na T-test, ki pravi, da med povprečji skupin ni statistično značilnih razlik oz. sta povprečji enaki;
- za vrednost < 0,05 ničelno hipotezo T-testa zavrnemo, kar pomeni, da med povprečji skupin obstajajo statistično značilne razlike oz. sta povprečji različni.

<u>Raziskovalne hipoteze, rezultati in interpretacija</u>

Pred izvedbo pedagoškega eksperimenta smo si najprej izdelali raziskovalni načrt in si postavili hipoteze oz. raziskovalna vprašanja, s katerimi smo si začrtali rdečo nit celotne raziskave. Raziskovalna vprašanja in hipoteze so temeljili na primerjavi predznanja oz. matematičnih sposobnosti učencev, razlik v učnih dosežkih in razlik v stopnji tipa znanj med eksperimentalno in kontrolno skupino ob koncu raziskave.

Pri primerjavi učnih rezultatov smo se osredotočili predvsem na rezultate eksperimentalne skupine, ki smo jo poučevali s pomočjo interaktivnega učbenika. Ker smo s pomočjo kontrolne skupine, v kateri poučevanja nismo spreminjali z interaktivno tehnologijo, primerjali rezultate, nas je zanimalo tudi predznanje obeh skupin.
Prva hipoteza, ki smo si jo zastavili, je predpostavljala, da med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine ne bo statistično značilne razlike v rezultatih začetnega preizkusa znanja. Iz izračunanih podatkov v tabeli 1 je razvidno (vrednost signifikance 0,268 > 0,05), da med povprečji eksperimentalne in kontrolne skupine ni prišlo do statistično pomembnih razlik. Glede na dobljene rezultate smo prvo hipotezo **potrdili**.
S potrjeno hipotezo smo potrdili tudi osnovno načelo enakovrednosti paralelnih razredov, kar pomeni, da naj bi si bili paralelni razredi med seboj enakovredni po sposobnostih in spretnostih učencev in zato naj bi bili tudi njihovi dosežki med seboj primerljivi.

Tabela 1: Vrednosti T-testa pri začetnem preizkusu znanja

Rezultati začetnega preizkusa znanja	Število ustreznih dijakov	Povprečje doseženih točk	Standardni odklon	Standardna napaka povprečja
Eksperimentalna skupina	21	20,10	6,172	1,347
Kontrolna skupina	21	17,90	6,465	1,411
Vrednosti neodvisnega T-testa	**F[1] = 0,007**	**P[2] = 0,932**	**t[3] = 1,123**	**P[4] = 0,268**

Pri testiranju razlik med kontrolno in eksperimentalno skupino glede na končni preizkus znanja smo predpostavili, da bo med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine vidna statistično značilna razlika v rezultatih končnega preizkusa znanja v korist učencev eksperimentalne skupine.

Iz tabele 2 lahko vidimo, da je vrednost signifikance 0,028 < 0,05, kar pomeni, da so med povprečji skupin eksperimentalne in kontrolne skupine statistično pomembne razlike oz. se povprečji med sabo razlikujeta. Glede na te rezultate je očitno, da je bila eksperimentalna skupina, ki je osnovne pojme *evklidske geometrije* obravnavala s pomočjo i-učbenika na pametnih tablicah, uspešnejša pri končnem preizkusu znanja, zato lahko hipotezo 2 **potrdimo**.
S tem smo potrdili tudi trditve različnih avtorjev, da elektronska gradiva pripomorejo h kakovostnejšemu pouku, i-učbenik pa s svojo interaktivnostjo in dinamičnostjo pripomore k zanimivejšemu in privlačnejšemu učenju ter boljšim učnim dosežkom.

Tabela 2: Vrednosti T-testa pri finalnem preizkusu znanja

Rezultati finalnega preizkusa znanja	Število ustreznih dijakov	Povprečje doseženih točk	Standardni odklon	Standardna napaka povprečja
Eksperimentalna skupina	21	12,90	2,700	0,589
Kontrolna skupina	21	10,76	3,360	0,733
Vrednosti neodvisnega T-testa	**F = 1,145**	**P = 0,291**	**t = 2,278**	**P = 0,028**

Testiranje razlik med eksperimentalno in kontrolno in eksperimentalno skupino glede na tip nalog končnega preizkusa znanja

V pedagoškem eksperimentu smo preverjali tudi razlike med eksperimentalno in kontrolno skupino glede na tip znanja posameznih nalog (konceptualno, proceduralno

[1] F = Vrednost Levenovega testa
[2] P = Stopnja zaupanja Levenovega testa
[3] t = Vrednost T-testa
[4] P = Signifikanca

in problemsko znanje). Pri testiranju smo preverjali tretjo zastavljeno hipotezo, ki je trdila, da bodo statistično značilne razlike v stopnji tipa znanj med eksperimentalno in kontrolno skupino. Eksperimentalna skupina bo dosegla višjo stopnjo pri konceptualnem in problemskem znanju.

Tabela 3 prikazuje rezultate primerjave med eksperimentalno in kontrolno skupino vsake naloge končnega preizkusa znanja posebej.

Tabela 3: Vrednosti T-testa pri posameznih nalogah končnega preizkusa znanja

Primerjava posamezne naloge med obema skupinama 1 – eksperimentalna skupina 2 – kontrolna skupina		Število ustreznih dijakov	Povprečje doseženih točk	Stan. odklon	Stan. napaka povprečja
1. naloga	1	21	3,10	1,179	0,257
	2	21	2,57	1,469	0,321
Vrednosti neodvisnega T-testa	**F = 1,189 P = 0,282 t = 1,274 P = 0,210**				
2. naloga	1	21	1,90	0,301	0,066
	2	21	1,86	0,478	0,104
Vrednosti neodvisnega T-testa	**F = 0,716 P = 0,402 t = 0,386 P = 0,701**				
3. naloga	1	21	0,90	1,375	0,300
	2	21	0,76	1,221	0,266
Vrednosti neodvisnega T-testa	**F = 0,990 P = 0,326 t = 0,356 P = 0,724**				
4. naloga	1	21	3,43	1,207	0,263
	2	21	3,10	1,179	0,257
Vrednosti neodvisnega T-testa	**F = 0,923 P = 0,342 t = 0,905 P = 0,371**				
5. naloga	1	21	0,95	0,973	0,212
	2	21	0,71	0,845	0,184
Vrednosti neodvisnega T-testa	**F = 2,518 P = 0,120 t = 0,846 P = 0,402**				
6. naloga	1	21	2,62	0,973	0,212
	2	21	1,76	1,375	0,300
Vrednosti neodvisnega T-testa	**F = 9,790 P = 0,003 t = 2,332 P = 0,025**				

Iz izračunanih podatkov smo lahko opazili, da pride do statistično pomembnih razlik le pri 6. nalogi. In ker v skupino problemskega tipa znanj spada samo ta naloga, lahko vidimo, da so učenci eksperimentalne skupine dosegli višjo stopnjo znanja pri problemskem znanju.

V nadaljevanju smo preostale naloge (torej od 1. do 5. naloge) razdelili v dve skupini, in sicer glede na konceptualno in proceduralno znanje. V skupino konceptualnega znanja smo uvrstili 1., 2. in 5. nalogo, medtem ko smo 3. in 4. nalogo uvrstili v skupino proceduralnega znanja. Rezultati primerjave med eksperimentalno in kontrolno skupino glede na posamezno skupino tipa znanj so predstavljeni v tabelah 4 in 5.

Iz izračunanih podatkov v tabeli 4 je razvidno (vrednost signifikance 0,230 > 0,05), da ni prišlo do statistično pomembnih razlik v povprečju nalog konceptualnega tipa znanj med eksperimentalno in kontrolno skupino.

Pri nalogah, ki preverjajo konceptualno znanje, smo pričakovali drugačen rezultat, saj učenci najprej usvojijo konceptualna znanja in šele nato razvijajo proceduralna znanja. In prav tako deluje tudi i-učbenik, saj daje poudarek predvsem konceptualnemu znanju, ki nam omogoča abstraktno razumevanje principov in relacij ter šele nato učenci preidejo na proceduralno znanje.

Tabela 4: Vrednosti T-testa pri nalogah konceptualnega tipa znanja

Rezultati primerjave konceptualnega znanja	Število dijakov	Število ustreznih nalog	Povprečje doseženih točk	Standardni odklon	Standardna napaka povprečja
Eksperimentalna skupina	21	63 (3·21)	1,98	1,251	0,158
Kontrolna skupina	21	63 (3·21)	1,71	1,263	0,159
Vrednosti neodvisnega T-testa	**F = 1,123 P = 0,291 t = 1,205 P = 0,230**				

Tabela 5 prikazuje rezultate nalog, ki preverjajo proceduralni tip znanja. Iz nje je razvidno, da je vrednost signifikance 0,533 > 0,05, kar pomeni, da ni prišlo do statistično pomembnih razlik v povprečju nalog proceduralnega tipa znanj med eksperimentalno in kontrolno skupino. Dobljeni rezultati nas niso presenetili, saj tiskani učbeniki dajejo večji poudarek nalogam proceduralnega tipa znanj in smo pričakovali, da bodo rezultati precej izenačeni.

Tabela 5: Vrednosti T-testa pri nalogah proceduralnega tipa znanja

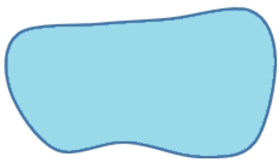
Rezultati primerjave proceduralnega znanja	Število ustreznih dijakov	Povprečje doseženih točk	Standardni odklon	Standardna napaka povprečja
Eksperimentalna skupina	42	2,17	1,807	0,279
Kontrolna skupina	42	1,93	1,673	0,258
Vrednosti neodvisnega T-testa	**F = 0,214**	**P = 0,645**	**t = 0,627**	**P = 0,533**

Na podlagi primerjave vseh treh vrst znanja (konceptualno, proceduralno in problemsko) lahko tretjo hipotezo **delno potrdimo**, saj je le pri problemskem znanju prišlo do statistično značilne razlike med obema skupinama s prednostjo učencev eksperimentalne skupine.

Dodatne ugotovitve

Pri izvedbi pedagoškega eksperimenta smo prišli tudi do nekaterih naslednjih pomembnejših ugotovitev:

- Pred uporabo interaktivnih nalog se mora učitelj zavedati raznih pasti, na katere lahko naletijo učenci (npr. pri nalogi, v kateri so slike na levi strani morali povezati z njihovimi opisi na desni strani, so imeli učenci na začetku precej težav, saj niso vedeli, kako povezati slike s pravilnimi opisi. Po podrobnejših navodilih reševanja pa so vsi hitro prišli do pravilnih rešitev). Takšnim težavam se da izogniti, če se na pouk dobro pripravimo in predčasno analiziramo posamezne dele pouka in naloge, ki jih nameravamo reševati z učenci.
- S pomočjo končnega testa smo ugotovili, da učenci niso dobro razumeli pojma roba polravnine, saj je bila slika v obliki kvadrata oz. paralelograma in so stranico lika zamenjali za rob polravnine. Predlagamo, da bi bila ravnina v takšnih primerih, ki lahko hitro zmedejo učence, predstavljena kot sklenjena krivulja nepravilne oblike. Pri tem zagotovo ne bi prišlo do nerazumevanja oz. do zmede. Ravnino bi lahko na primer upodobili, kot kaže spodnja slika.



Slika 1: Primer upodobitve ravnine

- Nekatere učne enote so učenci sposobni predelati tudi individualno, samostojno s pomočjo interaktivnega učbenika, saj nam le-ta z raznimi interaktivnimi in dinamičnimi apleti pomaga razumeti določene snovi.
- Interaktivnost je zelo dobrodošla pri vsebinah, kjer bi s tradicionalnimi tiskanimi nalogami učenci sami teže prišli do spoznanja novih pojmov (npr. s premikanjem točke na enem izmed krakov kota na aktivni sliki so učenci individualno raziskovali vrste kotov glede na obliko – ničelni, iztegnjeni, polni, konkavni in

konveksni kot – in so tako z lastno aktivnostjo sami ugotovili različne vrste kotov in njihove opise).

- E-gradiva so slabo prilagojena nekaterim skupinam uporabnikom (otroci s posebnimi potrebami, slabovidni, starejši …). Na to pomanjkljivost smo naleteli tudi mi v času naše raziskave. Slabovidna učenka je imela precej težav z delom na pametni tablici, saj je morala nekatere aktivne slike zelo približati, s tem pa se je preglednost zelo izgubila.
- Ker za sprotno risanje v zvezke včasih zmanjka časa, je dobro, da učencem pred poukom pripravimo liste z določeno vsebino in si s tem prihranimo čas (npr. učencem smo primere različnih vrst kotov natisnili na posamezne liste, ki so si jih morali prilepiti doma; vrste kotov smo obravnavali s pomočjo interaktivne slike v i-učbeniku, namesto risanja v zvezke pa smo tako prihranili ogromno časa).
- Nekatere naloge v i-učbeniku niso tako zelo pomembne za razumevanje snovi, zato jih je včasih dobro izpustiti in si s tem prihraniti čas.
- Zaradi lažjega razumevanja in v izogib zmedi z indeksi raje uporabimo različne oznake črk kot označevanje z indeksi (npr. raje M in N kot pa L_1 in L_2).

<u>Omejitve raziskave</u>

V okviru raziskave smo izvajali pedagoški eksperiment, ki je metoda sociološkega raziskovanja, kjer problematiko raziskujemo s poskusi pri kontroliranih pogojih. Pogoji morajo biti ustrezno postavljeni, tako da lahko poskus ponovno izvede drugi raziskovalec. Ker je pri izvajanju eksperimentov zelo težko ustvariti idealne pogoje raziskovanja, smo tudi pri našem pedagoškem eksperimentu naleteli na nekatere omejitve, in sicer:

- eksperiment v eksperimentalni in kontrolni skupini ni bil izveden sočasno, saj je zaradi ujemanja vsebine prišlo do časovnega razmika. V kontrolni skupini so z obravnavanjem osnov evklidske ravnine začeli nekoliko kasneje kot v eksperimentalni skupini;
- eksperimentalno skupino z eksperimentalnim faktorjem (i-učbenikom) sem poučevala sama, medtem ko je kontrolno skupino s tiskanim učbenikom poučevala njihova profesorica matematike.

Poučevanje dveh različnih učiteljev vpliva na rezultate, saj učenci drugače sprejmejo novega učitelja in se na različne situacije ne odzovejo enako kot po navadi. Prav tako imata dve profesorici različne načine pristopa k poučevanju in ustvarjanju discipline, kar vpliva na oblikovanje razredne klime in odnosov, tako med učenci samimi, med učenci in učitelji ter učenci in predmetom na splošno. Tudi časovni razmik vpliva na rezultate eksperimenta, saj različna časovna obdobja različno vplivajo na učence (npr. takratno vreme, možnost večjega stresa in vznemirjenosti zaradi preizkusov in preverjanj znanj, spraševanj …). Kljub tem omejitvam pa je bil eksperiment kar se da dobro načrtovan in izveden, zato do večjih težav in problemov ni prišlo, prav tako pa smo z dobljenimi rezultati zadovoljni in so v večini skladni z našimi pričakovanji.

Zaključki raziskave

Z razvojem elektronskega izobraževanja se je odprla nova oblika pouka, ki je učencem bližja, saj vsebuje zanimivejše in atraktivnejše elemente, kar po drugi strani predstavlja večje izzive za učitelja. Poučevanje z elektronskimi gradivi ima tako po besedah mnogih avtorjev kot tudi po naših ugotovitvah več prednosti kot pomanjkljivosti, saj takšen pristop veliko bolj motivira učence za nadaljnje učenje, se prilagaja različnim učnim stilom, razni interaktivni elementi olajšajo učenje, prav tako pa omogoča konstruktivistični in raziskovalni pristop k učenju. Ker se vedno bolj uveljavlja praksa uporabe elektronskih učnih gradiv v primerjavi s tiskanimi gradivi, smo se odločili, da z raziskavo ugotovimo, ali je elektronsko izobraževanje res boljše in kakovostnejše ter prinaša boljše dosežke znanja kot tradicionalni pouk. Na podlagi pedagoškega eksperimenta smo testirali razlike med eksperimentalno skupino, v katero smo vnesli eksperimentalni faktor i-učbenik, in kontrolno skupino, kjer je pouk potekal tradicionalno s pomočjo tiskanih učbenikov. Razliko smo merili na podlagi začetnega preizkusa znanja, ki smo ga izvedli pred obravnavo vnaprej določene vsebine (osnove evklidske geometrije) in je preverjal splošne matematične sposobnosti učencev, ter končnim testom, ki je sledil obravnavi in s katerim smo preverjali doseženo znanje ob obravnavi snovi v okviru raziskave. Raziskava je potekala po zastavljenih smernicah, zato pri izvedbi eksperimenta nismo imeli težav. Poskrbeli smo, da sta obe skupini obravnavano snov usvojili v enakem časovnem obdobju. Prav tako smo se trudili čim bolj nevtralizirati dejavnike, ki bi lahko vplivali na izid raziskave. Ob analizi rezultatov raziskave smo ugotovili, da med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine ni bilo razlik v predznanju oz. splošnih matematičnih sposobnostih. Tudi načelo paralelnosti razredov teži k temu, da so učenci v razrede razporejeni tako, da med učenci iste generacije ne prihaja do večjih razlik v učnih sposobnostih. Po izvedenem končnem testu smo ugotovili, da uporaba interaktivnih gradiv, v našem primeru i-učbenika Vega, vpliva na učne dosežke učencev. Razlika je bila statistično značilna v prid eksperimentalne skupine. S tem smo potrdili naša predvidevanja in zastavljeno hipotezo. Kljub temu pa nismo potrdili predvidevanja, da se pri poučevanju z i-učbenikom pokažejo razlike pri konceptualnem in problemskem znanju, saj pri primerjavi nalog ni bilo zaznati statistično značilne razlike.

Viri

1. Brečko, B. N., Rožman, M. (2006): *Nacionalno poročilo SITES 2006.* Ljubljana: Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport.
2. Mednarodna raziskava računalniške in informacijske pismenosti ICILS 2013 – Izročki za novinarje. (2014): Ljubljana: Pedagoški inštitut. Pridobljeno 14. 12. 2016 s http://www.pei.si/UserFilesUpload/ICILS_izrocki%20ZA%20novinarje.pdf.
3. Tajnikar, N. (2015). *Evalvacija matematičnega i-učbenika za gimnazije.* Magistrsko delo, Maribor: Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko.

GEOMETRIJA NA POKLICNI MATURI IZ MATEMATIKE

Geometry at Vocational Matura in Mathematics

Mag. Mojca Suban
mojca.suban@zrss.si
Zavod RS za šolstvo

Povzetek
V prispevku sta predstavljeni analiza nalog iz geometrijskih vsebin na poklicni maturi iz matematike in uspešnost kandidatov pri njihovem reševanju v obdobju od 2006 do 2016. V analizi so bili uporabljeni podatki za spomladanske izpitne roke v omenjenih letih, saj podatkov o uspešnosti kandidatov pri posamezni nalogi za jesenski in zimski rok poklicne mature na Državnem izpitnem centru (RIC) ne zbirajo. Analiza obsega pregled in opis nalog iz geometrijskih vsebin za posamezne izpitne pole, indekse težavnosti (IT) za te naloge in indekse težavnosti za celotne izpitne pole.
Rezultati analize so pokazali, da v povprečju kandidati naloge iz geometrijskih vsebin rešujejo slabše kot preostale naloge. Razloge za to bi lahko iskali med neutrjenim znanjem, nerazumevanjem pojmov, nepriljubljenostjo vsebin med nekaterimi kandidati in slabo prostorsko predstavo.

Ključne besede
poklicna matura, matematika, geometrija

Abstract
The paper presents analysis of geometry items and achievements of candidates on vocational matura in the period from 2006 to 2016. Only spring examinations period data are available for these years since National examination centre doesn't collect all the data for autumn and winter examination period. Analysis encompasses the overview and description of all geometry items, the item difficulty index and the examination paper difficulty index. Results of the item analysis shows in general that geometry items successful rate is lower than the whole examination paper successful rate. The reasons for that are multifaceted and have to do with diversity of candidates, approaches to geometry, number of geometry lessons, understanding geometry and popularity of geometry.

Keywords
vocational matura, mathematics, geometry

Uvod

Poklicna matura iz matematike je eksterni izpit, s katerim se ugotavlja matematično znanje ob zaključku srednješolskega izobraževanja v strokovnih programih. Posebej nas je zanimalo, kako uspešno rešujejo kandidati naloge, ki so povezane z geometrijskimi vsebinami. V ta namen smo analizirali naloge iz geometrijskih vsebin in uspešnost kandidatov pri njihovem reševanju v obdobju od 2006 do 2016. V analizi so bili uporabljeni samo podatki za spomladanske izpitne roke v omenjenih letih, saj podatkov o uspešnosti kandidatov pri posamezni nalogi za jesenski in zimski rok poklicne mature na Državnem izpitnem centru (RIC) ne zbirajo.

Treba je omeniti, da podatke o uspešnosti kandidatov po posamezni nalogi zbirajo le na manjšem vzorcu in ne za celotno populacijo, ki opravlja poklicno maturo. Za obravnavana leta je bilo v vzorcu med 254 in 363 izpitnih pol, kar je okrog 6,4 % vseh izpitnih pol na spomladanskem roku. Prav tako ni podatkov o uspešnosti kandidatov po posameznih nalogah za jesenske in zimske roke, kjer so rezultati tradicionalno nižji zaradi specifike populacije, ki opravlja izpit v teh rokih. V večini primerov gre za kandidate, ki opravljajo popravne izpite, ponavljajo maturo ali imajo status odraslega.

Analiza

Analiza obsega pregled in opis nalog iz geometrijskih vsebin za posamezne izpitne pole, indekse težavnosti (IT) za posamezne izpitne naloge in indekse težavnosti za celotno izpitno polo.
Pregledna predstavitev analize je navedena v preglednici 1.

Preglednica 1. Analiza nalog iz geometrijskih vsebin na poklicni maturi za spomladanske roke od leta 2006 do 2016

Rok PM N[1]	***Naloga***	***Število točk***	***Opis naloge***		***IT[2] za nalogo***	***IT za IP***
			Podatki	***Izračunaj, nariši***		
Spomladanski rok 2006 363	7.	5	enakokrak trikotnik s podano osnovnico in krakom	skica, velikost kota med osnovnico in krakom	0,53	0,50
	II.	15	pokončna 4-strana piramida, dolžina stranic pravokotnika (osnovne ploskve), stranski rob	skica telesa, skica mreže, prostornina, ploščina stranske ploskve	0,44	
Spomladanski rok 2007 322	3.	4	skica dveh vzporednih premic *p* in *q* ter premice *r*, ki ju seka; velikost kota med *r* in *p*	velikost kota med premicama q in *r* ter velikost suplementarnega kota med q in *r*	0,64	0,47
	7.	5	pravilna 4-strana piramida, osnovni rob, kot med stransko in osnovno ploskvijo	skica, prostornina	0,30	
	III.	15	trikotnik, dolžine dveh stranic in velikost kota, nasproti daljše stranice	skica, ploščina, težiščnica na *c*, utemeljitev enakokrakosti trikotnika	0,26	
Spomladanski rok 2008 337	3.	4	skica enakokrakega trikotnika, velikost zunanjega kota med krakom in osnovnico	velikost notranjih kotov	0,66	0,60
	7.	5	zlata palica v obliki kvadra z danimi robovi	število obeskov v obliki krogle z danim premerom (konzervacija prostornine)	0,38	
	II.	15	trikotnik, dolžina dveh stranic in velikost kota med njima	dolžina tretje stranice, velikost kota, ploščina trikotnika in ploščina trikotniku včrtanega kroga	0,41	
Spomladanski rok 2009 354	4.	4	enakokraki trapez, velikost kota med osnovnico in krakom	skica, velikosti ostalih notranjih kotov	0,57	0,56
	8.	5	pravokotni vrt, dolžine stranic, povečanje vrta po dolžini in zmanjšanje po širini	sprememba ploščine vrta v kvadratnih metrih	0,72	
	III.	15	pravokoten list papirja, dolžine stranic	površina valj iz zvitega lista, površina 4-strane prizme iz zvitega lista	0,41	

[1] Število izpitnih pol v vzorcu
[2] Indeks težavnosti odraža uspešnost kandidatov pri posamezni nalogi. Vrednost blizu 1 kaže lahko nalogo (ki so jo skoraj vsi rešili pravilno), vrednost blizu 0 pa težko nalogo. Izračunamo ga kot količnik med povprečnim doseženim številom točk pri nalogi in največjim možnim številom točk pri isti nalogi.

Spomladanski rok 2010 332	5.	4	pravokotni trikotnik, dolžini katet	konstrukcija, velikost kota med kateto in hipotenuzo	0,61	0,54
	6.	5	slika prekrižanih pravokotnih deščic, širina deščic, kot med njima	ploščina romba (preseka med deščicama)	0,41	
	9.[3]	5	aritmetično zaporedje, ki ga tvorijo dolžine stranic trikotnika, obseg, dolžina najkrajše stranice	dolžine stranic trikotnika	0,51	
	II.	15	slika telesa iz valja in stožca, velikost kota pri vrhu osnega preseka stožca	višina telesa, polmer osnovne ploskve valja, površina in prostornina telesa	0,49	
Spomladanski rok 2011 346	7.	5	enakokraki pravokotni trikotnik, dolžina hipotenuze	skica, ploščina	0,41	0,49
	9.	5	slika valjastih koles in njunih sledi v snegu	izpis podatka za izračun polmera kolesa, polmer kolesa	0,39	
	II.	15	pravilna 6-strana prizma, obseg osnovne ploskve, višina	skica osnovne ploskve, dolžina osnovnega roba, ploščina plašča, prostornina, dolžina telesne diagonale	0,47	
Spomladanski rok 2012 305	3.	4	slika trikotnika z daljico, vzporedno stranici c, velikosti dveh notranjih kotov	velikosti neznanih kotov na sliki	0,57	0,59
	4.	4	krožišče v obliki krožnega kolobarja, notranji in zunanji polmer	ploščina cestišča (kolobarja)	0,46	
	II.	15	pravokotni trikotnik z danima katetama zavrtimo okoli katete za polni kot	kot ob vrhu osnega preseka nastalega stožca, ploščina plašča in prostornina stožca	0,31	
Spomladanski rok 2013 328	7.	5	krožni izsek, velikost središčnega kotam ploščina	skica, dolžina krožnega loka	0,55	0,61
	II.	15	koordinate oglišč pravokotnika, točka T na stranici AB deli stranico AB v danem razmerju, točka S razpolavlja stranico BC	slika, obseg pravokotnika, dolžina daljice TS, prostornina pravilne 3-strane prizme z danim plaščem (pravokotnikom) in višino	0,57	
Spomladanski rok 2014 279	9.	5	trikotnik, velikost dveh notranjih kotov	skica, velikost tretjega notranjega kota in enega zunanjega kota	0,84	0,57
	II.	15	škatla v obliki pravilne 6-strane prizme, dolžina osnovnega roba, višina, prostornina bonbonov	ploščina osnovne ploskve, površina prizme, delež prostornine bonbonov	0,17	
Spomladanski rok 2015 254	8.	5	paralelogram, dolžini stranic, dolžina krajše diagonale	skica, ploščina	0,43	0,58
	II.[4]	15	leseni drogovi v obliki valja in kvadra z danimi podatki na sliki o osnovi ploskvi in višini	površina lesenega droga	0,55	
	III.[5]	15	zaporedje enakokrakih trikotnikov	ploščina in obseg trikotnika	0,34	
Spomladanski rok 2016 271	8.	5	pravokotni trikotnik (v kontekstu pobočja), naklon, dolžina hipotenuze	dolžina katete (v kontekstu nadmorske višine)	0,40	0,61
	II.[6]	15	pravokotnik, obseg	tri različni primeri dolžin stranic pravokotnika (z danim obsegom)	0,19	
	III.	15	trikotnik, dolžini stranic in velikost kota med njima, višina prizme	konstrukcija trikotnika, dolžina tretje stranice, površina in prostornina prizme z osnovno ploskvijo danim trikotnikom	0,34	

[3] Naloga preverja cilje iz vsebine Aritmetično zaporedje, za pravilno upoštevanje obsega je bila predvidena 1 točka, preostale 4 pa zaporedje.
[4] Naloga preverja tudi cilje iz vsebin Obdelava podatkov in Procentni račun. V preglednici navajamo le tisti del opisa naloge, ki je vezan na geometrijsko vsebino.
[5] Naloga preverja tudi cilje iz vsebine Zaporedja. V preglednici navajamo le tisti del opisa naloge, ki je vezan na geometrijsko vsebino.
[6] Naloga preverja tudi cilje iz vsebine Funkcija. V preglednici navajamo le tisti del opisa naloge, ki je vezan na geometrijsko vsebino.

Delež točk, ki je vezan na geometrijske vsebine, za razliko od nacionalnega preverjanja znanja (NPZ) na poklicni maturi ni predpisan, vendar se geometrijske naloge redno pojavljajo v izpitnih polah. V obdobju od 2006 do 2016 so bile na spomladanskem roku poklicne mature med obveznimi nalogami prvega dela ena do tri naloge iz geometrijskih vsebin. V letu 2010, ko so bile med nalogami prvega dela kar tri naloge iz geometrijskih vsebin, je treba omeniti, da je ena od nalog povezovala znanje iz geometrijskih vsebin z znanjem iz zaporedij in je kandidat dobil večji del točk za zaporedja.

V drugem delu, kjer kandidat izbira dve nalogi od treh, je bila v vseh zajetih izpitnih rokih prisotna naloga iz geometrije, v dveh primerih sta bili nalogi celo dve. V obeh teh primerih se je v nalogah znanje iz geometrije povezovalo z znanjem iz drugih matematičnih vsebin.

Ugotovitve

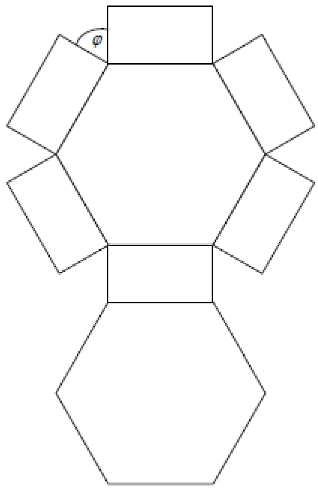
Pri pregledu uspešnosti kandidatov je bilo izhodišče primerjava indeksov težavnosti za posamezno nalogo z indeksom težavnosti za celotno izpitno polo. Pri nalogah prvega dela so kandidati v sedmih primerih dosegli višji IT kot pri celotni poli in v enajstih primerih nižji IT kot pri celotni poli. V drugem delu so kandidati v vseh enajstih primerih dosegli nižji IT kot pri celotni poli. Zadnja ugotovitev je še posebej zaskrbljujoča, saj so si kandidati v drugem delu geometrijsko naloge izbrali sami. Žal podatkov o tem, koliko kandidatov si izbere posamezno nalogo v drugem delu, ni.

Ne glede na okoliščine analize lahko rečemo, da so v povprečju kandidati naloge iz geometrijskih vsebin reševali slabše kot preostale naloge. Najslabše so bile reševane naloge:

- iz prostorske geometrije (pokončna 4-strana prizma, pravilna 4-strana prizma, stožec, valj, 3-strana prizma),
- manj značilne naloge iz ravninske geometrije (npr. prekrižani deščici),
- geometrijske naloge v kontekstu (npr. pravokotni trikotnik v kontekstu nadmorske višine).

V obravnavanih letih je bila med geometrijskimi nalogami najslabše reševana naloga, kjer je bila podana mreža škatle v obliki pravilne 6-strane prizme s podano dolžino osnovnega roba, višino in prostornino bonbonov v škatli, izračunati pa je bilo treba ploščino osnovne ploskve, površino prizme in delež prostornine bonbonov (slika 1). Indeks težavnosti je bil 0,17.

Škatla za bonbone ima obliko pravilne šeststrane prizme. Osnovni rob prizme je dolg 6 cm, višina pa 5 cm. Na sliki je mreža šeststrane prizme.



2.1. Izračunajte ploščino osnovne ploskve prizme in velikost označenega kota φ na sliki.

(7 točk)

2.2. Izračunajte površino dane prizme.

(4 točke)

2.3. Skupna prostornina bonbonov v škatli je približno 254,34 cm^3. Izračunajte delež prostornine, ki jo zasedajo bonboni v škatli.

(4 točke)

Slika 1: Najslabše reševana naloga iz geometrijskih vsebin v obravnavanem obdobju (Vir: RIC, 2014)

Povprečno število doseženih točk pri nalogi je bilo 2,6. Iz slike 2 je razvidno, da bi kandidat za pravilno izračunano ploščino osnovne ploskve dobil 3 točke, kar pomeni, da je nekaterim kandidatom težave povzročalo že računanje ploščine pravilnega 6-kotnika.

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
2.1	2	• uporaba formule za izračun ploščine pravilnega šestkotnika, npr.: $S = 6 \cdot S_{\Delta} = 6 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	1 + 1
	1	• rešitev, npr.: $S = 54\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \doteq 93{,}53\ \text{cm}^2$	
	1	• upoštevanje, da so velikosti notranjih kotov pravilnega šestkotnika $120°$	
	1	• upoštevanje, da so velikosti notranjih kotov pravokotnika $90°$	
	2	• izračun kota φ, npr.: $\varphi = 360° - 120° - 90° - 90° = 60°$	1 + 1
Skupaj	7		

Slika 2: Navodila za vrednotenje naloge 2.1 (Vir: RIC, 2014)

Slabši dosežek bi lahko pripisali različnim dejavnikom, med katerimi lahko izpostavimo:

- slabo prostorsko predstavo,
- neutrjeno znanje,

- nerazumevanje pojmov iz ravninske geometrije pred obravnavo prostorske geometrije,
- nepriljubljenost geometrijskih vsebin med nekaterimi kandidati in slabšo motivacijo za njihovo reševanja,
- raznolikost populacije na poklicni maturi glede na število ur matematike v času srednješolskega izobraževanja (posebej za kandidate s statusom odraslega),
- število ur za obravnavo geometrijskih vsebin v katalogu znanja za matematiko ni predpisano in je prepuščeno presoji učitelja,
- pristope k obravnavi geometrijskih vsebin.

Med najbolje rešenimi nalogami v obravnavanem obdobju omenimo dve nalogi. Najbolje reševana naloga je bila naloga na sliki 3. Podani sta bili velikosti dveh notranjih kotov v trikotniku v stopinjah, izračunati pa je bilo treba velikost tretjega notranjega kota in velikost zunanjega kota ob znanem notranjem kotu. Naloga res ni pretirano zahtevna, saj preverja znanje, ki se obravnava že v osnovni šoli.

9. V trikotniku ABC notranji kot pri oglišču A meri $53°$, notranji kot pri oglišču B pa $72°$. Narišite skico trikotnika ABC. Izračunajte velikost notranjega kota pri oglišču C. Na skici z β' označite zunanji kot pri oglišču B in izračunajte njegovo velikost.

(5 točk)

Slika 3: Najbolje reševana naloga iz geometrijskih vsebin v obravnavanem obdobju (Vir: RIC, 2014)

Zelo razveseljivo je dejstvo, da je bila med najbolje reševanimi nalogami naloga na sliki 4. Naloga je geometrijske vsebine (ploščina pravokotnika) povezala s procentnim računom. Kandidati so v povprečju pri nalogi dosegli 3,6 točke, indeks težavnosti pa je bil 0,72.

8. Vrt ima obliko pravokotnika z dolžino $10\ \mathrm{m}$ in širino $6\ \mathrm{m}$. Gospodar bo vrt po dolžini povečal za $20\ \%$ in po širini zmanjšal za $15\ \%$. Izračunajte, za koliko kvadratnih metrov (m^2) se bo spremenila ploščina vrta.

(5 točk)

Slika 4: Druga najbolje reševana naloga iz geometrijskih vsebin v obravnavanem obdobju (Vir: RIC, 2009)

Sklep

Naloge z geometrijsko vsebino so stalnica na poklicni maturi iz matematike, vendar jih kandidati v povprečju rešujejo slabše kot preostale naloge. Razlogi so večplastni in so povezani tako z raznolikostjo kandidatov na poklicni maturi kot s pristopi k obravnavi, številom ur, ki na ravni katalogov znanj za matematiko niso opredeljene, razumevanjem in priljubljenostjo geometrije.

Zanimivo bi bilo ugotovitve povezati s stanjem pri splošni maturi in pri nacionalnem preverjanju znanja. Za bolj poglobljeno analizo bi bilo treba razširiti nabor statističnih podatkov, ki jih na RIC-u zbirajo za potrebe statistične obdelave poklicne mature.

Viri

1. Dolinar, G. et al. (2014): Predmetni izpitni katalog za matematiko na poklicni maturi. Pridobljeno 10. 9. 2016 na http://www.ric.si/mma/P-MAT-2014%20ISSN/2012092610051575/ .
2. Državni izpitni center, Poklicna matura – spomladanski izpitni rok 2006–2016 – statistični indeksi po nalogah, 16. 9. 2016.
3. Rojko, C. et al. (2007): SSI. Katalog znanja. Matematika. Ljubljana pridobljeno 10. 9. 2016 na http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2009/programi/drugi_del/Ssi/KZ-IK/KZ_MAT_SSI_383_408.pdf.

TRIKOTNIK – PRILOŽNOST ZA POVEZOVANJE ZNANJ

Triangle – an Opportunity for Connecting Knowledge

Irena Rauter Repija
Irena.rauter-repija@gfml.si
Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

Povzetek
Ali imata ploščina trikotnika in linearna funkcija kaj skupnega?
V prispevku je predstavljen primer učne ure, katere glavni namen je učencem pokazati, kako lahko znanje, ki ga imajo o nekem matematičnem pojmu, kot sta v tem primeru trikotnik in funkcija, uporabijo pri usvajanju novih vsebin in vse skupaj povežejo v smiselno celoto. Pri urah se ves čas prepletata klasičen način poučevanja in uporaba sodobne tehnologije.
Znanje in veščine, ki so jih dijaki pri tem pridobili, so se izkazali kot odlična osnova za povezovanje znanj in kasnejše učenje sorodnih matematičnih vsebin.

Abstract
The paper presents a model lesson with the main purpose of showing students how their knowledge on certain mathematical principles, e. g. triangle and function, can be used in acquiring new concepts and can be connected into a meaningful whole. Lessons combine a classical teaching approach with the use of modern technology.
The knowledge and skills acquired during the process have proven to be an excellent base for both connecting knowledge and the subsequent learning of similar concepts.

Ključne besede
trikotnik, ploščina, linearna funkcija

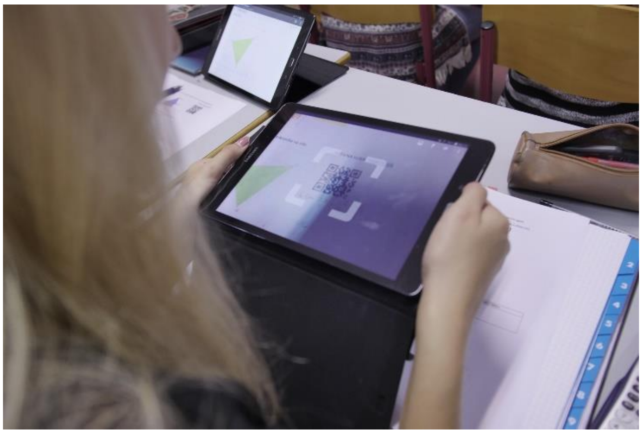
Keywords
triangle, area, linear function

Uvod

V prispevku je predstavljen eden izmed pristopov k obravnavanju ploščine trikotnika v pravokotnem koordinatnem sistemu v srednji šoli.
Večina učiteljev matematike v srednji šoli to snov obravnava tako, kot je zapisana v klasičnih učbenikih. V koordinatnem sistemu narišemo trikotnik, skico dopolnimo s trapezi, na začetku ali pa med samo izpeljavo vpeljemo še pojem orientacija trikotnika ter izpeljemo obrazec.
Pri tem prevladuje frontalni način poučevanja, aktivnost dijakov pa je večino časa usmerjena v prepisovanje snovi s table in reševanje nalog v zvezek.
Med splošnimi cilji, ki so navedeni v posodobljenem učnem načrtu matematike za gimnazijo, zasledimo, da »naj se dijaki učijo povezati znanje znotraj matematike in tudi širše, naj se učijo spoznavati in uporabljati različne informacijske in komunikacijske tehnologije in presojati, kdaj jih je smiselno uporabiti« (UN-GIM–2008: 7).
V kolikšni meri sledimo tem ciljem?
Danes nam sodobna tehnologija omogoča, da se dijaki aktivneje vključujejo v pouk. Z uporabo tablic, e-učbenikov in pripravljenih aktivnih slik lahko del obravnavane snovi predelajo in raziščejo samostojno. Z uporabo sodobne tehnologije se odpirajo tudi nove možnosti za povezovanje različnih vsebin znotraj matematike. Prav slednjemu pogosto namenjamo premalo pozornosti.

Ploščina trikotnika

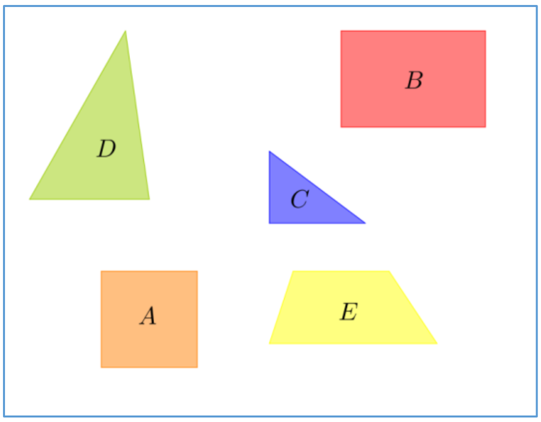
Ure, ki so opisane v prispevku, sem izvedla v prvem letniku gimnazije. Z uporabo tehnologije smo novo snov, ploščino trikotnika v pravokotnem koordinatnem sistemu, združili z znanjem dijakov o ploščini v evklidski ravnini in na koncu s ploščino osmislili še pojem linearne funkcije.



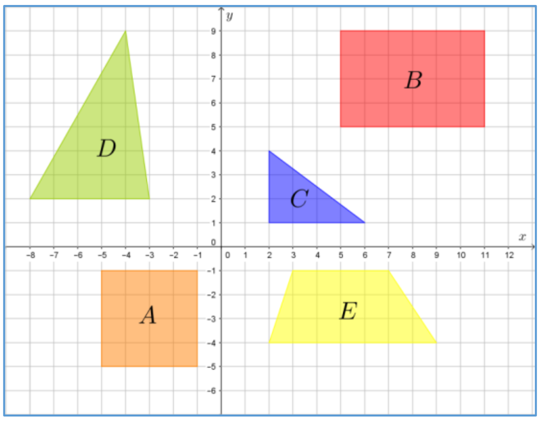
Slika 1: Uporaba tehnologije pri usvajanju učne snovi

Osnovno idejo za takšen pristop sem našla v e-učbeniku Vega 1, v poglavju Ploščina trikotnika, v katerem se pri ponovitvi nahaja slika, na kateri je v koordinatnem sistemu narisanih nekaj geometrijskih likov. Njihovo ploščino lahko izračunamo brez poznavanja obrazca za ploščino trikotnika, ki je vezan na koordinate oglišč. Dejansko so se dijaki ploščino teh likov naučili izračunati že v osnovni šoli, ko o pravokotnem koordinatnem sistemu niso znali še ničesar. Na tem mestu se ponuja idealna priložnost, da gremo korak nazaj, v evklidsko ravnino, in povežemo usvojeno znanje o ploščinah s ploščino v koordinatnem sistemu.

V nadaljevanju je na kratko opisan potek učnih ur.
Za uvod so dijaki najprej izračunali ploščine preprostih likov (slika 2). Sliko iz e-učbenika (Vega 1, str. 521) sem nadgradila v aktivno sliko (http://www.iucbeniki.si/vega1/54/index.html), na kateri so liki najprej prikazani v navadni ravnini, potem pa še enkrat v koordinatnem sistemu (slika 3).

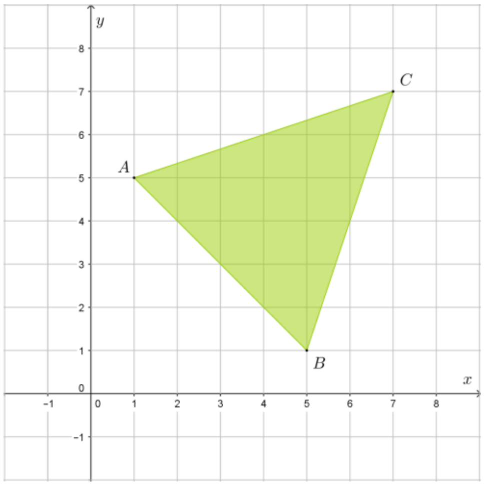


Slika 2

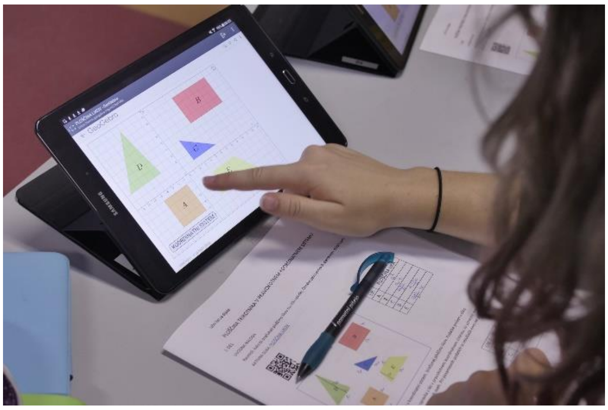


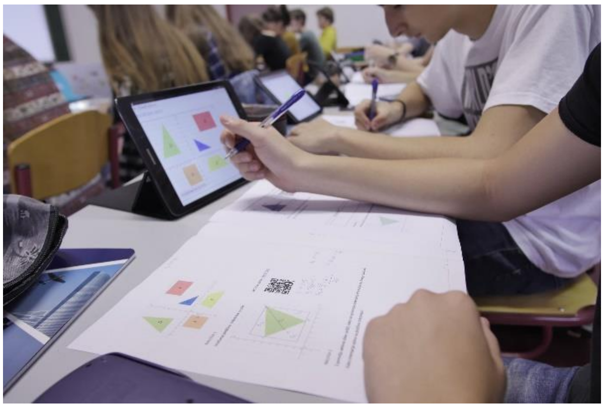
Slika 3

Nadaljevali smo z računanjem ploščine trikotnika, pri čemer so dijaki morali uporabiti znanje iz uvodne naloge (slika 4).



Slika 4

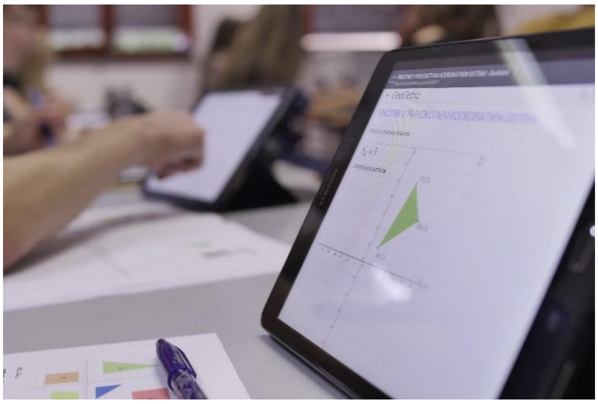




Slika 5: Ploščine likov – delo z aktivno sliko

Slika 6: Računanje ploščine trikotnika

Zatem so dijaki s pomočjo aktivne slike (https://www.geogebra.org/m/nvyZvJbP) sami raziskovali, zakaj je treba vplesti še orientacijo in kaj vpliva nanjo (slika 7). Skupaj smo se pogovorili o novih oznakah, naredili povzetek in z nalogo v e-učbeniku (Vega 1, str. 530) preverili znanje.

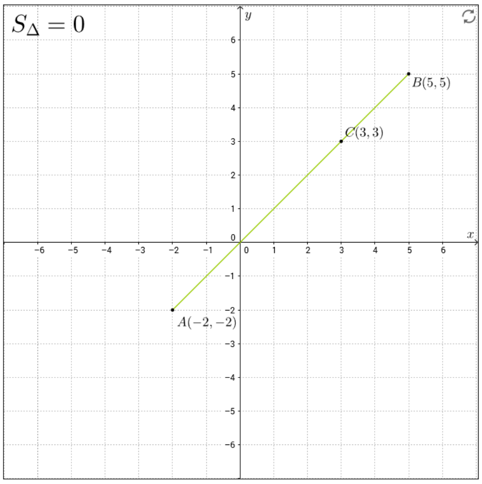


Slika 7: Ploščina in orientacija trikotnika – delo z aktivno sliko

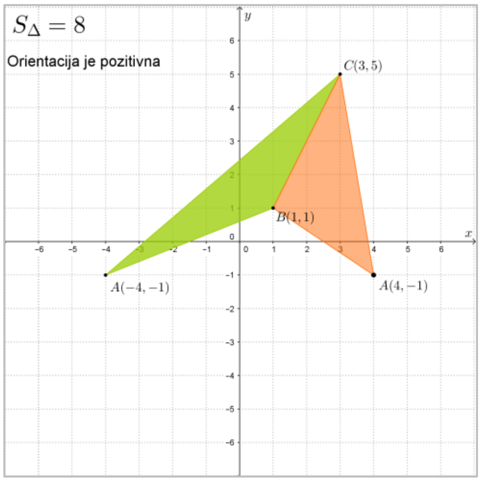
Pri izpeljavi obrazca smo si pomagali z e-učbenikom (Vega 1, str. 531). Z uporabo obrazca smo nato še enkrat izračunali ploščino trikotnika iz prejšnje naloge (slika 4).

Sliki 8 in 9: Uporaba tehnologije pri izpeljavi obrazca za ploščino trikotnika

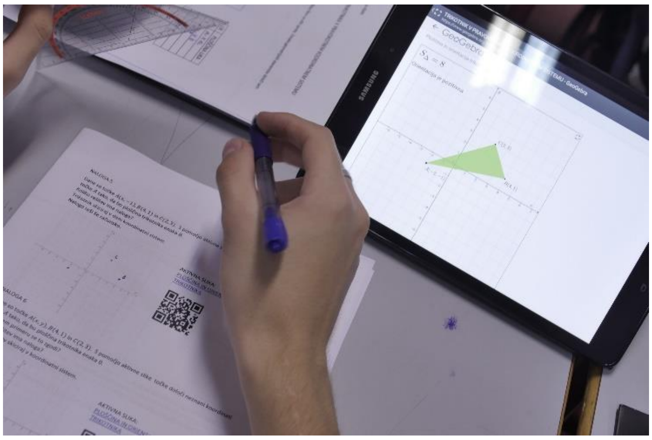
V nadaljevanju so dijaki s pomočjo aktivne slike raziskali, kdaj je ploščina trikotnika enaka 0 (slika 10) in koliko je trikotnikov z enako ploščino, če eno stranico fiksiramo (slika 11). Na koncu smo skupaj zapisali ugotovitve.



Slika 10



Slika 11



Slika 12: Trikotnika z enako ploščino – delo z aktivno sliko

Ploščina trikotnika in linearna funkcija

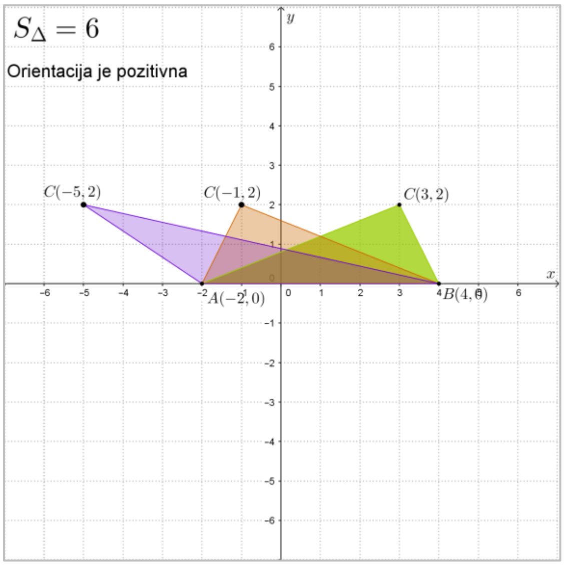
Pri delu z aktivno sliko se je pokazalo nekaj zanimivega. Če spreminjamo eno koordinato izbranega oglišča trikotnika in nanjo gledamo kot na neodvisno spremenljivko, se ploščina obnaša kot linearna funkcija te spremenljivke.
Ker imajo dijaki do tega trenutka premalo znanja o funkcijah, sem se odločila, da bomo nadaljevali v drugem delu, ko bomo predelali snov o linearni funkciji.

V drugem delu smo zapisali ploščino kot linearno funkcijo, narisali njen graf ter s pomočjo aktivne slike primerjali njene lastnosti z lastnostmi trikotnika in njegovo ploščino.

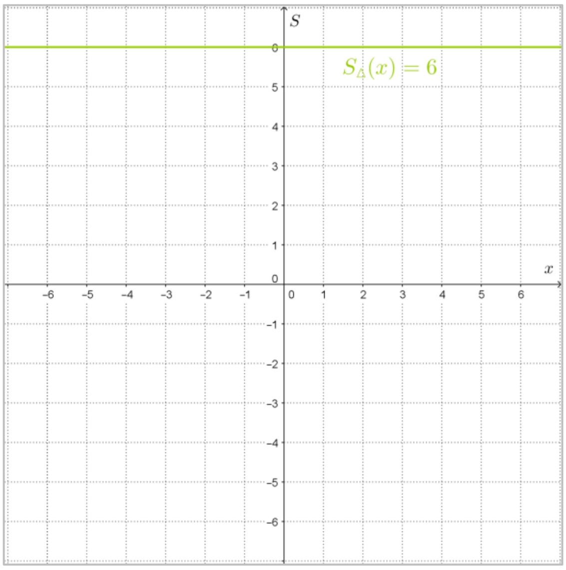
Najprej smo pogledali primer, ko spreminjamo absciso oglišča C, kot prikazuje slika 13.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4-(-2) & 0-0 \\ x-(-2) & 2-0 \end{vmatrix} = 6$$

Izkaže se, da je ploščina trikotnika ves čas enaka 6 in zato je linearna funkcija $S_{\Delta}(x) = 6$ konstantna ne glede na to, kakšno vrednost zavzame x (slika 14).



Slika 13



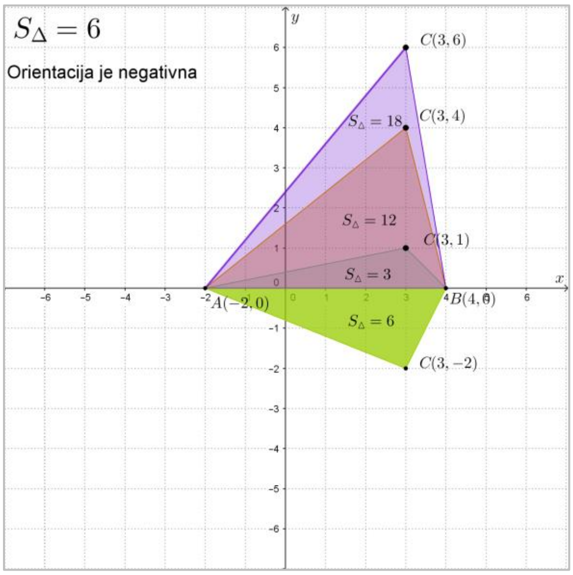
Slika 14

Sliki 15 in 16: Ploščina trikotnika kot funkcija ene spremenljivke

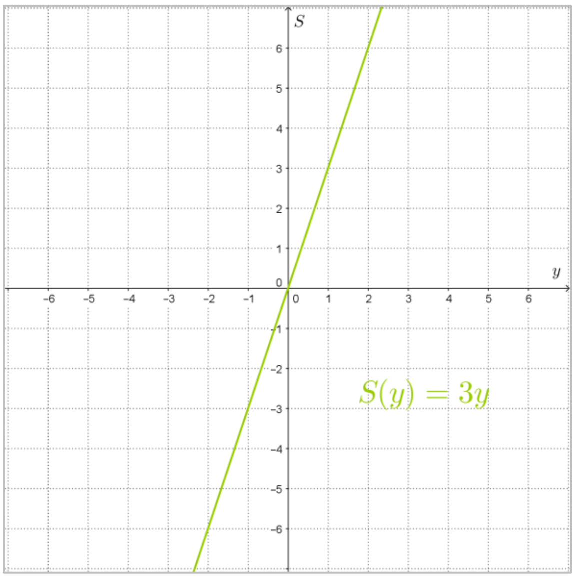
Pri drugi nalogi smo spreminjali ordinato točke C, kot prikazuje slika 17.

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4-(-2) & 0-0 \\ 3-(-2) & y-0 \end{vmatrix} = 3y$$

Vidimo, da se ploščina trikotnika spreminja. Linearna funkcija $S_\Delta(y) = 3y$ je tako odvisna od spremenljivke y (slika 18). Pri negativnih vrednostih spremenljivke y funkcija $S(y)$ zavzame negativno vrednost. Če to primerjamo s trikotnikom v pravokotnem koordinatnem sistemu in njegovo ploščino, vidimo, da je v tem primeru orientacija trikotnika negativna, njegova ploščina pa je enaka $|S(y)|$.



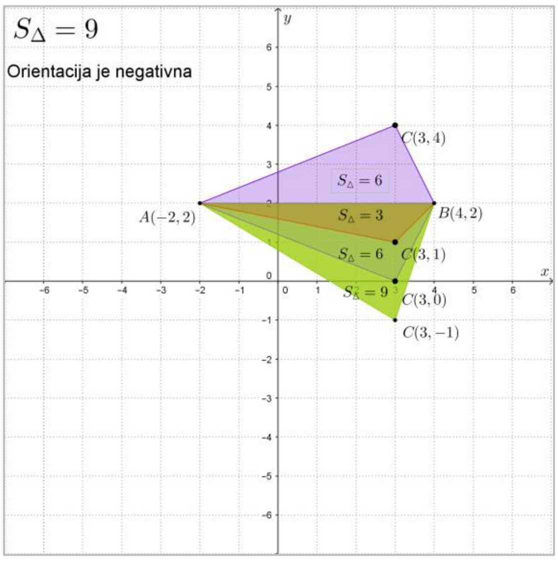
Slika 17



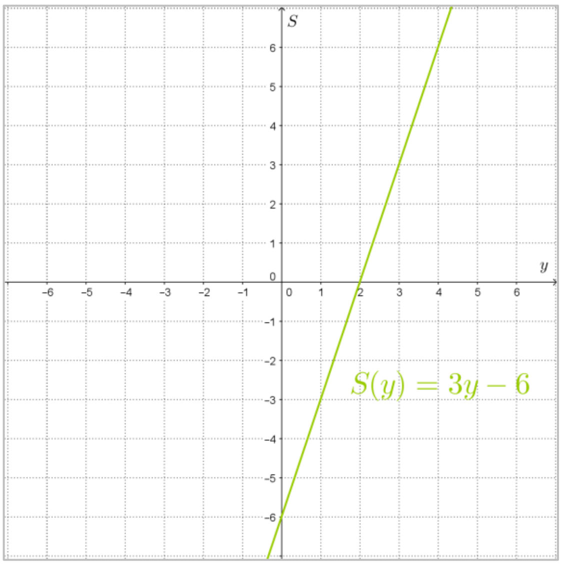
Slika 18

Pri drugi nalogi vidimo, da je orientacija pozitivna, če je ordinata točke C pozitivna, da je orientacija negativna, če je ordinata točke C negativna, in da je ploščina trikotnika 0, če je ordinata točke C enaka 0. Da ne bi prišlo do napačnega razumevanja, smo pri tretji nalogi oglišča trikotnika postavili tako, kot prikazuje slika 19, in zopet spreminjali samo ordinato točke C.

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4-(-2) & 2-2 \\ 3-(-2) & y-2 \end{vmatrix} = 3y - 6$$



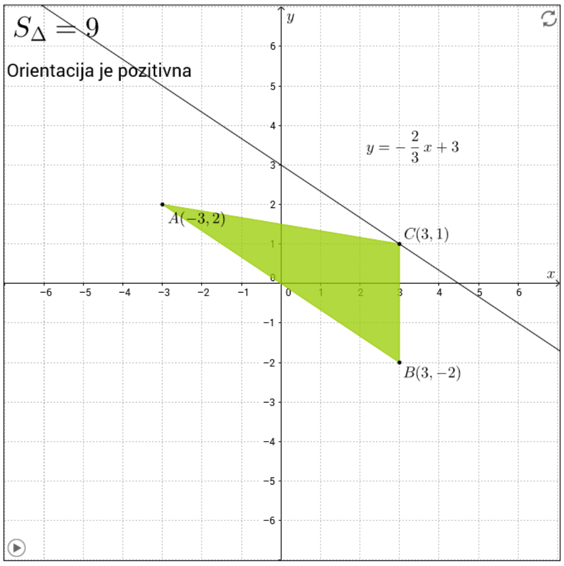
Slika 19



Slika 20

Tudi v tem primeru se ploščina trikotnika spreminja glede na vrednost spremenljivke y (slika 20). Linearna funkcija ima predpis $S(y) = 3y - 6$. V tem primeru je orientacija trikotnika pozitivna, če je $y > 2$, negativna za $y < 2$, ploščina trikotnika pa je enaka 0, ko je $y = 2$.

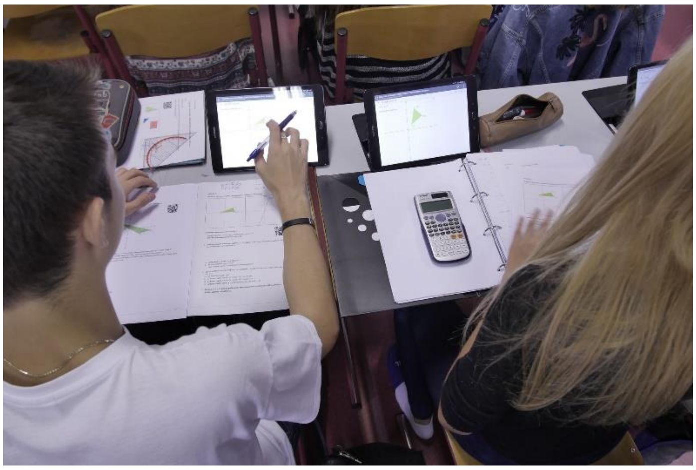
Preiskovanje s pomočjo aktivnih slik odpira številne možnosti. Ena izmed teh je iskanje geometrijskega mesta točk. Pri tej nalogi so dijaki morali določiti koordinati x in y oglišča C tako, da bo trikotnik ABC pozitivno orientiran, njegova ploščina pa 9. Naloga ima seveda neskončno rešitev. Vse točke, ki zadoščajo pogoju, ležijo na premici (slika 21). To nalogo so dijaki rešili doma, svojo rešitev pa so preverili na aktivni sliki (https://www.geogebra.org/m/ctucbVpn).



Slika 21: Geometrijsko mesto točk

Sklep

Pri takem učenju dijakom niso bila posredovana samo matematična dejstva, ampak so bili ves čas aktivni. Pri delu z učnim listom so uporabljali geometrijsko orodje, pri računanju ploščin numerično računalo, za preiskovanje in delo z aktivnimi slikami (Aktivne slike: https://ggbm.at/xGevyRmA) tablice, pri izpeljavi obrazcev pa e-učbenik.



Slika 22: Uporaba različnih pripomočkov pri učenju

Znanje in veščine, ki so jih dijaki pridobili pri tem, so se izkazali kot odlična osnova za povezovanje znanj in kasnejše učenje sorodnih matematičnih vsebin.

Viri

1. Klajnšček, M., Dvoržak, B., Felda, D. (2009): Matematika 1, Učbenik za gimnazije Ljubljana, DZS.
2. Arnuš, O., Bon Klanjšček, M., Dvoržak, B., Felda, D., France, S., Škrlec, M. (2008): Matematika 1, Zbirka nalog za gimnazije, Ljubljana, DZS.
3. Mohorčič, A., Pustavrh, S., Škrlec, M., Kapus, H. , Zmazek, V., Jericijo, O., Irena Rauter Repija, I.: Vega 1, E-učbenik za matematiko v 1. letniku gimnazije, ZRSŠ, Ljubljana, 2014 (http://www.iucbeniki.si/vega1/54/index.html).
4. Učni načrt, Program gimnazija, Matematika, Ljubljana, MŠŠ; ZRSŠ http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2008/programi/gimnazija/ucni_nacrti.htm (14. 2. 2008).

AVTENTIČNA NALOGA IZ DOLOČENEGA INTEGRALA

Authentic Performance Task on Definite Integral

Mitja Bončina
mitja.boncina@gmail.com
Gimnazija in srednja šola Kočevje

Povzetek

V prispevku je predstavljen pristop k obravnavi prostornine rotacijskih teles z uporabo avtentične naloge s področja določenega integrala po principu understanding by design (UBD). Dijakova naloga je, da testira različne pomaranče in limone ter ugotovi povezavo med velikostjo sadeža in količino iztisnjenega soka.

Pri tem principu mora učitelj najprej razmišljati o pričakovanih rezultatih in s čim bodo dijaki izkazali pridobljeno transferno znanje in razumevanje. Nato napiše načrt poučevanja in delovni zvezek, ki je pravzaprav načrt učenja za dijake.

Abstract

In the article I address the topic of rotational bodies volume in the field of the definite integral according to the planning principle Understanding by design.The student's task is to test different oranges and lemons in order to find out the link between the size of the fruit and the quantity of squeezed juice.

When using this principle, the teacher has first to think about the expected results and how the students will show the gained transferable knowledge and understanding. Then the teacher makes up a plan of teaching and a workbook as the student's plan of learning.

Ključne besede

avtentična naloga, določeni integral, volumen vrtenine

Keywords

Authentic performance task, definite integral, volume of rotating bodies

Določeni integral v avtentični situaciji po načelih vzvratnega načrtovanja

V zadnjih letih se je na šoli drastično zmanjšal vpis. Število dijakov se vsako leto zmanjšuje, precej dijakov s širšega območja se vozi v srednje šole v Novo mesto ali Ljubljano. Zato smo leta 2013 izvedli delavnico, na kateri smo vsi člani učiteljskega zbora razmišljali, s čim bi lahko pritegnili več dijakov in se hkrati prilagodili novim generacijam. Ugotovili smo, da je treba pouk usmeriti k aktivnim in avtentičnim oblikam s poudarkom na timskem in medpredmetnem sodelovanju. Ravnateljica mag. Marjeta Kamšek je poiskala, v slovenščino prevedla in priredila knjigo Understanding by Design (v nadaljevanju UBD) o vzvratnem načrtovanju in se nato z ožjim timom lotila natančne analize posameznih faz, opisanih v knjigi.

V šolskem letu 2015/2016 smo si zadali cilj, da vsak učitelj pripravi po eno avtentično nalogo po principu UBD v obsegu 10 % letnih ur pri posameznem predmetu. Vsak član ožjega tima je kot mentor prevzel skupino učiteljev. Na več delavnicah smo predelali osnove teorije in nato začeli razmišljati o lastni avtentični nalogi.

Po daljšem razmisleku sem se odločil, da bom zaradi splošne geometrijske uporabnosti izbral temo četrtega letnika – določeni integral. Z dijaki sicer rešimo nekaj kratkih nalog iz vsakdanjega življenja (npr. ploščina mize nepravilne oblike, volumen tople grede v vrtu, volumen vaze), vendar njihova vloga pri reševanju ni aktivna. Z avtentično nalogo naj bi dijaki tudi prek lastne aktivne vloge osmislili uporabnost določenega integrala.

Vzvratno načrtovanje po pricipu UBD
Avtorja pravita, da knjiga Understanding by Design govori o načrtovanju kurikula, ocenjevanja in poučevanja, ki se usmerja na razvijanje in poglabljanje razumevanja pomembnih idej. Njun namen je pokazati, kako z dobrim načrtovanjem bolj verjetno dosežemo, da več dijakov resnično razume to, kar se uči. Velike ideje so cilj izobraževanja za razumevanje. Dijakom pomagajo razumeti njihovo vrednost za osmišljanje celotne vsebine.

Avtorja tudi opozarjata, da ni lahko na novo razumeti novih konceptov in da se lahko zgodi, da nam ne bo natančno jasno, kaj morajo ob zaključku šolanja naši dijaki res razumeti. Občasno nam bo težko določiti, kaj je razumevanje in kakšno je primerno ocenjevanje. Dokler nam ni popolnoma jasno, katero specifično razumevanje želimo doseči in kako se to razumevanje kaže v praksi, ne moremo določiti, kako poučevati za razumevanje, katero gradivo in katere dejavnosti so primerne za to.

UBD je ciljno usmerjeno razmišljanje o kurikularnem načrtovanju, gre za osmišljanje početja v povezavi s cilji oziroma za početje z namenom. Ponuja trifazni model načrtovanja, nabor uporabnih pripomočkov in standardov načrtovanja:

- faza 1: določitev pričakovanih dosežkov,
- faza 2: določitev sprejemljivih dokazil,
- faza 3: načrt učne izkušnje.

Osrednji cilj UBD je pri dijakih doseči razumevanje: zmožnost, da razumejo »velike ideje« in so v procesu učenja zmožni prenašati znanje, razumevanje na nove situacije (transfer).
Kot sem že omenil, smo teorijo spoznali na delavnicah. Po teoretičnem delu smo se razdelili v skupine. Člani aktiva matematike smo bili v skupini s člani naravoslovnega aktiva. Najteže je bilo določiti, kaj bom izbral za avtentično nalogo in v katerem letniku. Po tehtnem premisleku sem se odločil za določeni integral, natančneje – uporaba določenega integrala za izračun volumna vrtenin pri geometriji.

Dijakova avtentična naloga je, da v vlogi živilskega tehnologa za znani lokal testira pomaranče in limone na tržišču in ugotovi povezavo med velikostjo sadeža in količino iztisnjenega soka z namenom, da lokalu svetuje o najbolj smiselnem nakupu sadja, tako da bo iz nakupljenega sadja lahko pridobil največ sveže iztisnjenega soka.

Faza 1: Pričakovani rezultati
V tej fazi moramo najprej razmisliti, katere **dolgoročne transferne cilje** naj bi dijaki dosegli. Bistveno je, da naši učni cilji težijo k dolgoročnemu znanju in veščinam, ki odražajo razumevanje. Dijaki morajo najprej dojeti velike ideje, da lahko nato osmislijo učne ure in prenesejo znanje na nove učne ure, nove probleme in realne situacije. Pozorni moramo biti na morebitno napačno razumevanje dijakov in pomanjkljiv transfer. Postavitev jasnih in nedvoumnih ciljev nam pomaga predvideti morebitne težave pri učenju in izkazovanju znanja.

Določil sem naslednji transferni cilj: dijaki znajo izračunati ploščino lika, omejenega z grafi dveh ali več funkcij, volumen rotacijskega telesa in znajo pridobljeno znanje uporabiti v realnih situacijah.

V naslednjem koraku določimo **razumevanje**, ki:

- je dijakovo razumevanje velike ideje – nauka oziroma sporočila učnega poglavja,
- je prenosljivo na druge učne situacije,
- običajno ni očitno, lahko tudi v nasprotju z intuicijo, in je zato nagnjeno k napačnemu razumevanju.

Določiti razumevanje, ni bilo čisto preprosto. Ta korak od učitelja zahteva popolnoma nov pogled na učno poglavje, ker je del vzvratnega načrtovanja in o njem učitelj pri klasičnem pouku ne razmišlja tako poglobljeno. Spodaj navajam svoj primer.
Dijaki bodo razumeli, da:

- se volumna nepravilnih teles ne da natančno izračunati;
- lahko volumne rotacijskih teles (stožca, krogle, valja) izpeljemo tudi s pomočjo integrala;
- je v matematiki integral edino orodje za približno računanje volumna nepravilnih rotacijskih teles;
- volumna nerotacijskih teles ne moremo izračunati;
- obstajajo razlike pri izračunavanju volumna pravilnih in nepravilnih teles.

Naslednja naloga, ki jo mora opraviti učitelj, je postavljanje **bistvenih vprašanj**. To so odprta vprašanja, ki nimajo enostavnega »pravilnega odgovora« in so namenjena raziskovanju, razpravi, pogledom z različnih zornih kotov, v začetnem procesu učenja pa tudi motivaciji. Pri dijakih spodbujajo aktivno osmišljanje pomembnih idej, lahko se naravno pojavijo v vsakdanjem življenju ali v povezavi s predmetom. Nekatera so stalno ponavljajoča se in se k njim vračamo v procesu učenja.
Dijakom bistvena vprašanja zastavimo dvakrat: čisto na začetku procesa učenja in po oddaji rešene avtentične naloge. Od dijakov prvič ne pričakujemo, da bodo nanje znali odgovoriti ali da bodo odgovorili pravilno. Namen ponovnega odgovarjanja nanje je dijakova samoevalvacija.

Določil sem naslednja bistvena vprašanja:

- Volumne katerih teles že znamo izračunati?
- Katere so skupne lastnosti teh teles?
- Za katera telesa ne znamo izračunati volumna?
- Kako bi izmerili volumne različnih sadežev? Opiši pripomočke in postopek.
- Ali znamo izračunati volumne različnih sadežev?
- Kdaj je to potrebno?
- Ali so izračuni čisto točni? Pojasni svoj odgovor.

Znanja in spretnosti odražajo pričakovano znanje in veščine ter usposobljenost, ki je nakazana v ciljih, povezanih z razumevanjem. Učitelj določi, kaj naj bi dijaki znali in česa naj bi bili sposobni ob koncu učnega procesa (to je po navadi zapisano v potrjenih standardih in merilih). V tem delu nisem imel toliko težav, saj sem si pomagal z učnim načrtom. Prilagam svoj primer.

Dijaki bodo vedeli, kaj je določeni integral; poznali osnovni izrek integralnega računa (Newton-Leibnizovo formulo); vedeli, kaj je rotacijsko telo; znali izračunati ploščino lika, omejenega z grafi funkcij; znali izračunati volumen rotacijskega telesa.
Znali bodo izračunati določeni integral dane zvezne funkcije; izračunati ploščino lika, omejenega z grafi funkcij; izračunati volumen rotacijskega telesa.

Faza 2: Dokazila za ocenjevanje
V fazi 2 določimo, katero nalogo bodo dijaki izvedli, da bodo dokazali razumevanje in transferno znanje, in katera druga dokazila bodo zbrana za pričakovane rezultate.

Naloga za izvedbo je potrebna kot dokaz za razumevanje pri dijakih, ker z njo ugotovimo, ali so dijaki zmožni pridobljeno znanje uporabiti pri različnih situacijah in problemih. Pri oblikovanju ustrezne naloge si pomagamo s šestimi značilnostmi razumevanja:

- razlaga: dijaki posplošijo, povezujejo, sklepajo, znajo pojasniti z lastnimi besedami;
- interpretacija: dijaki ponudijo verjetno razlago besedila, podatkov, izkušenj;
- uporaba: dijaki so zmožni prenašati, prirejati, prilagajati, naslavljati nove probleme;
- perspektiva: dijaki so sposobni pogleda z različnih zornih kotov;
- vživljanje: dijaki so se sposobni vživeti v osebe/like;
- samopoznavanje: dijaki so se sposobni samooceniti, prepoznati meje svojega razumevanja, so sposobni metakognicije.

Naloga mora biti zapisana v formatu GRASP, tako da je za ocenjevanje bolj avtentična in zahteva večjo angažiranost na strani dijakov. GRASP je akronim, ki pomaga učitelju oblikovati avtentičen scenarij:

- cilj (**G**oal): ciljna ali izzivalna trditev v scenariju;
- vloga (**R**ole): vloga dijakov v scenariju;
- občinstvo (**A**udience): ciljno občinstvo/stranke, na katere morajo dijaki pomisliti pri izvedbi naloge;
- situacija (**S**ituation): določen kontekst, njegove omejitve in možnosti;
- izdelek (**P**erformance): določeno znanje ali pričakovan izdelek.

Nalogo za izvedbo sem zastavil tako:
V vlogi živilskega tehnologa boste za znani lokal testirali pomaranče in limone na tržišču in ugotovili povezavo med velikostjo sadeža in količino iztisnjenega soka z namenom, da lokalu svetujete o najbolj smiselnem nakupu sadja, tako da bo iz nakupljenega sadja lahko pridobil največ sveže iztisnjenega soka.
Izbrati morate tri različne trgovine in v vsaki kupiti po eno pomarančo in eno limono. Izberite ju tako, da sta med ponujenimi sadeži v posamezni trgovini povprečne velikosti. Zaželeno je, da ima pomaranča obliko krogle.
Pogoj je, da pomaranče iz različnih trgovin niso enako velike, in enako naj velja za limone.
Iz kupljenega sadja boste pridobili podatke in jih (po priloženih navodilih) uporabili za končno poročilo znanemu lokalu, ki vas je najel.
Učitelja matematike morate s svojo nalogo prepričati, da ste usvojili dovolj znanja o določenem integralu in njegovem geometrijskem pomenu.

Sledijo **navodila za izvedbo**, v katerih učitelj definira način pisanja in oddaje naloge ter natančneje poda postopke, ki jih morajo dijaki izvesti.
V svojem primeru sem dijakom podal splošna navodila (ročni zapis naloge, fotografiranje eksperimentalnega dela – meritev velikosti sadja), nato posebej še navodila za analizo pomaranč in limon (privzamemo, da je pomaranča krogla in limona elipsoid) ter za poročilo živilskega tehnologa znanemu lokalu. Pri tem moram poudariti, da ne smemo podati preveč natančnih navodil, saj pričakujemo, da se bo dijak znašel v novi situaciji, in ravno na tem mestu pride do transferja znanja.

V naslednjem koraku zapišemo **kriterije ocenjevanja**. Avtentično nalogo ocenimo v skladu z veljavnimi kriteriji, ocena pa ne odraža le kakovosti izvedene naloge, temveč je povezana s pričakovanimi rezultati iz faze 1 (poudarek je na ocenjevanju razumevanja).
Posamezne korake izdelane naloge sem ovrednotil z določenim številom točk, skupaj 74 točk. Za zadostno oceno sem določil minimalno 60 % vseh možnih točk, nato pa lestvico večal po 10 odstotnih točk. V nalogo sem zapisal tudi rok oddaje naloge in postavil pogoj, da za vsak zamujeni dan dijaki izgubijo 5 procentnih točk.

V zadnjem delu faze 2 razmislimo še o **drugih dokazilih** znanja in razumevanja (preverjanje med poukom, pisno ocenjevanje), s katerimi bodo dijaki izkazali pričakovane dosežke iz faze 1.
Zapisal sem, da bom med poukom pri dijakih s primeri preverjal zmožnost izračuna volumna vrtenine. Pri tem bodo dijaki izkazali poznavanje in razumevanje uporabe določenega integrala. To snov bom ocenjeval ustno in pisno (v 4. šolski nalogi).

Priporočljivo je, da v fazi 2 načrtujemo tudi **dijakovo samooceno in refleksijo**.
Dijaki v procesu s pomočjo učiteljevih vprašanj večkrat razmislijo o svojem napredku (opravijo razmislek, ali zdaj kaj več vedo).
Po koncu sklopa Določeni integral (po oddaji izdelane naloge) dijaki ponovno odgovarjajo na že zastavljena ključna vprašanja in primerjajo odgovore. Pri tem ugotavljajo in ocenjujejo svoj napredek v razumevanju in znanju.

Faza 3: Načrt učne izkušnje
V fazi 3 moramo zagotoviti, da učne dejavnosti (kar poučujemo in kako poučujemo) logično izhajajo in sledijo ciljem iz faz 1 ter 2 in da pri dijakih podpirajo pridobivanje znanja, razumevanje/osmišljanje in transfer.
Učne dejavnosti zapišemo v kronološkem zaporedju, nato jih opremimo z elementi WHERETO. To je akronim, ki nam pomaga oblikovati logičen **načrt učenja** in vključiti vse ključne elemente:

- kam (**W**here): pove, kje smo in kam gremo; gre za napoved ciljev avtentične naloge;
- zgrabite (**H**ook): zagrabi oziroma vzbudi pozornost dijakov; predvideva, da uporabimo bistvena vprašanja za vodeni pogovor v razredu;
- opremite, izkusite (**E**quip, **E**xperience): dijake opremimo s potrebnimi orodji, viri, veščinami in informacijami; ta del je najbolj podoben našemu klasičnemu pouku;
- ponovno premislite (**R**ethink): dijakom omogočimo priložnosti za ponovni razmislek o velikih idejah in napredku z drugega zornega kota;
- ovrednotite (**E**valuate): dijakom zagotovimo povratno informacijo in priložnosti, da se sami ocenijo in prilagodijo;

- naredite po meri (**T**ailor): učenje personaliziramo s pomočjo diferenciacije navodil, nalog in ocenjevanja, ne da bi žrtvovali veljavnost ali doslednost pri izpolnjevanju predpisanega;
- organizirajte (**O**rganise): načrtujemo zaporedje dejavnosti, ki ustreza ciljem za razumevanje.

Pri določenem integralu je načrt učenja sestavljen iz naslednjih korakov:

Dijaki:

1. odgovorijo na bistvena vprašanja (where, hook);
2. s pomočjo primerov v delovnem zvezku spoznajo definicijo določenega integrala (equip);
3. spoznajo osnovni izrek integralskega računa (Newton-Leibnizovo formulo) (equip);
4. računajo določene integrale različnih funkcij (experience, rethink);
5. spoznajo geometrijski pomen določenega integrala (equip);
6. računajo ploščino med krivuljo in osjo x (experience, rethink);
7. računajo ploščino lika, omejenega z grafoma dveh ali več funkcij (experience, rethink);
8. spoznajo formulo za računanje prostornine vrtenine (lik na intervalu [a,b] med grafom funkcije in osjo x zavrtimo okrog osi x za kot 360°) (equip);
9. računajo prostornine geometrijskih teles (valja, stožca) in vrtenin nepravilnih oblik (experience, rethink);
10. izberejo različno veliko sadje (pomaranče in limone) v različnih trgovinah (tailor);
11. po navodilih izmerijo kupljeno sadje, pri tem fotografirajo postopek in pripomočke (experience);
12. izdelajo končni izdelek – avtentično nalogo (explore, tailor, organise);
13. ponovno odgovorijo na bistvena vprašanja, odgovore primerjajo s svojimi prvotnimi odgovori in vrednotijo lasten napredek (rethink, evaluate).

Pripravimo **delovni zvezek** za dijake, ki je načrt za učenje (cilj naloge; bistvena vprašanja kot motivacija; učna snov; naloge za pogled na problem z drugega zornega kota; avtentična naloga in navodila za izvedbo; kriteriji ocenjevanja; ponovno bistvena vprašanja).

Učno snov lahko podamo samo okvirno, tako da je v delovnem zvezku le natančen načrt (zapisane strani v učbeniku, številke nalog iz zbirke nalog in domačih nalog).
Sam sem se odločil, da bom vanj zapisal celotno teorijo in vse naloge. Tako dijaki ne potrebujejo niti učbenika niti zbirke nalog in vse naloge rešujejo v delovni zvezek. Zato je med nalogami precej praznega prostora in tudi sam delovni zvezek je skopiran enostransko, da lahko dijaki pišejo dodatne opombe na levo prazno stran.
Posebno pozornost sem v delovnem zvezku posvetil zadnjemu poglavju Prostornine rotacijskih teles. Dijakom sem želel pokazati, da lahko volumne znanih vrtenin izračunamo tudi z uporabo določenega integrala. Naloge v tem poglavju sem izbiral premišljeno z namenom, da bodo dijaki znali samostojno izračunati volumen pomaranče (krogle) in limone (elipsoida, ki nastane z vrtenjem elipse okrog osi x). Tako smo izpeljali formulo za volumen valja, krogle in telesa, ki nastane z vrtenjem dela hiperbole.

Čisto zadnja naloga je bila mini avtentična naloga. Podane so bile mere soda (višina, širini na vrhu/dnu in na sredini soda) s predpostavko, da ima lok na sodu obliko parabole. Priložil sem tudi sliko soda. Pri tej nalogi so morali sod oziroma parabolo najprej pravilno umestiti v koordinatni sistem, nato zapisati enačbo parabole in izračunati volumen vrtenine.

Ko dijaki izdelajo prvi osnutek oziroma skico avtentične naloge, dobijo o njem **povratno informacijo**. Na podlagi te informacije lahko avtentično nalogo suvereno izvedejo do konca.

Konzultacije z mentorico

Na začetni UBD-delavnici sem avtentično nalogo zastavil na grobo, s pomočjo kolega iz matematičnega aktiva. Drug drugemu sva pomagala razmišljati, pravzaprav prebijati se skozi vse tri faze. Najtežja je bila faza 1, ki je osnova za nadaljnje delo, ravno zaradi principa vzvratnega načrtovanja.
Potem je bilo treba natančno zapisati celotni načrt in ga pred uporabo v razredu oddati mentorici. Na prvi konzultaciji sva govorila o izboljšavah načrta. Edini večji pomislek je bil pri navodilih za izvedbo naloge. Izkazalo se je, da sem dijakom podal navodila preveč natančno in s tem »pokvaril« fazo transferja znanja. Popravil sem jih tako, da so od dijakov zahtevala več samostojnosti.
Naslednja stopnja je bila izdelava delovnega zvezka in na drugi konzultaciji sva z mentorico preverila, ali so vključene vse predpisane vsebine. Večji popravki niso bili potrebni.

Evalvacija in načrti za naprej

Avtentična naloga ni bila obvezna, kljub temu pa jo je izdelalo 11 od 18 dijakov. Pridobljene ocene so bile: 1 dobra, 3 prav dobre in 7 odličnih.
Na evalvaciji po izdelani nalogi je sodelovalo samo 9 dijakov (tik pred koncem pouka nekaterih dijakov nisem več videl). Avtentično nalogo so ocenili kot zanimivo, všeč jim je bilo vključeno aktivno delo in da v njej lahko izrazijo tudi svojo kreativnost. Delovni zvezek so ocenili pozitivno. Pomembno jim je bilo, da so imeli vse skupaj na enem mestu – tako bistvena vprašanja kot tudi teorijo in primere, s pomočjo katerih se je zgodil transfer znanja pri reševanju avtentične naloge.

Povprečna ocena (na lestvici od 1 (»nikakor se ne strinjam«) do 5 (»popolnoma se strinjam«) nekaterih trditev je prikazana v tabeli 1 in kaže na zelo dober odziv dijakov in smiselnost izvedbe avtentične naloge po principu UBD.

Tabela 1: Rezultati evalvacije za dijake

Bistvena vprašanja na začetku so pri meni vzbudila zanimanje in me dovolj motivirala za nadaljnje delo.	4
Primerjanje odgovorov na bistvena vprašanja pred obravnavo učne snovi in po njej se mi je zdelo zanimivo.	4,1
S pomočjo bistvenih vprašanj na koncu sem se zavedel/-a novega znanja oz. novih spoznanj.	4,4
Zaradi takšnega načina dela bolje razumem učno snov in zato bo moje znanje bolj dolgoročno.	4,3
Pripravljeno gradivo mi je omogočilo vpogled v celoto in mi je bilo v pomoč pri delu.	4,6

Sam sem avtentično nalogo na začetku sprejel kot neprijetno obveznost. Med zapisom načrta in izdelavo delovnega zvezka sem se poglobil v princip UBD in ga počasi začel razumeti. Prvo potrditev o smiselnosti drugačnega pristopa k načrtovanju pouka sem dobil med delom v razredu, ko so dijaki večinoma samostojno izračunali volumen soda z danimi merami. Drugi, še konkretnejši dokaz pa so dobri rezultati in s tem ocene same avtentične naloge. Zato sem prepričan, da je med celotnim procesom prišlo do transferja znanja, kot ga predvideva princip UBD.
V tem šolskem letu moram malenkost prirediti in popraviti delovni zvezek. Vzrok za to je izkušnja z njim v razredu – prej sem težko predvidel časovno razporeditev; nisem vpisal domačih nalog; kakšnim nalogam je treba dodati besedilo ali ga popraviti. Nujno moram z integralom začeti prej (verjetno ob koncu januarja), ker se izdelava naloge v maju ni izkazala za najboljšo. Dijaki so bili zasedeni z drugimi dejavnostmi, zato jih toliko ni oddalo naloge.
Letos je izdelava avtentične naloge obvezna za vse dijake. Njena ocena mora nadomestiti vsaj 40 % ene izmed pisnih ocen. Odločil sem se, da bodo dijaki namesto krajše pisne naloge dobili oceno iz oddanega izdelka.

Celoten proces načrtovanja učnega sklopa je (še posebej pri prvi izkušnji z UBD) za učitelja precej zahteven, saj je način razmišljanja bistveno drugačen kot običajno in dolgotrajen, ker mora poskrbeti, da pravilno poveže vse faze načrtovanja. Vendar pa na koncu pozitiven odziv dijakov in dobre ocene avtentične naloge pustijo občutek, da se je ves trud obrestoval.

Viri

1. Wiggins, G., McTighe, J. (2005): Understanding By Design 2nd Expanded Edition, ASCD, Alexandria.
2. Kamšek, M: Do razumevanja z načrtovanjem, interno gradivo (priredba zgornjega vira).
3. http://www.ascd.org/research-a-topic/understanding-by-design-resources.aspx.

RISANJE SKIC PRI GEOMETRIJI
Drawing Sketches in Geometry Classes

Mag. Simona Pustavrh
simona.pustavrh@sc-nm.si
Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija

Povzetek
Avtorica v prispevku predstavi težave, ki jih imajo dijaki pri risanju skic pri geometriji. Veliko jih namreč nariše premajhne skice in jih nepopolno označi. Če jih rišejo prostoročno, daljice niso ravne, stranice likov se ne stikajo v ogliščih, krožnice so le sklenjene črte ipd. Prav tako ne upoštevajo lastnosti likov iz besedila nalog. Skico trikotnika najpogosteje narišejo kot enakokraki trikotnik, pri trapezu osnovnici nista vzporedni, ne upoštevajo približnih razmerij stranic ipd. Avtorica predstavi pomen risanja skic in opozori, da čim zahtevnejše so naloge, tem bolj natančno skico potrebujemo. Opaža tudi, da celo dijaki v tretjem letniku srednje šole še vedno rišejo slabe skice.

Abstract
The author discusses students' difficulties in drawing sketches in geometry classes. Large amount of students tend to draw too small and inaccurate sketches. When drawn freehand, straight lines are not straight, the bases of geometric shapes do not join vertices, circumferences are just solid lines, etc. In addition students do not consider geometric shape features given in tasks. The sketch of a triangle is usually similar to an isosceles triangle, trapezoid bases are not parallel, the approximate ratios of the lines are not considered as well, etc. The author discusses the importance of drawing sketches and further emphasizes that the more difficult the task the more accurate the sketch. The author also notices that even the third year of highschool students still continue to draw inaccurate sketches.

Ključne besede
skice, geometrija, geometrijsko orodje

Keywords
Sketches, geometry, geometric tools

Zakaj rišemo skice?

Pri geometriji pogosto rišemo skice. Rišemo jih pri konstrukcijskih nalogah, pri dokazovanju trditev in izrekov ter pri računskih nalogah, ko iščemo zvezo med znanimi in neznanimi količinami, saj nam skice pomagajo pri iskanju poti do rešitve. Pri preprostih nalogah, kot je na primer konstrukcija trikotnika z znanimi vsemi tremi stranicami, dijaki ne čutijo potrebe po risanju skic. Po navadi jih rišejo zato, ker tako zahtevamo učitelji, pri zahtevnejših nalogah pa tudi sami spoznajo, da so skice potrebne.

Zakaj torej rišemo skice? Ko narišemo skico, predpostavimo, da rešitev obstaja. Narisati skico torej pomeni narisati končni rezultat. Tako so razmišljali že stari Grki. Papos je rekel: »Vzemi to, kar se zahteva, da je treba narediti, kot že narejeno.« (Polya, 1989: 204) Ali naslednji nasvet: »Narišite hipotetično sliko, v kateri predpostavljate, da so pogoji problema izpolnjeni v vseh njegovih podrobnostih.« (Polya, 1989: 204)

Čeprav rišemo skice pri različnih tipih nalog, se bomo v prispevku omejili na risanje skic pri konstrukcijah različnih likov.

Risanje skic pri konstrukcijskih nalogah
Skico lika najprej pravilno označimo. Obvezno označimo oglišča in stranice, nato narišemo in označimo podatke v nalogi, npr. kote, težiščnice in višine trikotnika, simetrale kotov ipd. K nazornosti naloge pripomore, če vse znane podatke obkrožimo.

Skica ne sme biti zavajajoča. Najpogostejše napake, ki jih naredijo dijaki pri risanju skic, so:

- skice likov narišejo zelo majhne;
- skice trikotnika so najpogosteje enakokraki trikotniki ne glede na to, kakšen je trikotnik v nalogi (raznostraničen, pravokoten, enakokrak). Pri risanju skic ne upoštevajo velikosti danih kotov (ostrokoten, topokoten);
- na skicah romba stranice niso enako dolge ter ne upoštevajo in ne označijo pravega kota med diagonalama;
- na skicah paralelograma označijo pravi kot med diagonalama in/ali se ne potrudijo narisati vzporednih nasprotnih stranic;
- na skici trapeza ne narišejo vzporednih osnovnic ali narišejo enakokraki trapez, čeprav tega iz naloge ni razbrati.

Ker na skicah označimo podatke ter pogosto narišemo dodatne daljice, krožnice, označimo dodatne točke ipd., je zelo pomembno, da je skica dovolj velika, prav tako se potrudimo narisati vzporednice, pravokotnice, simetrale stranic in kotov ipd.

Pomembno je tudi vprašanje, kako rišemo skice. Nekateri zagovarjajo, da je skice treba risati s svinčnikom in s prosto roko, drugi dopuščajo možnost, da skice rišemo z nalivnim peresom oziroma drugim pisalom ali da pri risanju uporabljamo geometrijsko orodje. Vse možnosti imajo prednosti in slabosti.

Priporočljivo je, da skice rišemo s svinčnikom, saj imamo tako možnost risati bolj in manj poudarjene črte ter skice popravljati. Če rišemo z nalivnim peresom ali s kemičnim pisalom, je skica pogosto nepregledna. Preglednost skic pri zahtevnih nalogah lahko izboljšamo tudi z risanjem z barvnimi svinčniki.

Uporaba skic pri konstrukcijskih nalogah
Ob skici analiziramo vsak podatek posebej, nato pa s sintezo vseh ugotovitev poiščemo pot do rešitve, zato skica ne sme zavajati. Če je potrebno, na skici narišemo dodatne daljice, poltrake, premice, krožnice, loke, točke ipd., ki pomagajo pri razmišljanju o poti do rešitve. Po potrebi uvedemo tudi dodatne oznake.

Če na skici morda vidimo vzporednice, pravokotnice ipd., to še ne pomeni, da je ta lastnost takšna tudi v obravnavanem problemu. Lastnost je treba utemeljiti z aksiomi in izreki.

Ob skici razmišljamo tudi o neobstoju rešitve in o obstoju več rešitev naloge v posebnih situacijah, kot so na primer možnost ostrokotnega ali topokotnega trikotnika in s tem povezane lastnosti (sekanje višin trikotnika zunaj ali znotraj lika, lega središča trikotniku očrtane krožnice), število presečišč krožnice z daljico ipd.

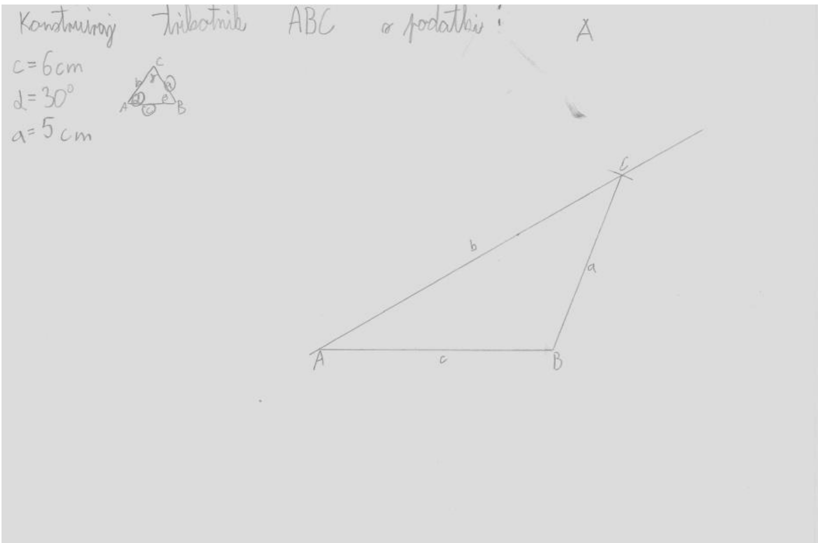
Če so naloge dovolj preproste, ni moteče, če skice rišemo s prosto roko. Bolj kot je zahtevna naloga, boljšo skico je treba narisati, da vidimo pot do rešitve. Najbolj očitno je to pri tekmovalnih nalogah iz matematike, kjer običajno sicer ni konstrukcijskih nalog, so pa geometrijske naloge, pri katerih je treba dokazovati. V višjih letnikih te naloge najpogosteje temeljijo na tetivnih štirikotnikih, zato pri risanju skic uporabljamo tudi šestilo. Dobra navodila za risanje skic najdemo v elektronski reviji Brihtnež (Željko, 2002: 14). Avtor priporoča, da tudi na skicah z geometrijskim orodjem konstruiramo simetrale daljic, simetrale kotov ipd., saj v nasprotnem primeru skica ni dovolj nazorna in je celo zavajajoča. Zaradi natančnosti odsvetuje celo uporabo priljubljenega geotrikotnika.

Preverjanje predznanja v prvem letniku
Za pomoč pri pisanju prispevka sem septembra 2016 izvedla preverjanje znanja o risanju skic v prvem letniku tehniške gimnazije, čeprav to ni bila redna snov. Konstrukcije likov obravnavamo pri geometriji šele konec prvega letnika. Polovica razreda je reševala prvo nalogo, druga polovica drugo.

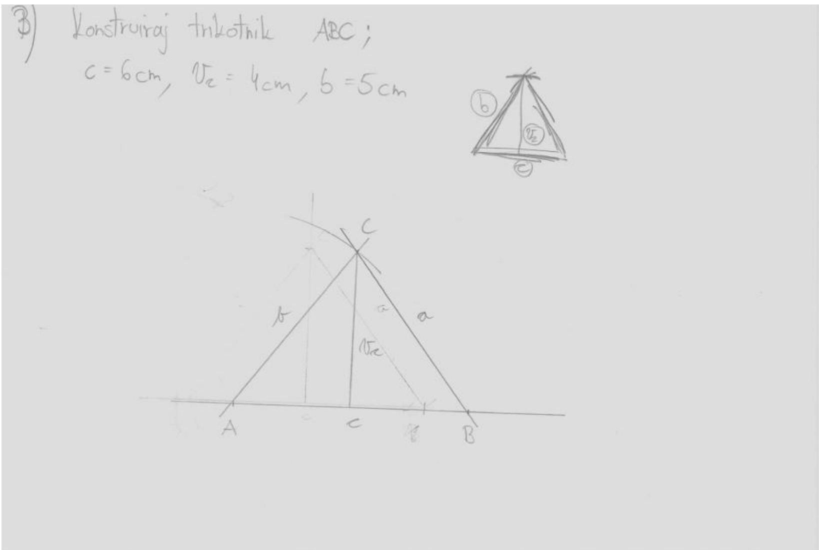
Naloga 1
Konstruiraj trikotnik *ABC* s podatki $a = 5$ cm, $c = 6$ cm in $\alpha = 30°$. Nariši skico.

Naloga 2
Konstruiraj trikotnik *ABC* s podatki $b = 5$ cm, $c = 6$ cm in $v_c = 4$. Nariši skico.

Pri pregledovanju izdelkov dijakov sem se osredotočila na skice in manj na same konstrukcije. Od 29 dijakov so le 4 dijaki narisali ustrezno skico. Največ skic je bilo zelo majhnih in večina trikotnikov je bilo enakokrakih, kot je na sliki 1. Nekateri dijaki na skicah niso dobro ali pa so nepravilno označili stranice in kote, nekateri pa so narisali skico ob napačnih predpostavkah (na primer, da je trikotnik pravokoten). Dva sta narisala skico tako, da sta hotela poudariti stranice trikotnika, vendar sta to storila zelo slabo (slika 2).



Slika 1: Dijakovo reševanje naloge 1 (list formata A5)



Slika 2: Dijakovo reševanje naloge 2 (list formata A5)

Veliko konstrukcij ni bilo dokončanih. Polovica dijakov je konstruirala trikotnik, vendar niso videli, da imata nalogi dve rešitvi. Pri drugi nalogi niso konstruirali točke *C* z vzporednico k stranici *c*, ampak so z geotrikotnikom ugibali, kje naj bi bila. Pri obeh nalogah so pri nanašanju stranic s šestilom narisali prekratek lok in tako niso videli, da lok seka nosilko stranice oziroma oglišča v dveh točkah.

Za primerjavo sem prav tako septembra izvedla preverjanje risanja skic še v tretjem letniku. Konstrukcije likov smo z dijaki obravnavali konec prvega letnika. Veliko pozornosti sem namenila risanju skic, zato me je zanimalo, koliko se spomnijo po enem letu in pol.

Po pregledu izdelkov sem ugotovila, da je 12 dijakov od 27 dijakov še vedno narisalo slabe skice, saj so bile zelo majhne in neustrezno označene. Skic niso dopolnili z dodatnimi daljicami, ob skicah niti ob konstrukcijah niso razmišljali o več rešitvah naloge. Preostali dijaki so narisali dobre skice in tudi konstruirali obe rešitvi.

Risanje boljših skic

Razmišljala sem o razlogih, zakaj dijaki rišejo slabe skice. Morda so prve konstrukcijske naloge, s katerimi se srečajo, tako preproste, da jih lahko učenci in dijaki narišejo tudi brez skic. Skico narišejo, ker tako zahteva učitelj. Če učenci in dijaki za skico narišejo le osnovno obliko lika in na njej ne narišejo dodatnih daljic in točk, vpeljejo dodatnih oznak ipd., se zdi res nepotrebna. V prvem letniku rešujemo tudi zelo zahtevne naloge, kot so konstrukcije trikotnikov z vsoto ali razliko stranic, tudi z razliko kotov.

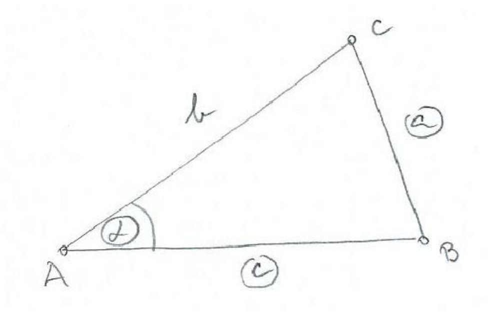
Nekaj primerov, s katerimi bi pri učencih in dijakih razvili risanje uporabnih skic:

- Če je podatek višina trikotnika, na skici narišemo (črtkano) vzporednico s stranico, ki gre skozi nasprotno oglišče.
- Če je podatek težiščnica trikotnika, jo na skici narišemo, narišemo pa tudi (črtkan) lok s polmerom težiščnice in s središčem v razpolovišču ustrezne stranice.
- Če vemo, da bomo konstruirali stranice, diagonale ali druge daljice s šestilom, narišemo loke z ustreznimi središči in polmeri.

- Na skici označimo dodatne točke, ki so presečišča daljic, krožnic in daljic, krožnic ipd.
- Uvedemo nove oznake.

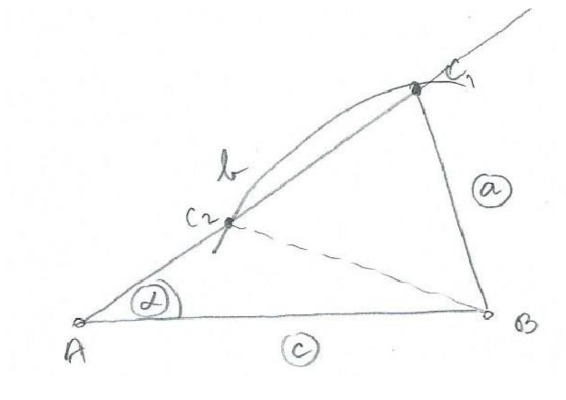
Poglejmo še enkrat prvo nalogo, ki so jo reševali prvi letniki: konstruiraj trikotnik *ABC* s podatki $a = 5$ cm, $c = 6$ cm in $\alpha = 30°$.

Za samo reševanje naloge je morda res dovolj, če narišejo le trikotnik, ga označijo in obkrožijo podatke, kot je na sliki 3.



Slika 3: Preprosta skica pri konstrukciji trikotnika

Lahko pa bi že ob tem preprostem primeru učence in dijake navajali, da na skici narišejo dodatne daljice, točke, premice, loke. S tem bi jih že zgodaj vzgajali k razmišljanju ob skici. Tako bi namesto zgornje skice lahko narisali dopolnjeno skico na sliki 4.

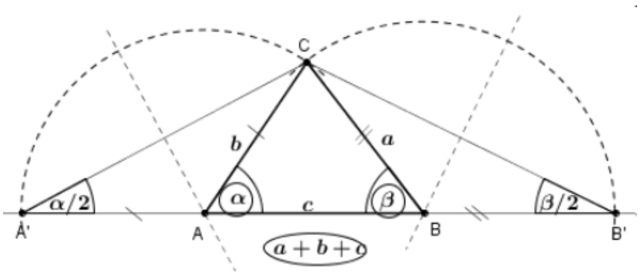


Slika 4: Dopolnjena skica pri konstrukciji trikotnika

Učenci oziroma dijaki bi že ob skici razmišljali o tem, da ima naloga lahko več rešitev, lahko ima eno rešitev ali nobene.

Že pri prvi najpreprostejši konstrukcijski nalogi, ki je verjetno konstrukcija trikotnika z danimi vsemi tremi stranicami, bi lahko učenci in dijaki na skici narisali loka (prvega s središčem v *A* in polmerom *b* in drugega s središčem v *B* in s polmerom *a*), katerih presečišče je oglišče *C*.

Za ilustracijo si oglejmo še primer skice pri konstrukciji trikotnika z dano vsoto vseh treh stranic in kotoma ob osnovnici. Za tako zahtevne skice je priporočljivo uporabiti geometrijsko orodje.



Slika 5: Skica pri konstrukciji trikotnika, če je dana vsota treh stranic

Sklep

Risanje skic je pri konstrukcijskih in drugih nalogah za učence in dijake zelo pomembno, saj jim skice pomagajo pri iskanju poti do rešitve. Morda menimo učitelji, da je samo po sebi umevno, da bodo učenci in dijaki znali narisati uporabno skico, vendar pri svojih dijakih opažam, da ni tako.

Če narišejo za skico lika le osnovo obliko lika in označijo oglišča, morda še kote in višine, to še ne pomeni, da je skica uporabna. Uporabna postane, če na skici narišemo dodatne daljice, točke, premice, krožnice in loke …, vendar dijaki tega ne naredijo.

Menim, da bi k boljšemu risanju skic pripomoglo, če bi jih k dopolnjevanju skic usmerjali že pri prvih konstrukcijskih nalogah, ki so seveda zelo preproste.

Učenci in dijaki naj tudi že ob skici razmišljajo in predvidijo, koliko rešitev ima lahko naloga ob različnih vrednostih določenega podatka, kot je na primer višina trikotnika. Učenci in dijaki bodo tako že ob preprostih nalogah razmišljali širše: za nekatere višine trikotnik ne obstaja, za druge vrednosti obstaja natanko en trikotnik, za nekatere vrednosti višine pa trikotnik morda ne obstaja.

Ko se v prvem letniku prvič srečamo z risanjem skic pri konstrukcijskih nalogah, dijakom predstavim pomen skic in kako jih rišemo. Na začetku smatrajo, da so skice nepotrebne, še bolj nepotrebno se jim zdi dopolnjevanje skic z daljicami, loki ipd. Šele pozneje pri zahtevnejših nalogah vidijo pomen vsega. Kljub podrobni obravnavi v prvem letniku veliko dijakov z leti pozabi na dana navodila in so skice v višjih letnikih ponovno slabe, dokler jih ne opozorim.

Viri

1. Željko, M. (2002): Risanje skic pri geometriji. Brihtnež, letn. 0, št. 1, str. 14–16. https://www.dmfa.si/tekmovanja/Brihtnez/Brihtnez-0-1.pdf (2. 10. 2016).
2. Pavlič, G. et al. (2012): Planum. Modrijan, Ljubljana.
3. Polya, G. (1989): Kako rešujemo matematične probleme. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana.

SPREMLJANJE UČENCA PRI UČENJU MATEMATIKE

MATEMATIČNA NADARJENOST DOLOČA ŽIVLJENJSKO POT

Later Life Determined by Mathematical Precocity

Dr. Tina Bregant
tina.bregant@siol.net
Univerzitetni rehabilitacijski inštitut Republike Slovenije

Povzetek
V prispevku predstavim raziskave in spoznanja o vplivu matematičnih sposobnosti otrok na njihov kasnejši uspeh v življenju. Ker predšolske izkušnje in spodbudno okolje, usmerjeno zlasti na odnose med učenci in učitelji matematike, pomembno določajo kasnejše uspehe pri matematiki, so spodbude za ukvarjanje in negovanje matematičnih kompetenc izjemno pomembne, saj vplivajo na splošno blagostanje, zdravje populacije in imajo pomembne ekonomske učinke na celotno družbo. Ker imamo v Sloveniji mednarodno primerljive, nadpovprečne rezultate na področju naravoslovja in matematičnih kompetenc pri najstnikih, hkrati pa podpovprečno, nizko zadovoljstvo in osmišljenost ukvarjanja s temi področji, je prispevek dobrodošel kot utemeljitev in motivacija za ukvarjanje z matematiko.

Abstract
In the article I provide an overview of research findings which studied the correlation between mathematical competences in children and their later success in life. As we nurture mathematical abilities by preschool stimulation and interventions directed at interaction between mathematics' teacher and student, we influence hereby a general society-well-being, population health, and even state economy. Since in Slovenia, international comparison data show natural sciences and mathematical knowledge of our Youth above the average but by the same token an under average commitment and purpose of practising it, the article can be used by teachers to encourage the students and motivate them in learning mathematics.

Ključne besede
matematične kompetence, učne spodbude, akademski uspeh

Keywords
mathematical competences, learning incentives, academic success

Izhodišča

Program mednarodne primerjave dosežkov učenk in učencev PISA – Programme for International Student Assessment, ki primerja znanje in spretnosti učenk in učencev v državah članicah Organizacije za ekonomsko sodelovanje in razvoj (OECD) in državah partnericah, je letos pokazala, da slovenski petnajstletniki dosegajo rezultate nad povprečjem OECD (2016). V Sloveniji je v raziskavi sodelovalo 6406 dijakinj in dijakov, praviloma prvega letnika srednjih šol. V zadnji raziskavi PISA so se raziskovalci osredotočili na naravoslovno pismenost, saj raziskovalno in znanstveno mišljenje postaja vsakdanja nuja. Interpretacija podatkov, kot so izbira ustreznih živil, uporaba tehnologije in trezen razmislek ter presoja v množici podatkov, od nas zahteva, da razmišljamo bolj znanstveno. Pri tem so nam v veliko pomoč matematične kompetence. Omogočajo nam reševanje vsakdanjih problemov z matematičnim mišljenjem in zajemajo poleg občutka za količino in računanja tudi veščine logičnega mišljenja, prostorske predstave in sposobnost abstrakcije, kar se kaže v razumevanju formul, modelov, konstruktov, grafov in razpredelnic (Keyconet, 2006). Razumemo jih kot osrednjo komponento človekovega uma, ki pomembno določa izobrazbo in poklicne dosežke (Schmidt in Hunter, 1998). Ker razmislek, ki vsebuje matematično analizo, pomaga informacijo ustrezno ovrednotiti in uporabiti, ni presenetljivo, da obladovanje podatkov, povezanih z zdravjem, vodi v daljše in bolj kakovostno življenje (Reyna idr., 2009). Poleg tega raziskave kažejo, da obstaja neposredna korelacija med bruto domačim proizvodom na prebivalca (BDP) in uspešnostjo pri naravoslovnih predmetih, z najmočnejšo korelacijo za matematične kompetence, merjene na preizkusih PISA oz. TIMMS (Bailey in Borooah, 2010; Benos in Stefania, 2014).

Namen

V prispevku pregledam raziskave o povezavi med matematičnimi kompetencami in kasnejšim uspehom v življenju, ki ga opredelim širše kot le z ekonomskim vidikom. Osmišljanje, zakaj se nekaj učimo in kako nam to znanje lahko koristi, je namreč nujno, če hočemo v tem uvideti smisel. Prav v tem so naši dijaki v testu PISA izstopali – kljub dobremu uspehu so namreč poročali, da v naravoslovju ne uživajo in ne uvidijo posebne vrednosti (smisla) v njem (OECD, 2016). Zato želim s prispevkom učitelje opolnomočiti, da bodo lahko učencem in tudi njihovim staršem argumentirano priporočili ukvarjanje z matematiko in naravoslovjem.

Matematične sposobnosti in življenjska uspešnost

Matematične sposobnosti

Matematične sposobnosti ali kompetence nam omogočajo razumeti matematiko in matematične pojme. K matematičnim kompetencam spada intuitivno znanje matematike. Evolucijsko starejše sposobnosti, kamor spada intuitivna sposobnost določanja količine, smo podedovali od naših prednikov, saj te omogočajo teritorialnim vrstam, kamor spadamo tudi ljudje, najti življenski prostor, kjer je hrane za preživetje dovolj (Libertus idr., 2011; Bregant, 2013). Te ključne možganske strukture, ki si jih delimo z nekaterimi živalskimi vrstami, se nahajajo v temenskih režnjih in smo z njimi že rojeni. Bolj kompleksni procesi, kot je procesiranje matematičnih problemov, pa zahtevajo usklajeno in brezhibno delovanje različnih predelov možganov (Bregant, 2012) in pomenijo nadgradnjo obstoječe matematične intuicije. Nujen je dober priklic aritmetičnih znanj, torej delovanje spomina, kot tudi delovanje višjih, kognitivnih procesov, v katerih se izurimo zlasti kasneje, v obdobju šolanja.

Za razliko od govornih veščin in lateralizacije možganov, kjer je center za govor lociran v dominantni, po navadi levi hemisferi, procesiranje matematične informacije zahteva usklajeno delovanje določenih predelov obeh hemisfer. Ker natančno poznavanje teh možganskih struktur presega vsebino članka, naj le omenim predele, ki so ključni pri obvladovanju matematičnih kompetenc. Med pomembnejše spadajo bilateralni predeli ob intraparietalnem sulkusu (IPS), ki so aktivni med procesiranjem numerične količine, torej katera številka je večja; senčnični predel za vidno predstavo količine; govorni predeli in artikulacijska zanka, zlasti ko je vpleten tudi govor (npr. besedilne naloge ali opis količine); za aritmetična dejstva globoka možganska jedra (talamus in bazalni gangliji) ter prefrontalna skorja, kjer poteka izbira strategije in načrtovanje računske operacije/reševanje matematičnega problema (Dehaene idr., 2003). Za kompleksnejše matematične probleme je potrebno brezhibno delovanje dodatnih predelov: medialni in superiorni girusi čelnega režnja za načrtovanje in stopenjsko reševanje problema; srednji girusi čelnega režnja za zahtevnejše, večstopenjske probleme; spodnji del čelnega režnja za nadzor nad preprostimi problemi; precentralni girus, kjer poteka nadzor nad očesnimi gibi, s katerimi sledimo problemu; insula za samodejno izvajanje procesov; cingulatni girus za implementacijo miselnih procesov;

desni girus angularis za priklic vidno-prostorskih zaznav ter mali možgani, kjer poteka usmerjeno, vidno-gibalno usklajevanje (Arsalidou in Taylor, 2011). Iz naštetega je razvidno, da je za reševanje kompleksnejših matematičnih problemov nujno brezhibno delovanje tako rekoč celotnih možganov. Zavedanje slednjega je nujno, če nočemo narediti krivice posameznikom, ki nimajo nevrološkega (biološko danega) substrata za bolj kompleksna znanja, hkrati pa da razumemo, da so določene reči »nepriučljive« in biološko pogojene. Drži pa, da je večina otrok zdravih in da tipično razviti možgani omogočajo navedeno. Za bolj nadarjene pa velja, da se lahko kljub biološki danosti njihove izjemne matematične veščine zaradi svoje kompleksnosti polno izrazijo le ob pedagoškem vodstvu. Testi PISA so uporabni, saj preizkušajo splošno in uporabno znanje matematike tipičnih učencev in se ne osredotočajo le na nadarjene posameznike. Ne testirajo le visoko abstraktnih znanj in ne merijo le »bioloških danosti«, pač pa služijo kot merilo kakovosti šolskega sistema in poučevanja v povprečni, tipični populaciji otrok.

V šolskem obdobju osmišljamo abstrakcije in se urimo v veščinah in razumevanju algoritmov, medtem ko v predšolskem obdobju postavljamo temelje količinskemu razumevanju in intuitivni matematični presoji. Tako v pedagoškem procesu nadgrajujemo biološko dane lastnosti, kot so npr. brezhibnost delovanja možganskih struktur, število nevronov in povezljivost. Vrojene sposobnosti v kombinaciji s priučenimi lastnostmi in veščinami pa pomembno vplivajo na naš kasnejši, akademski uspeh, hkrati pa celo določajo višino naše plače in vplivajo na ekonomsko uspešnost države (Bregant, 2014).

Vplivi na matematične sposobnosti

Kot pediatrinja sem postala bolj pozorna na matematične uspehe, ko so moji bolniki, ki sem jih sledila iz obdobja novorojenčka nedonošenčka, ko so utrpeli hipoksično okvaro možganov, poročali o stalnih težavah pri matematiki, kljub temu da so bili sicer povprečno uspešni učenci in dijaki (Levstek idr., 2013). Pri preučevanju njihovih sposobnosti smo ugotovili, da so sicer preproste aritmetične probleme reševali enako pravilno kot njihovi zdravi vrstniki, vendar pa so za to potrebovali več časa. Njihove kognitivne strategije so bile drugačne: očesni gibi so bili potratni, tako časovno kot prostorsko; zdelo se je, da probleme rešujejo »na pamet« in brez posebne, učinkovite strategije. Podobno je veljalo za težje probleme, ki so vključevali računanje s prehodom, ki zanje ni pomenil uporabe drugačne strategije, kot da ne bi prepoznali razlike (Levstek idr., 2012). Podobno so kasneje opisovali tudi tuji raziskovalci. Nedonošenčki, rojeni pred 34. tednom gestacije, so imeli več kognitivnih in učnih težav kot donošeni, pri čemer so se težave stopnjevale z nedonošenostjo (Basten idr., 2015). Specifične učne težave pri njih v večini zajamejo vidno-prostorske predstave, spomin, pozornost in matematične veščine. Nedonošenčki imajo zaradi naštetega več težav z matematičnim razmišljanjem, kar posledično vodi v nižje akademske uspehe in kasneje tudi slabše plačane službe (Johnson, 2014).

Ob ustrezni prepoznavi teh težav bi bilo v luči splošnega zdravja in blagostanja smotrno načrtovati usmerjene šolske intervence. Žal pa se izkaže, da preučevanje matematičnih sosobnosti z nevroznanstvenega vidika ni tako preprosto. Številke so namreč abstraktni simboli, ki lahko pomenijo različne stvari: količino kot npr. trije članki ali pa zaporedje: npr. tretji (lahko je to hkrati zadnji) članek. Številke lahko zapišemo simbolično na več načinov: tri ali 3 ali III ali pa nesimbolično, npr. tri pike, in prav vsi zapisi pomenijo enako količino, vendar pa vsaka od teh informacij aktivira poleg predela za prepoznavo količine tudi druge predele: simbolno, vidno-prostorsko skicirko, jezikovno-govorno področje ipd. Bolj podrobno sem o tem že pisala v reviji Matematika v šoli (Bregant, 2016). Iz raziskav in tudi praktičnih izkušenj pa vemo, da učenje števil, prilagojeno potrebam in zmožnostim posameznika in z začetkom že v predšolskem obdobju, vpliva na izboljšanje matematičnih sposobnosti. Dobro poznavanje števil in količinske predstave, za katere je nujno normalno delovanje nekaterih možganskih predelov, predvsem predelov ob intraparietalnem sulkusu, je prvi pogoj za uspešno razumevanje matematike in za razvoj matematičnih kompetenc, ki zahtevajo kompleksno in usklajeno delovanje celotnih možganov in nas spremljajo tako rekoč vse življenje.

Okoljske dejavnike, kamor spadata zlasti vzgoja in izobraževanje, lahko usmerimo v pridobivanje matematičnih kompetenc. Predšolske izkušnje, zlasti telesno-gibalne izkušnje, ki vplivajo na ustrezno telesno-miselno shemo, in spodbudno predšolsko okolje, so dejavniki, ki vplivajo na kasnejše uspehe pri matematiki (Brooks-Gunn idr., 2003). Učinki obogatenih materialov, dejavnosti in interakcij med vzgojitelji/učitelji in učenci v najzgodnejših letih učenja se kažejo še štiri leta po učinkoviti intervenciji, usmerjeni v matematiko (Preisner-Feinberg idr., 2001). Če spodbujamo učenje matematike pri ekonomsko in socialno deprivilegiranih učencih, pri njih pride do boljšega uravnavanja in nadzora vedenja in zmanjšanja težavnih vedenj. Ti učenci pridobijo več samonadzora in pripadnosti šoli in učenju. Bolj pogosto kot pred intervenco so pridružena pozitivna socialno-čustvena vedenja (Dobbs idr., 2006). Tako otrokom postane akademsko okolje bližje in si želijo vstopiti vanj, hkrati pa jih opremimo za akademski svet. To vpliva na kasnejše akademske uspehe, zaposlitev ter posledično na socialnoekonomski položaj posameznika v družbi.

Uspeh v življenju

Uspeh v življenju lahko definiramo različno. Pri večini raziskav definicijo uspeha nadomestimo z merljivimi kazalniki uspeha, npr. akademsko izobrazbo, hierarhično višjimi pozicijami v službi, karierami z višjo odgovornostjo, kar je praviloma vezano tudi na plačilo dela in zaslužek, ali pa uporabimo kazalnike splošnega in duševnega zdravja, dolgoživost, obolevnost za določenimi stanji, ki zmanjšujejo kakovost življenja ipd. Vemo, da na kakovost življenja močno vplivajo tako bralna pismenost kot matematične kompetence (Richards idr., 2009). Raziskava, ki je na Švedskem zajela celotno populacijo, je pokazala, da že 12 mesecev daljše obvezno šolanje vpliva na dolgoživost, pri čemer je verjetnost za smrt zaradi rakavih obolenj, ishemične srčne bolezni in hudih nesreč v skupini 40- do 70-letnikov statistično značilno nižja (Lager in Torssander, 2012). Tudi druge populacijske raziskave pritrjujejo temu, da boljša pismenost, povezana z daljšim šolanjem, izboljša splošno zdravje proučevane populacije (Bynner, 2004). Poleg tega raziskave kažejo, da že pred vstopom v šolo lahko na podlagi bralne in računske pismenosti predvidimo, ali bo nekdo uspešno zaključil šolanje in koliko bo kasneje zaslužil (Duncan idr., 2007).

Dolgoročna raziskava v ZDA o matematično nadarjenih mladih (angl. *The Study of Mathematically Precocious Youth – SMPY*), ki je vključila 13-letnike, ki so dosegali tako matematične kot govorno-jezikovne sposobnosti najboljših 3%, je zdaj delno zaključena, saj so bivši študenti matematike dopolnili 35–40 let (Lubinski idr., 2014). V vključeni kohorti je sodelovalo 1037 moških in 613 žensk, ki so do svojega 35. leta objavili: 85 knjig, 7572 člankov, 681 patentov in pridobili za 358.000.000 USD sredstev oziroma štipendij. Poleg preučevanja skupine so raziskovalci na Centru Johns Hopkins izpostavili tudi znane posameznike, ki so vključevali kriterije za vključitve v skupino nadarjenih, ko so bili otroci. Zanimivo je, da so v tej skupini poleg matematikov, kot sta npr. Terence Tao in Lenhard Ng, tudi Mark Zuckerberg, Sergey Brin in glasbenica Lady Gaga (pravo ime Stefani Germanotta) (Clynes, 2016). Več raziskav je potrdilo, da matematično nadarjeni otroci – to so tisti, ki spadajo med zgornjih 1–3% kognitivno najuspešnejših, postanejo znanstveniki in akademiki, a tudi najbolj vplivni in bogati vodje podjetij, državni sodniki, med njimi so tudi nekateri senatorji in bilijonarji. Eden od raziskovalcev, psiholog Jonathan Wai, zanje pravi, da »če nam je prav ali pa ne, ti ljudje vodijo družbo« (Clynes, 2016: 153). Verjetno bi lahko pomensko prevedli, »da nam vladajo«, a ne bi držalo povsem, saj med njimi ni prav dosti politikov in vladarjev.

Sklep

V članku sem na kratko predstavila matematične kompetence in njihov vpliv na kasnejši uspeh v življenju. Z dokazi sem podprla in osmislila spodbujanje matematičnih kompetenc, kar bodo lahko uporabili učitelji pri delu z otroki, ki ne vidijo smisla v ukvarjanju z naravoslovjem in matematiko. Spodbude in motivacije za učence so lahko povsem pragmatične, npr. boljši položaj v družbi ali višji zaslužek. Raziskave namreč kažejo, da če negujemo matematično mišljenje že v otroštvu, lahko pričakujemo več blagostanja, tako ekonomskega kot splošnodružbenega, ko bodo ti otroci odrasli. Posebej velja spodbujati matematično nadarjene, saj ti v odrasli dobi predstavljajo kritični človeški kapital, ki predstavlja kreativno in profesionalno vodstvo z jasnimi ekonomskimi učinki na družbo, v kateri delujejo.

Glede na rezultate predstavljenih raziskav smo lahko tudi skeptični: če so ti posamezniki tako zelo uspešni, zakaj potem za svoje področje delovanja ne izberejo političnih ved, da bi končno lahko končali vojne, izčrpavanja ljudi in narave, neenakosti in revščino? Morda so raziskovalci spregledali kakšno pomembno lastnost ali pa morda kot človeštvo potrebujemo še kaj poleg bistrosti in matematičnih kompetenc? Morda matematične kompetence predstavljajo le en razvojni vidik? Ali pa moramo morda redefinirati uspeh? Te dileme pa prepuščam bralcem: v razmislek in spodbudo pri nadaljnjem delu.

Viri

1. Arsalidou, M., Taylor, M. J. (2011): Is 2+2=4? Meta analyses of brain areas needed for numbers and calculations. Neuroimage, št. 54, str. 2382–2393.
2. Bailey, M., Borooah, V. K. (2010): What Enhances Mathematical Ability? A Cross-Country Analysis Based on Test Scores of 15-Year-Olds. Applied Economics, str. 3723–3733.
3. Basten, M., Jaekel, J., Johnson, S., Gilmore, C., Wolke, D. (2015): Preterm Birth and Adult Wealth: Mathematics Skills Count. Psychological Science, letn. 26, št. 10, str. 1608–1619.
4. Benos, N., Stefania, Z. (2014): Education and Economic Growth – A Meta-Regression Analysis. World Development, Vol. 64, str. 669–689.
5. Bregant, T. (2012): Nevrokognitivne osnove numeričnega procesiranja. Psihološka obzorja, letn. 21, št. 3/4, str. 69–74. http://psiholoska-obzorja.si/arhiv_clanki/2012_3/bregant.pdf.
6. Bregant, T. (2013): Ali je matematika doma le v človekovih možganih?. Proteus, letn. 75, št. 5, str. 209–216.
7. Bregant, T. (2014): Ali malček spoznava matematiko že v vrtcu?. V: Spodbujanje matematičnega mišljenja v vrtcu. Ljubljana: Supra, str. 12–17.
8. Bregant, T. (2016): Razvoj matematičnih kompetenc. Matematika v šoli, letn. 22, št. 3/4, str. 4–20.

9. Brooks-Gunn, J., Fuligni, A. S, Berlin, L. J. (2003): Early child development in the 21st Century: Profiles of current research initiatives. Teachers College Press, New York.
10. Bynner J. (2004): Literacy, numeracy and employability: evidence form the British birth cohort studies. Literacy and Numeracy Studies, št. 13, str. 31–48.
11. Clynes T. (2016): How to raise a genius: lessons from a 45-year study of super-smart children. Nature, št. 537, str. 152–155.
12. Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., Cohen, L. (2003): Three parietal circuits for number processing. Cognitive Neuropsychology, letn. 20, št. 3/4/5/6, str. 487–506.
13. Dobbs, J., Doctoroff, G. L., Fisher, P. H., Arnold, D. H. (2006): The association between preschool children's socio-emotional functioning and their mathematical skill. Journal of AppliedDevelopmental Psychology, št. 27, str. 97–108.
14. Duncan G. J., Dowsett, C. J, Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., Pagani, L. S., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., Sexton, H., Duckworth, K., Japel, C. (2007): School readiness and later achievement. Developmental Psychology, letn. 43, št. 6, str. 1428–1446.
15. Johnson, S., Gallimore I., Gilmore, C., Jaekel, J., Strauss, V., Wolke, D. (2014): Teaching the teachers: The hidden public health impact of preterm birth. Archives of Disease in Childhood Fetal Neonatal Edition, št. 99 (Suppl 1), str.: A68–A70.
16. KEYCONET. (2006): Mathematical competence and basic competences in science and technology. Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on Key Competences for Lifelong Learning (2006/962/EC): Mathematical competence. http://keyconet.eun.org/maths-science-tech.
17. Lager, A. C., Torssander, J. (2012): Causal effect of education on mortality in a quasi-experiment on 1.2 million Swedes. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, letn. 109, št. 22, str. 8461–8466.
18. Levstek, T., Bregant, T., Podlesek A., Palmović M, Sušac A. (2012): Eye movement correlates for complex subtraction in healthy adolescents. V: Zbornik 15. mednarodne multikonference Informacijska družba – IS 2012. Ljubljana: Institut Jožef Stefan, 2012, str. 287–292.
19. Levstek, T., Bregant, T., Podlesek A. (2013): Eye movement correlates for complex subtraction in healthy adolescents and in adolescents with hypoxic-ischaemic encephalopathy. V: Proceedings of the 16th International Multiconference Information Society – IS 2013, Ljubljana: Institut Jožef Stefan, str. 314–320.
20. Libertus M.E., Feigenson L., Halberda J. (2011): Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. Developmental Science, letn. 14, št. 6, str. 1292–1300.
21. Lubinski, D., Benbow, C., P., Kell, H. J. (2014): Life paths and accomplishments of mathematically precocious males and females four decades later. Psychological Science, letn.1, št. 12, str. 2217–2232.
22. OECD. (2016): PISA 2015 Results in Focus. © OECD 2016. www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf (11. 12. 2016).
23. Preisner-Feinberg, E. S., Burchinal, M. R., Clifford, R. M. (2001): The relation of preschool child-care quality to children's cognitive and social developmental trajectories through second grade. Child Development, letn. 72, št. 5, str. 1534–1553.
24. Reyna, V. F., Nelson, W. L., Han, P. K., Dieckmann, N. F. (2009): How numeracy influences risk comprehension and medical decision making. Psychological Bulletin, št. 135, str. 943–973.
25. Richards, M., Power, C., Sacker A. (2009): Paths to literacy and numeracy problems: evidence from two British birth cohorts. Journal of Epidemiology Community Health, letn. 63, št. 3, str. 239–244.
26. Schmidt, F. L., Hunter, J. E. (1998): The validity and utility of selection methods in personnel psychology: practical and theoretical implications of 85 years of research findings. Psychological Bulletin, št. 124, str. 262–274.

UČNE TEŽAVE PRI ARITMETIKI IN SKUPINSKA POMOČ

Arithmetic Learning Difficulties and Group Support

Mag. Mihaela Mataič Šalamun
mihaela.mataicsalamun@osbeltinci.si
Osnovna šola Beltinci

Povzetek
Z namenom zmanjšati ali odpraviti učne težave pri učencih z učnimi težavami pri aritmetiki in preprečiti nizke izobraževalne rezultate pri aritmetiki v višjih razredih osnovne šole sem oblikovala kompenzacijski program razvoja aritmetičnih znanj in spretnosti pri učencih z učnimi težavami pri aritmetiki v tretjem razredu osnovne šole ter model obravnave učencev v okviru skupinske pomoči ob vrstniški pomoči na tretjem koraku petstopenjskega modela pomoči učencem z učnimi težavami. Rezultati so pokazali, da so učenci, vključeni v skupinsko obravnavo, napredovali v avtomatizaciji aritmetičnih postopkov in dejstev seštevanja in odštevanja ter v avtomatizaciji dejstev poštevanke.

Abstract
With an aim to reduce or eliminate learning difficulties with the third-grade students in arithmetics, and so to prevent the low achievement levels in arithmetics in higher grades of primary school education, I built a compensatory programme of development of arithmetic knowledge and skills for these students and formed a model of group support to students with learning difficulties. The results showed that the students in experimental group showed a statisrically impostant progress in avtomatizaction of the arithmetic facts and procedures in addition and substraction and in avtomatization of multiplication.

Ključne besede
učenci z učnimi težavami pri aritmetiki, petstopenjski model pomoči, avtomatizacija aritmetičnih dejstev in postopkov

Keywords
students with learning difficulries in arithmetic, 5-step model of learning suppost, automatization of arithmetic procedures and facts

Uvod
Učne težave na področju matematike pomembno vplivajo na posameznikove možnosti nadaljnjega izobraževanja, na njegove zaposlitvene možnosti in na funkcioniranje v vsakdanjem življenju, saj mnogi vidiki vsakodnevnega življenja in dela temeljijo na matematičnih znanjih in spretnostih. Rezultati mednarodnih raziskav, npr. TIMMS 2011 (Japelj Pavešić, 2012), kažejo, da je delež učencev, ki ne dosegajo mejnika nizke ravni matematičnega znanja, od leta 1995 dalje 10 % in se ne spreminja. Tudi slovenski rezultati mednarodne raziskave PISA 2012 (2013) kažejo visok delež petnajstletnikov v nižjem poklicnem ter srednjem poklicnem izobraževanju, ki ne dosegajo temeljne ravni matematične pismenosti in matematičnih kompetenc, ki bi jim omogočale aktivno udeležbo v življenjskih situacijah, povezanih z matematiko. Zato je pomembno, da učence z učnimi težavami pri matematiki odkrijemo čim bolj zgodaj, jim nudimo specifične programe pomoči ter se tako izognemo njihovemu izrazitemu šolskemu neuspehu oziroma odpravimo ali omilimo učne težave pri matematiki (Kavkler, Kalan

in Hodnik Čadež, 2015; Clements in Sarama, 2007; Fuchs, Fuchs, Yazdian in Powell, 2002; Sophian, 2004).

Učne težave pri matematiki

Sousa (2008) kot učence z učnimi težavami opredeljuje tiste, ki pri matematiki dosegajo nižje dosežke, ob tem pa ni prisotna motnja v duševnem razvoju. Učne težave pri matematiki so prisotne pri tistih učencih, pri katerih zaznavamo v primerjavi z enako starimi učenci večje in dolgotrajnejše odstopanje od povprečja v matematičnem znanju in strategijah (Kavkler, 2007). Različni avtorji (Geary, 2004; Shin in Pedrotty Briant, 2015; Fuchs, Powell, Seethaler, Cirino, Fletcher idr. 2009; Kavkler, Kalan in Hodnik - Čadež, 2015) navajajo različne ocene o deležu učnih težav pri matematiki v populaciji, ki se gibljejo od 3 % do 10 %. Matematične težave pogojujejo notranji vzroki (primanjkljaji učenca na kognitivnem področju), vzroki, ki so okoljsko pogojeni ali pa kombinirani vzroki (Kavkler, 2011).

Montague (1996) navaja naslednje najpogostejše težave, prisotne pri učencih z učnimi težavami pri matematiki: slabše matematično konceptualno znanje (znanje matematičnih pojmov), slabše obvladovanje strategij in pomnjenje (vpliv na avtomatizacijo priklica dejstev, postopkov, reševanje matematičnih besedilnih nalog, poznavanje pojmov računskih operacij in predstave), slabše jezikovne in komunikacijske sposobnosti (težave pri branju besednih problemov in navodil, pisanju nalog, težave v diskusiji o strategijah, s katerimi so reševali matematične probleme), težave pri obvladovanju matematičnih algoritmov in strategij (otežen prevod življenjskih situacij v matematični simbolni zapis, slabše razvito matematično pojmovno znanje) in motivacija za učenje ter samopodoba (zaradi doživljanja neuspeha učenec ni motiviran za učenje matematike).

Poleg opisanih težav pa pri učencih s specifičnimi učnimi težavami opažamo tudi naslednje značilnosti (Kavkler, 1997, v Kavkler, 2011): slabše razvite sposobnosti zaznavanja (vplivajo na sprejemanje matematičnih informacij), slabše razvito pomnjenje (pomnjenje korakov v postopkih, pomnjenje dejstev, definicij itd. je odvisno od posameznikovih sposobnosti pomnjenja), slabša razvitost jezikovnih sposobnosti, slabše razvito branje (vpliv na sposobnost razumevanja pisnega matematičnega besedišča, besedilnih nalog in navodil), pomanjkljivo razvita finomotorika (vpliv na hitrost in točnost zapisovanja števil, postopkov, merjenje, načrtovanje v geometriji, rabo ponazoril, tempo reševanja matematičnih nalog itd). Pri učencih, ki imajo nižje kognitivne sposobnosti, in učencih s specifičnimi primanjkljaji pa so prisotne tudi izrazite težave razumevanja računskih in besedilnih nalog, težave imajo pri primerjanju količin, pri usvajanju matematičnih pojmov, simbolov itd.

Učne težave pri matematiki delimo na splošne in specifične. Splošne učne težave pri matematiki se kažejo kot nižji matematični izobraževalni dosežki zaradi (Kavkler, 2007): počasnejšega usvajanja znanja (posledica mejnih in podpovprečnih intelektualnih sposobnosti), kar se kaže kot nerazumevanje pojmov, simbolov, slabše reševanje problemov ter prenos strategij in znanj na nove situacije, slabše rabe jezika (težave pri razumevanju in izražanju v matematičnem jeziku, težje sledenje verbalnim navodilom, slabše razumevanje matematičnih besedilnih nalog), skromnejšega matematičnega predznanja zaradi manj spodbudnega učnega okolja (težave s štetjem, sledenjem navodil, slabše razvita grafomotorika), slabše pozornosti in koncentracije, prisotnega strahu in anksioznosti ter nizke motiviranosti, slabše razvitih metakognitivnih sposobnosti (slaba organizacija, načrtovanje in kontrola lastnega dela).

Definicija Svetovne zdravstvene organizacije ICD-10 (WHO, 1996: 192) navaja, da specifične učne težave pri matematiki zajemajo primanjkljaje aritmetičnih spretnosti, ki niso pogojeni z motnjo v duševnem razvoju ali neustreznim poučevanjem. Primanjkljaji zajemajo obvladovanje štirih osnovnih računskih operacij, ne pa toliko abstraktne matematične sposobnosti in spretnosti iz algebre, trigonometrije in geometrije. Geary (1994) deli specifične učne težave pri matematiki na diskalkulijo in z aritmetiko povezane specifične učne težave pri matematiki.

Učenci s splošnimi in specifičnimi učnimi težavami pri aritmetiki imajo nezadostno avtomatizirane aritmetična dejstva in postopke (Geary, 2004; Ostad, 1997, 2000; Tancig, Kavkler in Magajna, 2004), kar je lahko vzrok učnih težav skozi celotno osnovno šolo. V dolgotrajnem spominu imajo shranjenih manj aritmetičnih postopkov in dejstev kot njihovi vrstniki in jih pozabljajo. Težave imajo tudi pri priklicu aritmetičnih dejstev iz dolgotrajnega spomina. Imajo slabše razvite postopke reševanja enostavnih aritmetičnih nalog in dalj časa uporabljajo strategije štetja, ki so običajno tudi manj razvite (Kavkler, Tancig in Magajna, 2004). Pri štetju pri reševanju enostavnih aritmetičnih nalog naredijo veliko napak (Geary, 2004; Shin in Pedrotty Bryant, 2015).

Petstopenjski model nudenja pomoči
V slovenskem šolstvu je bil oblikovan celostno usmerjen in sistematičen model pomoči učencem z učnimi težavami *Koncept dela »Učne težave v osnovni šoli«* (Magajna, Kavkler, Čačinovič Vogrinčič, Pečjak, Bregar Golobič, 2008b), ki temelji na petstopenjskem modelu odkrivanja in spremljanja učnih težav ter nudenja pomoči učencem z učnimi težavami, osnova zanj pa je kontinuum učnih težav. Ta omogoča kakovostno poučevanje vseh učencev, zgodnje odkrivanje in obravnavo rizičnih učencev, uporabo raziskovalno dokazano učinkovitih metod odkrivanja, opazovanje napredka učenca, obravnavo učenca, ki temelji na diagnostičnih ugotovitvah in potrebah učenca (Mellard, McKnight in Jordan, 2010). Omogoča prehajanje od prilagoditev za vse učence do intenzivne obravnave posameznikov z izrazitejšimi učnimi težavami na različnih stopnjah modela.

Šola je v skladu s Konceptom dela »Učne težave v osnovni šoli« dolžna učencu z učnimi težavami nuditi pomoč (Zakon o usmerjanju otrok s posebnimi potrebami, 2011, 26. člen). Pred usmerjanjem učenca mora šola zagotoviti obravnavo učenca na prvih štirih korakih, da se mu zagotovi čim prejšnja ustrezna pomoč. Prva stopnja slovenskega petstopenjskega modela omogoča 80 odstotkom učencev uspešnost pri doseganju izobraževalnih ciljev. Ti učenci prejemajo pomoč učitelja pri pouku v okviru dopolnilnega pouka ter podaljšanega bivanja. Prvi stopnji sledi pomoč in podpora, ki zajema tri stopnje (2. stopnja: pomoč svetovalne službe; 3. stopnja: dodatna individualna in skupinska pomoč; 4. stopnja: mnenje in pomoč zunanje institucije). Ta pomoč je namenjena od 15 do 20 odstotkom učencev. Peta stopnja pomoči pa je namenjena le od 1 do 5 odstotkom učencev, ki potrebujejo intenzivnejšo, individualno podporo in pomoč, ki jim jo nudijo usposobljeni strokovni delavci (Magajna, Kavkler in Košir, 2011). Z vsako naslednjo stopnjo petstopenjskega modela se zmanjša število učencev, ki imajo splošne in specifične učne težave ter potrebujejo učno pomoč in podporo, seveda ob dovolj kakovostni pomoči na predhodni stopnji.

Zgodnja matematična obravnava, skupinska pomoč in vrstniška pomoč

Raziskave poudarjajo pomemben učinek zgodnje matematične obravnave v majhnih skupinah (Pedrotty Bryant, Bryant, Roberts, Vaughn, Pfannenstiel, Porterfield in Gesten, 2011), saj se tako zmanjša delež učencev, ki so rizični za matematične učne težave. Delo v majhnih skupinah je nujna komponenta zgodnje matematične obravnave (Pedrotty Bryant idr., 2011; Fuchs, Compton, Fuchs, Paulsen, Bryant idr., 2005). Učenci z učnimi težavami pri učenju aritmetike potrebujejo specifične pristope in intenzivnejše učenje različnih zaporedij procesov s ponazoritvami. Fuchs, Powell, Seethaler, Fuchs, Hamlet idr. (2010) ugotavljajo, da se pri učencih z učnimi težavami pri aritmetiki strategije ne izboljšajo z običajnim urjenjem, ampak s specifičnim treningom, ki temelji na graditvi pojma števila, na strategijah štetja, obvladovanju pojma števila 0, razdruževanju, kombinaciji ustreznih števil za razvoj asociacije v dolgotrajnem spominu in ugotavljanju povezav med operacijami.

Rezultati slovenske raziskave o učnih težavah v osnovni šoli so pokazali, da se v slovenskih šolah večji delež pomoči učencem z učnimi težavami izvaja v individualnih oblikah dela in malo v skupinah (Magajna, Pečjak, Peklaj, Čačinovič Vogrinčič, Bregar Golobič, Kavkler, Tancig, 2008a). Raziskovalke poudarjajo, da je treba strokovne delavce usposobiti za nudenje podpore v skupinskih oblikah pomoči. Skupinska pomoč je ekonomična, ker se vanjo vključi več učencev. Omogoča učenje po modelu, preverjanje pravilnosti odgovorov, diskusijo, izmenjevanje strategij in idej med vrstniki itd. (Garnett, 1998, v Kavkler, 2011). Primerna je za avtomatizacijo učnih spretnosti, kot so branje, pisanje, poslušanje, računanje ipd., ter učenje strategij reševanja problemov. Vrstniško sodelovanje v skupini pomembno izboljša kognitivne in socialno-emocionalne sposobnosti in spretnosti učencev z učnimi težavami. McMaster, Fuchs in Fuchs (2002) navajajo, da sodelovalno učenje povečuje motiviranost za učenje, še posebej pri učencih z učnimi težavami, saj ti pri učenju redkeje doživljajo pozitivne izkušnje, tako pa pridobijo spretnosti za učenje in postanejo samostojnejši pri učenju.

Mitchell (2008) poudarja, da učenci ob tej obliki učenja napredujejo hitreje kot učenci, vključeni v klasične oblike poučevanja celotnega razreda. Učinek skupinskega učenja je višji, če je skupinsko delo sistematično načrtovano. Kroesberg in Van Luit (2003) poudarjata koristnost vrstniške pomoči učencem z učnimi težavami pri aritmetiki, opozarjata pa, da vrstniška pomoč ne sme v celoti nadomestiti pomoči odraslega.

Namen raziskave

Učenci z učnimi težavami pri matematiki so pogosto prepozno odkriti, nudena pomoč pa je premalo intenzivna in premalo kakovostna. S svojim delom sem želela vplivati na zmanjšanje izobraževalne neuspešnosti učencev z učnimi težavami pri aritmetiki, jim omogočiti večjo kompetentnost pri pouku matematike in v prihodnosti boljše možnosti za zaposlitev ter uspešno udejstvovanje v vsakdanjem življenju.

Temeljni namen raziskave je bil razvoj in preverjanje programa razvoja aritmetičnih znanj in spretnosti pri učencih tretjega razreda osnovne šole z učnimi težavami pri aritmetiki, ki je bil izvajan na tretjem koraku petstopenjskega modela pomoči v obliki skupinske pomoči ob vrstniškem sodelovanju. Program je zajemal treninge aritmetičnih znanj in sposobnosti v skupini ter treninge avtomatizacije aritmetičnih dejstev in postopkov v algoritmu na računalniku.

Predvidevala sem, da bodo učenci z učnimi težavami pri aritmetiki, ki so bili vključeni v program pomoči (skupina 1), statistično pomembno napredovali v avtomatizaciji aritmetičnih postopkov in dejstev seštevanja in odštevanja ter v avtomatizaciji poštevanke po koncu izvajanja programa pomoči. Prav tako sem predvidevala, da se bodo po koncu izvajanja programa pomoči pokazale statistično pomembne razlike med dosežki učencev skupine 1 in skupine 2 (učenci z učnimi težavami pri aritmetiki, ki niso bili deležni pomoči) v avtomatizaciji aritmetičnih postopkov in dejstev seštevanja in odštevanja ter avtomatizaciji poštevanke. Predvidevala sem tudi, da se bodo po koncu izvajanja programa pomoči zmanjšale razlike med dosežki učencev skupine 1 in skupine 3 (brez učnih težav pri aritmetiki) v avtomatizaciji aritmetičnih postopkov in dejstev seštevanja in odštevanja.

Vzorec oseb

V vzorec smo vključili 239 učencev tretješolcev dveh šol in dveh generacij v Pomurski regiji. Izenačili smo jih po dogovorjenih merilih in tako dobili skupino 16 učencev z učnimi težavami pri aritmetiki, ki smo jih vključili v program pomoči (skupina 1), skupino 14 učencev z učnimi težavami pri aritmetiki, ki niso bili deležni pomoči po našem programu (skupina 2), in skupino 209 učencev vrstnikov, ki niso imeli učnih težav pri aritmetiki (skupina 3). Iz skupine vrstnikov smo izbrali 14 učencev, ki so izvajali vrstniško pomoč učencem skupine 1.

Izvajanje programa

Program je zajemal trening aritmetičnih znanj in spretnosti ter trening aritmetičnih dejstev in postopkov na računalniku. Z učenci skupine 1 smo v desetih mesecih izvedli 50 srečanj urjenja aritmetičnih znanj in spretnosti v manjši skupini in 30 srečanj urjenja aritmetičnih dejstev in postopkov s pomočjo računalnika. Urjenje smo izvajali dvakrat tedensko po 45 minut pred poukom. Vrstniki pomočniki, ki so nudili vrstniško pomoč, pa so se udeleževali srečanj enkrat tedensko. Urjenje na računalniku je potekalo enkrat tedensko 15 minut v času pred poukom. V program pomoči je bilo vključenih 16 učencev z učnimi težavami pri aritmetiki, 14 vrstnikov pomočnikov, tri razredničarke in defektologinja (izvajalka programa pomoči). Učenci skupine 1 so bili deležni dobre poučevalne prakse pri pouku in skupinske pomoči ob vrstniški pomoči na tretjem koraku petstopenjskega modela pomoči. Pri izvajanju skupinske pomoči učencem smo upoštevali naslednje komponente: dobra diagnostična ocena, ustrezni merski instrumenti za diagnostiko in spremljanje napredka učencev, dobro načrtovanje dejavnosti za odpravo učnih težav pri aritmetiki in izvedba ter vključitev vseh virov pomoči, ki so na razpolago.

Področja programa

Program je zajemal naslednje pristope in dejavnosti: pristop KSA (prehod od konkretne slikovne do abstraktne predstavitve), strategije štetja, oblikovanje parov števil z določeno vsoto oziroma razliko, pari števil, ki dajo vsoto 10, 20, razdruževanje, združevanje, avtomatizacijo seštevanja in odštevanja, avtomatizacijo parov za dano vsoto oziroma razliko, podvajanje faktorjev za večjo tekočnost aritmetičnih dejstev pri množenju, avtomatizacijo poštevanke, razdeljevanje, urjenje pozornosti in koncentracije, urjenje spomina, urjenje aritmetičnega konceptualnega, proceduralnega in deklarativnega znanja s pomočjo računalniškega programa (pari števil, ki dajo določeno vsoto v obsegu do 20 in do 100, seštevanje in odštevanje do 100 in do 1000, avtomatizacijo aritmetičnih dejstev poštevanke ter urjenje spomina).

Rezultati in interpretacija

Izvedli smo začetno testiranje 239 učencev tretjega razreda pred izvajanjem programa pomoči učencem z učnimi težavami pri aritmetiki ter končno testiranje po končanem izvajanju programa. Rezultati so pokazali, da so učenci skupine 1 statistično pomembno napredovali v avtomatizaciji aritmetičnih postopkov seštevanja in odštevanja do 100 in do 1000 ter v avtomatizaciji dejstev v času izvajanja program. S treningom aritmetičnih znanj in spretnosti v skupini ob vrstniškem sodelovanju ter treningom aritmetičnih postopkov in dejstev na računalniku se je povečalo število transformacijskih strategij in priklica dejstev ter točnost izvedbe postopkov in priklica dejstev.

Pred začetkom izvajanja pomoči razlike med dosežki učencev skupine 1 in skupine 2 niso bile statistično pomembne pri nobeni spremenljivki, po koncu izvajanja programa pomoči so se pokazale statistično pomembne razlike med dosežki učencev skupine 1 in skupine 2 v avtomatizaciji aritmetičnih dejstev in postopkov seštevanja in odštevanja do 100 in do 1000 pri vseh spremenljivkah (računi, ovrednoteni z 1 točko, z 2 točkama, s 3 točkami in pri skupnem doseženem številu točk), kar prikazuje tabela 1.

Tabela 1: Statistična pomembnost razlik med aritmetičnimi sredinami dosežkov skupine 1 in skupine 2 na desetminutnem aritmetičnem testu za ugotavljanje avtomatizacije aritmetičnih dejstev in postopkov (Kavkler, Tancig, Magajna, Rugelj, Lipec - Stopar, 1996) glede na končno testiranje

Končno testiranje	**SKUPINA**	**N**	**M**	**SD**	**Levenov test homogenosti varianc**		**T**	**Sig. (2-tailed)**
					F	**Sig.**		
1 točka	1	16	23,75	1,73	2,950	0,097	**3,235**	**0,003**
	2	14	20,43	3,67				
2 točki	1	16	14,44	2,78	5,427	0,027	**2,721**	**0,013**
	2	14	10,71	4,41				
3 točke	1	16	8,94	2,74	0,114	0,738	**3,438**	**0,002**
	2	14	5,57	2,59				
Doseženo število točk	1	16	79,81	12,50	0,388	0,539	**3,868**	**0,001**
	2	14	58,14	18,01				

Legenda za tabele 3, 4, 5 in 6:
N – število učencev
M – aritmetična sredina
SD – standardna deviacija
F – vrednost koeficienta
Sig. – statistična pomembnost
t – vrednost koeficienta
Sig. (2-tailed) – statistična pomembnost

Napredek učencev skupine 1 pa se je pokazal tudi pri primerjavi dosežkov učencev skupine 1 in skupine 3. Razlike med dosežki skupine 1 in skupine 3 pri začetnem testiranju so bile namreč statistično pomembne pri vseh spremenljivkah, pri končnem testiranju pa se razlike v dosežkih obeh skupin niso pokazale kot statistično pomembne pri računih, vrednotenih z 1 in 2 točkama, medtem ko so bile razlike v dosežkih še vedno statistično pomembne pri računih, vrednotenih s 3 točkami, in pri doseženem številu točk.

Tabela 2: Statistična pomembnost razlik med aritmetičnimi sredinami dosežkov skupine 1 in skupine 3 na desetminutnem aritmetičnem testu za ugotavljanje avtomatizacije aritmetičnih dejstev in postopkov (Kavkler in sod., 1996) glede na končno testiranje

Končno testiranje	**SKUPINA**	**N**	**M**	**SD**	**Levenov test homogenosti variance**		**t**	**Sig. (2-tailed)**
					F	**Sig.**		
1 točka	1	16	23,75	1,73	1,068	0,302	–0,248	0,804
	3	209	23,91	2,52				
2 točki	1	16	14,44	2,78	0,005	0,945	–0,502	0,616
	3	209	14,77	2,54				
3 točke	1	16	8,94	2,74	12,255	0,001	**–3,646**	**0,001**
	3	209	11,7	4,64				
Doseženo število točk	1	16	79,81	12,50	5,401	0,021	**–2,523**	**0,020**
	3	209	88,42	19,77				

Razlike med aritmetičnimi sredinami dosežkov učencev skupine 2 in skupine 3 pri začetnem testiranju so bile statistično pomembne pri vseh štirih spremenljivkah. Statistična pomembnost razlik pa se je pokazala tudi med aritmetičnimi sredinami dosežkov učencev obeh skupin pri končnem testiranju pri vseh spremenljivkah (prikazano v tabeli 3), kar kaže na to, da učenci z učnimi težavami pri aritmetiki, ki niso bili deležni skupinske pomoči, niso napredovali v enaki meri kot učenci z učnimi težavami pri aritmetiki, ki so bili deležni skupinske pomoči.

Tabela 3: Statistična pomembnost razlik med aritmetičnimi sredinami dosežkov skupine 2 in skupine 3 na desetminutnem aritmetičnem testu za ugotavljanje avtomatizacije aritmetičnih dejstev in postopkov glede na končno testiranje

Končno testiranje	**SKUPINA**	**N**	**M**	**SD**	**Levenov test homogenosti variance**		**t**	**Sig. (2-tailed)**
					F	**Sig.**		
1 točka	2	14	20,43	3,67	2,199	0,139	**–4,851**	**0,000**
	3	209	23,91	2,52				
2 točki	2	14	10,71	4,41	15,381	0,000	**–3,404**	**0,004**
	3	209	14,77	2,54				
3 točke	2	14	5,57	2,59	13,209	0,000	**–4,888**	**0,000**
	3	209	11,7	4,63				
Doseženo število točk	2	14	58,14	18,01	1,873	0,173	**–5,577**	**0,000**
	3	209	88,42	19,77				

Pri začetnem testiranju razlike med aritmetičnimi sredinami dosežkov skupine 1 in skupine 2 na testu za ugotavljanje avtomatizacije poštevanke niso bile statistično pomembne pri nobeni izmed treh spremenljivkah (računi, vrednoteni z 1 točko, z 2 točkama, in doseženo število točk). Tabela 4 prikazuje, da so se pri končnem testiranju pokazale statistično pomembne razlike pri vseh spremenljivkah, kar kaže na to, da so učenci skupine 1 v obdobju enega leta ob skupinski in vrstniški pomoči napredovali v večji meri kot učenci skupine 2, ki te pomoči niso bili deležni.

Tabela 4: Statistična pomembnost razlik med aritmetičnimi sredinami dosežkov skupine 1 in skupine 2 na testu za ugotavljanje avtomatizacije poštevanke pri končnem testiranju

Končno testiranje	SKUPINA	N	M	SD	Levenov test homogenosti variance		T	Sig.
					F	Sig.		
1 točka	1	16	22,81	1,56	**0,315**	**0,579**	**2,207**	**0,036**
	2	14	21,50	1,70				
2 točki	1	16	13,00	3,72	**0,159**	**0,291**	**2,439**	**0,021**
	2	14	9,29	4,62				
Doseženo število točk	1	16	35,81	0,58	**1,200**	**0,283**	**2,578**	**0,015**
	2	14	30,78	6,08				

Učence skupine 1 in skupine 2 smo primerjali tudi glede dosežkov na testu poznavanja števil (Number KnowledgeTest – NKT) (Griffin, 2002), s katerim smo ugotavljali nivo matematičnega znanja. Iz tabele 5 je razvidno, da je največ učencev skupine 1 doseglo nivo matematičnega znanja za starost od 9 do 10 let (najvišji možen nivo). En učenec skupine 1 je dosegel nivo matematičnega znanja za starostno obdobje od 7 do 8 let. V skupini 2 pa sta le sva učence dosegla nivo matematičnega znanja za starost od 9 do 10 let. Največ jih je doseglo nivo za starost od 8 do 9 let, kar trije učenci pa so dosegli nivo matematičnega znanja za 6 do 7 let.

Tabela 5: Primerjava nivoja matematičnega znanja med učenci skupine 1 in skupine 2

Razvitost poznavanja števil za … let	Skupina 1 (število učencev)	v %	Skupina 2 (število učencev)	v %
6–7 let	0	0	3	21,42
7–8 let	1	6,25	3	21,42
8–9 let	6	37,50	6	42,86
9–10 let	9	56,25	2	14,29
Število učencev v skupini	16	100	14	100

Sklep

Z obravnavo učencev z učnimi težavami pri aritmetiki lahko znatno pripomoremo k izboljšanju aritmetičnih znanj in postopkov pri teh učencih ter s tem k zmanjšanju števila učencev, ki potrebujejo intenzivnejše oblike pomoči.

Petstopenjski model nudenja pomoči nam omogoča zgodnje odkrivanje in obravnavo učencev z učnimi težavami pri aritmetiki. Učinkovitost programa pomoči bomo dosegli s skrbnim načrtovanjem, izvajanjem in evalvacijo ter vključitvijo virov, ki že obstajajo v sistemu. Ob pregledu zastavljenih ciljev in analize dobljenih rezultatov pri skupini učencev, ki je bila vključena v raziskavo, sem ugotovila napredek učencev z učnimi težavami pri aritmetiki, ki so bili deležni skupinske pomoči ob vrstniškem sodelovanju, na vseh področjih obravnave.

Predstavljeni program pomoči lahko služi kot model razvoja aritmetičnih znanj in spretnosti pri učencih z učnimi težavami pri aritmetiki v tretjem razredu osnovne šole ter kot model obravnave učencev v okviru skupinske pomoči ob vrstniški pomoči na tretjem koraku petstopenjskega modela pomoči učencem z učnimi težavami. Na podlagi modela lahko vpeljemo spremembe v specialnopedagoško prakso dela z učenci z učnimi težavami pri aritmetiki na tretjem koraku petstopenjskega modela pomoči ter prakso dela z učenci z učnimi težavami v osnovni šoli nasploh.

Viri

1. Clements, D., Sarama, J. (2007): Early Childhood Mathematics Learning: Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Pridobljeno 18. 2. 2014 iz http://www.infoagepub.com/products/Second-Handbook-Research-Mathematics-Teaching-Learning .
2. Fuchs, L. S., Fuchs, D., Yazdian, L., Powell, S. R. (2002): Enhancing first-grade children's mathematical development with peer-assisted learning strategies. Scool Psychology Rewiew, 31, 569–583.
3. Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K, Bryant, J. D., Hamlett, C. L. (2005): The prevention, identification, and cognitive determinants of Math difficulty. Journal of Educational psychology, 97(3), 493–513.
4. Fuchs, L. S., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Cirino, P. T., Fletcher, J. M., Fuchs, D., Hamlett, C. L. O., Zumeta, R. (2009): Remediatinh NUmber Combination and Word Problem Deficits among Students with Mathematics Difficulties: A Randomized Control Trial. Journal of Educational Psychology, 101(3), 561–576.
5. Fuchs, L. S., Powell, S., Seethaler, P., Fuchs, D., Hamlet, C., Cirino, P., Fletcher, J. (2010): A Framework for Remediating Number Combination Deficits. Council for Exceptional Children, letn. 76, št. 2, str. 135–156.
6. Geary, D. C. (1994): Childrens Mathematical Development: Research and Practical Applications. Washington, London: American Psychological Associaton.
7. Geary, D. C. (2004): Mathematics and Learning disabilities. Journal of learning disabilities, letn. 37, št. 1, str. 4–15 in 50–61.
8. Japelj Pavešić, B. (2012): Znanje matematike in naravoslovja med osnovnošolci v Sloveniji in po svetu: izsledki raziskave TIMSS / Barbara Japelj Pavešić, Karmen Svetlik, Ana Kozina. Ljubljana: Pedagoški inštitut, 2012. – (Zbirka Izsledki raziskave TIMSS 2011; zv. 5).
9. Kavkler, M. (2007): Specifične učne težave pri matematiki. V: Kavkler, M., Košak Babuder, M. (ur.). Učenci s specifičnimi težavami: skriti primanjkljaji – skriti zakladi, str. 77–112.
10. Kavkler, M. (2011): Obravnava učencev z učnimi težavami pri matematiki. V: Košak Babuder, M., Velikonja, M. (ur.). Učenci z učnimi težavami: pomoč in podpora (str. 124–156). Ljubljana: Pedagoška fakulteta.
11. Kavkler, M., Kalan, M., Hodnik Čadež, T. (2015): Spodbujanje matematičnih dosežkov pri učencih s primanjkljaji na področju učenja matematike. V: Vpliv družbenih sprememb na vzgojo in izobraževanje / urednica Tatjana Devjak. Ljubljana: Pedagoška fakulteta. Pridobljeno 14. 02. 2016 s http://www.pef.uni-lj.si/fileadmin/Datoteke/Posvet/Vpliv-druzbenih-sprememb_Posvet-PeF-2015_znanstvena-monografija.pdf.
12. Kroesbergen, E. H., Van Luitt, J. E. H. (2003): Mathematics intervention for children with special aducation needs: A meta-analysis. Remedial and Special Education, 24, 97–114.
13. Magajna, L., Čačinovič Vogrinčič, G., Pečjak, S., Peklaj, C., Golobič Bregar, K., Kavkler, M., Tancig, S. (2008a): Učne težave v osnovni šoli: problemi, perspektive, priporočila. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
14. Magajna, L., Kavkler, M., Čačinovič Vogrinčič, G., Pečjak, S., Bregar Golobič, K. (2008b): Učne težave v osnovni šoli: koncept dela. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
15. Magajna, L., Kavkler, M., Košir, J. (2011): Osnovni pojmi. V: Pulec Lah, S., Velikonja, M. (ur.). Učenci z učnimi težavami: Izbrane teme. Ljubljana: Pedagoška fakulteta, str. 8–22.

16. McMaster, K. L., Fuchs, D., Fuchs, L. S. (2002): Using peer tutoring to prevent early reading failure. Baltimore, MD: Paul h Brookes Publishing.
17. Mellard, D., McKnight, M., Jordan, J. (2010): RTI tier structures and instructional intensity. Learning Disabilities Research and Practice. 25(4). str. 217–225.
18. Mitchell, D. (2008): What really works in special and inclusive education: using evidence-based teaching strategies. London: Routledge.
19. Montague, M. (1996): Students perception, mathematical problem solving, and learning disabilities. Remidial and special education, 18(1), 46–53.
20. OECD PISA 2012 – Program mednarodne primerjave dosežkov učencev: Matematična pismenost, Bralna pismenost, Naravoslovna pismenost (2013). Ur.: Štraus, M., Šterman Ivančič, K., Štigl, S. Ljubljana, Pedagoški inštitut. Pridobljeno 20. 1. 2014 s http://www.pei.si/UserFilesUpload/file/raziskovalna_dejavnost/PISA/PISA2012/PISA%202012%20Povzetek%20rezultatov%20SLO.pdf.
21. Ostad, S. A. (1997): Developmental differences in addition strategies: A comparison of mathematically disabled and mathematically normal children. British Journal of Educational Psychology, 67, 345–357.
22. Pedrotty Bryant, D., Bryant, B. R., Roberts, G., Vaughn, S., Hughes Pfannenstiel, K., Porterfield, J., Gersten, R. (2011): Early Numeracy Intervention Program for First-Grade Students With Mathematics Difficulties. Exceptional Children, Vol. 78, No.1, str. 7–23.
23. Shin, M., Pedrotty Bryant, D. (2015): A Synthesis of Mathematical and Cognitive Performances of Students With Mathematics Learning Disabilities. Journal of Learning Disabilities, Vol. 58(1), str. 96–112.
24. Sousa, D. A. (2008b): Recognizing and adressing mathematics. London: Corwin Press Ltd. A SAGE Publications Company.
25. Tancig, S., Kavkler, M., Magajna, L. (2004): Razvoj aritmetičnih znanj in strategij pri prvošolcih devetletne osnovne šole. PIO preverjanje in ocenjevanje. Educa, letn. 1, št. 4, str. 31–38.
26. Zakon o usmerjanju otrok s posebnimi potrebami. Uradni list RS, št. 58/2011. Pridobljeno 17. 10. 2013 s http://www.uradni-list.si/1/objava.jsp?urlid=201158&stevilka=2714 .

NAPAKE PRI POENOSTAVLJANJU ALGEBRSKIH IZRAZOV
Errors in Simplifying Algebraic Expressions

Mag. Mojca Štembergar
mojca.stembergar1@guest.arnes.si
OŠ Srečka Kosovela Sežana

Povzetek
Prispevek v ospredje postavlja težave, s katerimi se soočajo slovenski osmošolci pri poenostavljanju algebrskih izrazov, in ugotavlja, kakšno vlogo igra pri tem narava koeficientov členov. Rezultati raziskave kažejo, da so učenci najbolj uspešni pri poenostavljanju algebrskih izrazov s celoštevilskimi koeficienti, najmanj pa pri poenostavljanju algebrskih izrazov z ulomki. Najpogostejše napake se nanašajo na računske strategije pri operiranju z negativnimi števili, odpravljanje oklepajev, napačno stopnjo spremenljivke in združevanje nepodobnih členov. Napake aritmetične narave so posledica šibkega aritmetičnega predznanja, napake algebrske narave pa nerazumevanja algebrske strukture in vpliva novega znanja, ki se odraža v mešanju in napačni uporabi algebrskih pravil.

Abstract
The article exposes the problems faced by Slovenian 8th grade elementary students in simplifying algebraic expressions and the role of the term coefficient in this process. Students achieved the best results in simplifying algebraic expressions containing integers and the worst results in simplifying those containing fractions. Most common mistakes relate to operations with negative numbers, removing brackets, exponent and conjoin errors. Errors of an arithmetic nature occur due to lack of appropriate prior knowledge of arithmetics, while errors of algebraic nature are the result of students' misunderstanding of algebraic structure and newly acquired knowledge that causes students to mix up and misuse of algebraic rules.

Ključne besede
poenostavljanje algebrskih izrazov, koeficient člena algebrskega izraza, napake učencev

Keywords
simplifying algebraic epressions, term coefficient of algebraic epression, students' errors

Uvod
Izkušnje iz razreda in rezultati nacionalnega preverjanja znanja 2014 ter raziskave TIMSS 2011 potrjujejo, da je algebra eno zahtevnejših področij osnovnošolske matematike. Poenostavljanje algebrskih izrazov povzroča težave večini učencev, še posebej, če v izrazu nastopajo ulomki. Izvor težav ni vselej v spremenljivkah, ampak tudi v izbiri in izvedbi ustreznih računskih operacij, zato se postavlja vprašanje, katere napake pri poenostavljanju algebrskih izrazov pravzaprav prevladujejo: napake, ki so posledica napačnega razumevanja algebrskih vsebin, ali napake, ki so posledica pomanjkljivega aritmetičnega predznanja in napačno izvedenih računskih operacij. Kakšno vlogo igra pri tem narava koeficientov členov?

Rezultati raziskave (Štembergar, 2016) nam na osnovi klasifikacije napak slovenskih osmošolcev v preizkusu znanja ponujajo odgovor na vprašanje, kako narava koeficientov členov vpliva na uspešnost poenostavljanja algebrskih izrazov in vrsto napak. Raziskave v tujini so se osredotočale na algebrske napake, v izrazih pa so prevladovali celoštevilski koeficienti. Med rezultati tujih raziskav (Lienberg, 1997; Sakpakornkan in Harries, 2003; Seng 2010; Egadowatte, 2011) izstopajo šibko relacijsko razumevanje algebrskih izrazov na eni ter težave pri računanju s celimi števili na drugi strani. Intervjuji z učenci kažejo, da je poenostavljanje izrazov zanje formalna manipulacija s simboli, pri čemer privzamejo pravila, ki veljajo le v posebnih primerih. Tudi Booth (1999) ugotavlja, da učenci po navadi dojemajo algebro kot množico pravil in tehnik, ki zanje nimajo pravega pomena. Pravila, ki so učiteljem očitna, učencem običajno niso, zato težko sledijo abstraktnemu operiranju s simboli (Seng, 2010). Nerazumevanje algebrskih izrazov se pokaže, ko so postavljeni v novo situacijo.

Težave, s katerimi se soočajo učenci, so posledica zahtevnosti samega predmeta ali pa neustreznega učnega pristopa (Orton in Frobisher, 1996: 113), s katerim učitelji spregledajo ali podcenijo kompleksnost procesa učenja zahtevnih algebrskih vsebin. Zaradi abstraktnosti in kompleksnosti črkovne oznake je že pojem spremenljivke za večino učencev zelo zahteven, pri poenostavljanju algebrskih izrazov pa se temu pridružita še uporaba računskih zakonov in računskih operacij. Ob pomanjkljivem aritmetičnem predznanju so pogosto prav razlike med aritmetiko in algebro vir težav in napak učencev. V aritmetiki je pozornost usmerjena k iskanju številskega odgovora, medtem ko je v algebri v ospredju izpeljava postopka in odnosa med količinami, odgovor pa nastopa v obliki poenostavljenega izraza (Booth, 1999). V aritmetiki oklepaj označuje vrstni red izvajanja računskih operacij, k poenostavljanju algebrskih izrazov z oklepaji pa je treba pristopiti nekoliko drugače (Seng, 2010). K zahtevnosti te učne vsebine prispeva tudi dvojna narava algebrskega izraza. Algebrski izraz je procept – simbolni zapis, ki označuje proces in objekt hkrati. Grey in Tall (1994) sta prepričana, da razliko med uspešnimi in neuspešnimi učenci pri matematiki naredi prav uporaba proceptov s sposobnostjo fleksibilne interpretacije simbolnega zapisa kot procesa ali objekta (kar je v dani situaciji bolj primerno) ter uporabe različnih simbolnih predstavitev za isti objekt. Manj uspešni učenci so osredotočeni na rutinsko izvajanje postopkov in omejeni na proceduralno razmišljanje, medtem ko proceptualno mišljenje omogoča bogato konceptualno strukturo s povezavami med postopki, procesi in objekti.

Napake učencev nam pomagajo razumeti njihov učni proces (Egadowatte, 2011; Seng, 2010), zato lahko nudijo podporo učencem pri učenju in učiteljem pri poučevanju. Identifikacija in opis napak odpirata vpogled v to, kaj učence bega in vodi k napačni rešitvi, odkrivata ustreznost učiteljevega učnega pristopa in prispevata k razvoju učinkovitejših pristopov poučevanja.

Izsledki raziskave

Metodologija

V raziskavi (Štembergar, 2016) je sodelovalo je 272 slovenskih osmošolcev. Glavni merski instrument je bil preizkus znanja, ki mu je sledila kratka anketa. Preizkus znanja je sestavljalo 10 nalog izbirnega tipa in 18 algebrskih izrazov, ki jih glede na kompleksnost lahko razdelimo na izraze brez oklepajev in z oklepaji. V vsaki skupini nastopajo izrazi z različnimi računskimi operacijami, vsak v treh izvedbah z različnimi koeficienti.

Tabela 1: Algebrski izrazi v drugem delu preizkusa

Rač. operacija med členi	Izrazi brez oklepajev	Izrazi z oklepaji
seštevanje, odštevanje	$-9a-8b+4a-7b=$ $-8{,}3x-9{,}62y+6{,}84x-3{,}8y=$ $-\frac{3}{4}a-\frac{3}{8}b+\frac{1}{6}a-\frac{1}{2}b=$	$-7a-(6a-5)=$ $-5{,}6x-(1{,}8x+0{,}4)=$ $\frac{a}{4}-(\frac{a}{3}-\frac{1}{2})=$
množenje	$-9a^2(-7a^2)=$ $-2{,}4x\cdot 0{,}6x=$ $-\frac{2}{3}a(-\frac{a}{5})=$	$-3a(6a-5)=$ $-1{,}3x(0{,}5x+1{,}3)=$ $-\frac{3}{5}a(\frac{3}{4}a-\frac{1}{2})=$
deljenje	$6a^2:(-2)=$ $(-4{,}8x^4):(-0{,}4)=$ $-\frac{3}{8}a^2:2=$	$(8a-9):(-4)=$ $(3{,}15x^2+8):(-0{,}5)=$ $(\frac{5}{6}a-\frac{2}{5}):(-\frac{2}{5})=$

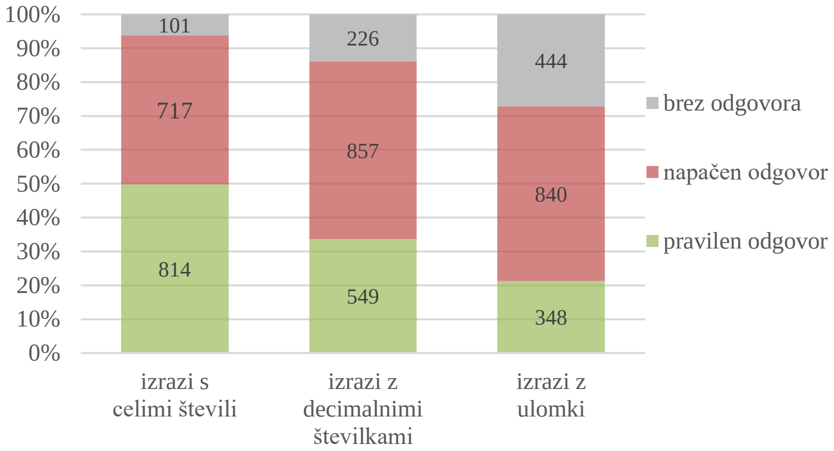
Podatki so bili obdelani na nivoju deskriptivne in inferenčne statistike (χ^2-preizkus). Za vsak izraz smo izpisali in prešteli različne odgovore učencev. V vsakem odgovoru smo poskušali poiskati in razumeti način razmišljanja, ki se skriva v ozadju postopka reševanja, ter opisati napako. Napake sorodnega izvora smo združili v isto kategorijo. Oblikovali smo dve glavni skupini napak:

- napake, ki se odražajo na mestu koeficienta kot posledica napačno izvedene računske operacije (v nadaljevanju aritmetične napake), in
- napake, v katerih smo zaznali neprimeren algebrski model ali neustrezno aplikacijo algebrskih principov (v nadaljevanju algebrske napake).

Odgovore z obema vrstama napak smo uvrstili v skupino algebrskih napak.

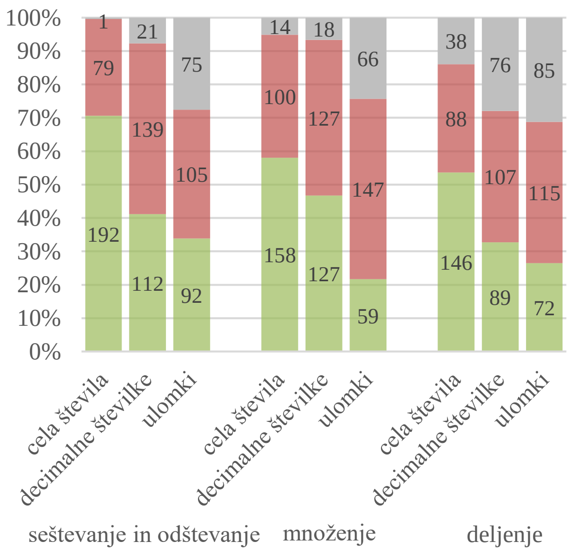
Vpliv narave koeficientov členov na uspešnost poenostavljanja algebrskih izrazov
Rezultati inferenčne statistike podatkov v grafu 1 (χ^2 = 440,578; P = 0,000, g = 4) potrjujejo statistično značilno razliko med koeficienti različne narave pri uspešnosti poenostavljanja algebrskih izrazov. Po pričakovanjih imajo učenci največ težav pri poenostavljanju algebrskih izrazov z ulomki, najmanj pa pri izrazih s celimi števili, kar se kaže v treh segmentih:

- Ne glede na kompleksnost algebrskega izraza in vrsto računske operacije so v vseh primerih zbrali najmanj pravilnih odgovorov pri poenostavljanju izrazov z ulomki, največ pa pri poenostavljanju izrazov s celimi števili.
- Najpogosteje niso poenostavljali izrazov z ulomki, kar kaže sivo področje v grafikonu, medtem ko so najmanjkrat brez poenostavitve ostali izrazi s celimi števili.
- V anketi so kot najzahtevnejši izraz v 57 % izbrali izraz z ulomki, izraz z decimalnimi številkami v 32 % in v 11 % izraz s celimi števili, kot razlog za svojo izbiro najzahtevnejšega primera pa so poleg deljenja izpostavili težave pri računanju z ulomki in decimalnimi številkami.

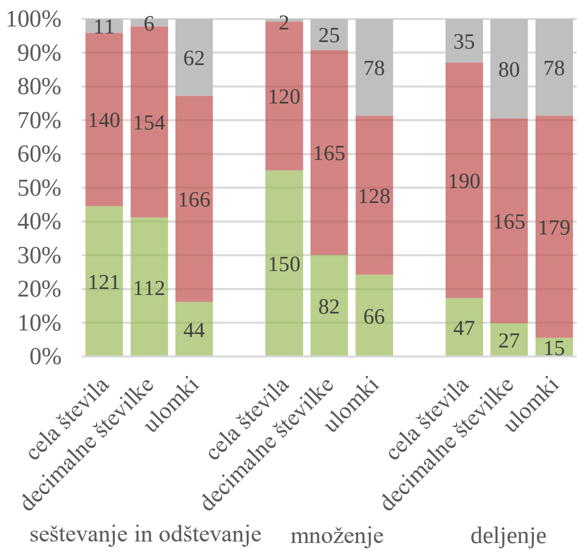


Graf 1: Uspešnost poenostavljanja algebrskih izrazov glede na naravo koeficientov

Na splošno so učenci zbrali največ pravilnih odgovorov (41,2 %) v izrazih s seštevanjem in odštevanjem, le nekoliko manj (39,3 %) pri izvedbi operacije množenja, bistveno manj (24,3 %) pa v izrazih z operacijo deljenja. Med odstopanji od te ugotovitve velja omeniti, da so bili učenci v izrazu z ulomki uspešnejši pri deljenju kot pri množenju enočlenikov (graf 2). Razlog za to je najverjetneje povezan z algebrskim zapisom izraza množenja, kjer nastopa spremenljivka v prvem členu ob koeficientu, v drugem členu pa v števcu. Odgovori učencev v anketi potrjujejo, da spremenljivka v števcu zanje pomeni dodatno oviro. Poleg tega so se v primeru celoštevilskih koeficientov uspešneje spoprijeli z množenjem kot z odštevanjem dvočlenika (graf 3).



Graf 2: Uspešnost poenostavljanja algebrskih izrazov brez oklepajev



Graf 3: Uspešnost poenostavljanja algebrskih izrazov z oklepajem

Po pričakovanjih so bili učenci na splošno uspešnejši pri poenostavljanju izrazov brez oklepajev. Nekoliko več pravilnih odgovorov pri množenju z dvočlenikom v sklopu ulomkov je prav tako najverjetneje posledica enostavnejšega zapisa enočlenika s spremenljivko ob koeficientu.

Največ težav so imeli učenci pri deljenju dvočlenika s številom, kjer so pravilno postopali v približno 11 % vseh primerov. Razlog je najverjetneje v tem, da takšnih primerov v šoli ne rešujejo prav pogosto, sodeč po odgovorih v anketi pa učenci k reševanju pristopajo z naučenimi pravili in tehnikami. Učenci so bili postavljeni pred nov izziv, v katerem so morali uporabiti svoje znanje, deljenje kot množenje z obratno vrednostjo, v novi situaciji. Najnižji dosežek smo zabeležili pri operiranju z ulomki, kjer je izraz pravilno poenostavilo dobrih 5 % vseh učencev, čeprav je bil v anketi kot najzahtevnejši izraz najpogosteje izbran izraz dvočlenika z decimalnimi številkami.

Kategorije napak pri poenostavljanju algebrskih izrazov

Aritmetične napake:

- računske napake (težave s poštevanko in seštevanjem pozitivnih števil)
- napačen predznak:
  - produkta ali količnika
  - v drugem členu pri odštevanju dvočlenika, npr. $-7a-(6a-5)=-7a-6a-5$
  - pri množenju s prvim ali z drugim členom dvočlenika, npr. $-3a(6a-5)=-18a^2-15a$
- napačna postavitev decimalne vejice, npr. $-2{,}4x\cdot 0{,}6x=-14{,}4x^2$
- napačne strategije:
  - pri računanju z negativnimi števili, najpogosteje:
    - minus in minus je plus, npr. $-8b-7b=15b$
    - izpostavitev negativnega predznaka, npr. $-8b-7b=-b$, $-9a+4a=-13a$
    - težave z nekomutativnostjo operacije odštevanja
  - pri operiranju z ulomki (razširjanje na skupni imenovalec, seštevanje in odštevanje ulomkov, množenje in deljenje ulomkov)
- nepopolna izvedba distributivnega zakona:
  - množenje le s prvim členom v oklepaju, npr. $-3a(6a-5)=-18a^2-5$
  - deljenje le prvega ali le drugega člena v oklepaju, npr. $(8a-9):(-4)=-2a-9$ ali $(8a-9):(-4)=8a+2{,}25$
- vpletanje druge računske operacije na mestu koeficienta:
  - seštevanje, odštevanje koeficientov namesto množenja in deljenja, npr. $-9a^2\cdot(-7a^2)=-16a^4$ ali $6a^2:(-2)=4a^2$
  - deljenje koeficientov namesto množenja, npr. $-2{,}4x\cdot 0{,}6x=-4x^2$
- zamenjava operacije:
  - odštevanja z operacijo množenja dvočlenika, npr. $-7a-(6a-5)=42a^2+35a$
  - množenja z operacijo odštevanja (ignoriranje znaka za množenje), npr. $-9a^2\cdot(-7a^2)=-16a^2$
  - deljenja z operacijo množenja, npr. $6a^2:(-2)=-12a^2$
  - množenja z dvočlenikom z operacijo seštevanja, odštevanja, npr. $-3a(6a-5)=3a-5$
  - deljenja dvočlenika z operacijo odštevanja (ignoriranje znaka za deljenje), npr. $(8a-9):(-4)=8a-13$
  - deljenja dvočlenika z operacijo množenja, npr. $(8a-9):(-4)=-32a+36$

Učenci, ki z ulomki niso računali ustrezno, so pri seštevanju in odštevanju uporabili zelo različne napačne strategije, najpogosteje so poleg števcev sešteli ali odšteli tudi imenovalce. Množenja in deljenja ulomkov so se lotili z razširjanjem na skupni imenovalec, sešteli ali odšteli so koeficiente v števcu in množili tiste v imenovalcu,

množili prvi ulomek z obratno vrednostjo drugega, pri deljenju pa obratno vrednost prvega ulomka z drugim.
Nepopolno izvedbo distributivnega zakona smo uvrstili k aritmetičnim napakam, saj se podobne težave pojavljajo tudi v številskih izrazih, res pa je, da do izraza pridejo prav na področju algebre. Učenci so v teh primerih vedeli, da členov v oklepaju ne morejo združiti, a oklepaja niso odpravili ustrezno. Zdi se, da so te težave povezane z razumevanjem računskih operacij in pomena oklepaja.

Algebrske napake:

- množenje spremenljivk: $-9a-8b+4a-7b=-5a^2-15b^2$
- napačna stopnja spremenljivke pri množenju in deljenju, npr. $-9a^2\cdot(-7a^2)=63a^2$ ali $6a^2:(-2)=-3a$
- zapis rezultata brez spremenljivk, npr. $-1{,}46-13{,}42$
- interpretacija zapisa koeficienta in spremenljivke kot vsote, npr. $2a-a=2$
- napačna interpretacija zapisa produkta ulomka in spremenljivke (zapis s spremenljivko v imenovalcu): $\frac{5}{6}a=\frac{5a}{6a}$ ali $\frac{5}{6}a=\frac{5}{6a}$
- napačna stopnja spremenljivke pri razširjanju na skupni imenovalec: $\frac{a}{4}=\frac{a^3}{12}$
- odštevanje členov v oklepaju po zgledu množenja enočlenika z dvočlenikom, npr. $-7a-(6a-5)=-13a+12a$
- neupoštevanje podobnih členov na začetku
- zapis poenostavljenega izraza v obliki enočlenika, npr. $-5a-15b=-20ab$, $-3a(6a-5)=-18a^2+15a=-3a^3$ ali $(8a-9):(-4)=-2a+2{,}25=0{,}25a$
- združevanje nepodobnih členov z izvedbo računske operacije v oklepaju, npr. $-7a-(6a-5)=-7a-1a=-8a$, $-3a(6a-5)=-3a\cdot 1a=-3a^2$ ali $(8a-9):(-4)=-1a:(-4)=0{,}25a$
- potenciranje koeficientov glede na stopnjo spremenljivke, npr. $-9a^2\cdot(-7a^2)=81a^2\cdot 49a^2$ ali $6a^2:(-2)=36a^2:(-2)$
- poskus izpostavljanja skupnega faktorja, npr. $-9a^2\cdot(-7a^2)=a^2(-9-7)$ ali $6a^2:(-2)=-2(-3a^2:1)$

Interpretacijo produkta koeficienta in spremenljivke kot vsote smo zaznali v primeru naloge izbirnega tipa s koeficientom 1. Pravzaprav gre v tem primeru najverjetneje samo za vizualni vpliv in ne napačno interpretacijo zapisa; ko koeficient ni zapisan, učenci izvedejo računsko operacijo tako, da odštejejo spremenljivko.

Napačna stopnja spremenljivke pri razširjanju na skupni imenovalec se je pojavila le v primerih, kjer je spremenljivka nastopala v števcu. Napako lahko pripišemo težavam pri interpretaciji zapisa ulomka s spremenljivko. V izrazu brez oklepajev s spremenljivko ob ulomku te težave učenci niso imeli.

Učenci, ki podobnih členov niso upoštevali že od začetka poenostavljanja, so izbrali različne strategije združevanja členov: prva dva člena skupaj in zadnja dva skupaj, prvi in zadnji člen skupaj ter srednja dva skupaj ali pa so po zgledu iz aritmetike združili skupaj člene z istim predznakom, posebej sešteli pozitivne in posebej negativne.

V izrazih s seštevanjem in odštevanjem ter deljenjem tako brez oklepajev kakor tudi z njimi so prevladovale napake aritmetične narave, medtem ko so v izrazih z množenjem brez oklepajev in z njimi prevladovale napake algebrskega izvora.

Izraze s seštevanjem in odštevanjem so zaznamovale napačne računske strategije pri operiranju z negativnimi in pozitivnimi števili, v izrazih z odštevanjem dvočlenika pa izstopa napačen predznak v drugem členu pri odpravljanju oklepaja. Med napakami algebrskega izvora lahko izpostavimo neupoštevanje podobnih členov, ki se kaže tudi pri združevanju členov v oklepaju in zapisu že poenostavljenega izraza v obliki enočlenika.

Pri množenju lahko v ospredje postavimo napačno stopnjo spremenljivke. Učenci pri množenju podobnih enočlenikov spremenljivk niso množili, ampak le prepisali. Na drugem mestu so se med napakami množenja dveh enočlenikov znašle računske napake in napačna določitev predznaka, v izrazu z oklepajem pa sta napačni stopnji spremenljivke sledili izvedba računske operacije v oklepaju ter množenje le s prvim členom oklepaja.

Pri deljenju enočlenika s številom je na prvem mestu napak napačen predznak, temu pa sledi napačna stopnja spremenljivke. Pri deljenju dvočlenika s številom so se učenci najpogosteje odločali za izvedbo računske operacije v oklepaju, sledile pa so poenostavitve z deljenjem le drugega člena oklepaja. Na prvi pogled morda preseneča višji delež aritmetičnih napak v primerjavi z algebrskimi, saj je deljenje sorodna operacija množenju. Najverjetneje je delež aritmetičnih napak višji, ker se učencem s spremenljivko pravzaprav ni bilo treba ukvarjati.

Napake slovenskih osmošolcev se bistveno ne razlikujejo od napak, ki so jih zabeležile raziskave iste starostne skupine v tujini, v nobenem primeru pa nismo zasledili pretvorbe algebrskega izraza v enačbo, kar so opazile nekatere tuje raziskave: Egadowatte (2011) pri srednješolcih ter Sakpakornhan in Harries (2003) pri tajskih učencih. Slovenski osmošolci se s formalno obravnavo enačb pred izvedbo preizkusa namreč še niso srečali. Glede dojemanja spremenljivke v algebrskih izrazih lahko na podlagi odgovorov učencev sklenemo, da črkovni oznaki v izrazu sami ne dodelijo številske vrednosti.

Vpliv narave koeficientov členov na vrsto napake

Nekatere napake so se pri določeni naravi koeficienta pojavile pogosteje kot pri preostalih dveh. V izrazih z decimalnimi številkami smo tako zasledili več zapisov brez spremenljivk, kar je najverjetneje posledica osredotočanja na stranske račune, manj pa je bilo zapisov poenostavljenega izraza v obliki enočlenika in zamenjave operacije odštevanja z množenjem dvočlenika. Z nadaljnjim računanjem in množenjem decimalnih števil bi učenci imeli več dela. Kvadriranje koeficientov smo pogosteje zasledili pri množenju celih števil verjetno tudi zato, ker potenciranje decimalnih števil in ulomkov učencem predstavlja večji izziv. Napačna stopnja spremenljivke je pri množenju z ulomki predstavljala več kot 60 % napačnih odgovorov v tej skupini. Težave so bolj kot z naravo koeficienta povezane z različnim položajem spremenljivke v obeh členih, v primeru množenja enočlenika z dvočlenikom je bilo namreč zapisov z napačno stopnjo spremenljivke manj. Prav tako lahko pogostejše ignoriranje znaka za deljenje pri deljenju dvočlenika s številom v izrazu z ulomki pripišemo vizualnemu vplivu, saj je bil delitelj enak drugemu členu veččlenika.

Največ nedokončanih poenostavitev smo zabeležili pri poenostavljanju izrazov z ulomki. V teh primerih so učenci izraz le prepisali, ga preoblikovali ali pa le pravilno odpravili oklepaj. Z izrazom so se ukvarjali, pri delu niso naredili napake, a izraza niso poenostavili do konca. Če izvzamemo nedokončane poenostavitve in se osredotočimo samo na napačne odgovore, ugotovimo, da sama narava koeficientov členov ne vpliva bistveno na naravo in skupni delež algebrskih in aritmetičnih napak. Skupna bilanca namreč kaže, da je bila glede na naravo koeficientov v preizkusu le malo več kot polovica vseh napak aritmetične narave (55 % v izrazih s celimi števili, 53 % v izrazih z decimalnimi številkami in 51 % v izrazih z ulomki). Podatki ne kažejo statistično pomembne razlike med koeficienti različne narave v skupnem deležu algebrskih in aritmetičnih napak. Podobne rezultate daje pregled po posameznih računskih operacijah, odstopa le množenje dveh enočlenikov, kar pa najverjetneje lahko pripišemo napakam zaradi samega zapisa spremenljivke ob ulomku oz. v števcu ulomka in ne sami naravi koeficientov.

Glede na to, da sama narava koeficientov bistveno ne vpliva na delež aritmetičnih in algebrskih napak, lahko osnovne informacije o sposobnosti poenostavljanja in razumevanja algebrskih izrazov dajejo že izrazi s celoštevilskimi koeficienti. Razen različnih načinov interpretacije zapisa enočlenika s spremenljivko v števcu ali ob ulomku niso izrazi z decimalnimi številkami in ulomki odkrili algebrskih napak, ki bi se bistveno razlikovale od tistih, ki smo jih že zasledili v izrazih s celoštevilski koeficienti. Izjema so napake, ki so neposredno vezane na operiranje z ulomki in decimalnimi številkami (npr. pri postavitvi decimalne vejice ali pri strategijah operiranja z ulomki).

Razlogi za napake

Eden glavnih razlogov za napake je neustrezno dojemanje algebrskih izrazov, ki smo ga v odgovorih učencev zasledili v obliki napačne interpretacije algebrskega zapisa (pri potenciranju koeficienta enočlenika in pri iskanju prave vloge spremenljivke v enočleniku z ulomki) ter neupoštevanja podobnih in združevanja nepodobnih členov algebrskega izraza. V algebri je nujno potrebno, da učenci algebrski izraz, kot je $-5a-15b$, sprejmejo kot rezultat, kar pa za mnoge predstavlja veliko težavo. Collis (1972; povz. po Thomas in Tall, 2001: 3) to opiše kot težave pri sprejemanju »pomanjkanja zaprtja« (*lack of closure*). Algebra dobi pravi pomen, ko učenci algebrski izraz sprejmejo kot proces in objekt, s katerim lahko operirajo (Thomas in Tall, 2001). Samo s proceduralnim mišljenjem je algebra le množica pravil, ki jih je treba upoštevati, in postopkov, ki jih je treba izvesti. Da učenci dojemajo algebro kot množico pravil, brez globljega razumevanja, razkrivajo tudi njihovi odgovori v anketi, kot sta »Nisem prepričan, kateri postopek naj uporabim« in »Ne vem, kako naj se lotim«. Pozabili so »pravila« oz. »kako se to računa«. Ker pravila zanje nimajo pravega pomena, jih pozabijo, pomešajo ali nadomestijo s svojimi, ki se jim zdijo bolj smiselna.

Nekatere težave in napake učencev so povezane s šibkim aritmetičnim predznanjem. Te se kažejo se v napačnih računskih strategijah operiranja z negativnimi števili in ulomki, razumevanju pomena in odpravljanju oklepajev ter računskih napakah. Med indikatorji pripravljenosti za učenje algebre (gl. Bottoms, 2003) najdemo tudi postavki tekočega računanja z različnimi števili ter upoštevanja vrstnega reda računskih operacij in njihovih lastnosti. Različne raziskave (gl. Welder, 2006) kažejo, da učenci ne razvijejo polnega razumevanja celih števil, vendar je prav zanesljivo računanje s celimi števili osnova za nadaljnje delo z decimalnimi številkami in ulomki. Poleg tega je pomembno tudi za to, da lahko učenci pri obravnavi algebrskih izrazov osredotočenost s številskih koeficientov preusmerijo na strukturo celotnega algebrskega izraza. Če se ukvarjajo s tem, kako bodo izvedli računsko operacijo, je algebrski izraz kot procept postavljen v ozadje njihovega razmišljanja.

Pomemben vpliv ima novo znanje, ki v miselni shemi učencev še ni dobilo pravega mesta in pomena, kaže pa se v mešanju in napačni uporabi pravil. Učenci v istem šolskem letu začnejo računati z negativnimi števili, do obravnave algebrskih izrazov pa se to znanje ne ponotranji dovolj, zato so napačni izračuni na mestu koeficientov pogosti. Da novo znanje pomembno vpliva na ravnanje učencev, priča tudi napaka, ki smo jo zasledili v pilotni raziskavi na manjšem vzorcu devetošolcev. Povezana je z novim znanjem, ki so ga učenci pridobili pri reševanju linearnih enačb. Nekateri so ulomke v algebrskem izrazu »odpravili«, kot bi reševali enačbo (jo preoblikovali v ekvivalentno obliko) in ne poenostavljali izraza. Da bi si situacijo olajšali so novo pravilo uporabili v napačni situaciji.

Nekatere napake (npr. odsotnost spremenljivke ali predznaka) so lahko samo posledica površnosti ali slabše koncentracije učencev. Razlog, zakaj so primere deljenja bistveno slabše reševali od preostalih, je prav gotovo tudi ta, da se po podatkih iz ankete pri pouku takim primerom ne posveča pozornosti, saj tudi učni načrt tega posebej ne zahteva. Prav tako so v učbenikih in pri pouku primeri z decimalnimi številkami in ulomki slabše zastopani, vendar je to tudi razumljivo, saj imajo učenci težave že v izrazih s celimi števili.

Sklep

Narava koeficientov členov pričakovano vpliva na uspešnost poenostavljanja algebrskih izrazov; učenci imajo največ težav pri poenostavljanju algebrskih izrazov z ulomki, najmanj pa pri poenostavljanju algebrskih izrazov s celimi števili. Pri poenostavljanju algebrskih izrazov zasledimo tako napake algebrske narave, ki se odražajo na mestu spremenljivk, kot tudi napake aritmetične narave, ki se odražajo predvsem na mestu koeficientov. Pri slednjih ni težava le v izvedbi računske operacije, ampak tudi v izbiri prave. Napačna računska operacija se lahko vplete le na mesto koeficienta ali spremenljivke, lahko pa popolnoma zamenja pravo.

Napake slovenskih osmošolcev se bistveno ne razlikujejo od napak, ki so jih zaznale predhodne raziskave v tujini. Najpogostejše napake se nanašajo na računske strategije pri operiranju z negativnimi števili, odpravljanje oklepajev, napačno stopnjo spremenljivke in združevanje nepodobnih členov že poenostavljenega izraza ali nepodobnih členov v oklepaju. Delež aritmetičnih in algebrskih napak se pri izrazih z različno naravo koeficientov pri izbrani računski operaciji le malo razlikuje, pa tudi narava koeficientov členov ne vpliva bistveno na kategorije napak, kar pomeni, da ključne podatke o razumevanju algebrskih izrazov lahko podajo že izrazi s celoštevilskimi koeficienti.

Analiza rezultatov odpira vprašanje, povezano z naravo aritmetičnih napak: so tako imenovane aritmetične napake enako pogosto zastopane v številskih izrazih ali se težave učencev pojavijo šele pri prenosu aritmetičnega znanja v algebrsko okolje. Natančnejšo informacijo o tem, kako uspešni so učenci pri prenosu aritmetičnega znanja v algebrsko okolje, bi podala primerjava dosežkov pri preverjanju uspešnosti poenostavljanja in računanja vrednosti številskih izrazov ter poenostavljanja istovrstnih algebrskih izrazov. Čeprav gre pri poenostavljanju algebrskih izrazov samo za posplošitev aritmetike in uporabo lastnosti računskih operacij kot pri računanju vrednosti številskih izrazov, večina učencev to težko dojame. Odgovori učencev v anketi pričajo, da k poenostavljanju algebrskih izrazov ne pristopajo z razumevanjem, ampak sledijo naučenim algebrskim pravilom, ki zanje nimajo pravega pomena, zato jih hitro pomešajo ali pozabijo.

Viri

1. Booth, L. R. (1999): Children's Difficulties in Beginning Algebra. V: Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf/142535729/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf (23. 7. 2015).
2. Bottoms, G. (2003): Getting Students Ready for Algebra 1: What Middle Grades Students Need to Know and Be Able to Do, Suthern Regional Education Board, Atlanta, GA. http://publications.sreb.org/2002/02V52_GettingReadyMath.pdf (27. 8. 2015).
3. Gray, E. M., Tall, D. O. (1994): Duality, Ambiguity, and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, Journal for Research in Mathematics Education, letn. 26, št. 2, str. 115–141. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994a-gray-jrme.pdf (13. 9. 2014).
4. Liebenberg, R. (1997): The usefulness of an intensive diagnostic test. V: Proceedings of the Third National Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa. Durban: Natal University. http://academic.sun.ac.za/mathed/malati/files/diagnostic97.pdf (20. 2. 2014).
5. Egodawatte, G. (2011): Secondary School Students' Misconceptions in Algebra. Ph. D. Thesis, Toronto: University of Toronto. https://tspace.library.utoronto.ca/handle/1807/29712 (15. 12. 2015).
6. Orton, A., Frobisher, L. (1996): Insights into Teaching Mathematics, Cassell, London.
7. Sakpakornkan, N., Harries, T. (2003): Pupils' Processes of Thinking: Learning to Solve Algebraic Problems in England and Thailand, Proceedings of British Society for Research into Learning Mathematics, letn. 23, št. 2, str. 91–97. http://bsrlm.org.uk/IPs/ip23-2/BSRLM-IP-23-2-16.pdf (24. 2. 2015).
8. Seng, L. K. (2010): An Error Analysis of Form 2 (Grade 7) Students in Simplifying Algebraic Expressions: A Descriptive Study, Electronic Journal of Research in Educational Psychology, letn. 8, št. 1, str. 139–162. http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/new/ContadorArticulo.php?382 (15. 12. 2014).
9. Štembergar, M. (2016): Vloga narave koeficientov pri poenostavljanju algebrskih izrazov. Magistrsko delo, Maribor: Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko.
10. Thomas, M., Tall, D. (2001): The Long-Term Cognitive Development of Symbolic Algebra. International Congress of Mathematical Instruction (ICMI) Working Group Proceedings – The Future of the Teaching and Learning of Algebra, str. 590–597.http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001n-icmi-thomas-tall.pdf (28. 7. 2015).
11. Welder, R. M. (2006): Prerequisite Knowledge for the Learning of Algebra. V: Conference on Statistics, Mathematics and Related Fields. Honolulu, Hawaii. http://www.rachaelwelder.com/files/vitae/Welder_Prereq_Know_Algebra.pdf (11. 8. 2014).

TEHNIKE FORMATIVNEGA PREVERJANJA ZNANJA
Formative Assesssment Classroom Techniques

Dr. Vida Manfreda Kolar
vida.manfreda-kolar@pef.uni-lj.si
Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani

Povzetek
V prispevku so predstavljene tehnike formativnega preverjanja znanja, ki so namenjene načrtnemu zbiranju informacij s ciljem izboljšanja kakovosti poučevanja. Predstavljamo koncept, ki sledi naslednjim korakom: 1. oblikuj nalogo za preverjanje razumevanja izbranega matematičnega koncepta; 2. uporabi eno od tehnik formativnega preverjanja znanja (FACT) za odkrivanje učenčevih obstoječih predstav in napačnih predstav o pojmu; 3. analiziraj dobljene podatke, 4. razišči možnosti za nadaljnje poučevanje; 5. prilagodi poučevanje na osnovi dobljenih ugotovitev.

Poleg klasičnih oblik preverjanja znanja se osredinimo na novejše, inovativne in v našem učnem prostoru manj znane tehnike formativnega. Prispevek le-teh vidimo v razširitvi nabora tehnik, ki so učitelju na voljo pri poučevanju, predvsem pa v kakovosti informacij, ki jih tako pridobimo.Te tehnike namreč dajejo zelo velik poudarek elicitaciji in odkrivanju učenčevega predznanja/predstav o matematičnih konceptih pred učnim procesom, pridobitvi vpogleda v razumevanje matematičnega koncepta, soočanju različnih mnenj, spodbujanju diskusije in utemeljevanja, vživljanju v drugačne načine razmišljanja, odkrivanju napačnih predstav ter samoevalvaciji in refleksiji.

Abstract
The paper presents formative assessment classroom techniques (FACT). Their purpose is to gather information on student thinking and learning in order to make data-informed decisions to plan for or adjust classroom activities. The concept includes the following steps: 1. Formulate a question/a problem for assessing the understanding of the mathematical concept; 2. Use one of the techniques (FACT) for determining the students' existing ideas or misconceptions; 3. Analyse the gained information; 4. Explore the ideas for further teaching and learning; 5. Plan and implement instruction based on findings.

Besides classical formative assessment techniques new, innovative techniques, less known in our schools are presented. The contribution of these techniques is among others in extending the set of techniques available to our teachers, but mostly in the quality of achieved information. They focus on eliciting and identifying students' prior knowledge about the concept before planning a lesson, getting an insight into students' understanding of the concept during the lesson, confronting of different opinions, encouraging discussion and argumentation, empathizing in different ways of reasoning, discovering misconceptions and self-assessment and reflection.

Ključne besede
formativno preverjanje znanja, tehnike preverjanja, soočanje mnenj

Keywords
formative assessment, assessment techniques, confronting opinions

Teoretična izhodišča

Pri opredeljevanju ravni in kakovosti matematičnega znanja nam lahko kot izhodišče služijo različne taksonomije znanja (Bloomova taksonomija, Marzanova taksonomija, Gagnejeva taksonomija …) (Žakelj 2005; Cotič in Žakelj 2004). Poznavanje taksonomij ima pomembno vlogo tako pri:

1. načrtovanju dejavnosti, preverjanju in ocenjevanju učenčevega znanja kot pri
2. pri odkrivanju napak/napačnih predstav učencev.

V fazi načrtovanja dejavnosti in preverjanja učenčevega razumevanja izhajamo iz ciljev in pričakovanih dosežkov, ki so opredeljeni z veljavnim učnim načrtom (Učni načrt 2011). Ob izbranem cilju si je treba zastaviti vprašanje, katero vrsto znanja bomo ob tem preverjali, in šele nato sestaviti ustrezno nalogo. Poznavanje taksonomije znanja nam zelo pomaga tudi pri odkrivanju vzrokov za učenčeve napačne predstave. Podobno kot vrste znanja delimo na proceduralno in konceptualno, lahko tudi napačne predstave in napake učencev presojamo s tega zornega kota. Zastaviti si je treba vprašanje, ali je napaka konceptualne ali proceduralne narave, in temu ustrezno ukrepati.
Vloga učitelja v procesu prepoznavanja in odkrivanja napak učencev je torej (Ryan in Williams, 2007):

1. predvideti učenčeve napačne predstave;
2. poiskati način vpogleda v otrokove miselne strukture;
3. ustrezno ukrepanje/posredovanje (produktivne naloge, reprezentacije, soočanje argumentov, kognitivni konflikt).

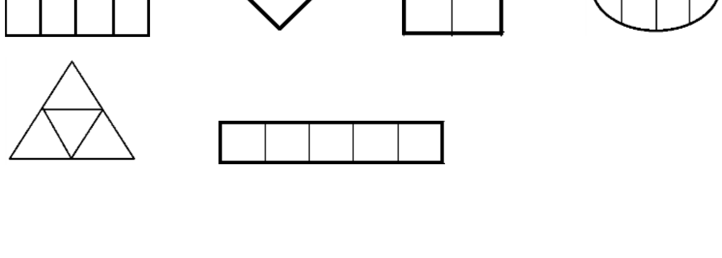
V nadaljevanju prispevka se bomo osredinili na pomen primernega izbora naloge, s katero želimo pridobiti vpogled v otrokove miselne predstave in nato v način posredovanja teh nalog učencem – tj. v tehnike preverjanja razumevanja.

Produktivne naloge

Z izrazom produktivna naloga imamo v mislih nalogo, ki je vir različnih mnenj, nasprotujočih si odgovorov in s tem nudi priložnost za komunikacijo med učenci. Učiteljeva vloga vključuje vodenje pogovora, soočanje različnih argumentov in oblikovanje refleksije o diskusiji. Učenci naj ozavestijo svoj miselni proces: kako so razmišljali najprej, kaj je vplivalo na to, da so si premislili, kako razmišljajo in sklepajo zdaj …
Na primeru učnega cilja »učenec prepozna delitev na četrtine« si poglejmo značilnosti produktivne naloge.

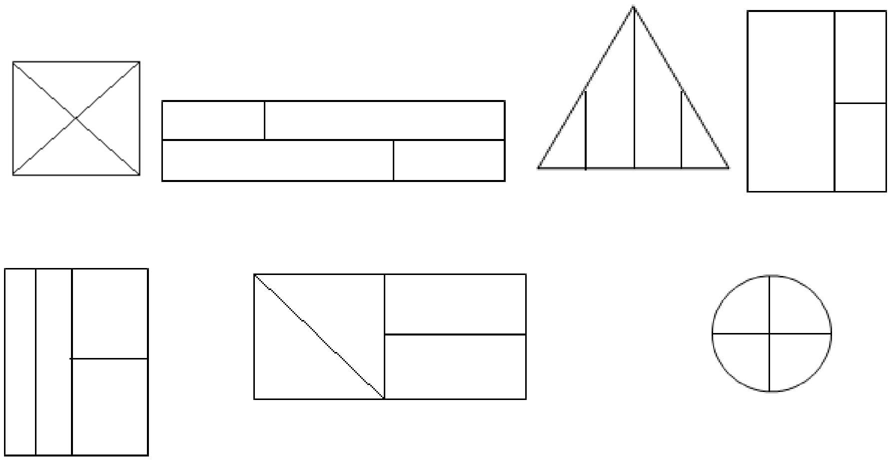
Naloga 1:

1. Pobarvaj četrtine likov, če je to možno.



Naloga 2:

Kateri od likov je razdeljen na četrtine?



Če je naš cilj, da ugotovimo ali učenci prepoznajo delitev celote na enake dele, potem je pomembno, da je naloga sestavljena tako, da bomo z njeno pomočjo odkrili, kateri učenec cilja še ne dosega. 1. naloga je s tega vidika pomanjkljiva. Omogoča nam sicer, da odkrijemo učence, ki se ne zavedajo pomena delitve celote na enake dele, vendar pa nalogo lahko pravilno reši tudi učenec z napačno predstavo, tj. učenec, ki misli, da je za delitev na enake dele pomembno to, da so deli celote med seboj skladni. Vsi primeri pravilne delitve na četrtine namreč vsebujejo le ta tip situacije. 2. naloga je s tega vidika bistveno bolje zasnovana in jo lahko poimenujemo kot produktivno nalogo. Vsebuje tudi manj očitne primere delitve na četrtine, kjer deli celote niso več skladni med seboj, in zato omogoča soočanje mnenj na to temo – kateri so tisti dejavniki, ki so ključni za presojanje enakosti delov celote.

Tehnike preverjanja znanja

Potem ko smo sestavili ustrezno produktivno nalogo, sledi naslednji korak. Premisliti je treba o načinu oz. tehniki posredovanja naloge učencem. V nadaljevanju bomo predstavili nekatere novejše, inovativne in predvsem v našem učnem prostoru manj znane tehnike formativnega preverjanja razumevanja pri pouku matematike. Tehnike so povzete po delu Page Keeley in Cheryl Rose Tobey (2011) in so v originalnem viru poimenovane kot FACT tehnike (formative assessment classroom techniques).

S tem želimo prispevati k povečanemu naboru tehnik in možnosti preverjanja učenčevega znanja, ki so na voljo učitelju. Predvsem pa vidimo prispevek teh tehnik na področju kakovosti informacij, ki jih pridobimo. Te tehnike namreč učence spodbujajo, da poglobijo svoje razmišljanje o matematični konceptih, predstavijo svoje ideje, ubesedijo miselne procese in s tem učitelju omogočijo vpogled v njihov način razmišljanja. Temeljne značilnosti tehnik, ki bodo predstavljene v nadaljevanju, lahko povzamemo z naslednjim točkami.

Omogočajo:

1. elicitacijo in odkrivanje učenčevega predznanja ali predstav o matematičnih konceptih pred učnim procesom);
2. vpogled v razumevanje matematičnega koncepta med učnim procesom;
3. soočanje različnih mnenj; spodbujanje diskusije, utemeljevanja;

4. vživljanje v drugačne načine razmišljanja;
5. odkrivanje napačnih predstav učencev.

Sledi predstavitev nekaterih izbranih tehnik po Keely in Tobey (2011), ki smo jih ilustrirali z lastnimi primeri.

Tehnika: Razvrščanje kart (Card sorts)

Namen te tehnike je pridobitev vpogleda v učenčevo razumevanje koncepta.

Potek: za izbrani matematični pojem, katerega razumevanje želimo preveriti, sestavimo zbirko kartic z različnimi opisi/primeri. Učenčeva naloga je, da kartice razvrsti na tiste, ki so ustrezne, in tiste, ki niso. Pomembno je, da učitelj dobro izbere opise ali trditve na karticah, tj., da sestavi nabor takih trditev, ki bodo za učenca predstavljale produktivno nalogo.

Primer kart za preverjanje razumevanja desetiških enot:

Razmisli, kaj velja za število 213.

Število ima 3 enice.	Število ima 13 desetic	Število ima 13 enic.
Število ima 10 desetic.	Število ima 213 enic.	Število ima 200 stotic.

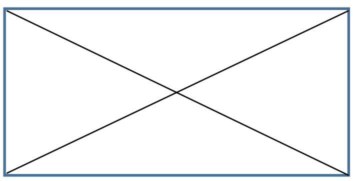
Tehnika: Soočanje v krogu (Agreement circle)

Namen te tehnike je pridobitev vpogleda v učenčevo razumevanje koncepta.

Potek: Učenci stojijo v krogu. Učitelj pove trditev, za katero predvideva, da bo sprožila različne odzive učencev. Vsi, ki se s trditvijo strinjajo, stopijo proti središču kroga, preostali ostanejo na svojih mestih. Učenci v notranjosti kroga se obrnejo proti zunanjim učencem: oblikujejo se manjše skupine za diskusijo. Po tem sledi ponovna postavitev v krog in ponovitev postopka.

Primer trditve:

Učencem pokažemo pravokotni list papirja, ki je prepognjen po obeh diagonalah, in oblikujemo trditev: »Pravokotnik je razdeljen na četrtine.«



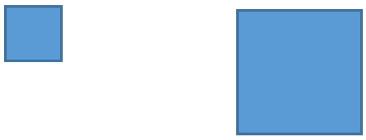
Tehnika: Stolpčni prikaz mnenj (Sticky bars)

Namen te tehnike je soočanje različnih mnenj.

Potek: Učencem ponudimo problem, ki ponuja različne možne interpretacije. Vsak učenec zapiše odgovor na listek, ki ga nato pritrdi v stolpčni prikaz: le-ta torej prikazuje vse možne rešitve učencev. Sledi pogovor o različnih izborih rešitev: učenci z različnimi odgovori naj utemeljijo svoj izbor in skušajo prepričati preostale. Učitelj vodi pogovor, usmerja učence, sooča različne poglede na rešitev problema. Problem je lahko izbran tako, da ga vidimo in razumemo na različne načine in bodo zato tudi različni odgovori pravilni, lahko pa je pravilen le eden od predlaganih odgovorov preostali pa so verjetni, vendar nepravilni.

Primer 1:

kvadrat A kvadrat B



Izberi si tisti odgovor, ki opiše, kako se ploščina kvadrata B spremeni, če kvadratu A dvakrat podaljšamo stranico:

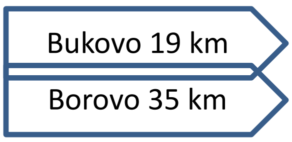
a) Ploščina se dvakrat poveča.

b) Ploščina se ne spremeni.

c) Ploščina se štirikrat poveča.

d) Nimamo dovolj informacij.

Primer 2: Kolikšno pot bomo prevozili z avtom, če peljemo iz Bukova v Borovo?



a) 54 km
b) 16 km
c) 52 km
d) Ne moremo določiti.

Kot vidimo, primer 1 ustreza situaciji z enim pravilnim odgovorom, pričakovati pa je, da bodo učenci izbirali tudi nepravilne odgovore. Primer 2 pa ustreza situaciji z različnimi možnimi interpretacijami, odvisno od tega, kje se nahaja razpotje med obema krajema.

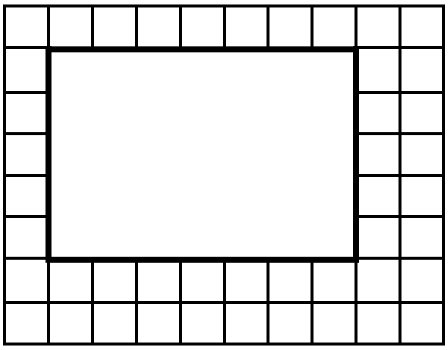
Tehnika: Pojmovne risanke (Concept cartoons)

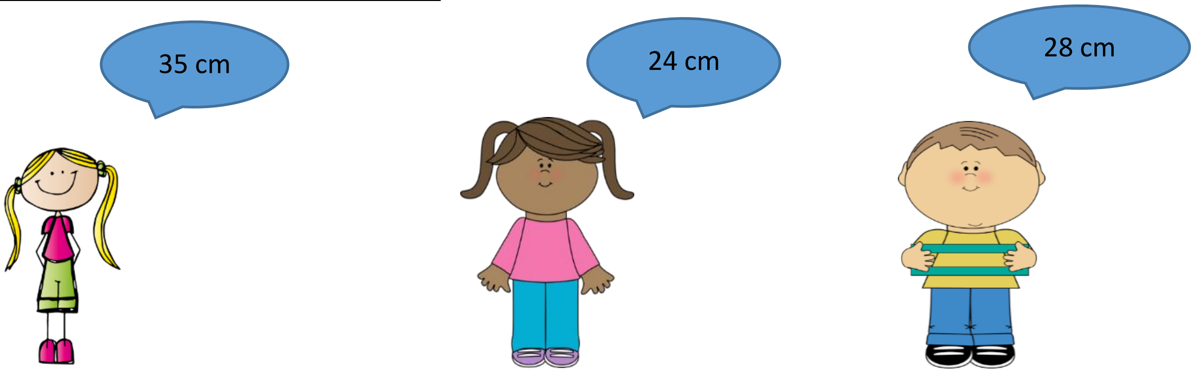
Namen te tehnike je odkrivanje napačnih predstav učencev.

Potek: Izberemo situacijo, ki temelji na znani napačni prestavi o matematičnem pojmu. Nato predstavimo izmišljene osebe, ki podajo svoje ideje/interpretacije pojma. Učenec se mora odločiti, s katero izjavo se najbolj strinja in zakaj.

Primer: Ena od pogostih napačnih predstav učenca je povezana z razlikovanjem med ploščino in obsegom lika. Učencem lahko postavimo naslednje vprašanje:

Kaj meniš, kolikšen je obseg slike?





S katerim otrok se strinjaš in zakaj?

Tehnika: Razloži in zamenjaj (Commit and toss)

Namen tehnike je vživljanje v drugačne načine razmišljanja. Tehnika je primerna za reševanje problemov ali nalog, ki jih je mogoče rešiti na različne načine.

Potek: Vsak učenec rešitev problema in svoj način razmišljanja zapiše na listek, ga zvije v kroglico in da v skupni zbiralnik. Učenci nato iz zbiralnika izvlečejo kroglice in predstavijo način razmišljanja nekoga drugega.

Prednost te tehnike vidimo v tem, da si tudi manj samozavestni ali manj sposobni učenci upajo izraziti svoja mnenja, saj le-ta ostanejo anonimna.

Primer: Kmet je kupil konja za 1100 evrov, ga prodal za 1200 evrov, ponovno kupil za 1300 evrov in ponovno prodal za 1400 evrov. Ali je s to kupčijo kaj zaslužil? Koliko?

Predstavili smo nekaj tehnik, ob vsaki smo navedli primer naloge, poudariti pa velja, da lahko določeno nalogo vključimo v preverjanje prek različnih tehnik. Tako bi npr. lahko nalogo za stolpčni prikaz mnenj (ploščina kvadrata) uporabili tudi prek tehnike *pojmovne risanke* ali pa bi jo učencem posredovali prek tehnike *razloži in zamenjaj*, kjer učencem odgovori ne bi bili podani že v naprej, pač pa bi sami poskusili argumentirati svoj odgovor.

Sklep

Poučevanje in učenje matematike pogosto dojemamo kot dve tesno povezani komponenti učnega procesa, vendar ni nujno, da to drži. Pogosto smo lahko priča poučevanju matematičnih konceptov in vsebin, ki se ne prenese v učenje – učenje z razumevanjem. Učenci se naučijo procedur, ki jih bodo privedle do pravilne rešitve, vendar v ozadju ni razumevanja postopka ali koncepta. Temu se pri pouku matematike želimo izogniti. Da bi premostili razkorak med posredovanim znanjem s strani učitelja in prejetim znanjem s strani učenca, se je treba posvetiti prepoznavanju in odkrivanju napačnih predstav pri učencih. Vendar se moramo zavedati, da cilj formativnega preverjanja znanja ni le odkritje napak z eno od tehnik preverjanja. To je šele prvi korak. S temi tehnikami pridobimo določene informacije, ki nam služijo za nadaljnje načrtovanje učnega procesa z namenom, da bi dosegli večjo učinkovitost učnega procesa. Nadaljnji koraki so:

- analiza dobljenih podatkov,
- raziskava možnosti za nadaljnje poučevanje,
- prilagoditev poučevanja na podlagi dobljenih ugotovitev.

Pravkar predstavljene formativne tehnike preverjanja razumevanja so osnovane na pridobivanju vpogleda v učenčev način razmišljanja, razkrivajo napačne predstave učencev. Povratna informacija, ki jo prejme učitelj, ni usmerjena samo v to, kaj učenec zna in česa ne, pač pa v to, zakaj ne zna, kako razmišlja, kje so ovire v njegovem načinu razmišljanja. Bogatejše informacije o učenčevem razumevanju bodo zato tudi boljše izhodišče za nadaljnje, kakovostnejše delo z učenci.

Viri

1. Ryan, J., Williams, J (2007): Children's mathematics 4-15: learning from errors and misconceprions. New York: Open University press.
2. Keeley, P., Tobey, C. R. (2011): Mathematics formative assessment. Corwin: Thousand Oaks.
3. Žakelj, A. (2005): Uporaba Gagnejeve taksonomije pri pouku matematike. V: Prinčič Röhler, A. (ur.). *Preverjanje in ocenjevanje s pisnimi preizkusi pri matematiki v osmem razredu devetletne osnovne šole* (Modeli poučevanja in učenja, Matematika). Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo, str. 17–32.
4. Cotič, M., Žakelj, A., (2004): Gagnejeva taksonomija pri preverjanju in ocenjevanju matematičnega znanja. *Sodobna pedagogika,* letn. 55, št. 1, str. 182–192.
5. Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika (2011): Predmetna komisija Amalija Žakelj ... [et al.]. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo [Elektronski vir].

MOJE PRVO LETO FORMATIVNEGA SPREMLJANJA

My First Year of Formative Assessment

Tatjana Kerin
tatjana.kerin@gmail.com
Osnovna šola Leskovec pri Krškem

Povzetek
V prvem letu sem si zastavila cilj postopno uvesti posamezne elemente formativnega spremljanja. Začela sem s skupnim načrtovanjem učnih ciljev, namenov učenja in oblikovanjem kriterijev uspešnosti. Vse pogosteje sem po delčkih vključevala tudi preostale elemente, vrstniško učenje in vrednotenje ter samovrednotenje s poudarkom na kakovostni povratni informaciji.
Predstaviti želim tudi konkreten primer obravnave učnega sklopa Ploščina večkotnika v osmem razredu z uporabo elementov formativnega spremljanja. Pokazati želim, kako pri učencih priklicati predznanje in si postaviti cilje. Z vrstniškim učenjem so ponovili ploščine štirikotnikov in trikotnikov in znanje uporabili za izračun ploščine poljubnega večkotnika.

Abstract
Prior to the changes in the teaching, there was the need to change the way of thinking in my head. I started with designing learning objectives and performance criteria. Later, I began including peer education and evaluation, and self-evaluation with emphasis on quality feedback.
I would like to present a reflection of my work and a concrete example of the learning set "The area of a polygon" using the elements of formative assessment. Students have repeated the area of triangles and quadrangles, and used the knowledge to calculate the surface area of any polygon with peer learning.

Ključne besede
formativno spremljanje, kriteriji uspešnosti, vrstniško učenje

Keywords
formative assessment, performance criteria, peer learning

Namen prispevka
Po devetnajstih letih pedagoških izkušenj v tretjem triletju sem prišla do spoznanja, da moj način poučevanja potrebuje spremembe. Bilo mi je v veselje, ko me je svetovalka za matematiko iz Zavoda RS za šolstvo povabila k sodelovanju v okviru razvojne naloge Formativno spremljanje. Po uvodnem srečanju sem se začela spopadati s teorijo. Sprva sem prebirala gradiva s strokovnih srečanj, brskala po spletu in prebirala različne članke. Kot popolna začetnica sem previdno začela s prvimi koraki in imela občutke, da bo to težko, da bom porabila za priprave preveč časa, da učenci ne bodo sprejeli sprememb. Postopno sem začela uvajati elementov formativnega spremljanja v pouk. Sprotno sem spremljala spremembe pri odzivanju učencev. Povratne informacije učencev sem pridobivala s pogovori in izhodnimi karticami. Tudi staršem mojih učencev smo predstavili nove pristope dela. Prvi pozitivni odzivi so bili potrditev, da formativno spremljanje deluje, in še preden sem se zavedala, je postalo del mene. Začela sem s skupnim načrtovanjem učnih ciljev, namenov učenja in oblikovanjem kriterijev uspešnosti. Presenetilo me je, kako hitro so učenci razumeli, kako pomembno je vedeti, kaj se morajo naučiti, da potem lažje izberejo pravo pot za doseganje ciljev.

Vse pogosteje sem po delčkih začela vključevati tudi preostale elemente vrstniško učenje in vrednotenje ter samovrednotenje s poudarkom na kakovostni povratni informaciji. Deliti želim svoje izkušnje in spoznanja.

V nadaljevanju predstavljam konkreten primer obravnave učnega sklopa Ploščina večkotnika v osmem razredu z uporabo elementov formativnega spremljanja. Pokazati želim, kako so učenci priklicali predznanje in si na podlagi tega postavili cilje. Z vrstniškim učenjem so ponovili ploščine štirikotnikov in trikotnikov ter znanje uporabili za izračun ploščine poljubnega večkotnika.

Izkušnje po prvem letu formativnega spremljanja

Zakaj sem začela s formativnim spremljanjem?

Opažala sem, da kljub mojim izkušnjam v razredu učenci postajajo vse manj akterji pouka in vse manj sprejemajo skrb za svoje učenje in s tem znanje. Postavljala sem si vprašanja: Kaj narediti, da bodo bolj aktivni in samostojni pri svojem delu? Kako doseči, da bo njihovo znanje kakovostno in trajno, ob tem pa imeti spodbudno, prijetno in varno razredno vzdušje? Ali moram res vedno jaz vse razložiti ali so učenci vendarle sposobni ob moji podpori dosegati enake cilje? Do prvih korakov v razredu je vodila le ena pot. Formativno spremljanje je prineslo vse odgovore na moja vprašanja. Potrebna je bila le sprememba v moji glavi, v načinu razmišljanja.

Elementi formativnega spremljanja pri obravnavi ploščine večkotnika

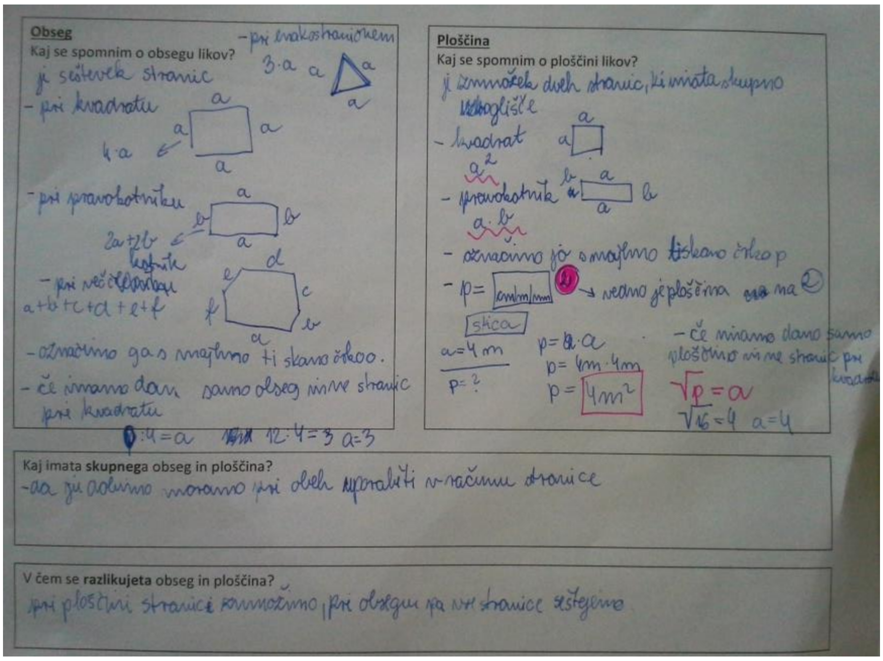
Učni sklop ploščine večkotnika v osmem razredu sem obravnavala po naslednjih korakih:

1. priklic predznanja,
2. postavljanje ciljev in namenov učenja,
3. vrstniško učenje,
4. spremljanje lastnega napredka in zbiranje dokazov o učenju,
5. določanje kriterijev uspešnosti,
6. vrstniško vrednotenje in samovrednotenje.

Zelo pomembna je nenehna kakovostna povratna informacija, ki jo poda učitelj učencu in nato učenec učitelju. Z njo učenca seznanimo, kakšno je njegovo trenutno znanje, in ga spodbujamo na poti do zastavljenih ciljev. Kakovostna povratna informacija pomaga učitelju ugotavljati potrebe učenca in načrtovati delo. Prav posebno vlogo pa imajo vrstniške povratne informacije, saj so dostikrat v njim bolj domačem jeziku. Obenem pa so koristne tudi za tistega, ki jih podaja, saj z njimi preverja tudi svoje razumevanje vsebin in procesov.

Priklic predznanja

Pomembno je, da pred obravnavo nove snovi preverimo učenčevo predznanje. Za to si vedno vzamem dovolj časa. Želim preveriti, kako učenci razmišljajo. Spodbujam pogovore v paru in skupinah. Na prikazani sliki je razvidno, kako so učenci razmišljali o tem, kaj že vedo o obsegu in ploščini, kaj imata skupnega in v čem so razlike.



Slika 11: Priklic predznanja o obsegu in ploščini
(Vir: gradivo študijskega srečanja, osebni arhiv.)

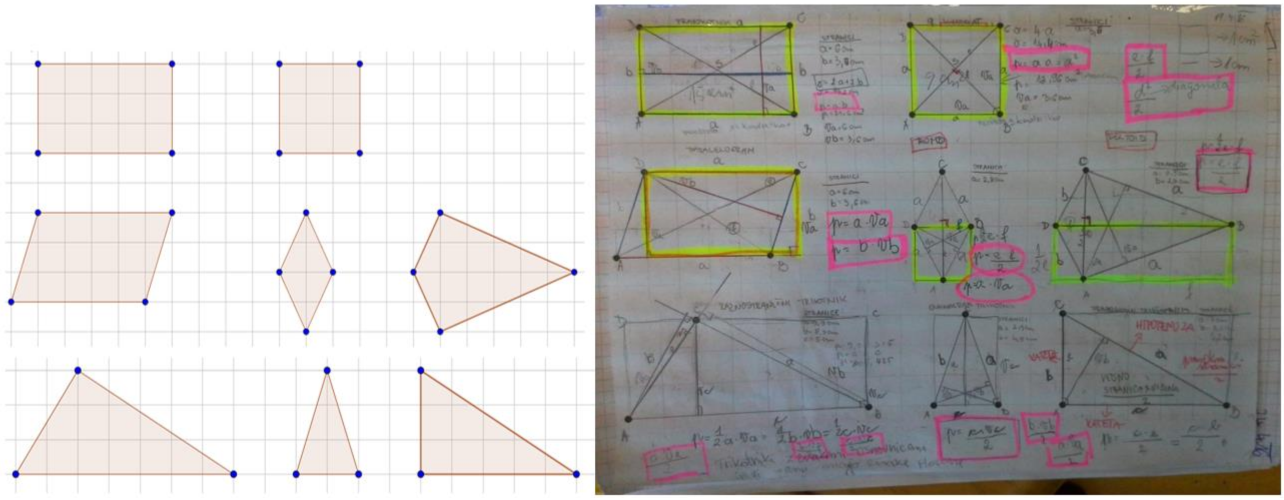
Ugotovila sem, da so se osredotočali predvsem na pravokotnik in kvadrat, ki ju poznajo že iz nižjih razredov. Ploščine preostalih znanih likov, ki so jih spoznali v sedmem razredu, očitno niso bile usvojene. Tako sem prilagodila nadaljnje načrtovanje učenja in poučevanja učencev.

Postavljanje ciljev in namenov učenja

Ker sem ugotovila, da učenci ne poznajo oz. ne izkazujejo znanja ploščin znanih likov, smo oblikovali namene učenja za prihodnjo uro. Kaj se moramo naučiti? Kaj moramo znati? Skupna odločitev je bila, »ponoviti moramo ploščine in obsege že znanih likov, trikotnikov in štirikotnikov«. Namene učenja smo si zapisali na tablo. Usmerjajo nas pri učenju. Spomnili so se, da smo ploščine določali s ploščinskim preoblikovanjem, in tako so načrtovali delo za prihodnjo šolsko uro.

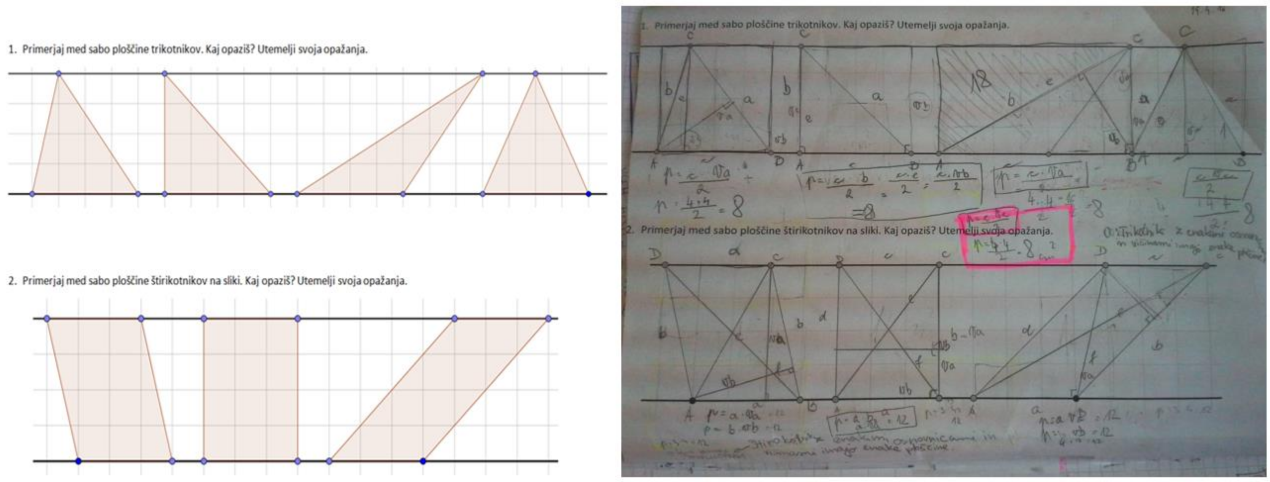
Vrstniško učenje, spremljanje lastnega napredka in zbiranje dokazov o učenju

Učenci do dobili navodila za delo in učni list (slika 2), na katerem so bili na enotski mreži narisani znani liki. Dobili so navodila, da poimenujejo like, jim označijo enake stranice z enako barvo, označijo višine. Če liku ne znajo izračunati ploščine, naj ga preoblikujejo in razmislijo, v kateri ploščinsko enak lik ga je smiselno preoblikovati.



Slika 12: Učni list za ploščinsko preoblikovanje in primer učenčevega izdelka (Vir: osebni arhiv.)

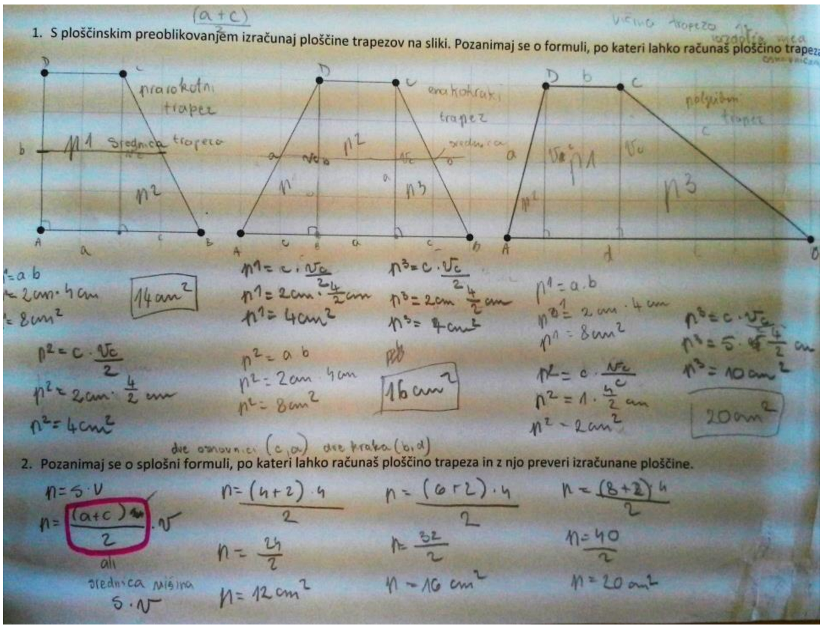
V parih in manjših skupinah, ki so jih oblikovali in spreminjali po lastnih potrebah, so se učili drug od drugega. Skupaj so iskali poti do rešitev in izmenjevali pridobljene izkušnje in spoznanja. Pri delu so bili aktivni, zavzeti, pripravljeni pomagati sošolcem. Nadaljevali smo s preverjanjem razumevanja enakosti ploščin trikotnikov z enako osnovnico in enako višino ter paralelogramov z enako osnovnico in višino (slika 3).



Slika 3: Učni list za ploščine trikotnikov in paralelogramov z enako osnovnico in višino ter učenčev izdelek (Vir: osebni arhiv.)

Sledilo je še preiskovanje trapeza. Na učnem listu so imeli tri različne trapeze. S ploščinskim preoblikovanjem so morali določiti tudi njihove ploščine in jih preveriti z uporabo obrazca za ploščino trapeza (slika 4). Tako so ponovili in usvojili ploščine že znanih likov. Po načelu individualizacije in diferenciacije so z izbiro domačih nalog preverjali in dokazovali razumevanje učne snovi. Vsak je sledil svojemu cilju, ob tem pa pridobival povratne informacije o svojem napredku, odpravljal pomanjkljivosti in sledil namenom učenja.

Pri vrstniškem učenju lahko učenci komunicirajo v sebi bolj domačem jeziku. Imajo priložnost za pogovor s sošolci. Pri tem pa moramo paziti na uporabo korektne matematične terminologije. Vrstniške povratne informacije razbremenijo tudi mene. Povsem običajno je, da prihaja do nesoglasij, ko drug drugemu izpodbijajo ugotovitve in želijo uveljavljati svoje. S primernim dialogom sklenejo skupne dogovore in sledijo zastavljenim ciljem.

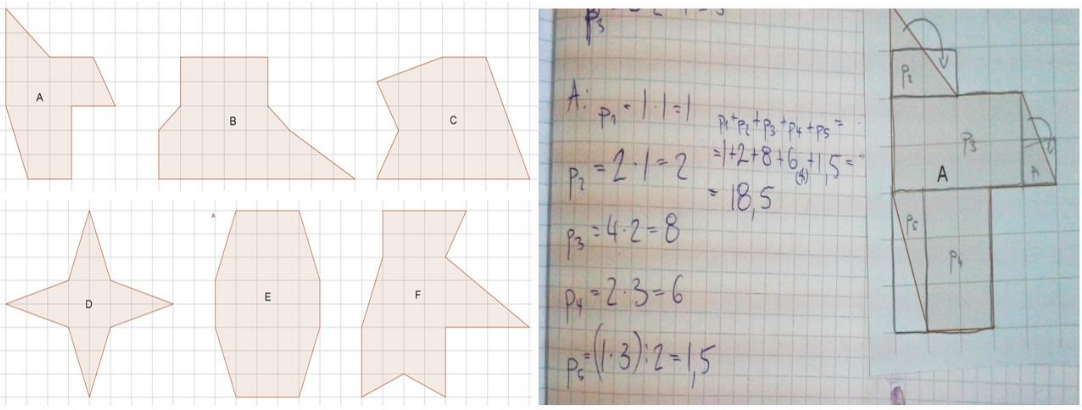


Slika 4: Učni list za določanje ploščine trapeza (Vir: osebni arhiv.)

Radi delajo v manjših skupinah ali parih, po potrebi tudi zunaj učilnice, na hodniku, v večnamenskem prostoru šole, knjižnici. Tam se laže pogovarjajo. V učilnici so mize razporejene tako, da se vsi med seboj vidijo, hkrati pa imajo prostor za delo v skupinah (slika 5).

Slika 5: Urejenost učilnice (Vir: osebni arhiv.)

Sledili smo cilju učnega sklopa, določiti ploščino poljubnega večkotnika. Na lističih so imeli na izbiro različne poljubne večkotnike (slika 6). Z delitvijo na znane like so jim določali ploščine. Njihovi zapisi so pogosto matematično nekorektni. Vendar mi je v procesu učenja in iskanja rešitev problema pomembnejša njihova pot razmišljanja. Seveda se pri tem pogovorimo tudi o pravilnih zapisih.



Slika 6: Primeri poljubnih večkotnikov in primer izdelka učenca (Vir: osebni arhiv.)

Povratne informacije od učencev pridobivam tudi prek izhodnih listkov. Z razmislekom ob danih vprašanjih učenci sami obvladujejo svoje učenje, meni pa so v pomoč pri načrtovanju naslednje ure. Nekatere imam že kar vnaprej pripravljene. Na njih so stavki za dopolnjevanje kot npr.:

Dve stvari, ki sem se jih naučil …
Vprašanje, ki se mi poraja …
V tej nalogi se vidi, kako sem izboljšal …
To mi je uspelo, ker …
Bolje bi mi šlo, če …
Moja šibka področja …

Oblikovanje kriterijev uspešnosti

Pomembno vlogo imajo kriteriji uspešnosti. Zapišemo jih v prvi osebi ednine po vsaki učni uri ali ob zaključku sklopa v njim razumljivem jeziku (slika 7). Z njimi presojajo, kako uspešni so pri učenju, vrednotijo svoje dosežke in spremljajo svoj napredek. Ob koncu obravnave jih natisnemo in prilepimo na tablo in v zvezke. Rdeče zapisani kriteriji označujejo zahtevnejša znanja. Učencem pomagajo tudi pri samovrednotenju in vrstniškem vrednotenju. Na temelju zapisanih kriterijev se laže izražajo.

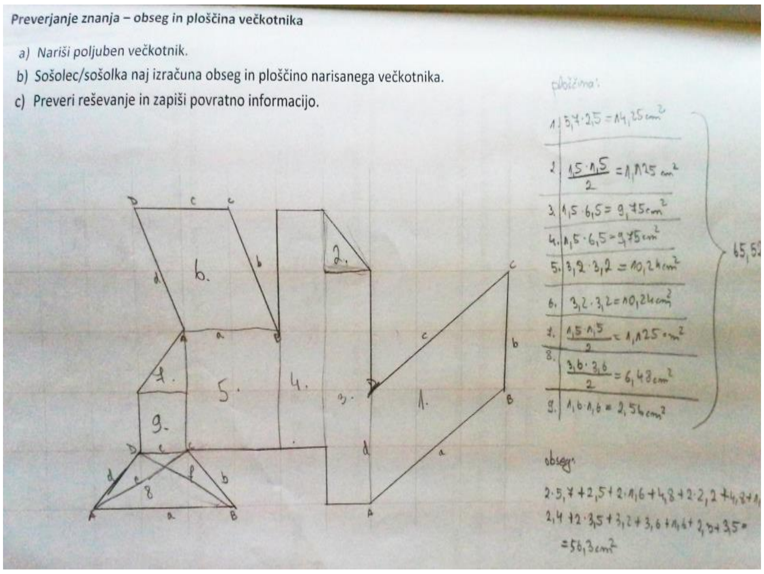
Večkotniki **8. razred**

Kriteriji uspešnosti	Znam	Delno znam	Ne znam
• poznam pojem lomljenke,			
• opredelim sosednji oglišči in sosednji stranici,			
• v večkotniku označim oglišča, stranice,…			
• poimenujem večkotnike,			
• razlikujem izbočene in vdrte večkotnike,			
• opredelim izbočene in vdrte večkotnike,			
• v večkotniku($n \leq 12$) narišem diagonale iz enega oglišča,			
• v večkotniku($n \leq 12$) narišem vse diagonale,			
• s premislekom ugotovim število diagonal iz enega oglišča večkotnika in utemeljim obrazec,			
• s premislekom ugotovim število vseh diagonal večkotnika in utemeljim obrazec,			
• uporabljam znanje v nalogah iz vsakdanjega življenja (število rokovanj, odigranih tekem,…)			
• v večkotniku označim notranje kote,			
• v večkotniku označim zunanje kote,			
• izračunam vsoto notranjih kotov večkotnika ($n \leq 12$) s pomočjo delitve na trikotnike,			
• poznam vsoto zunanjih kotov večkotnika,			
• izračunam vsoto notranjih kotov večkotnika s pomočjo obrazca in utemeljim obrazec,			
• izračunam neznani kot večkotnika,			
• prepoznam pravilni večkotnik,			
• opišem lastnosti pravilnih večkotnikov (stranice, koti, somernost,…),			
• narišem pravilni večkotnik (3, 4, 6),			
• načrtam pravilni 5-kotnik in pravilni 8-kotnik,			
• očrtam in včrtam krožnico pravilnemu večkotniku ($n = 3, 4, 6,…$),			
• izmerim dolžine stranic in izračunam obseg večkotnika,			
• izračunam ploščino preprostega večkotnika s pomočjo razdelitve na ustrezne pravokotnike,			
• izračunam ploščino preprostega večkotnika s pomočjo delitve na ustrezne pravokotne trikotnike,			
• izračunam ploščino pravilnega 6-kotnika,			
• izračunam ploščino večkotnika z razdelitvijo na preprostejše like,			
• izračunam ploščino pravilnega 8-kotnika.			

Slika 7: Kriteriji uspešnosti za učni sklop večkotniki (Vir: osebni arhiv.)

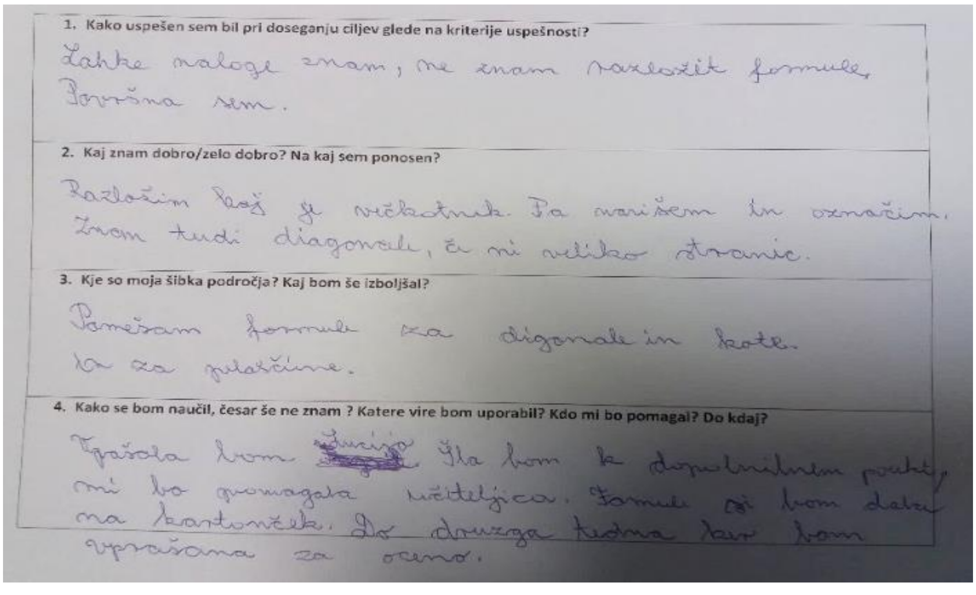
Vrstniško vrednotenje in samovrednotenje

Za preverjanje znanja o ploščini večkotnika so učenci pripravili tudi naloge za sošolce. Narisali so poljuben večkotnik, ga dali reševati sošolcu, nato pa preverjali reševanje (slika 8). Ob tem so tekle obojestranske povratne informacije. Učili so se drug od drugega, saj so morali tudi razčiščevati morebitna neujemanja.



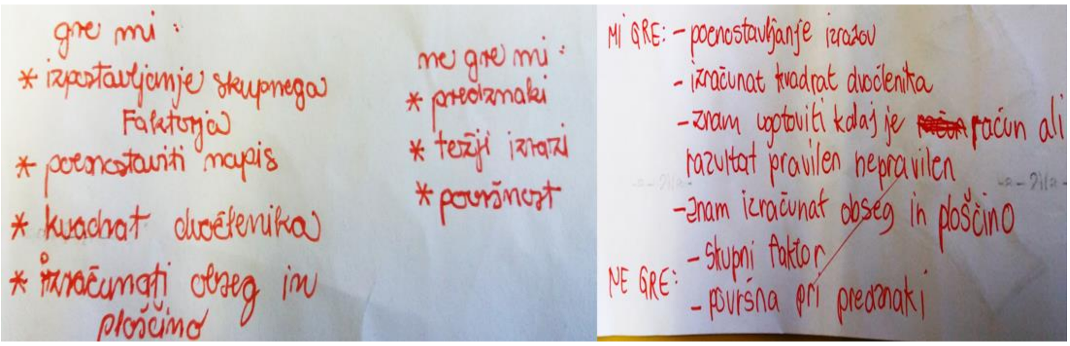
Slika 8: Vrstniško preverjanje znanja (Vir: osebni arhiv.)

Učenci si v procesu učenja sami izbirajo oblike in metode dela, gradiva ipd. Oblikujejo vprašanja, naloge in dejavnosti, s katerimi preverjajo svoje in vrstnikovo znanje. Iščejo naloge in načine, kako bi čim bolje dokazali, kaj zmorejo. Dobro ločijo »lažje« in »težje« naloge. Iščejo naloge in vprašanja, s katerimi bi v največji meri lahko dokazali, kaj znajo, svoje veščine in razumevanje. Vedno bolj prevzemajo odgovornost za učenje tudi doma. S pomočjo kriterijev uspešnosti se vrednotijo in zapišejo samorefleksijo (slika 9).

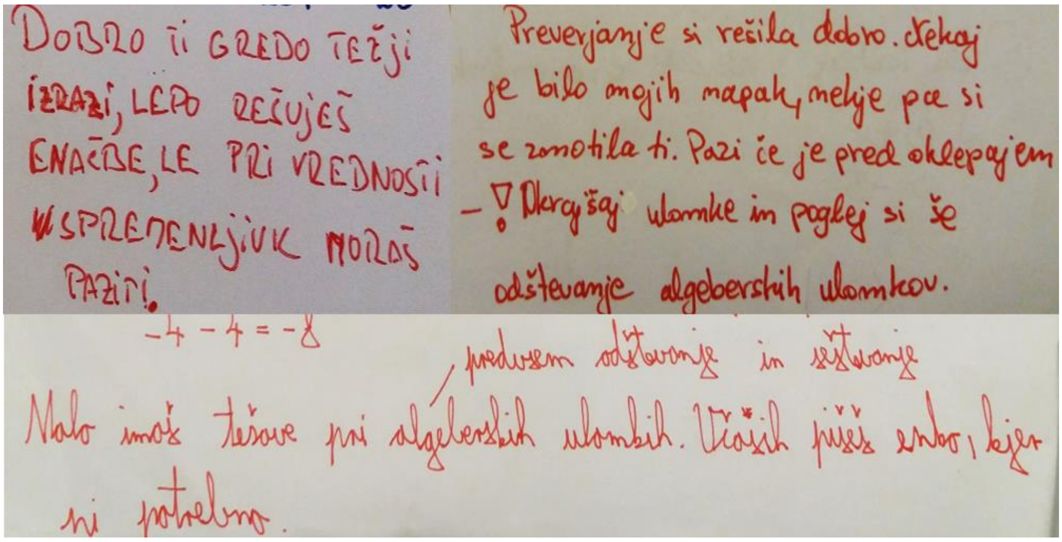


Slika 9: Samorefleksija učenca (Vir: osebni arhiv.)

Vedno bolj so vešči v samovrednotenju in vrstniškem vrednotenju (slika 10). Opustila sem točkovanje in statistično preračunavanje dosežkov na preverjanjih znanja. Učenci so spoznali, da ni pomembno, koliko točk so usvojili pri preverjanju, pač pa kje so dobri, uspešni in česa še ne znajo, kje so njihove šibke točke.



Slika 10: Primer samovrednotenja (Vir: osebni arhiv.)



Slika 11: Zapis povratne informacije pri vrstniškem vrednotenju (Vir: osebni arhiv.)

Sklep

Ko enkrat stopiš na pot formativnega spremljanja, ni poti nazaj. Spremenila sem mnenje o tem, da bodo učenci usvojili učno snov le, če jo bom jaz dovolj dobro razložila. Učenci zmorejo mnogo več. Morda je treba vložiti več časa v pripravo takšnih ur, pri sami izvedbi pa le-tega pridobimo. Učenci pravijo, da ura mine hitreje in nimajo občutka, da morajo ves čas samo poslušati in pisati po mojih navodilih. V letošnjem letu imam v vseh skupinah, ki jih poučujem, enkrat tedensko blokuri. Tako lahko izvajam mnogo dejavnosti, ne da bi nas preganjal čas. Vse večkrat so sami pobudniki, ko me prosijo za pomoč, pridejo k dopolnilnemu ali dodatnemu pouku in imajo pred sabo jasen cilj oz. problem, ki ga želijo rešiti. Če jim pomagam pri zastavljanju njim dosegljivih ciljev, se zagotovo potrudijo in napredujejo. Pogosto razrešujejo matematične probleme z vrstniki, še preden stopim v razred. Vrstniško učenje in sodelovanje je nedvomno izboljšalo medosebne odnose v razredu, ki jih gradimo na spodbujanju, sprejemanju in zaupanju.

Viri

1. Suban, M. (2013): Vrednotenje in samovrednotenje znanja pri matematiki. V: Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi. Matematika. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo. http://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/Posodobitve%20pouka%20v%20osnovno%C5%A1olski%20praksi%20MATEMATIKA/.
2. Vzgoja in izobraževanje, letn. XLV, št. 5-6, 2014, Zavod RS za šolstvo.
3. Gradivo 1. študijskega srečanja – jesen 2015. ŠS-Matematika študijska OŠ. Zavod Republike Slovenije za šolstvo. https://skupnost.sio.si/mod/folder/view.php?id=301368.

UČENČEVI VIRI ZA SAMOOCENJEVANJE
Student's Sources for Self-Assessment

Mag. Adrijana Mastnak
adrijana.mastnak@pef.uni-lj.si
Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani

Povzetek
Razvijanje učenčevega samoocenjevanja bi moral biti eden izmed glavnih ciljev osnovnošolskih učiteljev, ki želijo, da bi učenci postali motivirani in odgovorni za lastno učenje. Vendar pa je do zdaj bolj malo znanega, kako učenci oblikujejo samooceno znanja. Učiteljem bi poznavanje učenčevih virov za samooceno lahko pomagalo pri razumevanju procesov samoocenjevanja, ki pri tem potekajo, in pri spodbujanju razvoja njihovih samoregulacijskih spretnosti in oblikovanju matematične samopodobe.

Abstract
Student's academic self-assessment should be a central goal for elementary school teachers who wish to foster motivated, responsible learners but there is not enough evidence about how or what children use in their judgements. Finding out more about the basis of their self-assessment (that is, the sources of information students use) in mathematics would be helpful to understand students self-assessment processes and help them to become more self-regulated learners and have better mathematical self-concept.

Ključne besede
formativno preverjanje znanja, viri informacij za samoocenjevanje, pouk matematike

Keywords
formative assessment, sources of information for self-assessment, math lesson

Uvod
Opredelitev koncepta samoocenjevanja
Učenčevo ugotavljanje, vrednotenje in ocenjevanje lastnega znanja je v literaturi obravnavano z dveh teoretičnih perspektiv: didaktične in psihološke. S psihološkega vidika lahko samoocenjevanje razumemo kot pomemben del učenčeve metakognicije, saj pri samoocenjevanju potrebuje znanje o lastnem znanju (Flavell, 1985). Hkrati je samoocenjevanje vključeno tudi v proces oblikovanja posameznikove samopodobe, ki jo več avtorjev (Markus, 1977; Marsh in Shavelson, 1985; Marsh in Hattie, 1996) opredeli kot posameznikovo zaznavanje sebe, kognitivne ocene, predstave o samem sebi, o svojih zmožnostih, dosežkih in ciljih, ki si jih posameznik oblikuje skozi izkušnje in interakcijo z okoljem. Samoocenjevanje nekateri avtorji (Panadero in Alonso-Tapia, 2013; Pečjak in Košir, 2002; Zimmerman in Schunk, 2001) obravnavajo tudi kot enega izmed procesov samoregulacije učenja, v katerem učenec uporablja lastne in zunanje vire informacij za nadzorovanje, uravnavanje in upravljanje svojega učenja (Andrade, 2010). Zunanji viri so predvsem osebe, s katerimi je posameznik v interakciji in so zanj pomembne (učitelj, vrstniki, starši), notranji vir pa je učenec sam. Učenci, ki imajo razvito samoregulacijo učenja, vedo, kdaj nekaj znajo in kdaj ne (Labuhn, Zimmerman in Hasselhorn, 2010). Z didaktičnega vidika pa učenčevo samoocenjevanje lahko razumemo tudi kot enega izmed načinov formativnega preverjanja znanja. Formativno preverjanje znanja sestoji iz dveh faz (Black in William, 1998): v prvi fazi učenec sam

ali s pomočjo učitelja prepozna svoje obstoječe znanje in želeni cilj, v drugi fazi pa izvede dejavnost, s katero bo premagal vrzel v znanju in tako dosegel želeni cilj. Učenec mora biti v ta proces aktivno vključen, tako da svoje znanje prepozna, vrednoti in se nanj odzove (Bell in Cowie, 2001). Eden izmed najbolj učinkovitih načinov, kako pomagati učencem premagati vrzel v znanju, je torej, naučiti jih samoocenjevanja in jim ob tem nuditi ustrezne povratne informacije (Hattie, 2009).

V literaturi avtorji pri preučevanju samoocenjevanja po navadi izhajajo iz ene perspektive, redkeje pa jih med seboj povezujejo. V primeru, da izhajajo iz teorije formativnega preverjanja znanja, pogosto ne ozaveščajo dovolj, zakaj je samoocenjevanje pomembno in koristno, in dvomijo o natančnosti učenčevih samoocen. Z vidika samoregulacije učenja pa avtorji pogosto pozabljajo, da samoocenjevanje ni le učenčev notranji proces (samousmerjevalni proces), ampak lahko nanj vpliva tudi učitelj oz. je lahko del učnega procesa (Panadero in Alonso-Tapia, 2013).

Ena izmed najbolj razširjenih opredelitev samoocenjevanja pravi, da je samoocenjevanje proces, skozi katerega učenci razmišljajo o kakovosti svojega dela, ocenjujejo stopnjo doseganja učnih ciljev oz. postavljenih kriterijev in pregledajo svoje delo (Boud, 1986; Andrade in Bouley, 2003; Elder, 2010; Panadero in Alonso-Tapia, 2013). Boud (1995, v Taras, 2010) je v svoji opredelitvi poudaril ključno značilnost samoocenjevanja, tj. vključitev učencev v identificiranje kriterijev in/ali standardov in ocenitev, v kolikšni meri jih dosegajo. Pri tem ne gre za to, da bi si učenec dal neko številčno oceno ali da bi prevzel vlogo učitelja, ampak s tem razvija učne spretnosti (Boud, 1995, v Taras, 2010). Panadero in Alonso-Tapia (2013) prav tako poudarjata, da je samoocenjevanje kvalitativno ocenjevanje, kar pomeni, da si učenec ne poda številčne ocene, ampak se skozi ta proces uči iz napak in uspehov. V svoji opredelitvi tudi poudarita, da se samoocenjevanje ne zgodi le na koncu neke dejavnosti, katere rezultat je izdelek, ampak tudi med samim učnim procesom. Učenec namreč med učnim procesom spremlja svoje delo in ga primerja s kriteriji, ki naj bi jih dosegel. Učitelj mora tako učencem že pred začetkom dejavnosti jasno predstaviti kriterije znanja.

Pomen samoocenjevanja znanja

Učenec s samoocenjevanjem v različnih kontekstih pridobiva širok nabor izkušenj in priložnosti za razumevanje samega sebe, svojega znanja, spretnosti in odnosov. Skozi proces samoocenjevanja učenec laže spozna, kdo je, kako vzpostavlja interakcijo z drugimi in tudi kako se uči (Bourke in Mentis, 2013). Samoocenjevanje torej učencu pomaga pri razvijanju samopodobe (identitete). Pri učenju razvijanja ponotranjenih spretnosti samoocenjevanja postanejo učenci bolj izkušeni pri poznavanju lastnih zmožnosti za uspešno reševanje nalog ter si tudi bolj zaupajo (Bourke in Mentis, 2013), kar jim pomaga sprejemati odločitve v procesu učenja ter si postavljati dosegljive učne cilje. Številne raziskave so pokazale, da samoocenjevanje podpira učenčevo učenje (Black in William, 1998; Boud, 1986; Taras, 2001). Teorije o formativnem preverjanju znanja tako podpirajo idejo o obvezni uporabi samoocenjevanja pri pouku (Sadler, 1989; Taras, 2002). Samoocenjevanje je tako obravnavano tudi kot ena izmed najpomembnejših spretnosti za učenčevo učinkovito učenje in tudi za učenčev nadaljnji profesionalni razvoj ter vseživljenjsko učenje (Boud, 1986; Dearing, 1997, v Taras, 2010). Več študij je pokazalo, da je samoocenjevanje pozitivno povezano z učnimi dosežki in da pozitivno vpliva tudi na nekatere druge lastnosti, kot so dajanje pomoči, samousmerjanje, samonadzorovanje. Manjše število študij je pokazalo negativne učinke samoocenjevanja v smislu ozaveščanja učencev, da so bili neuspešni, kar je povzročilo, da so zmanjšali zaupanje v lastne sposobnosti (Ross s sod., 2002) in imeli nato slabše učne dosežke.

Viri samoocenjevanja znanja

S samoocenjevanjem učenec razvija boljši občutek in nadzor nad lastnim učenjem (Van Kraayenoord in Paris, 1997), vendar pa je pri tem treba upoštevati, da samoocenjevanje ne poteka kot individualen in izoliran proces ali dejavnost, ampak v interakciji z drugimi. Otroci, predvsem mlajši, namreč potrebujejo podporo drugih, da vedo, kaj so se naučili in kako. Medtem ko njihov občutek o sebi, znanje o sebi, vpliva na to, kako ocenjujejo svoje učne dosežke, prav tako na njihovo mišljenje vpliva povratna informacija, ki jo prejmejo od drugih (učitelja, vrstnikov). Bourke (2010) je preučevala, kako učenci razumejo samoocenjevanje, in pri tem ugotovila, da učenčevi koncepti o samoocenjevanju vključujejo tako notranje kot zunanje dimenzije, obojne pa vključujejo interakcije z drugimi. Zunanje dimenzije pri tem vključujejo tiste vidike, ki zahtevajo povratno informacijo drugih, kot so iskanje mnenja drugih, pridobitev ocene, izvedba naloge s strani učitelja (modeliranje), uporaba vnaprej pripravljenih kriterijev in standardov. Notranje dimenzije samoocenjevanja pa vključujejo tisto, kar se navezuje na učenčeve individualne standarde in cilje, ki si jih postavlja v procesu učenja.

Elder (2010) je v svoji raziskavi preučevala, na podlagi katerih standardov učenci v osnovni šoli (prvi, četrti in peti razred) ocenjujejo svoje delo in katere vire informacij uporabljajo pri oblikovanju samoocene. Ugotovila je, da se tako mlajši kot starejši učenci predvsem zanašajo na vrednostne sodbe drugih, posebej učiteljev. Kljub vsemu starejši učenci v večjem deležu kot mlajši učenci uporabljajo svoje standarde ter več različnih virov povratnih informacij. Pri tem je ugotovila, da vir izhaja iz osebe ali iz naloge/dejavnosti, ki jo učenec izvaja. Kot oseba je lahko vir učenec sam sebi (npr. vem, da vem, ko rešim nalogo), učenec skupaj z nekom drugim (s sošolcem, starši, učiteljem; npr. skupaj z učiteljem smo pregledali nalogo) ali drugi (učitelj, sošolci, starši; npr. učitelj mi je pregledal nalogo in podal povratno informacijo). Če je vir spoznanja o lastnem znanju naloga in je proces samousmerjevalni, potem npr. vem, da znam, ker dobro rešujem matematične naloge; če skupaj z drugim, potem vem, da znam, ko z učenci prediskutiramo o nalogi; če so drugi, vem, da znam, ko mi da učitelj nalogo, da jo rešim (Elder, 2010).

Metoda

Namen in cilji raziskave

Towler in Broadfoot (1992) sta predlagala, da naj bi bilo razvijanje spretnosti samoocenjevanja pri osnovnošolskih učencih pomemben cilj učiteljev, ki želijo, da so učenci motivirani in odgovorni za svoje učenje. Hkrati pa opozarjata, da je premalo znanega o tem, kako učenci oblikujejo ocene lastnega znanja oz. kaj sploh ocenjujejo. Nekatere raziskave ugotavljajo, da so učenčeve samoocene pogosto nenatančne in da se učenci večkrat precenjujejo (Dunning, Heath in Suls, 2004). Če želimo bolj natančno razumeti, zakaj do tega pride, je smiselno, da podrobneje preučimo, katere vire informacij učenci uporabljajo pri samoocenjevanju znanja.

V raziskavi smo tako želeli preučiti, kako se učenci po obravnavi snovi pri pouku matematike samoocenijo (kako dobro so obravnavano vsebino razumeli) in katere vire informacij (tudi načine dela) pri tem uporabljajo.

V raziskavi smo uporabili kavzalno neeksperimentalno metodo pedagoškega raziskovanja ter kombinacijo kvalitativnega in kvantitativnega pristopa raziskovanja.

Vzorec

Vzorec raziskave je bil priložnostni. V raziskavo smo vključili 137 učencev 9 različnih razredov (od šestega do devetega razreda) treh ljubljanskih osnovnih šol. Struktura vzorca je predstavljena v tabeli 1 glede na spol in v tabeli 2 glede na razred, ki ga obiskujejo učenci. Iz tabele 1 lahko razberemo, da sta obe skupini spola enakomerno zastopani, medtem ko v tabeli 2 vidimo, da je bil v raziskavo vključen največji delež učencev sedmega razreda, najmanjši delež pa predstavljajo učenci devetega razreda.

Tabela 1: Struktura vzorca glede na spol

Spol	f	f %
moški	*66*	*48,2*
ženski	*71*	*51,8*
Skupaj	*137*	*100,0*

Tabela 2: Struktura vzorca glede na razred

Razred	f	f %
šesti	*34*	*24,8*
sedmi	*56*	*40,9*
osmi	*26*	*19,0*
deveti	*21*	*15,3*
Skupaj	*137*	*100,0*

Merski instrumentarij

Podatki v raziskavi so bili zbrani z anketiranjem. Za namen raziskave smo oblikovali vprašalnik, ki so ga učenci izpolnili zadnjih 5 minut obravnave nove snovi pri uri matematike. Vprašalnik je vključeval vprašanja po osnovnih podatkih (spol in razred), o tem, ali je učenec snov pri uri razumel (3-stopenjska lestvica) in kako to ve. Učence smo tudi vprašali, ali so med uro matematike imeli možnost izvedeti, ali snov primerno razumejo, ter kako vedo, kako dobro jo razumejo.

Postopki obdelave podatkov

Pri analizi odprtih odgovorov smo izvedli kvalitativno metodo, in sicer kategoriziranje. Oblikovali smo kode, ki smo jih nato kvantitativno analizirali. Izračunali smo frekvence in odstotke. Razlike med skupinami za opisne spremenljivke smo ugotavljali z izračunom hi-kvadrat preizkusa.

Rezultati

V skladu s cilji raziskave bomo najprej predstavili samoocene učencev o razumevanju snovi po obravnavi pri uri matematike ter nato vire, iz katerih izhajajo učenčeve samoocene znanja.

Učenci so morali po obravnavi snovi podati samooceno razumevanja snovi na tristopenjski lestvici (da, večino snovi sem razumel, nekaj sem razumel, ne, večine snovi nisem razumel). Iz tabele 3 in tabele 4 je razvidno, da se je večji delež učencev, ne glede na spol ali razred, samoocenil, da je večino snovi razumel. Noben učenec ni rekel, da večine snovi ni razumel. Natančnosti samoocene pri tem nismo ugotavljali, saj smo se v raziskavi osredotočili predvsem na to, da izvemo, na podlagi česa učenec to samooceno oblikuje.

Tabela 3: Samoocena razumevanja snovi glede na spol

		Ali si snov pri današnji uri razumel?		Skupaj
		Da, večino snovi sem raumel	Nekaj sem razumel	
Spol	moški	*59*	*7*	*66*
		89,4 %	*10,6 %*	*100,0 %*
	ženski	*66*	*5*	*71*
		93,0 %	*7,0 %*	*100,0 %*
Skupaj		*125*	*12*	*137*
		91,2 %	*8,8 %*	*100,0 %*

Tabela 4: Samoocena razumevanja glede na razred

		Ali si snov pri današnji uri razumel?		Skupaj
		Da, večino snovi sem raumel	Nekaj sem razumel	
Razred	šesti	*32*	*2*	*34*
		94,1 %	*5,9 %*	*100,0 %*
	sedmi	*50*	*6*	*56*
		89,3 %	*10,7 %*	*100,0 %*
	osmi	*23*	*3*	*26*
		88,5 %	*11,5 %*	*100,0 %*
	deveti	*20*	*1*	*21*
		95,2 %	*4,8 %*	*100,0 %*
Skupaj		*125*	*12*	*137*
		91,2 %	*8,8 %*	*100,0 %*

Potem ko so učenci podali samooceno razumevanja obravnavane snovi, smo jih vprašali, kako vedo, kako dobro so snov razumeli. Vprašali smo jih tudi, ali so pri pouku imeli možnost izvedeti, kako dobro snov razumejo, in kako. Vprašanji, ki sta spraševali po učenčevih virih, sta bili odprti, zato smo izvedli kategorizacijo odgovorov in pri tem oblikovali 8 kategorij, ki predstavljajo učenčeve najpogostejše načine ugotavljanja lastnega razumevanja pri pouku matematike. Odgovore, ki so se pojavljali posamično (1 učenec), smo razvrstili v kategorijo drugo. Načini so predstavljeni in opisani v tabeli 5. Dobljene kategorije smo razdelili v dve skupini glede na eksplicitnost izkazovanja znanja pri pouku.

Tabela 5: Kategorije učenčevih virov informacij za samooceno znanja.

A. Odgovor se nanaša na **eksplicitna dejanja, povezana z ugotavljanjem znanja pri pouku.**		
Koda	**Kategorija**	**Primeri odgovorov učencev**
A1	**Odgovarjanje na vprašanja** (glasno ali "pri sebi"), pojasnjevanje in razlage učencev.	*"Sem odgovarjala na vprašanja."* *"Znal bi obnoviti."* *"Ker me je učitelj vmes tudi kaj vprašal."*
A2	**Učenec gre skozi nalogo/dejavnost** (glasno ali "pri sebi").	*"Ugotovil sem, ko smo delali zglede."* *"Ker se mi je vse izšlo."* *"Ker sem znala reševati naloge."*
A3	**Učenčeva (ne)vprašanja**, komentarji na lastno pobudo.	*"Nisem imela vprašanj med uro."*
B. Odgovor se **ne** nanaša na **dejanja, povezana z ugotavljanjen znanja pri pouku.**		
Koda	**Kategorija**	**Primeri odgovorov učencev**
B1	**Sledenje pouku** (nespecifično sodelovanje brez eksplicitnih dejanj, npr. poslušanje; učenec subjektivno to čuti oz. vidi pri preostalih učencih).	*"Ker sem sledila pouku."* *"Ker sem spremljala uro."* *"Ko je učiteljica razlagala, sem točno vedela, o čem govori."*
B2	Nespecificiran **subjektivni občutek o (ne)razumevanju** snovi (razumem, vem ...).	*"Se mi zdi, da sem si veliko zapomnil."* *"Ker sem imel občutek, da je v redu."* *"Ker zdaj znam."*
B3	**Sklicevanje na možnost subjektivne presoje učitelja** o učenčevem razumevanju; tudi sklicevanje na ocene.	*"Ker mi je učiteljica povedala."* *"Vprašal bi učiteljico."*
B4	**Sklicevanje na snov** (zahtevnost, predznanje ....).	*"Ker snov ni težka."* *"Ker smo to snov že ponavljali."* *"Ker je matematika lahka."* *"Ker to snov znam že od prej."*
B5	**Sklicevanje na razlago učitelja** oz. način obravnave snovi.	*"Ker je bilo lepo razloženo."* *"Razumem, ker imam dobro učiteljico za matematiko."*

Iz tabele 6 vidimo, da se je približno polovica učencev sklicevala na načine samougotavljanja znanja, pri katerih je znanje eksplicitno izraženo (vprašanja učitelja in reševanje nalog). Pri tem je največji delež učencev (41,4 %) odgovoril, da s tem ko rešujejo naloge oz. "gredo skozi nalogo", vedo, v kolikšni meri snov pri uri razumejo. Preostala polovica učencev pa se je pri samougotavljanju znanja bolj zanašala na svoj subjektivni občutek, da vedo, ker se jim tako zdi, da sledijo pouku oz. se sklicujejo na zahtevnost snovi in učiteljevo kakovost razlage snovi. Med učenci glede na spol ni statistično pomembnih razlik, se je pa nekoliko večji delež dečkov kot deklet skliceval na svoj notranji občutek. Dekleta so se v večjem deležu kot dečki sklicevala na načine ugotavljanja znanja, kjer je njihovo znanje eksplicitno izraženo.

Tabela 6: Učenčevi viri za samoocenjevanje razumevanja snovi glede na spol

		Kako veš, ali si snov razumel?							
		Učenec gre skozi nalogo/ dejavnost	Nespecificiran subjektivni občutek	Sledenje pouku	Sklicevanje na snov	Odgovarjanje na vprašanja	Sklicevanje na razlago	Drugo	Skupaj
Spol	**moški**	*26*	*21*	*14*	*7*	*4*	*0*	*2*	*74*
		35,1 %	*28,4 %*	*18,9 %*	*9,5 %*	*5,4 %*	*0,0 %*	*2,8 %*	*100,0 %*
	ženski	*39*	*15*	*13*	*6*	*6*	*4*	*0*	*83*
		47,0 %	*18,1 %*	*15,7 %*	*7,2 %*	*7,2 %*	*4,8 %*	*0,0 %*	*100,0 %*
Skupaj		*65*	*36*	*27*	*13*	*10*	*4*	*2*	*157*
		41,4 %	*22,9 %*	*17,2 %*	*8,3 %*	*6,4 %*	*2,5 %*	*1,2 %*	*100,0 %*

Zanimalo nas je tudi, ali je med učenci razlika v virih za samoocenjevanje glede na razred, ki ga obiskujejo, oz. starost. Rezultati so prikazani v tabeli 7. Iz tabele 7 vidimo, da učenci nižjih razredov (šesti in sedmi razred) v manjšem deležu kot učenci višjih razredov (osmi in deveti razred) pri oblikovanju samoocene izhajajo iz reševanja nalog. Učenci nižjih razredov se v večjem deležu sklicujejo na svoj subjektivni občutek in pa tudi sledenje pouku.

Tabela 7: Učenčevi viri za samoocenjevanje glede na razred

		Kako veš, ali si snov razumel?							
		Učenec gre skozi nalogo/ dejavnost	Nespecificiran subjektivni občutek	Sledenje pouku	Sklicevanje na snov	Odgovarjanje na vprašanja	Sklicevanje na razlago	Drugo	Skupaj
Razred	šesti	*9*	*14*	*7*	*3*	*5*	*1*	*0*	*39*
		23,1 %	*35,9 %*	*17,9 %*	*7,7 %*	*12,8 %*	*2,6 %*	*0,0 %*	*100,0 %*
	sedmi	*24*	*16*	*16*	*7*	*2*	*2*	*2*	*69*
		34,8 %	*23,2 %*	*23,2 %*	*10,1 %*	*2,9 %*	*2,9 %*	*2,8 %*	*100,0 %*
	osmi	*18*	*4*	*4*	*1*	*1*	*0*	*0*	*28*
		64,3 %	*14,3 %*	*14,3 %*	*3,6 %*	*3,6 %*	*0,0 %*	*0,0 %*	*100,0 %*
	deveti	*14*	*2*	*0*	*2*	*2*	*1*	*0*	*21*
		66,7 %	*9,5 %*	*0,0 %*	*9,5 %*	*9,5 %*	*4,8 %*	*0,0 %*	*100,0 %*
Skupaj		*65*	*36*	*27*	*13*	*10*	*4*	*2*	*157*
		41,4 %	*22,9*	*17,2 %*	*8,3 %*	*6,4 %*	*2,5 %*	*1,2 %*	*100,0 %*

V tabeli 8 je prikazano, koliko učencev je menilo, da so pri uri imeli možnost ugotoviti, kako dobro znajo. Med učenci je statistično pomembna razlika (hi-kvadrat = 3,376; g = 1, P = 0,055), ki kaže na to, da so dekleta v primerjavi z dečki v večjem deležu navajala, da so pri pouku imela možnost izvedeti, kako dobro snov razumejo. Med učenci je tudi statistično pomembna razlika (hi-kvadrat = 8,020, g = 3, P = 0,046) o zaznavanju te možnosti glede na razred. Učenci višjih razredov (osmi, deveti) so v večjem deležu kot učenci nižjih razredov zaznavali, da so pri uri imeli možnost izvedeti, kako dobro razumejo (tabela 9).

Tabela 8: Mnenje učencev o priložnostih za samougotavljanje znanja pri pouku glede na spol

		Ali si imel možnost izvedeti, ali si snov razumel?		
		Da	Ne	Skupaj
Spol	moški	*53*	*13*	*66*
		80,3 %	*19,7 %*	*100,0 %*
	ženski	*63*	*6*	*69*
		91,3 %	*8,7 %*	*100,0 %*
Skupaj		*116*	*19*	*135*
		85,9 %	*14,1 %*	*100,0 %*

Tabela 9: Mnenje učencev o priložnostih za samougotavljanje znanja pri pouku glede na razred

		Ali si imel možnost izvedeti, ali si snov razumel?		
		Da	Ne	Skupaj
Razred	šesti	*28*	*5*	*33*
		84,8 %	*15,2 %*	*100,0 %*
	sedmi	*44*	*11*	*55*
		80,0 %	*20,0 %*	*100,0 %*
	osmi	*24*	*2*	*26*
		92,3 %	*7,7 %*	*100,0 %*
	deveti	*20*	*1*	*21*
		95,2 %	*4,8 %*	*100,0 %*
Skupaj		*116*	*19*	*135*
		85,9 %	*14,1 %*	*100,0 %*

V tabeli 10 so prikazani najpogostejši načini/viri, ki kažejo na to, kako so po mnenju učencev, učenci imeli možnost izvedeti, ali snov razumejo. Večina učencev (približno dve tretjini) je navajalo načine, pri katerih učenec eksplicitno izkaže svoje znanje: učenec gre skozi nalogo, odgovarjanje na vprašanja, učenčeva vprašanja. Precej manjši delež učencev je pri tem navajal vire, ki neposredno niso vezani na ugotavljanje učencevega znanja oz. učenec pri njih ne more eksplicitno izkazati znanja: sledenje pouku, sklicevanje na možnost subjektivne presoje učitelja ali na ocene, sklicevanje na razlago, snov oz. na svoj subjektivni občutek. Med dečki in deklicami glede zaznavanja možnih virov za ugotavljanje razumevanja snovi ni bilo statistično pomembne razlike. Iz tabele 10 pa lahko razberemo, da so dečki v primerjavi z dekleti v večjem deležu navajali kot vir samoocene reševanje nalog, dekletom pa je bil v enakem deležu kot reševanje nalog pomemben tudi pogovor v razredu (tako v obliki učeteljevih kot učenčevih vprašanj).

Tabela 10: Učenčevi možni viri za samoocenjevanje znanja glede na spol

		Kako si lahko izvedel, ali si snov razumel?									
		Učenec gre skozi nalogo/ dejavnost	Odgovarjanje na vprašanja	Učenčeva (ne)vprašanja	Sklicevanje na razlago	Sledenje pouku	Sklicevanje na možnost subjektivne	Sklicevanje na snov	Nespecificiran subjektivni občutek	Drugo	Skupaj
Spol	moški	*24*	*5*	*6*	*6*	*3*	*1*	*0*	*3*	*4*	*52*
		46,2 %	*9,6 %*	*11,5 %*	*11,5 % %*	*5,8 %*	*1,9 %*	*0,0 %*	*5,8 %*	*7,7 %*	*100,0 %*
	ženski	*22*	*13*	*10*	*7*	*2*	*4*	*3*	*0*	*2*	*63*
		34,9 %	*20,6 %*	*15,9 %*	*11,1 %*	*3,2 %*	*6,3 %*	*4,8 %*	*0,0 %*	*3,2 %*	*100,0 %*
Skupaj		*46*	*18*	*16*	*13*	*5*	*5*	*3*	*3*	*6*	*115*
		40,0 %	*15,7 %*	*13,9 %*	*11,3 %*	*4,3 %*	*4,3 %*	*2,6 %*	*2,6 %*	*5,2 %*	*100,0 %*

V tabeli 11 vidimo, da glede na razred v zaznavanju možnih virov za samooceno razumevanja med učenci ni pomembnih razlik. Najbolj izstopajoč rezultat se kaže v devetem razredu, kjer je precej velik delež učencev izhajal iz učitelja kot vira, ki jim lahko poda neko subjektivno oceno o njihovem razumevanju snovi. Učenci devetega razreda so tako v manjšem deležu kot učenci v preostalih razredih izhajali iz načinov/virov, pri katerih učenec eksplicitno izkaže znanje. Dobljeni rezultat je težko razložiti in bi bilo smiselno preučiti še druge dejavnike (npr. dejavnike pouka), ki bi lahko vplivali na dobljeni rezultat.

Tabela 3: Učenčevi možni viri za samoocenjevanje znanja glede na razred

		Kako si lahko izvedel, ali si snov razumel?									
		Učenec gre skozi nalogo/ dejavnost	Odgovarjanje na vprašanja	Učenčeva (ne)vprašanja	Sklicevanje na razlago	Sledenje pouku	Sklicevanje na možnost subjektivne	Sklicevanje na snov	Nespecificiran subjektivni občutek	Drugo	Skupaj
Razred	šesti	*5*	*8*	*5*	*3*	*1*	*1*	*2*	*2*	*1*	*28*
		17,9%	*28,6%*	*17,9%*	*10,7%*	*3,6%*	*3,6%*	*7,1%*	*7,1%*	*3,6%*	*100,0 %*
	sedmi	*20*	*7*	*7*	*6*	*3*	*0*	*1*	*0*	*0*	*44*
		45,5%	*15,9%*	*15,9%*	*13,6%*	*6,8%*	*0,0%*	*2,3%*	*0,0%*	*0,0%*	*100,0 %*
	osmi	*15*	*1*	*3*	*4*	*1*	*0*	*0*	*1*	*2*	*27*
		55,6%	*3,7%*	*11,1%*	*14,8%*	*3,7%*	*0,0%*	*0,0%*	*3,7%*	*7,4%*	*100,0 %*
	deveti	*6*	*2*	*1*	*0*	*0*	*4*	*0*	*0*	*3*	*16*
		37,5%	*12,5%*	*6,3%*	*0,0%*	*0,0%*	*25,0%*	*0,0%*	*0,0%*	*18,8%*	*100,0 %*
Skupaj		*46*	*18*	*16*	*15*	*5*	*5*	*3*	*3*	*6*	115
		40,0%	*15,7%*	*13,9%*	*13,3 %*	*4,3%*	*4,3%*	*2,6%*	*2,6%*	*5,2%*	*100, 0 %*

Sklep

Obstoječa literatura kaže, da je učenčeva usposobljenost za samoocenjevanje znanja pomemben dejavnik pri oblikovanju kakovostnega pouka, hkrati pa je še premalo znanega o tem, kako učenci ugotovijo, kako dobro znajo. Poznavanje in razumevanje učenčevih virov za samoocenjevanje lahko pomaga učiteljem pri izboljšanju obstoječih praks poučevanja v smeri spodbujanja razvijanja samoocenjevanja znanja pri učencih in posledično razvijanja samoregulacijskih in metakognitivnih procesov pri učencu. V naši raziskavi smo ugotovili podobno kot Bourke in Mentis (2013) in D. Elder (2010), da učenci pri samoocenjevanju razumevanja obravnavane snovi v največjem deležu izhajajo iz nalog, ki jih rešujejo. Čeprav je pri obravnavanih urah prevladovala metoda pogovora, le-ta večini učencev ni predstavljala vira za samooceno razumevanja. To lahko utemeljimo s tem, da morajo učenci pri pouku matematike najpogosteje svoje znanje izkazovati s pravilno rešenimi nalogami. Ugotovili smo tudi, da učenci poleg reševanja nalog uporabljajo še druge vire za samoocenjevanje. Med tistimi, pri katerih lahko učenec eksplicitno izkaže svoje znanje, so še učiteljeva in učenčeva vprašanja o snovi. Drugi viri, ki jih učenci uporabljajo, niso vezani na eksplicitno izkazovanje znanja: sledenje pouku, nespecificiran subjektivni občutek, zahtevnost in razlaga učne snovi, zmožnost subjektivne presoje učitelja ali ocena pri matematiki. Tudi Andrade (2010) in D. Elder (2010) sta prišli so podobnih ugotovitev, in sicer da si učenci sliko o svojem znanju ustvarjajo na temelju več različnih virov. Razlike glede na spol so se pokazale predvsem v tem, da so dekleta v primerjavi z dečki v večjem deležu izhajala iz virov, pri katerih učenec eksplicitno izkaže svoje znanje. V tem pogledu so se pokazale tudi razlike med mlajšimi in starejšimi učenci. Starejši učenci so v primerjavi z mlajšimi v večjem deležu izhajali iz virov, kjer učenec lahko eksplicitno pokaže svoje znanje. Ti viri so tudi bolj zanesljivi in lahko pomagajo učencem oblikovati natančnejšo samooceno.

Ker so naloge tisti vir, ki učencem najbolj pomaga ugotoviti, kako dobro znajo, bi bilo v nadaljevanju smiselno raziskavo razširiti in ugotoviti, kako učenci vedo, kakšno znanje morajo pri nalogah izkazati, in kako uspešno so jo rešili oz. ali imajo razvite strategije za samopreverjanje pravilnosti reševanja nalog. To je namreč tudi osnova za učenčevo sprotno samougotavljanje in spremljanje lastnega znanja ter samousmerjanje napredovanja v znanju.

Viri

1. Andrade, L. H. (2010): *Students as the Definitive Source of Formative Assessment: Academic Self-Assessment and the Self-Regulation of Learning*. Paper presented at the annual meeting of the Northeastern Educational Research Association. Rocky Hill, CT.
2. Andrade, H., Boulay, B. (2003): Gender and the role of rubric-referenced self-assessment in learning to write. *Journal of Educational Research, V97*, št. 1, str. 21–34.
3. Bell, B., Cowie, B. (2001): The Characteristics of Formative Assessment in Science Education. *Science Education, V85*, št. 5, str. 536–553.
4. Black, P., William, D. (1998): Assessment and Clasroom Learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice,* V5, št.1, str. 7–74.
5. Boud, D. (1986): *Implementing Student Self-Assessment*. Sydney: Higher Education Research and Development Society of Australia.
6. Bourke. R. (2010): The Chameleonic Learner: Learning and self-assessment in context. NZCER Press.

7. Bourke, R., Mentis, M. (2013): Self-assessment as a process for inclusion. *International Journal of Inclusive Education, V17*, št. 8, str. 854–867.
8. Dunning, D., Heath, C., Suls, J. M. (2004): *Flawed Self-Assessment Implications for Health, Education, and the Workplace*. American Psychological Science, V5, št. 3, str. 69–106.
9. Elder, A. D. (2010): Children's self-assessment of their school work in elementary school. *Education 3-13, V38*, št. 1, str. 5–11. International Journal of Primary, Elementary, and Early Years Education.
10. Flavell, J. (1985): *Cognitive development*. N.J.: Prentice-Hall international editions. Second edtition.
11. Hattie, J. (2009): *Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*. USA: Routledge.
12. Labuhn, A. S., Zimmerman, B. J., Hasselhorn, M. (2010): Enhancing students' self-regulation and mathematics performance: the influence of feedback and self-evaluative standards. *Metacognition and Learning, V5*, št. 2, str. 173- 194.
13. Markus, H. (1977): Self-schemas and processing information about the self. *Journal of Personality and Social Psychology, V35*, str. 63–78.
14. Marsh, H. W., Hattie, J. (1996): *Theoretical perspectives on the structure of self-concept*. V: B. A. Bracken (ur.), Handbook of self-concept. New York: Wiley.
15. Marsh, H. W., Shavelson, R. J. (1985). Self-concept: It's multifaceted, hierarchical structure. *Educational Psychologist*, V20, str. 107- –125.
16. Marzano, R. J. (1998): *A theory-based meta-analysis of research on instruction*. Aurora, CO:Mid-Continental Regional Educational Laboratory.
17. Panadero, E., Tapia, J. (2013): Self-assessment: Theoretical and Practical Connotations. When it Happens, How is it Acquired and what to do to Develop it in our Students. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, V11*, št. 2, str. 551-–576.
18. Pečjak, S., Košir, K. (2002): *Poglavja iz pedagoške psihologije. Izbrane teme*. Ljubljana: Oddelek za psihologijo Filozofske fakultete.
19. Ross, J. A., Hogaboam-Gray, A., Rolheiser, C. (2002): Student self-evaluation in grade 5-6 mathematics effects on problem-solving achievement. *Educational Assessment, V8*, št. 1, str. 43–59.
20. Sadler, D. R. (1989): Formative assessment and the design of instructional systems, Instructional Science, št. 18, str. 119–144.
21. Taras, M. (2001): The use of tutor feedback and student self-assessment in summative assessment tasks: towards transparency for students and for tutors. *Assessment and Evaluation in Higher Education, V26*, št. 6, str. 605–614.
22. Taras, M. (2002): Using assessment for learning and learning from assessment, Assessment and Evaluation in Higher Education, 27(6), str. 501–510.
23. Taras, M. (2010): Student self-assessment: processes and consequences. Teaching in HigherEducation, V15, št.2, str.199–209.
24. Towler, L., Broadfoot, P. (1992): Self-assessment in the Primary School. *Educational Review,* 44 (2), str. 137–151.
25. Van Kraayenoord, C. E., Paris, S. G. (1997): Australian students' self-appraisal of their work samples and academic progress. *Elementary School Journal, V97*, št.5, str. 523–537.
26. Zimmerman, B. J., Schunk, D. H. (2001): *Self-regulated learning and academic achievement: Theoretical perspectives (Second Edition).* Mahwah, NJ: Erlbaum.

MATEMATIKA SKOZI VPRAŠANJA IN KRITERIJE

Mathematics through Questions and Criteria

Rok Lipnik
rok.lipnik@gcc.si
Gimnazija Celje - Center

Povzetek
Formativno spremljanje je pomembno, saj dijakom in učiteljem zagotavlja sprotno preverjanje razumevanja in gradi na izboljšavi le-tega. Učitelj stanje preveri z zastavljanjem vprašanj, hkrati pa lahko za vodenimi vprašanji odpravi težave v razumevanju (Schoenfeld, 2015). Učenje skozi vprašanja podpira pomembne vidike učenja – sodelovanje, konceptualno bogat pouk, možnost raziskovanja in mnogo več. Verjamem, da je takšen način dela v matematiki pomemben, in ga svetujem vsem učiteljem, saj dijaki razmišljajo, so neodvisni in osredotočeni na učenje. S temi razlogi bom s formativnim spremljanjem nadaljeval tudi po razvojni nalogi FS/P.

Abstract
Formative assessment helps students and teachers assess understanding and build upon it. Teachers can identify typical mistakes by asking questions, and by asking additional questions teacher can eliminate trouble understanding (Schoenfeld, 2015). Working through questions supports important aspects of learning – cooperation, conceptually rich mathematics, the ability to research and more.
I believe, that this kind of work in mathematics is important and I recommend it to all teachers, since it engages students to think, be independent and it focuses them on learning. This is why I will continue with formative assessment even after the research task formative assessment is over.

Ključne besede
formativno spremljanje, vprašanja, kriteriji uspešnosti

Keywords
Formative assessment, questions, quality criteria

Uvod

V raziskovalno nalogo Formativno spremljanje/preverjanje Zavoda Republike Slovenije za šolstvo sem vključen od decembra 2015. Moje delo v razredu se je v tem času spremenilo, saj z vključevanjem elementov formativnega spremljanja pouk postaja bolj razgiban, prilagojen dijakom, hkrati pa učitelj ni več osrednji element pouka, temveč je v ospredje postavljen učenec.

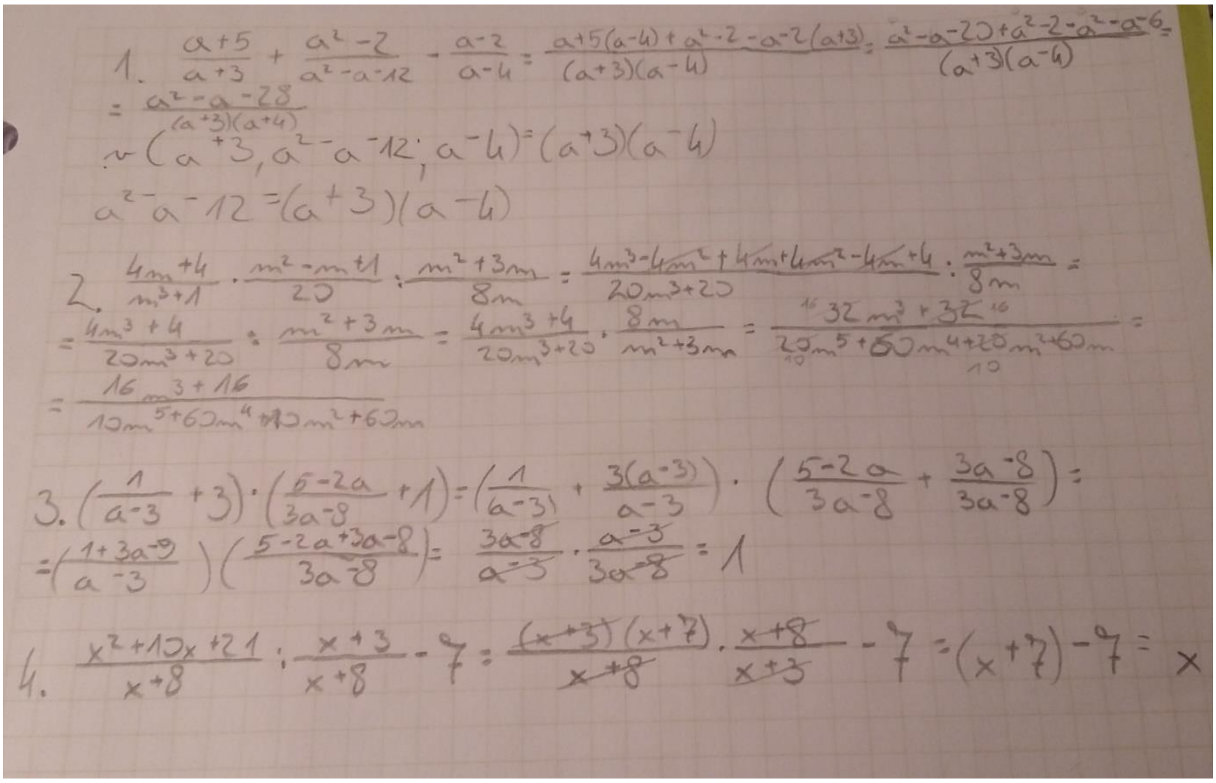
Ena od elementov formativnega spremljanja je zastavljanje vprašanj. S pravilno vpeljavo smiselnih vprašanj v pouk dosežemo različne cilje, kot so prepoznavanje in odpravljanje napak (Schoenfeld, 2015), razvoj sodelovalnega učenja (Schoenfeld, 2015) in izboljšan napredek pri učenju (William, 2011). Osmišljena vprašanja naj ne bodo oblike »Razumete?«, »Je kakšno vprašanje?«, temveč naj spodbujajo k razmišljanju in so v obliki »Kdaj…?«, »Kje…?«, »Opiši…!«, »Zakaj…?«, »Kako…?«, recimo »Zakaj pri risanju grafa kvadratne funkcije izračunamo koordinati temena? Ali lahko natančen graf narišemo tudi brez temena?«.
Element formativnega spremljanja je tudi pripravljanje kriterijev uspešnosti. To so kratki opisi znanja ali spretnosti, ki dijaku omogoča doseganje cilja. Skupaj z dijaki jih

pripravimo na koncu poglavja in so namenjeni samoocenjevanju, zapisani pa so v prvi osebi ednine. Za primer cilja »Dijak zna rešiti kvadratno enačbo« smo z dijaki sestavili kriterije uspešnosti: »Uredim enačbo«, »Prepoznam Vietovo pravilo ali rešim enačbo s pomočjo diskriminante« in »Odčitam ali preberem rešitve«.
Vse to so dejavniki, ki omogočajo boljše delo in samostojno učenje in preverjanje svojega znanja.

Kriteriji uspešnosti s pomočjo vprašanj
V šolskem letu 2015/2016 sem elemente formativnega spremljanja intenzivno uvajal, preizkušal in evalviral v oddelku prvega letnika predšolske vzgoje (štiriletni srednji strokovni program). Vključeval sem vse elemente od priprave kriterijev uspešnosti, zastavljanja vprašanj, zbiranja dokazov, samoevalvacije in sodelovalnega učenja do dajanja kakovostnih povratnih informacij. Glede na raziskave (Hattie, 2013) dajejo povratne informacije pri učenju efekt v vrednosti 1,13, kar je več kot 50 % uspešnejše učenje kot brez povratnih informacij.
Kako je potekalo delo? Z dijaki smo si praviloma na koncu vsakega poglavja pripravili kriterije uspešnosti, hkrati pa sem pripravil tudi vprašanja, ki so jih spodbujala k temu, da bi kriterije dosegali. Na primer: pri pravokotnem koordinatnem sistemu je en od kriterijev, ki smo si jih zastavili »Narišem množico točk v pravokotni koordinatni sistem«. Dijaki, ki jim je ta kriterij povzročal težave, so si lahko pomagali z mojimi vprašanji:

- Kako je sestavljen koordinatni sistem?
- Katere so pomembne značilnosti koordinatnega sistema?
- Kakšen je pomen urejenosti koordinat točke?
- Ali lahko na primeru v koordinatnem sistemu pokažeš razliko med < in >?
- Kaj predstavljata matematična simbola $\vee$ in $\wedge$ pri risanju množic točk?
- Zakaj pri množicah točk uporabljamo črtkane in polne črte?

Tako so dijaki postopno razvijali znanja – naučili so se narisati koordinatni sistem, bili so pozorni na temeljne značilnosti in sledili ključnim elementom risanja množice točk v pravokotni koordinatni sistem.
S pomočjo vprašalnika v spletni učilnici in mojih povratnih informacij so dijaki svoj napredek spremljali, ga vrednotili in se specifično učili tiste dele snovi, kjer smo skupaj zaznali težave.
Tako smo pri poglavju Racionalna števila pri algebrskih ulomkih, ki so za dijake precejšnji zalogaj, skupaj pripravili tri kriterije uspešnosti: »Računam z ulomki«, »Razstavljam izraze« in »Določim najmanjši skupni večkratnik izrazov«. Dijaki so na spletni učilnici najprej označili, katere kriterije obvladujejo in katerih ne. Nato so na podlagi svojega odgovora izbrali naloge za vajo in uspešno doseganje kriterija. Od mene pa so nato dobili povratno informacijo. Primer oddane naloge iz računanja z algebrskimi ulomki je prikazan na sliki 1.

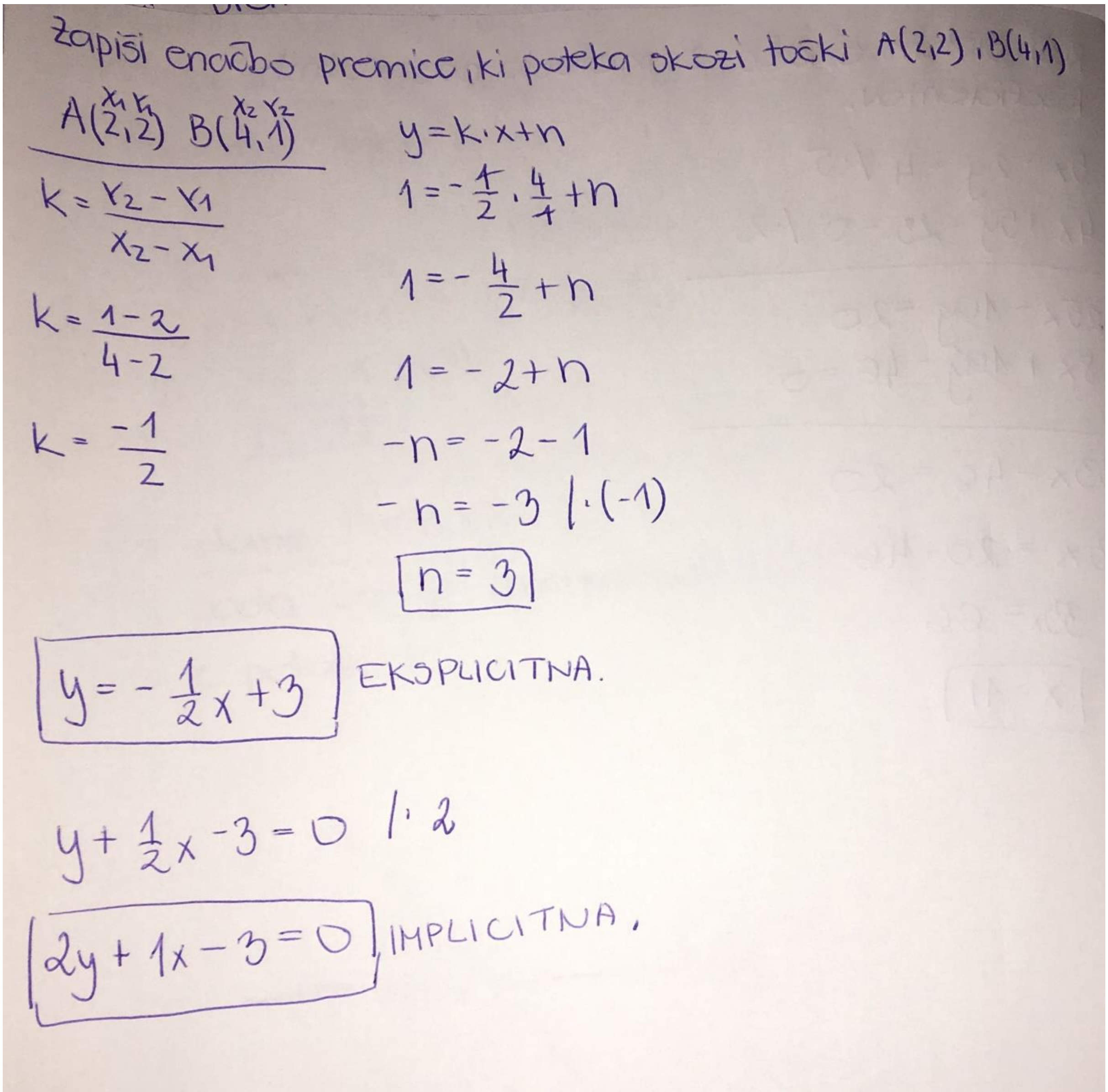


Slika 1: Primer oddane naloge v povezavi z algebrskimi ulomki (Vir: osebni arhiv.)

Dijakinja je v tem primeru dobila povratno informacijo: »*Nalogo 3 si rešila v celoti pravilno. Super! Pri nalogi 1 pazi na oklepaje in predznake: pri* $-(a-2)(a+3)$ *ostane na koncu* $a+6$*, namesto* $-a-6$ *in se potem števec še razstavi. Pri nalogi 2 predlagam, da izraze raje razstavi in nato krajšaj. Nalogo 4 si rešila v celoti pravilno. Kar tako naprej!*«.

Pri dajanju povratnih informacij uporabljam princip sendviča – najprej pohvalim pozitivno, nato predlagam izboljšave, na koncu pa povzamem dobro.

Podobno metodo sem uporabil tudi pri utrjevanju znanja iz poglavja linearna funkcija. Dijaki so svoje znanje ovrednotili, nato pa reševali izbrane naloge glede na doseganje kriterijev uspešnosti. Primer takšne oddane naloge je prikazan na sliki 2.

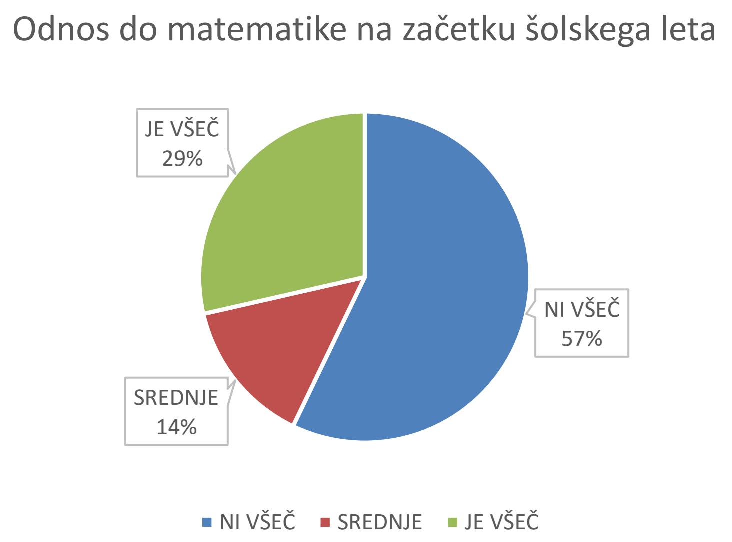


Slika 2: Primer oddane naloge v povezavi z linearno funkcijo (Vir: osebni arhiv.)

Tu je dijakinja dobila povratno informacijo: »*Peto nalogo si dobro začela reševati in prav zapisala eksplicitno obliko. Pri implicitni obliki pa pazi na množenje s 3. Bi to enačbo premice lahko zapisala tudi v odsekovni obliki?«*.
Tu želim z vprašanjem dijakinjo voditi do razmisleka o nadgradnji naloge, hkrati pa opozorim na morebitne nepravilnosti.

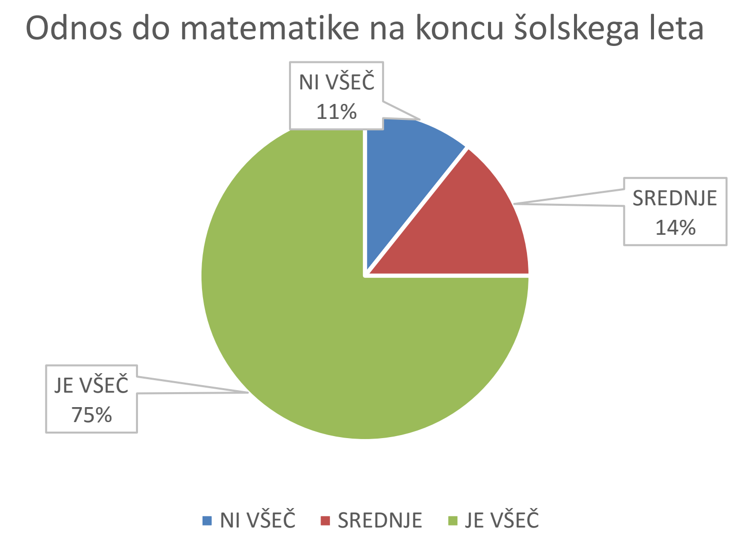
Analiza stanja

Ob koncu šolskega leta sem dijake z anketnim vprašalnikom prosil za povratno informacijo o delu v iztekajočem se šolskem letu. Sodelovalo je 28 od 29 dijakov.
Rezultati so zelo pozitivni. Na vprašanje »Kakšen je bil tvoj odnos do matematike na začetku šolskega leta?« je več kot polovica dijakov odgovorila, da jim matematika ni všeč, le slabih 30 % pa, da jim je matematika všeč, kot prikazuje grafični prikaz 1.



Graf 1: Odnos do matematike na začetku šolskega leta

Stanje na koncu šolskega leta je bilo skoraj popolnoma obratno, saj je tri četrtine dijakov odgovorilo, da jim je matematika všeč, le še 11 % pa, da jim matematika ni všeč, kot prikazuje grafični prikaz 2.

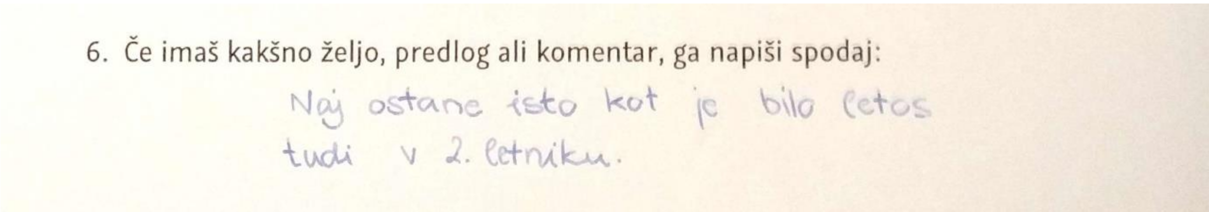


Graf 2: Odnos do matematike na koncu šolskega leta

Ključno vprašanje je bilo tudi povezano s kriteriji uspešnosti: »Ali so ti kriteriji uspešnosti pomagali pri učenju?« Rezultat je presenetljiv, saj so vsi dijaki izrazili mnenje, da so jim kriteriji pomagali, kot prikazuje grafični prikaz 3.

Graf 3: Kriteriji uspešnosti pri učenju

Kar 24 dijakov je izrazilo željo, da bi tudi prihodnje leto ostalo delo pri matematiki enako, večina pa je pod proste komentarje zapisala, da jim je matematika veliko bolj všeč, da se jo radi učijo in si želijo, da tako tudi ostane. En primer je prikazan na sliki 3.



Slika 3: Komentar na delo pri matematiki

Sklep

Skozi kriterije uspešnosti in vprašanja sem dijake vodil skozi večino šolskega leta in sami so izrazili, da jim je tak način všeč, da laže sledijo in imajo matematiko radi. Pozitiven odnos do matematike je pri motivaciji in učenju ključnega pomena. S elementi formativnega spremljanja se lahko dijaki učijo samostojno, v parih, skupinsko in razvijajo svoje znanje in spretnosti na različne načine. Dodana vrednost so različni pristopi, ki razbijejo monotonost in omogočajo razgibano poučevanje, v večini pa so v ospredju dijaki in ne več učitelj. Vloga učitelja je v motiviranju, vodenju in usmerjanju do cilja – dobrega znanja in zadovoljstva. Glede na rezultate, ki so predstavljeni, je ta cilj uspešno dosežen. V prihodnosti načrtujem uvajanje elementov formativnega spremljanja v vse oddelke, hkrati pa tudi evalvacijo že opravljenega dela.

Viri

1. Hattie J., Yates, G. C. R. (2013): Visible Learning and the Science of How We Learn. Routledge. London.
2. Schoenfeld, A. H. (2015): Summative and Formative Assessments in Mathematics Supporting the Goals of the Common Core Standards. Theory into practice, letn. 54, št. 3, str. 183–194.
3. Wiliam, D. (2011): Embedded formative assessment. Solution Tree Press. Bloomington

FORMATIVNO SPREMLJANJE UČENCA TUJCA
Formative Assessment of Foreign Student

Mateja Pučnik Belavič, Mihaela Kerin
belavic.pucnik@gmail.com, mihaela.kerin@zrss.si
OŠ Toma Brejca, Zavod RS za šolstvo

Povzetek
Predstavljeno je spremljanje napredka učenca tujca pri učenju številskih predstav do pet v zanj tujem jezikovnem okolju. Cilj je bil, da se za učenca tujca ustvari spodbudno učno okolje, kjer bo dosegel svoj maksimalni napredek. Izhodišče za spremljanje učenčevega napredka je bilo formativno spremljanje, predvsem dajanje povratnih informacij z uporabo raznolikih slikovnih orodij, izbira primernih dokazov o učenju, organizacija priložnosti za medvrstniško učenje. Izhajali sva iz učenčevih močnih področij ter načrtovali dejavnosti, ki so omogočale predvsem odzivanje z neverbalno komunikacijo. Ugotovili sva, da je metoda formativnega spremljanja učenca tujca v učenju in izgrajevanju številskih predstav do pet učinkovito podprla.

Abstract
The paper presents formative assessment of a foreign student's progress in learning numerical performance to five in what – from a student's perspective – was a foreign language environment. The goal was set to create a stimulative learning environment for the foreign student, one where the best possible progress would be reached. The starting point for monitoring progress was formative assessment, especially the teacher's feedback to the student by means of various imaging tools, the choice of appropriate evidence of his learning and creating opportunities for peer learning. We took the student's strength into consideration and planned activities that enabled him to respond mostly by using non-verbal communication. We found out that using formative assessment in the case of a foreign student has been effective in helping him to acquire knowledge and numerical performance to five.

Ključne besede
Učenec tujec, formativno spremljanje, individualni napredek

Keywords
Foreign student, formative assessment, individual progress

Predstavitev učenca priseljenca
Spremljani učenec je priseljenec iz Albanije. Ko se je septembra 2016 vključil v prvi razred šole, slovenščine ni razumel. Ima še dve starejši sestrici, ki obiskujeta tretji in šesti razred. Mati govori albansko, ne razume in ne govori nobenega tujega jezika, z očetom komunikacija poteka prek kretenj in v srbščini.

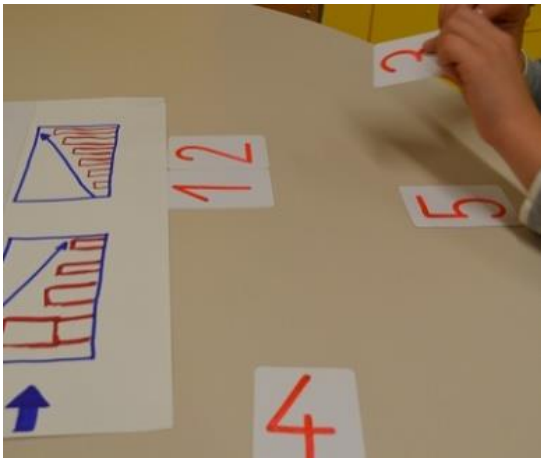
Po prvih treh mesecih šolanja učenec rad prihaja v šolo, v njej se počuti varno (slika 1) in sprejeto. Poleg pozitivne naravnanosti, odzivnosti v sprejemanju novih izzivov ter motiviranosti za delo v razredu izkazuje svoje močno področje tudi s spontanim vključevanjem v igro in v druge učne dejavnosti z vrstniki. Pri matematiki rad sodeluje pri skupinskem delu (slika 2), če ve, kaj se od njega zahteva in pričakuje. Takrat je v interakciji s sošolci tudi sproščen in vesel. Njegovo šibko področje se kaže predvsem v nerazumevanju učnega jezika. Pri navodilih za delo mu posamezne besede prevedemo v albanščino s pomočjo spletnega prevajalnika. Poleg jezikovnega sporazumevanja uporabljamo tudi znake, gibe in slike. Sošolci učencu pri izvajanju matematičnih dejavnosti spontano priskočijo na pomoč tako, da ga z neverbalnimi kretnjami vodijo skozi posamezne korake, ki so potrebni, da sam ali v drugih učnih oblikah pride do cilja. Ko s posnemanjem prepozna strategije reševanja, uspešno nadaljuje z delom.

Slika 1: Interakcija z vrstniki

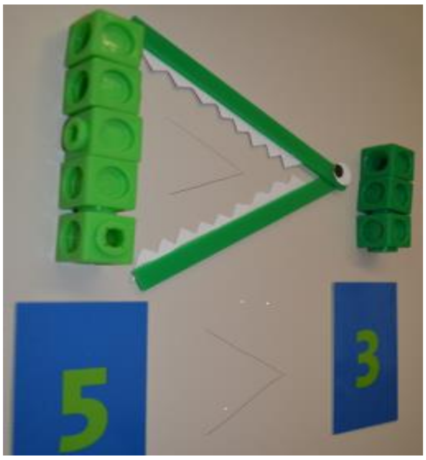
Slika 2: Skupinsko delo

Izhodišča za spremljanje učenca priseljenca pri pridobivanju številskih predstav do pet

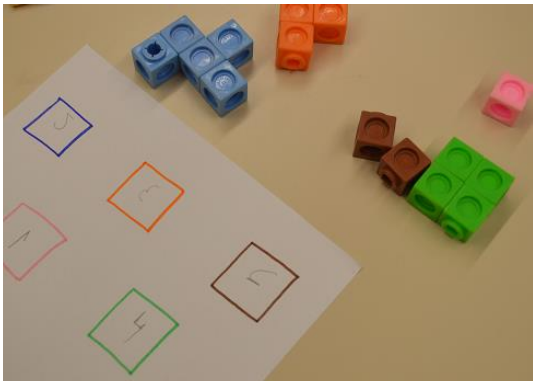
Pouk matematike je namenjen graditvi pojmov in povezav, spoznavanju ter učenju postopkov, ki posamezniku omogočajo vključitev v sistem (matematičnih) idej in posledično vključitev v kulturo, v kateri živimo. Upoštevamo učenčev kognitivni razvoj, njegove sposobnosti, osebnostne značilnosti in njegovo življenjsko okolje. Razvijamo celovito osebnost učenca. V prvem triletju je poudarek na razvoju številskih predstav, ki temeljijo na praktičnih aktivnostih. Uporabljamo konkretni material, nazorna ponazorila in učencem primerna didaktična sredstva tako dolgo, dokler jih učenci potrebujejo in ne naredijo miselnega preskoka na abstraktno raven in to razumejo. Prevladuje učenje skozi igro, opazovanje in izkušenjsko učenje. Primerne dejavnosti (slike 3, 4 in 5) za razvoj zgodnjih številskih predstav so urejanje števil po velikosti, odnosi in štetje (Žakelj, 2011).



Slika 3: Urejanje števil po velikosti



Slika 4: Odnosi med števili



Slika 5: Štetje

Ob didaktičnih priporočilih pouka matematike je bil namen spremljanja učenca priseljenca pri pridobivanju številskih predstav do pet predvsem odgovoriti na vprašanja: kako ugotoviti oz. preveriti, kakšne so številske predstave učenca priseljenca (predznanje), kateri pristopi v poučevanju so učinkoviti in kateri ne, kateri načini podajanja povratne informacije učenca premikajo naprej v učenju, kako učenca spodbujati k samovrednotenju in vrstniškemu učenju.

Izhodišče za spremljanje napredka učenca priseljenca je bilo formativno spremljanje, ki smo ga vključili v proces učenja in poučevanja z namenom učenca aktivirati, da doseže svoj maksimalni napredek pri matematiki kljub nerazumevanju učnega jezika, in aktivirati učitelja, da z udejanjanjem načel formativnega spremljanja nudi učinkovito podporo učencu pri izgrajevanju znanja. Pomembno je, da učitelj stremi k omogočanju enakih pogojev za vse učence in v interakciji z učencem, kjer ves čas poteka kakovostna povratna informacija o procesu učenja, stremi k nenehnemu prilagajanju in izboljševanju procesa poučevanja tako, da učenec napreduje in izboljšuje učne dosežke. V proces poučevanja smo integrirali pet ključnih strategij formativnega spremljanja: 1. Razjasnitev, skupno določanje in razumevanje namenov učenja ter kriterijev uspešnosti učitelja z učenci, ki učencu omogočajo osredotočenost na učenje, motivacijo za učenje. 2. Priprava učnih dejavnosti, ki nudijo dokaze o učenju, s katerimi učitelj spremlja razumevanje učencev, učencu pa omogočajo vpogled v obstoječe in/ali želene učne dosežke. 3. Zagotavljanje kakovostnih povratnih informacij učitelja in sošolcev, ki učenca usmerjajo in premikajo naprej v učenju. 4. Aktiviranje učencev, da postanejo drug drugemu vir poučevanja, kjer medvrstniška komunikacija in učenje učencu omogoča razvoj govora, mišljenja. 5. Aktiviranje učencev za samoobvladovanje njihovega učenja, kjer učenec presoja, vrednoti svoje dosežke ali dosežke sošolcev, načrtuje nadaljnje korake v učenju in ob tem razvija odgovoren odnos do učenja (Holcar Brunauer idr., 2016).

Učencu priseljencu smo pouk matematike prilagodili tako, da je razumel, kaj se uči in kaj pričakujemo od njega. Pri delu z njim smo upoštevali tudi smernice za izobraževanje otrok priseljencev v vrtcih in osnovnih šolah (Novak, 2012). Pouk smo individualizirali in diferencirali.

Izvedba v razredu

Pri načrtovanju učnega sklopa smo izhajali iz ciljev učnega načrta za matematiko v prvem razredu osnovne šole (Žakelj idr., 2011:13) ter jih operacionalizirali: učenci ob koncu učnega sklopa štejejo, zapišejo in berejo števila do 5, vključno s številom 0;

poznajo različne ponazoritve števil do 5; uredijo po velikosti množico naravnih števil do 5 in prepoznajo števke 1, 2, 3, 4 , 5 in 0.

Predznanje učenca priseljenca smo ugotavljali z različnimi dejavnosti (slike 6, 7, 8, 9, 10, 11). Ugotovili smo, da razume, da je število predmetov neodvisno od njihove postavitve v prostoru, uporablja različne ponazoritve števil do pet (prste, pike, črtice, kvadratke), razume kardinalni pomen števila in števila oblikuje iz različnih materialov. Učenec je imel nekaj težav pri pravilnem preštevanju predmetov, štetju v pravilnem zaporedju, prepoznavanju števil do pet in prerisovanju števil. Največ težav pa je imel pri pravilnem zapisovanju števil do pet in pri zapisovanju števil po nareku.

Slika 6: Vzorec

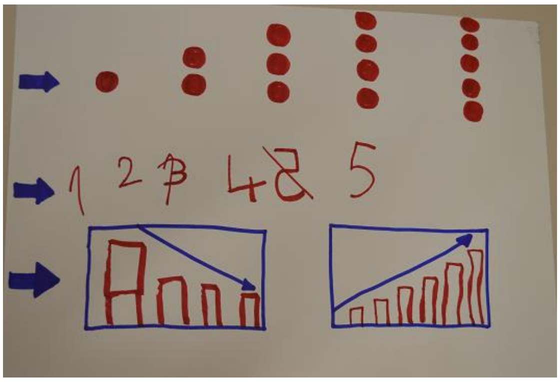
Slika 7: Ponazoritev s krožci in kockami

Slika 8: Ponazoritev z link kockami

Slika 9: Ponazoritev z dominami (pikami)

Slika 10: Ponazoritev s prstki **Slika 11: Zapis števila**

Z učenci smo se pogovorili *o namenih učenja ter sooblikovali kriterije uspešnosti*. Pri ubeseditvi namena učenja in kasneje kriterijev uspešnosti sem bila še posebej pozorna na uporabo učencem razumljivega jezika in sem ves čas preverjala njihovo razumevanje o tem, ali vedo, kaj se bodo učili, in ali vedo, kako bodo vedeli, da so bili pri učenju uspešni. Z učenci smo skupaj oblikovali preproste, jasne in vsem razumljive kriterije uspešnosti: 1. štejem in poznam različne ponazoritve števil do 5; 2. prepoznam in zapišem števke 1, 2, 3, 4, 5 in 0; 3. uredim števila do 5 od najmanjšega do največjega in obratno. Učenci so sami predlagali, kako bi te kriterije tudi zapisali oz. ponazorili (slika 12).

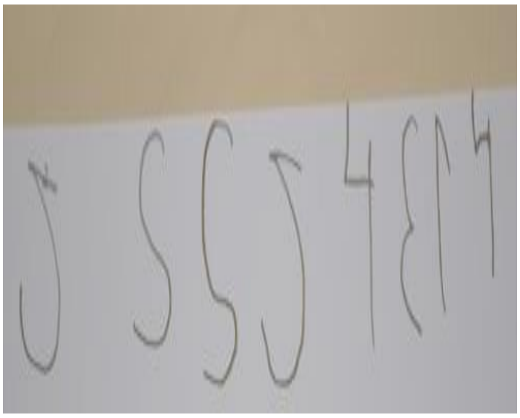


Slika 12: Kriteriji uspešnosti

V tej fazi učnega procesa je učenec priseljenec na začetku pogovor z učenci samo opazoval in poslušal sošolce, ki so oblikovali in zapisovali kriterije uspešnosti. Počakal je na svojo priložnost. Ko sem učencem pokazala prste na rokah in jih preštela, je tudi on razumel, o čem se bomo učili, kaj je namen učenja. Nasmehnil se je in mi neverbalno sporočil, da razume, da bomo šteli. Pri oblikovanju zadnjega kriterija je zbral dovolj poguma in samostojno zapisal kriterij (uredi števila po velikosti od najmanjšega do največjega).

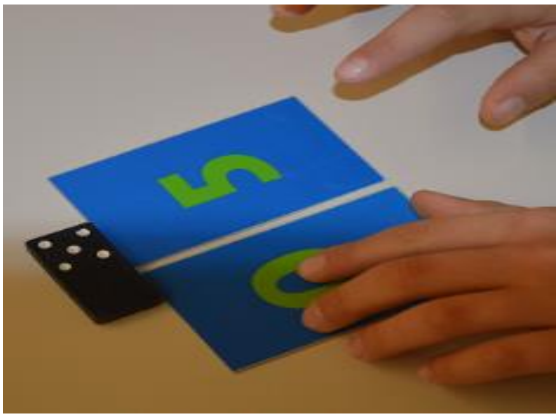
Pri izvajanju različnih učnih dejavnosti smo pridobili številne *dokaze o učenju* oz. učne dosežke učencev. Napredek učenca priseljenca sem spremljala v učnih dejavnostih (slike 13, 14, 15, 16), dokaze o učenju sem zbrala v njegov portfolio.

Slika 13: Pravilno preštevanje in štetje



Slika 14: Pravilen zapis števk 4 in 5

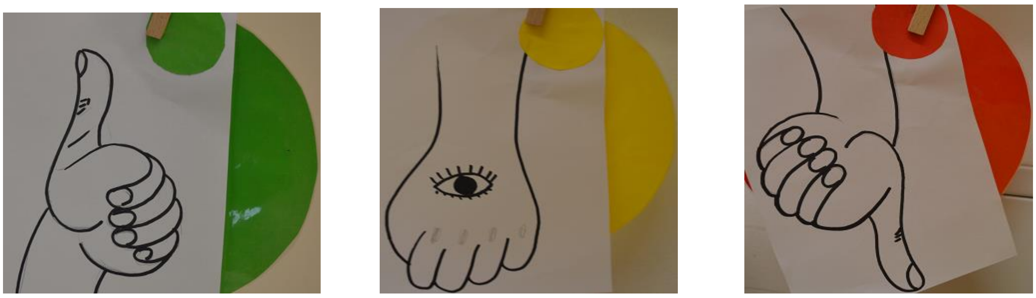
Slika 15: Pravilna ureditev po velikosti



Slika 16: Pravilna ponazoritev števil

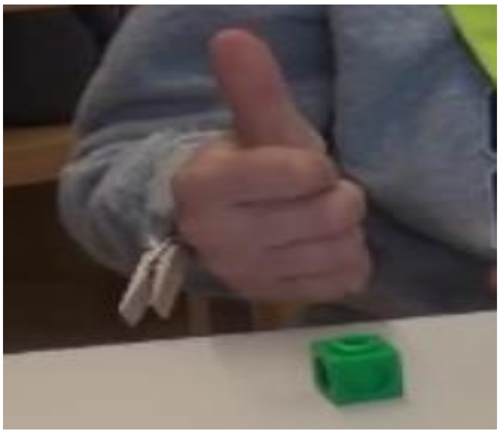
Na podlagi dokazov o učenju sem ob koncu učnega sklopa ugotovila, da učenec priseljenec: pravilno prešteva predmete, šteje v pravilnem zaporedju, razume, da je število predmetov neodvisno od njihove postavitve v prostoru, uporablja različne ponazoritve števil do pet (prste, pike, črtice, kvadratke), prepoznava števke do pet, razume kardinalni pomen števila, števila oblikuje iz različnih materialov, pravilno prerisuje števila. Težave pa ima pri pravilnem zapisu števil do 5, kjer pri zapisu obrača števke 1, 2, in 3.

Povratna informacija učencu priseljencu je med učnimi dejavnostmi v večini potekala na neverbalni ravni, z očesnim stikom, kretnjami in dogovorjenimi znaki. Tako sem mu sporočala, ali je pri učenju na pravi poti oz. ali mora spremeniti smer. Po potrebi sem s kretnjami nakazala nadaljnje korake. Jasen, razumljiv in preprost način sporočanja o napredku učenca in usmerjanje za naprej so mi omogočali uporabljeni dogovorjeni znaki (slika 17). Učenec priseljenec je razumel njihov pomen. Z dogovorjenim znakom je pokazal, kakšno podporo potrebuje. Razumel je povratno informacijo in je bil vir poučevanja tudi drugim učencem.

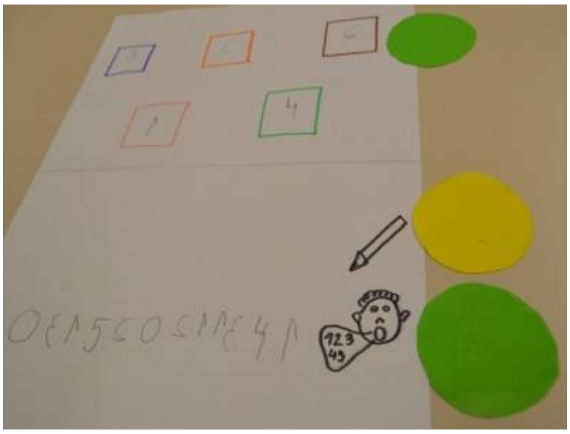


Slika 17: Dogovorjeni znaki

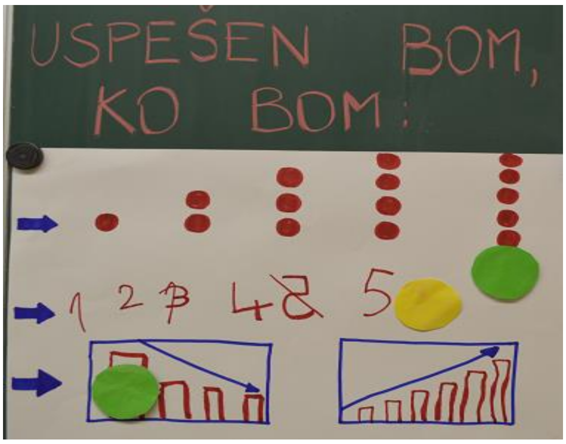
<u>Samovrednotenje in vrstniško vrednotenje</u> učencev (v paru, v skupini) sem v razredu spodbujala že ob zaključku nekaterih učnih dejavnosti, ko so se učenci spraševali, kaj so se naučili, kako dobro jim je šlo in kaj bi lahko izboljšali. V podporo pri razmišljanju o učenju so uporabljali zeleno, rumeno in rdečo barvo kock/krožcev. Pri samovrednotenju ob zaključku učnega sklopa so si učenci pomagali s kriteriji, ki smo jih oblikovali na začetku učenja. Učenec priseljenec je sam proces samovrednotenja in učiteljevo vrednotenje hitro razumel (slike 18, 19, 20). Brez večjih težav se je vključil tudi v vrstniško vrednotenje, kjer je pravilno uporabljal znake. Če je bilo potrebno, je sošolcu s kretnjami pokazal korake do rešitve (slika 21).



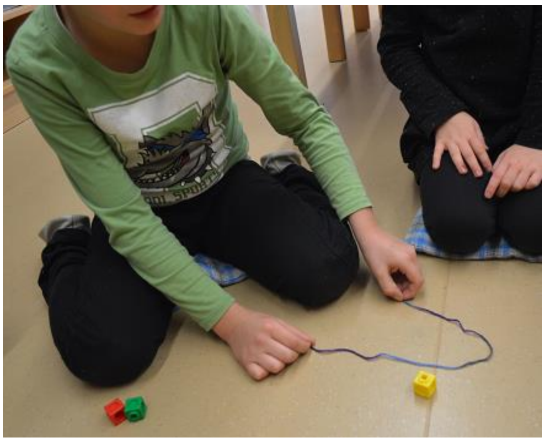
Slika 18: Kako mi gre?



Slika 19: Učiteljevo vrednotenje znanja



Slika 20: Samovrednotenje učnega sklopa



Slika 21: Vrstniško vrednotenje znanja

Najpomembnejše ugotovitve

Uvajanje elementov formativnega spremljanja pri učencu priseljencu kljub jezikovnim preprekam učinkovito usmerja učenca naprej in mu omogoča izgradnjo kakovostnega in trajnega znanja. Glede na svoje predznanje o številskih predstavah do 5 je učenec priseljenec napredoval v skladu s svojimi zmožnostmi. Pri usvajanju znanja so bili učinkoviti predvsem pristopi, ki so omogočali neverbalno komunikacijo z učencem in od njega niso zahtevali verbalnega odzivanja. Jezikovne ovire, ki jih ima učenec priseljenec, lahko premagujemo tako, da uporabljamo številne različne konkretne materiale, ki mu omogočajo, da prek različnih aktivnosti usvoji matematične pojme. V pomoč so nam različni njemu razumljivi, slikovni pripomočki, didaktična pomagala in praktični prikazi. Omogočamo mu učenje po majhnih korakih, postopoma, s poudarkom na utrjevanju in ponavljanju. Tako razvija lastne miselne strategije za reševanje matematičnih problemov. Preostale učence spodbujamo k medvrstniški pomoči tako, da učencu priseljencu razložijo in pojasnijo pojme na svoj način. Učenec je z opazovanjem ugotovil bistvo posameznih učnih dejavnosti, sklepal in jih pravilno rešil, prepoznal vzorec in ga nadaljeval, uporabil znanje v novi situaciji in kritično vrednotil lastne dosežke in dosežke sošolcev. Ugotovili smo, da če ima občutek, da zmore in zna, bistveno hitreje napreduje v lastnem tempu in ima boljšo samopodobo, kljub jezikovnim oviram.

Nadaljnji koraki za delo

Ob koncu obravnave učnega sklopa smo ugotovili, da je treba utrditi poimenovanje števil do pet in nadaljevati z učenjem zapisa števil do avtomatizma. Še naprej bomo ustvarjali spodbudno učno okolje in omogočali interakcijo z drugimi učenci (skupinsko učenje, projektno delo, učenje učenja). Spodbujali bomo učenčevo aktivno sodelovanje pri vseh elementih formativnega spremljanja. Postopno bomo prehajali na ustno podajanje povratne informacije in aktivno spodbujali razvoj sporazumevalnih zmožnosti v slovenskem jeziku v različnih funkcijah ter pri različnih dejavnostih.

Viri

1. Cotič, M. (2003): Igraje in zares v svet matematičnih čudes. Kako poučevati matematiko v 1. razredu devetletne osnovne šole. DZS, Ljubljana.
2. Clarke, S. (2012): Active learning through Formative Assessment. By Hodder Education part of Hachette UK.
3. Dix, P. (2010): The Essential Guide to Classroom Assessment. By Ashford Colour Press, Great Britain.
4. Holcar Brunauer, A., Bizjak, C., Cotič Pajntar, J., Borstner, M., Eržen, V., Kerin, M. idr. (2016): Formativno spremljanje v podporo učenju. V Priročnik za učitelje in strokovne delavce. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
5. Novak, M. idr. (2012): Smernice za vključevanje otrok priseljencev v vrtce in šole. Smernice za celostno vključevanje priseljencev (otrok, učencev in dijakov) iz drugih jezikovnih in kulturnih okolij v slovenski vzgojno-izobraževalni sistem, Zavod RS za šolstvo, Ljubljana.
6. Žakelj, A. idr. (2011): Učni načrt. Program osnovne šole. Matematika. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

PROSTORNINA PRIZME IN FORMATIVNO PREVERJANJE

Volume of Prism and Formative Assessment

Jožef Senekovič
jozef.senekovic@guest.arnes.si
OŠ Bojana Ilicha, Maribor

Povzetek
V okviru sodelovanja z Zavodom RS za šolstvo sem pripravil hospitacijski nastop za učitelje matematike. Izbral sem vsebinski sklop geometrijskih teles v devetem razredu, prostornino prizme. Namen hospitacijske ure je bil prikaz nekaterih elementov formativnega preverjanja pri obravnavi geometrijskih vsebin. V prispevku so predstavljeni elementi formativnega preverjanja, vključeni v učno uro: preverjanje predznanja, aktivacija znanja, postavljanje vprašanj, oblikovanje kriterijev uspešnosti in zbiranje dokazil. V prispevku je prav tako predstavljeno, kako so elementi formativnega preverjanja vključene v pouk, v katerem koraku in s katerim namenom.

Abstract
In cooperation with the National Education Institute of Slovenia I prepared observation lesson for teachers of Mathematics. For the topic I chose geometrical shapes in 9th grade, namely volume of prism. The main purpose of the lesson observation was to present implementation of some of the elements of formative assessment in teaching geometrical shapes. The article presents the elements of formative assessment included in my lesson. These elements are: prior knowledge assessment, knowledge activation, asking questions, forming criteria for success and collecting evidence. The article also explains how the elements of formative assessment are implemented in the lesson, in which step of the lesson, and what the objective is.

Ključne besede
formativno preverjanje, volumen prizme

Keywords
formative assessment, the volume of prism

Uvod
Prav gotovo se vsak učitelj v razredu vsaj občasno znajde pred dilemo ali vprašanjem: »Kako ne znajo, ko pa sem jim tako lepo razložil? Spet se niso učili!«, v isti sapi najde tudi odgovor. In ta odgovor prenese odgovornost za znanje samo na učenca. S tem ni pravzaprav nič narobe, lahko pa postavimo vprašanje o učinkovitosti in smiselnosti takega razmišljanja. Ali je fraza »Spet se niso učili« res edina rešitev situacije? Kaj vendar učitelj lahko naredi, da bi bilo takih vprašanj čim manj? Zapisana dilema, lahko je izražena na veliko načinov, je sicer lahko točna, lahko pa je tudi posledica nerazumevanja ali neupoštevanja poteka spoznavnih procesov pri učencih in tega, kako se vzpostavlja njihovo razumevanje na različnih razvojnih stopnjah. Za razumevanje konceptov je potrebno dobro strukturirano znanje. Dobro strukturirano znanje je posledica učinkovitega učenja, ki temelji na raziskovalnih pristopih. Učinkovito učenje pa temelji na formativnem preverjanju (Dumont, Istance, Benavides 2013: 7). Učitelj v razredu ni nemočen. S spoznavanjem in uporabo takih pristopov poučevanja, ki omogočajo dobro strukturirano znanje, lahko učinkovito vpliva na učenje učencev. Michael Schneider in Elsbet Stern učenje opredelita z desetimi temeljnimi ugotovitvami (Schneider in Stern, 2013: 67). Med temi izpostavimo

naslednje tri: učenje izvaja predvsem učenec, učenje mora upoštevati učenčevo predznanje in učenje terja čas in napor.
Izpostavljene ugotovitve jasno opredelijo vlogo učenca, ki je odgovoren za svoje učenje in mora v učenje vlagati čas in napor. Prav tako je jasno opredeljena vloga učitelja. Učitelj naj poučevanje organizira tako, da:

- ga lahko učenec izvaja (aktivna vloga učenca),
- upošteva predznanje učenca,
- se učenec zaveda, da je njegovo znanje odvisno tudi od vloženega časa in napora.

Pri sami pripravi in izvedbi pouka se moramo zavedati, da je učenje nepredvidljivo. Da kljub skrbni pripravi in premislekom ob koncu procesa ne moremo zagotoviti enakega znanja vseh učencev. Pa čeprav smo še tako prepričani, da so vsi opremljeni z enakim predznanjem. Možna rešitev, ki lahko zmanjša nepredvidljivost učenja, je formativno preverjanje z namenom regulirati procese učenja (William, 2013: 125). Poenostavljeno povedano, gre za povratne informacije, ki pravočasno regulirajo proces učenja učenca. Pravočasno pomeni, da preverjanja ne izvedemo šele po koncu obravnave sklopa, ampak z zbiranjem dokazil skozi ves proces pouka pridobivamo informacije o trenutnem znanju učenca. S pravočasnim odkrivanjem pomanjkljivosti lahko veliko bolj učinkovito interveniramo, kot če čakamo na zaključek nekega sklopa. Formativno preverjanje lahko v nekaterih primerih na učenca deluje negativno ali zaviralno, predvsem če je usmerjeno v učenčevo osebnost ali če smo usmerjeni preveč v instrumentalne cilje (ocene, formalni dosežki). Kakovostne povratne informacije naj se nanašajo čim bolj na nalogo ali celo bolje, posamezne podrobnosti nalog. V nadaljevanju so predstavljene elementi formativnega preverjanja v konkretni situaciji pri pouku.

Elementi formativnega preverjanja
Preverjanje predznanja
En izmed elementov formativnega preverjanja, je preverjanje predznanja. Na prvi pogled znan pojem, uporabljan v praksi. Če izhajam iz lastne prakse in dostopnih informacij kolegov, je preverjanje predznanja velikokrat omejeno na nekaj vprašanj v taki ali drugačni obliki. Učenci odgovarjajo (ali pa tudi ne), kolikor se spomnijo. Če nečesa ne vedo, jim povemo sami. In nekako sklenemo, da smo preverjanje predznanja učinkovito opravili.
Hospitacijski nastop je bil izveden v devetem razredu v heterogeni skupini učencev. Učenci se v tej uri naučijo računati prostornino prizme. Pravzaprav enostavna zadeva. Opravimo jo lahko na hitro, saj zapis formule tudi za nekoliko manj zmožne učence ni zahteven. Po zapisu formule učenci računajo prostornino različnih prizem. Tudi tako poučujem(o). Gre za poučevanje, ki zahteva učenje na pamet. Prav tako ne zahteva posebnega preverjanja predznanja. Ko pa je naš cilj izgraditi trdno konceptualno znanje, kar je eden izmed ciljev učnega načrta, je treba tudi taka na videz enostavna znanja graditi na obstoječem znanju, torej predznanju. Pred kakršno koli obravnavo teles preverimo, koliko učenci poznajo pojem telesa, kaj vedo o prostornini. Navedimo pričakovana znanja, ki naj bi jih učenci že imeli:

- razumevanje koncepta površine (površina telesa kot ploščina mreže). Povezava med ploščino (lik v ravnini) in površino (mejne ploskve telesa). Večja telesa imajo večjo površino, saj imajo večjo ploščino mreže;
- razumevanje koncepta prostornine (prostornino telesa dojemajo kot prostor, ki ga telo zavzema; telo je »polno« ali »prazno«, pomembne so mejne ploskve,

ki telo omejujejo; prostornina je odvisna od razsežnosti telesa;
- razumevanje koncepta telesa (tridimenzionalni objekt, ki ga v ravnini prikažemo z dvodimenzionalnim modelom);
- poznavanje pojmov o prizmi;
- računanje površine prizme;
- načrtovanje skic geometrijskih teles (prizme).

Zapisan je širok nabor pojmov, vključenih veščin, postopkov, razumevanja. Nekatera izmed zapisanih znanj so učenci pridobili šele v devetem razredu, druga veliko prej. Konceptualnega predznanja ni smiselno preverjati v uri, ko bi naj to predznanje že uporabili. Če namreč odkrijemo, da je predznanje pomanjkljivo, je treba z intervencijo odpraviti ali vsaj omiliti napake v konceptih. To pa je treba načrtovati, saj niti v dveh oddelkih pomanjkljivosti ne bodo popolnoma enake (nepredvidljivost učenja). Preverjanje predznanja opravimo nekaj ur pred obravnavo geometrijskih teles. Razumevanje koncepta površine in prostornine preverimo z dvema vprašanjema:

- Kaj se spomnim o površini?
- Kaj se spomnim o prostornini?

Nato učenci zapišejo še podobnosti in razlike med pojmoma.
Odgovori učencev so bili skromni, pomanjkljivi. Zamenjali so pojma prostornine in površine. Prav tako so zamenjali pojma obsega in ploščine s pojmoma površine in prostornine, torej koncepta ravnine in prostora. Pričakovani odgovori naj bi bili podprti s primeri o kvadru (kocki), saj sta učencem ta dva pojma v tem obdobju najbliže. Večina odgovorov je dala slutiti, da učenci globalno razumejo razliko med prostorom in ravnino, vendar te razlike niso zmožni utemeljiti z nekaj povedmi (skicami). Nekateri so prostornino opisali s produktom vseh dolžin robov telesa, drugi spet površino telesa kot velikost ene ploskve telesa. Pri analizi se je pokazalo, da učenci najbrž pomešajo pojme ravnine in prostora tudi zaradi transferja iz vsakodnevnega življenja. Ko jim namreč naročimo, da naj npr. nekaj zapišejo, »kjer imajo prostor« v zvezku, uporabljamo pojem prostora, ki je v tem primeru uporabljen za del ravnine (gre za različne kontekste, v katerih uporabljamo pojme). Tako učenci, ki imajo težave pri predstavah ravnine in prostora, seveda napačno razmišljajo. Za njih je prostor tudi del ravnine (kjer lahko pišejo ali rišejo).

Zapisani odgovori so bili dokaz, da precej učencev (še vedno) ne razume koncepta površine in prostornine teles (predvsem kvadra in kocke). Potrebna je bila intervencija. V naslednji šolski uri so (spet) delali z modeli kvadrov in kock. V dvojicah so ob modelih teles ponavljali pojem površine in z njo povezane pojme mejnih ploskev. Da je površina telesa velikost mreže telesa, kaj sploh je mreža telesa, od česa je površina kocke in kvadra odvisna (od koliko in katerih podatkov telesa). Koncept prostornine smo ponovili s potapljanjem telesa v vodo in volumnom izpodrinjene tekočine. Povezali smo dolžine robov kocke (kvadra) s prostornino. Torej v intervenciji ni šlo samo za poslušanje učitelja in zapise že znanih dejstev, ampak izvedbo dejavnosti, s katerimi okrepimo občutek učencev za površino in prostornino teles. Z intervencijo (s ponovitvijo dveh zelo pomembnih konceptov) učencem in sebi damo možnost učinkovito ponoviti koncepta površine in prostornine.

Aktivacija znanja
Učenci so delali v dvojicah. Vsaka dvojica je prejela model prizme. Projicirana so vprašanja oziroma dejavnosti, o katerih diskutirajo in pripravijo odgovore:

- Opazuj model prizme. Predstavi lastnosti prizme sošolcu.
- Katere količine so v prizmi merljive? Kaj lahko prizmi izmerimo oziroma kaj izračunamo? Npr.: ploščina plašča, ploščina osnovne ploskve, višina, dolžina robov, prostornina …
- Kako opredelimo prostornino telesa?

Učenci so opazovali konkretni model prizme (modeli so se med seboj razlikovali glede na osnovno ploskev, višino, material …), nato vsem sošolcem predstavijo opazovani model, opišejo merljive količine in s svojimi besedami opredelijo prostornino telesa. Izjave dopolnjujejo in tako oblikujemo celovit nabor potrebnih znanj. Z aktivacijo predznanja postanejo učenci vir znanja tudi drug drugemu, hkrati pa jih aktiviramo za samoobvladovanje učenja (o elementih formativnega preverjanja na študijskih srečanjih ZRSŠ 2016, vir: Dylan William).

Postavljanje vprašanj
Nadaljujemo z vprašanji, ki spodbudijo razmišljanje učencev. Vprašanja naj bi jim omogočila globlji uvid v vsebino in s tem učinkovitejšo razumevanje posameznih konceptov. Poglejmo nekaj primerov vprašanj.

- *Kaj pomeni, da so telesa različnih velikosti? Na kaj mislimo, ko govorimo o velikosti teles?*

V razpravi se izkaže, da učenci zelo različno razumejo pojem velikosti teles. Največ njihovih odgovorov je v povezavi z dolžinami robov telesa, velikosti mejnih ploskev, višino telesa. Ni prevladoval odgovor, da ima večje telo večjo prostornino. Sam pojem »velikost« morda zajema preveč možnosti in zato raznolike odgovore, pridobimo pa kakovostno informacijo o razumevanju koncepta pojma velikosti.

- *Primerjaj velikosti kock*.

Učencem pokažemo modele kock, ki se razlikujejo v dolžini roba. S tem je primerjava velikosti lažja, saj se kocke razlikujejo samo v enem podatku. Kocke z daljšim robom imajo večje mejne ploskve, večjo površino, večjo prostornino. Vprašanje (dejavnost) tudi miselno šibkejšim učencem (tudi učencem s skromnejšo prostorsko predstavo) omogoča primerjavo teles po velikosti, saj na velikost kocke vpliva sprememba le ene količine.

- *Opazujte modele kvadrov. Kaj lahko poveste o velikosti kvadrov?*

Učenci pri pojmu velikosti razmišljajo o površini ali prostornini kvadra. S spreminjanjem lege posameznega kvadra ugotovijo, da se velikost kvadra ne spremeni. Se pa spreminja velikost glede na dolžino robov kvadra.

Zastavimo vprašanje: »Kateri kvader je največji?« in projiciramo preglednico (preglednica 1).

Preglednica 1

Mere robov (cm)			
3 4 5			
3 4 6			
2 4 6			
2 4 8			
1 4 7			
1 4 10			

V preglednici so prazni trije stolpci. Izpolnimo jih glede na predloge učencev, npr. površina, prostornina, najdaljši rob … (preglednica 2). Ker že znajo izračunati prostornino in površino kvadra (lahko si pomagajo tudi z računalom), precej hitro ugotovijo, kateri kvader ima največjo prostornino oziroma površino. Pomembna je ugotovitev, da ni nujno, da ima kvader z največjo prostornino tudi največjo površino (ali najdaljši rob).

Preglednica 2

Mere robov (cm)	Najdaljši rob (cm)	Površina (cm^2)	Prostornina (cm^3)
3 4 5	5	94	60
3 4 6	6	108	72
2 4 6	6	88	48
2 4 8	8	112	64
1 4 7	7	78	28
1 4 10	10	108	40

Pojem velikosti telesa je torej treba natančno opredeliti. Sledi napoved, da pojem velikosti telesa povežemo s pojmom prostornine telesa.
Glede na modele, ki jih imajo učenci še vedno pred seboj (prizme), in ob dejstvu, da je tudi kvader (kocka) prizma, je naslednje vprašanje: »Kaj lahko povemo o velikosti prizem?«

Površino prizme že znajo izračunati, torej napovemo cilj te ure: »Kako izračunamo prostornino prizme?«
Do napovedi cilja pridemo z uporabo koncepta velikosti telesa in s tem površine oziroma prostornine telesa. Uporabimo predhodno znanje o kvadru (kocki). S tem prostornino prizme vgradimo v koncept prostornine teles nasploh, ne pa da se nam v razredu dogaja, da se formule za prostornino posameznih teles učenci naučijo na pamet, ne vidijo pa globalne povezanosti med različnimi telesi.

Kriteriji uspešnosti
Po načelih formativnega preverjanja kriterije uspešnosti oblikujejo učenci skupaj z učiteljem. Kriterije lahko ubesedimo šele takrat, ko učenci opravijo izbrane dejavnosti v zvezi z novimi znanji, ko so bili izpostavljeni miselnim konfliktom, izzivom, preiskavam problemov … Ko iz opravljenih dejavnosti ugotovijo, s katerimi znanji so predznanje nadgradili in kaj bodo morali znati.

Učenci so tako prejeli navodilo, da (spet v dvojicah) premislijo, diskutirajo in utemeljijo odgovor na vprašanji: »Kako bi izračunali prostornino prizme za model, ki je pred

vami?« in »Sprememba katerih količin prizme bi spremenila tudi prostornino prizme?«. V pomoč pri utemeljitvi so imeli »dejavnostno točko«, prostor s pripravljenimi potrebščinami za izvedbo poskusa. Na voljo so imeli merilni valj z vodo ter nekaj enakih modelov tristrane prizme iz lesa. Modeli so se dali med sabo zlepiti tako, da so lahko izdelali model s spremenjeno višino in enako osnovno ploskvijo ali model prizme z 2-krat, 3-krat večjo osnovno ploskvijo z nespremenjeno višino. Dejavnostno točko so lahko uporabili prostovoljno.
V fazi dela v dvojicah učitelj opazuje delo posameznih dvojic, posluša njihovo diskusijo in tudi usmerja delo. Učenci so večinoma postavili hipotezo, da je prostornina prizme odvisna od njene višine. Bili so izzvani, kako bi hipotezo potrdili. Največ utemeljitev je bilo povezanih z znanjem o kvadru (kocki). Ker je kvader prizma, računamo prostornino kot produkt velikosti osnovne ploskve in višine. Dvakrat, trikrat … višji kvader ima pri enaki osnovni ploskvi tudi dvakrat, trikrat … večjo prostornino. Torej enako velja za vse prizme (s tem učenci nazorno pokažejo uporabo koncepta prostornine za poljubno prizmo). Nekaj se jih je lotilo hipotezo preveriti na dejavnostni točki. Tisti, ki so dejavnost opravili, so dve prizmi zlepili v eno, dvakrat višjo in s potapljanjem ugotovili, da je prostornina take prizme dvakrat večja.

Ugotovili so, da je prostornina prizme odvisna od velikosti osnovne ploskve. Tudi v tem primeru je največ utemeljitev slonelo na lastnostih kvadra (kocke). Predvsem dvojici, ki sta imeli za model tristrano prizmo z osnovno ploskvijo pravokotnim trikotnikom, sta hitro ugotovili, da bi s še enim enakim modelom sestavili kvader, ki bi imel dvakrat večjo osnovno ploskev in enako višino kot ena prizma. Torej je prostornina prizme premo sorazmerna z velikostjo osnovne ploskve. Ena dvojica je hipotezo preverila s potapljanjem modelov.

Po izteku časa za načrtovano dejavnost so učenci poročali o ugotovitvah za posamezne modele. Ugotovitve so s pomočjo učitelja zapisali na tablo.

- *Prostornina prizme je odvisna od višine prizme (ob enaki ploščini osnovne ploskve). Višja prizma bo imela večjo prostornino.*
- *Prostornina prizme je premo sorazmerna z višino (n-krat višja/nižja prizma pri enaki osnovni ploskvi ima n-krat večjo/manjšo prostornino).*
- *Prostornina prizme je odvisna od velikosti osnovne ploskve (ploščine) pri enaki višini. Večja osnovna ploskev pomeni večjo prostornino. Gre za premo sorazmerno odvisnost prostornine in velikosti osnovne ploskve prizme.*

Po pogovoru o odvisnosti med prostornino in višino ter prostornino in velikostjo osnovne ploskve prizme odvisnost zapišemo s formulo $V = O \cdot v$.
Na tem mestu oblikujemo zapise, kaj bodo učenci morali znati (kriteriji uspešnosti):

- uporabiti formulo za izračun prostornine prizme (za poljubno pokončno prizmo);
- vedeti, da je prostornina prizme premo sorazmerna z višino (osnovno ploskvijo) prizme;
- uporabljati (pretvarjati) prostorninske enote.

Zbiranje dokazov
Sestavni del formativnega preverjanja je zbiranje dokazov. Šele z dokazi lahko kompetentno utemeljimo učenčevo znanje ali neznanje. Dokaze o znanju zbiramo neprenehoma. To so odgovori na vprašanja, diskusija med učenci, zapisani odgovori v zvezku … Na odgovore učencev reagiramo, jim damo povratno informacijo, učence usmerimo v pravo smer … Odgovori so individualno naravnani. Kadar želimo zbrati

dokazila celotne skupine, postavimo vprašanja vsem. Učenci so rešili naslednji nalogi: Kvader s prostornino 120 cm^3 razrežemo po obeh diagonalah osnovne ploskve. Nastanejo štiri enaka telesa. Opiši eno izmed teles in izračunaj prostornino telesa.

Načrtovana rešitev: Nastanejo štiri enake 3-strane prizme. Prostornina ene prizme je 30 cm^3.

V 3-strano prizmo nalijemo 1 liter vode. V 5-strano prizmo pa nasujemo 1 kg stiropornih kroglic. Primerjaj prostornini teles.

Načrtovana rešitev: Prostornini teles sta različni. Prostornina 3-strane prizme je 1 dm^3 in je najbrž manjša od prostornine 5-strane prizme. 1 kg stiropornih kroglic zavzema večjo prostornino kot je 1 liter (opremo se na izkušnje učencev).

Zaradi časovne omejitve so učenci imeli samo toliko časa, da so premislili navodilo in ustno utemeljili odgovore. Z nalogama preverimo razumevanje koncepta prostornine in teles nasploh. Učenci dobijo izkušnjo, s katerimi nalogami preverimo razumevanje prostornine teles, saj prostornina telesa ne pomeni nujno samo uporabo formule.

V zadnjem delu ure so učenci individualno rešili naslednje naloge.

1. Luka, Maja in Jan izdelajo modele prizem s prostorninami 0,12 l, 12 cm^3 in 1,2 dm^3. Čigav model ima največjo prostornino? Odgovor utemelji.
2. Na črto zapiši, katero količino meriš (prostornino, maso, površino …).
   a) V škatlo nasujemo 1 kg moke. ____
   b) Miha posodo napolni s 50 frnikulami. ____
   c) Dejanova škatla je kocka z robom 5 cm. ____
   d) Janezovo prizmo omejujeta skladna trikotnika s ploščino 40 cm^2 in trije pravokotniki s ploščino 20 cm^2 vsak. ____
3. Pokončna pravilna 6-strana prizma ima prostornino 120 cm^3. Izberi prostornino pokončne pravilne 3-strane prizme z enakim osnovnim robom in enako višino.
   A 120 cm^3 B 30 cm^3 C 40 cm^3 D 360 cm^3 E 20 cm^3
4. V največ treh stavkih zapiši, kaj si se danes naučil/-a.

Zapisane naloge učencem dajejo možnost razmisleka o prostornini brez uporabe formul.

S prvo nalogo učenci pokažejo (se preverijo), ali znajo s pretvarjanjem prostorninskih enot izračunati, katera prostornina je največja (najmanjša). Pri tem ni pomembno, ali so otroci, omenjeni v nalogi, izdelali modele prizem z enakimi lastnostmi. Pravilno prostornino (Jan) je zapisalo 19 učencev. Samo štirje so zapisali utemeljitev (s prikazom pretvarjanja). Število pravilnih odgovorov kaže na dovolj dobro znanje, čeprav zanesljivost odgovorov prav zaradi pomanjkljivih utemeljitev ni zadostna. V analizi odgovorov učencem predstavimo ustrezne odgovore, predvsem pa utemeljimo, zakaj je samo zapisan odgovor premalo natančen.
V drugi nalogi prepletemo pojma masa in prostornina. Nekatere trditve so take, ki potrebujejo utemeljitev. O rešitvah te naloge smo z učenci diskutirali tudi naslednjo učno uro. Poglejmo odgovore (preglednica 3):

Preglednica 3

Vprašanje	Prostornina	Masa	Površina
a)	12	11	
b)	22	1	
c)	3		22
č)	4		20

Nekateri učenci so včasih zapisali tudi dve količini, kar so utemeljili naslednjo šolsko uro. Preseneča predvsem vprašanje a), kjer je polovica učencev v trditvi »…1 kg moke v škatli ...« prepoznala prostornino, druga polovica pa maso. V analizi so pojasnili, da so na prostornino pomislili ob zvezi »nasujemo v škatlo«, torej v škatli je prostor. Seveda o velikosti te prostornine nič ne vemo.
Zanimiv je tudi odgovor na trditev c), kjer je večina videla v podatku »kocka z robom 5 cm« merjenje (računanje) površine. Samo en učenec je v tem primeru zapisal da merimo dolžino robov, kar bi pravzaprav bilo najustrezneje. Je pa težava v navodilu, kjer eksplicitno navajamo »prostornino, površino, maso«, druge možnosti pa so zajete v »…«. To je ponoven dokaz, kako učenci berejo in razumejo navodila. Največkrat ne tako, kot predvidevamo, da bi naj brali. V tej nalogi ne sodimo, kateri odgovor je pravilen, kateri pa ne. Učencem so omogočeni različni odgovori, ki jih utemeljijo po svoje.

Tretja naloga poveže poznavanje lastnosti prizem s prostornino. Skozi dejavnosti, razmisleke in pogovor so učenci lahko pridobili izkušnjo o razdelitvi prizme na enake, manjše prizme (ali sestavljanje v večjo prizmo). Odločitve učencev so bile naslednje:

- Odgovor A – 2
- Odgovor C – 5
- Odgovor E – 15
- En učenec ni podal odgovora.

Lepo se pokaže vpliv izbranih distraktorjev na odgovore učencev. Predvsem odgovor C so izbirali zato, ker je v navodilu omenjena 3-strana prizma, tako so sklepali da ima 3-strana prizma 3-krat manjšo prostornino od 6-strane.

Na zadnje vprašanje so odgovorili na dva načina:

- »Računati prostornino prizme,« je odgovorilo 16 učencev.
- »Računati prostornino prizme in od česa je odvisna,« je odgovorilo 7 učencev.

Zbranih dokazov ne uporabimo za ocenjevanje znanja. S pregledom (tudi med učenci samimi) želimo učencem posredovati kakovostno povratno informacijo. Učitelj dovolj zgodaj identificira, kdo med učenci ima težave in katere vrste težav.

Sklep
Kljub temu da je šlo za hospitacijsko uro, se poučevanje ni bistveno razlikovalo od poučevanja, ko ni hospitacij. Sama priprava na pouk je zahtevala veliko več časa za premisleke o elementih formativnega preverjanja, in to predvsem z namenom, da formativno preverjanje uporabimo sistematično in premišljeno. S tem je bilo opazovalcem omogočeno posredovati tako izkušnjo, ki bi bila uporabna, smiselna in učinkovita za pouk. V analizi ure so učitelji navajali, da ne bi uporabili toliko časa za preverjanje predznanja, tudi s samim pridobivanjem znanja (recimo dejavnostna točka) ure ne bi časovno toliko obremenili. Več poudarka bi dali sami formuli in nato uporabi

le-te v različnih primerih (prizmah). To seveda ne preseneča. Da ne poučujemo tako, kot smo bili poučevani, potrebujemo precej energije, novih znanj in pripravljenosti za vpeljavo sprememb. Formativno preverjanje zahteva pogosto presojo napredka na različne načine (Hinton, Fisher, 2013: 114). Hkrati daje bistveno večji poudarek odgovornosti učenca, kar si učitelji navsezadnje želimo. Nas pa je morda velikokrat preveč strah, da s spremembo našega dela učenci ne bili več tako »uspešni«.

Viri

1. Dumont, H., Istance D., Benavides, F. (marec 2013): O naravi učenja, uporaba raziskav za navdih prakse. OECD, ZRSS, str. 7.
2. Hinton, C., Fisher, K. W. (2013): Učenje iz razvojne in biološke perspektive; O naravi učenja, uporaba raziskav za navdih prakse. OECD, ZRSS, marec, str. 114.
3. Peršolja, M., OŠ Preserje pri Radomljah; https://sites.google.com/site/formativnospremljanjeznanja/Home, 18. 8. 2016.
4. Schneider, M., Stern, E. (2013): Kognitivni pogled na učenje: deset temeljnih ugotovitev; O naravi učenja, uporaba raziskav za navdih prakse. OECD, ZRSS, marec, str. 67.
5. Wiliam, D. (2013): Vloga formativnega vrednotenja v učinkovitih učnih okoljih; O naravi učenja, uporaba raziskav za navdih prakse. OECD, ZRSS, marec, str. 125.

UČNA SITUACIJA
Teaching Situation

Mag. Alenka Močnik
alenkamocnik@gmail.com
Srednja šola Veno Pilon Ajdovščina, Slovenija

Povzetek
Pisni del izpita poklicne mature bo nekoliko spremenjen spomladi 2017 in bo ostal enoten za vse kandidate v državi. Ustni del poklicne mature pa se je v preteklosti spreminjal in dopolnjeval do leta 2011. Temeljna novost pri ustnem delu so situacije in vprašanja, ki se nanašajo na situacije. V članku predstavljam, kako smo se s spremembami soočali v programu Predšolska vzgoja na Srednji šoli Veno Pilon Ajdovščina ter kakšne rezultate dosegajo naši dijaki, odkar so na ustnem delu prisotne situacije v primerjavi z ustnim delom v preteklosti. Poleg tega podajam primere učnih situacij, ki so jih v lanskem šolskem letu dijaki izdelali sami.

Abstract
The written part of the Vocational Matura will be slightly modified in the spring of 2017, remaining uniform for all Slovenian candidates. The oral part was being modified and finally completed by 2011. The great novelty of the oral part are situations and the questions referring to them. In the present article I attempt to show how these changes were confronted with at The Veno Pilon High School of Ajdovščina. In addition, I would like to present our students' results in comparison with the results from the time before the modifications were implemented. Moreover, I will offer some examples of the learning situations, elaborated during last school year by the students themselves.

Ključne besede
poklicna matura, ustni izpit, učna situacija

Key words
Vocational Matura, oral examination, learning situation

Uvod
Novi in prenovljeni programi srednjega strokovnega in poklicno-tehniškega izobraževanja so v katalogih znanj za matematiko leta 2007 prinesli novosti, ki so terjale spremembe tudi v zgradbi poklicne mature in vrednotenju znanja na njej. Pisni del izpita poklicne mature bo nekoliko spremenjen spomladi 2017 in bo ostal enoten za vse kandidate v državi. Ustni del poklicne mature pa se je v preteklosti spreminjal in dopolnjeval do leta 2011. Temeljna novost pri ustnem delu so situacije in vprašanja, ki se nanašajo na situacije, namesto teoretičnih vprašanj, kot so bila predvidena do leta 2009. V članku predstavljam, kako smo se s spremembami soočali na programu Predšolska vzgoja na Srednji šoli Veno Pilon Ajdovščina, kjer poučujem že sedem let, ter kakšne rezultate dosegajo naši dijaki, odkar so na ustnem delu prisotne situacije, v primerjavi z ustnim delom v preteklosti.

Zakaj povezovanje znanj?
Povezovanje pridobljenih znanj z vsakdanjim življenjem in stroko je za dijake zelo pomembno, saj lahko svoja stališča in izkušnje smiselno uporabijo. Izpostavim lahko nekaj vidikov, kjer se povezovanje znanj izkaže kot smiselno (Repolusk, 2012):

1. OSMIŠLJANJE MATEMATIČNIH VSEBIN
   Dijaki učitelju pri pouku večkrat zastavijo vprašanje: »Kje bom pa to potreboval v življenju?« Na tovrstna vprašanja se lahko odzovemo različno. Če nanj gledamo kot na resno izraženo mladostniško radovednost, nas to žene, da poskušamo dijaku znanje, ki ga podajamo, osmisliti tudi tako, da poiščemo uporabnost v vsakdanjem življenju. S tem oblikujemo ustvarjalno in spoštljivo vzdušje v razredu.
2. POGLOBITEV KONCEPTUALNIH ZNANJ
   Matematične koncepte lahko uporabimo tudi na drugih predmetnih področjih. Na primer fizikalne enačbe gledamo skozi oči matematičnih funkcij, pri odvisnosti pospeška od hitrosti uporabljamo odvod ipd.
3. RAZVIJANJE PROCESNIH ZNANJ
   Mnoga procesna znanja, ki jih razvijamo pri pouku matematike, so prenosljiva na preostala področja človekovega delovanja in so po navadi trajnejša.
4. CELOSTNI (HOLISTIČNI) POGLED NA VSEBINE IN DEJAVNOSTI PRI POUKU
   Potreba po povezovanju različnih znanosti se kaže na mnogih področjih. Celosten pogled na stvarnost omogoča iskanje odgovorov na današnje izzive.

Cilji učnih ur in poklicne kompetence[1]

Cilji, ki smo si jih zadali, so bili:

- učiti dijake reševanja nalog in problemov iz vsakdanjega življenja in stroke, vezane na matematiko;
- učiti dijake prepoznavati matematiko v vsakdanjih življenjskih situacijah s čim manjšo pomočjo učitelja;
- ponoviti in poglobiti teoretično in praktično znanje, ki ga je dijak pridobil v okviru splošnoizobraževalnega predmeta matematika;
- nadgraditi dijakovo znanje s področja matematičnega sklepanja in logike, da razvija svoje matematično mišljenje in izražanje;
- pridobiti znanja za načrtovanje in izvajanje dejavnosti za razvoj dijakovega matematičnega mišljenja in izražanja;
- učiti dijake usmerjati/uporabiti/izkoristiti iznajdljivost, kreativnost, samostojnost in izvirnost v matematičnih situacijah;
- analizirati in vrednotiti lastno delo ter ga predstaviti na izvirne načine.

Poklicne kompetence, ki naj bi jih dijaki dosegli:

- razumevanje in zmožnost za uporabo osnovnih matematičnih pojmov, odnosov med njimi in izvajanje postopkov,
- zmožnost za interpretiranje in kritično presojanje pri uporabi matematike na strokovnih in drugih področjih,
- zmožnost za uporabo tehnologije pri izvajanju matematičnih postopkov ter pri raziskovanju in reševanju matematičnih problemov – informacijsko-komunikacijska pismenost,
- zmožnost za sodelovanje in delo v timu,
- razvijati odprtost do novih idej,
- oblikovati svoja mnenja in stališča.

[1] Povzeto po Katalogu znanj za srednje strokovno izobraževanje.

Uporabljene tehnike, metode in pristopi[2]
Motivacijske tehnike:

- viharjenje idej.

Učne metode:

- metoda razlage,
- metoda pogovora,
- metoda dela s pisnim gradivom.

Didaktični pristopi:

- učnociljni in procesno-razvojni pristop (načrtovanje dejavnosti za dijake v povezavi s cilji procesa in pričakovanimi rezultati),
- aktivne metode pouka (delo z viri),
- interdisciplinarni pouk (matematika ter preostali predmeti).

Učna načela:

- aktualizacija,
- vzgojnost.

Učna sredstva:

- pisno gradivo (učbeniki, zapiski).

Didaktične etape:

- pripravljanje – motivacija,
- ponavljanje učnih snovi iz vseh štirih let izobraževanja.

Ključne kompetence:

- sporazumevanje v slovenščini,
- matematična kompetenca,
- socialne kompetence.

Spretnosti:

- spretnost predstavljivosti,
- spretnost analiziranja,
- spretnost komuniciranja,
- spretnost ugotavljanja vloge posameznika,
- spretnost uporabe pridobljenega znanja v drugačnih okoliščinah.

Potek dela
V lanskem šolskem letu sem dijake četrtega letnika predšolske vzgoje poučevala matematiko. Modul iz odprtega kurikuluma Matematika v vsakdanjem življenju in stroki, ki se prav tako izvaja v četrtem letniku, je tesno povezan z matematiko. Del teh ur namenimo ponavljanju za maturo. Skupaj s profesorico Darjo Turk, ki je poučevala ta modul, sva pripravili navodila, po katerih so dijaki sami izdelovali učne situacije. Vsak dijak je najprej razmislil o učni situaciji, ki jo bo pripravil, in nato na podlagi svoje ideje

[2] Povzeto po gradivih dr. Danijele Trškan, dr. Zore Rutar Ilc, mag. Vilme Brodnik, ožjega projektnega tima projekta Posodobitve učnih načrtov.

pripravil tri vprašanja, ki so se navezovala na njegovo situacijo ter ustrezna teoretična vprašanja. Izdelano situacijo, vključno z vsemi odgovori na vprašanja, so dijaki oddali v pregled, da so bili potem po predhodno izdelanih kriterijih (glej priloga 1) tudi ocenjeni. Nazadnje so svoje delo predstavili v razredu, ko smo se o morebitnih nejasnostih tudi pogovorili. Primer dobro izdelane učne situacije sem priložila članku (glej priloga 2).

Analiza rezultatov pri ustnem delu poklicne mature

V nadaljevanju predstavljam rezultate iz spomladanskega roka poklicne mature v letih od 2007 do 2016 (tabela 1).

Tabela 1: Rezultati spomladanskega roka v letih od 2007 do 2016

Leto	Pisno	Ustno	Skupaj	Povprečna ocena	Povprečna ocena*	Odstotek uspešnih	Odstotek uspešnih*
2007	42,45	22,25	64,70	3,33	2,90	93,02	90,70
2008	48,44	18,94	67,38	3,36	3,25	100	94,10
2009	43,51	23,31	66,82	3,32	3,11	94,12	93,80
2010	44,32	20,16	64,48	3,22	3,02	97,30	92,92
2011	35,52	17	52,52	2,60	2,98	84,44	91,58
2012	50,32	22,95	73,27	3,80	3,34	98,21	95,86
2013	50,43	19,45	69,88	3,67	3,40	100	97,16
2014	46,24	14,88	61,12	2,89	3,27	89,47	96,68
2015	47,87	19,60	67,47	3,49	3,27	95,35	95,66
2016	47,20	23,97	71,17	3,74	3,41	100	96,57

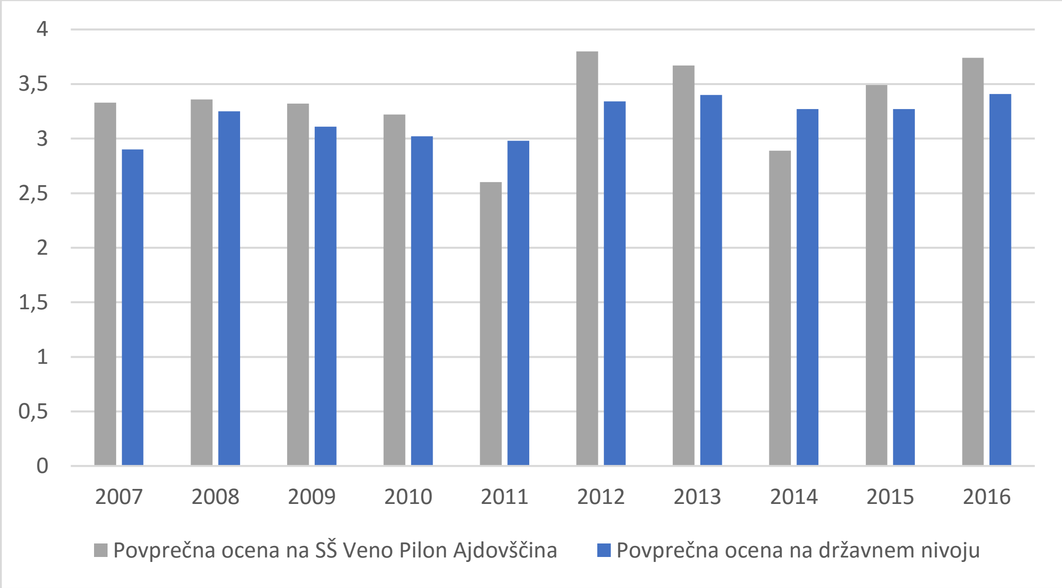
* Na državnem nivoju.

Na šoli smo z rezultati poklicne mature v primerjavi z rezultati na državni ravni lahko zadovoljni. Vsa leta, razen leta 2011 in 2014, smo nad slovenskim povprečjem.

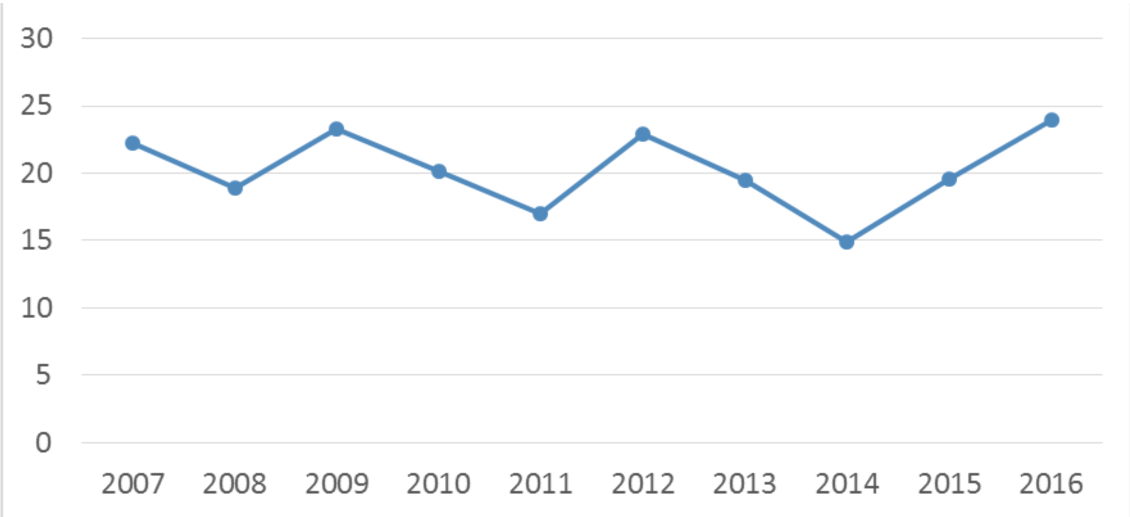
Pri ustnem delu poklicne mature opažamo, da so dijaki dobro pripravljeni. Običajno ponavljamo za poklicno maturo pri predmetu Matematika v vsakdanjem življenju in stroki, ki ga poučuje tisti učitelj, ki tudi sicer poučuje dijake matematiko (ni pa nujno). Vsako leto izvedemo priprave na poklicno maturo nekoliko drugače, še zlasti ko utrjujemo za ustni del. Lansko leto smo ponavljali tako, da so dijaki sami oblikovali situacijo. Pred leti smo profesorji dijakom pripravili situacije in vprašanja, na katera so odgovarjali.

Vsekakor pa so prisotni različni dejavniki, ki pripomorejo k uspehu oziroma neuspehu na poklicni maturi. Omenimo le nekatere:

- dijaki za tretji predmet pri poklicni maturi izbirajo med angleščino in matematiko,
- dijake poučujejo v času srednješolskega izobraževanja različni učitelji,
- izkušnje dijakov, ki so poklicno maturo že opravili …



Graf 1: Primerjava povprečne ocene na Srednji šoli Veno Pilon s povprečno oceno na državnem nivoju



Graf 2: Število doseženih točk na ustnem delu poklicne mature na Srednji šoli Veno Pilon Ajdovščina

Nekoliko večje število točk (23,97) kot v prejšnjih letih je bilo na spomladanskem roku 2016 ustnega dela poklicne mature.

Izdelki dijakov so učiteljem dali vpogled v njihovo razmišljanje ter povezovanje matematičnega znanja z življenjem in poklicem, ki ga bodo opravljali. Mnenja dijakov so bila pozitivna.

Sklep

Na Srednji šoli Veno Pilon Ajdovščina poučujem od leta 2009 tako v programu Gimnazija kot Predšolska vzgoja. Leta 2012 smo pri ustnem delu poklicne mature prvič uporabili situacije. Pri pripravi le-teh smo se soočali z vprašanji in dilemami. Predvsem smo profesorji imeli pomisleke glede razumevanja vprašanj v povezavi s situacijami, ki smo jih pripravili. V začetku smo si pomagali z Zbirko situacij z rešitvami za ustni izpit iz matematike pri poklicni maturi, ki so ga pripravili na Državnem izpitnem centru leta 2011. Nato smo se srečali z drugimi profesorji matematike na srednjih strokovnih šolah in skupaj z njimi sooblikovali učne situacije. Dokončno smo situacije oblikovali znotraj šolskega aktiva matematikov, za kar je bilo potrebnih veliko sestankov aktiva. Vsako šolsko leto se še vedno maja v ta namen ponovno sestanemo, da dopolnimo oziroma spremenimo katero od situacij. Sprva nekaterih situacij dijaki niso razumeli in niso znali teorije povezati s konkretnim vprašanjem, ki se je navezovalo na učno situacijo. S tem ko so dijaki sami ustvarili učno situacijo, pa so se privadili tudi na takšen način ocenjevanja. Kljub začetnim dvomom z leti opažamo, da je sprememba ustnega dela poklicne mature dobrodošla, saj je matematična znanja treba povezovati z vsakdanjim življenjem in stroko.

Viri

1. Dolinar, G., Dretnik, L. idr. (2011): Zbirka situacij z rešitvami za ustni izpit iz matematike pri poklicni maturi. Državni izpitni center, Ljubljana.
2. Matura 2015. Gradivo za novinarsko konferenco. Državni izpitni center, Ljubljana. http://www.ric.si/mma/Konferenca%202016%20rezultat%20SM%20PM%20MM%20kon%20%20na/2016071111285950/ (8. 9. 2016).
3. Predmetni izpiti katalog za poklicno maturo – Matematika 2017. Državni izpitni center, Ljubljana. http://www.ric.si/mma/2017%20P-MAT-2017/2015083113024207/ (8. 9. 2016).
4. Repolusk, S. (2012): Priprava bodočih učiteljev matematike na povezovanje znanj pri pouku matematike, Matematika v šoli, letn. 18, št. 1-2, str.97–102.
5. Suban Ambrož, M. (2011): Spremembe in novosti na poklicni maturi iz matematike, Matematika v šoli, letn. 17, št. 1-2, str. 71–84.

Priloge

1. Navodila za pisanje in ocenjevanje pri predmetu Matematika v vsakdanjem življenju in stroki.
2. Primer učne situacije dijakinje Anje Medved.

PRILOGA 1

Srednja šola Veno Pilon Ajdovščina

Cesta 5. maja 12, 5270 Ajdovščina

Ustni del poklicne mature – izdelava »Situacije«

Navodila za pisanje in ocenjevanje
Matematika v vsakdanjem življenju in stroki, šolsko leto 2015/16

V okviru te naloge boste dijaki samostojno izdelali en primerek »Situacije«, katere primere podobnih smo delali pri pouku predmeta Matematika v vsakdanjem življenju in stroki.

Delo naj poteka individualno.
Vsaka »Situacija« mora na začetku vsebovati situacijo iz vsakdanjega življenja, na katero se potem nanašajo trije primeri nalog, podkrepljeni z ustrezno teorijo.
Naloge, ki se nanašajo na dano situacijo, naj bodo iz različnih matematičnih vsebin. Teoretična vprašanja lahko najdete v poljubni literaturi, primerni za poklicno maturo.
Naloge naj bodo jasno in ustrezno zastavljene.

Oddaja »Situacije«
Pisni izdelek oddajte do 14. marca 2016. Zamuda se upošteva pri oceni.

Oblikovanje »Situacije«
Pisan in tiskan naj bo izdelek v pisavi Times New Roman, velikost pisave 12pt, velikost tiska A4.
Naslov situacije naj bo pisan z velikimi tiskanimi **KREPKIMI** črkami.
Situacija naj bo pisana z malimi tiskanimi **krepkimi** črkami.
Teoretični del naloge naj bo pisan z navadnimi malimi tiskanimi črkami.
Primer, ki pripada posamezni nalogi, pa naj bo pisan z malimi tiskanimi *ležečimi* črkami.
Situacija mora biti na drugem A4-papirju tudi rešena (lahko tudi ročno), tako teoretični del kot tudi primeri.

Upoštevanje navodila o oblikovanju vpliva na oceno oceni.
Pazite na jezikovno pravilnost oddanega izdelka, le-ta se upošteva pri oceni.

Če boste uporabili kakšno sliko (ki je priporočljiva zaradi pestrosti izdelka) s spleta, morate pod njo navesti njen vir.

Naslovnica
Naslovnica je obvezen del pisnega izdelka. Vsebuje naj logotip šole (zgoraj na sredini) in pod njim mora pisati *PREDŠOLSKA VZGOJA.* Na dnu strani morajo biti navedeni v levem kotu datum in kraj nastanka izdelka, v desnem kotu pa ime in priimek avtorja ter razred.

Ocenjevanje »Situacije«

0–44 % = *nzd (1)*	45–60 % = *zd (2)*	61–75 % = *db (3)*	76–89 % = *pdb (4)*	90–100 % = *odl (5)*

Kriterij	Točke
Pravočasnost oddaje	0 ali 1 točka
Oblika naslovnice	0 ali 1 točka
Jezikova pravilnost pisnega izdelka	0 ali 1 točka
Vsebina	Od 5 do 0 točk, odvisno od: • ustreznosti nalog glede na situacijo; • pravilnosti danih vsebin; • pestrosti/različnosti nalog, ki se nanašajo na situacijo; • ustreznosti primera glede na teoretični del naloge.
Oblikovanje pisnega izdelka	Od 3 do 0 točk Upoštevanje podanih *Navodil za oblikovanje projektne naloge*.
Rešitev »Situacije«	Od 3 do 0 točk: 0 točk – nobena naloga ni pravilna; 1 točka – 1 naloga je pravilna; 2 točki – 2 nalogi sta pravilni; 3 točke – vse tri naloge so pravilne.

PRILOGA 2

Srednja šola Veno Pilon
Ajdovščina

PREDŠOLSKA VZGOJA

SKAKANJE PO LUŽAH

Zunaj je deževalo. Mali Leon je zelo rad skakal po lužah, zato se je primerno oblekel in odšel ven.

VIR: http://images.24ur.com/media/images/600xX/Sep2012/61022566.jpg?e3bc

1. Kdaj je zaporedje aritmetično? Zapišite splošni člen in obrazec za vsoto prvih n členov.
Primer: Prva luža, ki jo je opazil Leon je bila globoka 2cm. Vsaka naslednja je bila za 3cm globlja. Koliko so bile globoke naslednje štiri luže in kakšna je bila globina vseh petih luž skupaj?

2. Kdaj sta dve količini premo in kdaj obratno sorazmerni?
Primer: V štirih minutah pade 5ml dežja na kvadratni meter. Koliko dežja pade v ¾ ure?

3. Kaj je krog? Zapišite formuli za izračun njegovega obsega in površine.
Primer: Leonu je na dlan padla dežna kaplja, ki je naredila obliko kroga s premerom 3cm. Izračunajte površino dežne kaplje na dve decimalki natančno.

Koseč, 5.3.2016

Anja Medved, 4.č odl (5)

SKAKANJE PO LUŽAH (rešitve)

1) Zaporedje je aritmetično, ko je razlika dveh zaporednih členov vedno enaka - - konstantna.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ $\quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1) \cdot d)$

PRIMER: $a_1 = 2cm$
$d = 3cm$

$a_2 = ?$
$a_3 = ?$
$a_4 = ?$
$a_5 = ?$
$S_n = ?$

$a_2 = a_1 + d$
$a_2 = 2 + 3$
$a_2 = 5cm$

$a_3 = a_1 + 2d$
$a_3 = 2 + 2 \cdot 3$
$a_3 = 2 + 6$
$a_3 = 8cm$

$a_4 = a_1 + 3d$
$a_4 = 2 + 3 \cdot 3$
$a_4 = 11cm$

$a_5 = a_1 + 4d$
$a_5 = 2 + 4 \cdot 3$
$a_5 = 14cm$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1) \cdot d)$
$S_5 = \frac{5}{2}(2 \cdot 2 + 4 \cdot 3)$
$S_5 = \frac{5}{\cancel{2}} \cdot \cancel{16}\, 8$
$S_5 = 40cm$

O: Naslednje 4 luže so bile globoke 5cm, 8cm, 11cm in 14 cm. Vse luže skupaj so bile globoke 40cm. ✓

2) Dve količini sta premosorazmerni, ko se ena količina k-krat poveča, se tudi druga količina k-krat poveča in ko se ena količina k-krat zmanjša, se tudi druga k-krat zmanjša.

Dve količini sta obratno sorazmerni, ko se ena količina k-krat poveča, se druga količina k-krat zmanjša in ko se ena količina k-krat zmanjša, se druga količina k-krat poveča.

PRIMER:
4min 5ml
45min .. X

$4x = 45 \cdot 5$
$4x = 225 /:4$
$x = 56{,}25ml$

O: V 3/4 ure pade 56,25ml dežja. ✓

3) Krog je geometrijski lik. Je množica vseh točk v ravnini, ki so od določene točke, središča kroga, oddaljene največ za polmer r. Krog omejuje krožnica (sklenjena krivulja). To je množica točk, ki so od središča oddaljene točno za polmer r.

$ob = 2\pi r \quad P = \pi r^2$

PRIMER: $r = 1{,}5cm$

$P = \pi r^2$
$P = \pi \cdot 1{,}5^2$
$P = \pi \cdot 2{,}25$
$P \doteq 7{,}07cm^2$

✓

Anja Medved, 4.č

VODENA RAZPRAVA PRI MATEMATIKI
Guided Discussion in Mathematics

Majda Škrinar Majdič, Irena Kovač Gregorčič
majda.majdic@gess.si, irena.gregorcic@gess.si
Gimnazija in ekonomska srednja šola Trbovlje

Povzetek
Na Gimnaziji in ekonomski srednji šoli Trbovlje pri matematiki že sedem let izvajamo drugačen način preverjanja in ustnega ocenjevanja znanja. Dijaki se nekaj tednov pred ocenjevanjem razdelijo v skupine po štiri in se v skupinah pripravljajo na ustno ocenjevanje. Individualno učenje nadgradijo z vrstniškim poučevanjem. Poiščejo različne vire, uporabijo različne pristope k učenju, pripravijo svoje primere in protiprimere in tako obdelajo dogovorjene teme. Potem v vodeni razpravi pokažejo svoje znanje. Učitelji spremljamo in usmerjamo razpravo in skrbimo za enakomeren prispevek vsakega dijaka. Vsak dijak na koncu oceni sebe in svoje sošolce. Pri tem upoštevamo dogovorjene kriterije in opisnike za posamezno oceno in skupaj oblikujemo končne ocene.

Tak način ocenjevanja pomembno spodbuja timsko delo, odgovornost za lastno znanje in znanje vrstnikov ter krepi odgovornost do učenja in znanja.

Abstract
For seven years, we have been conducting a different form of oral testing and assessing of Mathematics in GESŠ Trbovlje. The students are divided into groups of four some weeks before the testing to have time to prepare for it. Individual learning is upgraded by peer teaching. The students find various sources, use various learning strategies, prepare their own examples and counterexamples and in this way deal with the problem. Afterwards they show their knowledge in a guided discussion. The teachers follow and direct the discussion to provide equal contribution from each student. Each student assesses his performance as well as the performance by other students. Agreed criteria and descriptors for each grade are used and final grade is agreed upon mutually.

This type of assessing encourages teamwork, individual responsibility for the students' knowledge as well as knowledge of their peers, thus enhancing responsibility towards learning and acquiring knowledge.

Ključne besede
ustno ocenjevanje, vodena razprava, odgovornost za lastno znanje

Keywords
Oral assessing, guided discussion, responsibility for knowledge

Predstavitev vodene razprave kot načina ustnega ocenjevanja

Potrebe po drugačnem ocenjevanju

Klasično ustno ocenjevanje pri matematiki, ko je vprašan in ocenjen posamezen dijak, nam povzroča precej slabe volje zaradi izogibanja ocenjevanju, pomislekov glede objektivnosti, neenakih pogojev za vse dijake. Priprave na ocenjevanje so pogosto v zadnjem hipu, vprašanja so ozka, še bolj odgovori. Včasih s podvprašanji »vlečemo«

odgovore in nekontrolirano razširjamo čas, namenjen ocenjevanju. To smo želeli spremeniti, hkrati pa smo želeli dijake vključiti tudi v proces načrtovanja preverjanja znanja pred ocenjevanjem in spodbuditi vrstniško poučevanje ter povečati odgovornost dijakov za lastno učenje in znanje. Vse bolj se zavedamo načel nove kulture preverjanja in ocenjevanja znanja in širine pojma znanja. Znanje ni le nabor vsebin, ampak tudi skupek spretnosti, veščin, razumevanje naučenega, predstavljanje idej in ugotovitev, ustrezna in spretna uporaba virov, kritičnost, ustvarjalnost (Rutar Ilc, 2004).

Pomembni koraki pred vodeno razpravo – najpomembnejša faza
Dijake smo že v prvem letu uvajanja novega načina ocenjevanja vključili v skupno oblikovanje kriterijev, zdaj pa sodelujejo tudi pri izboru učnih tem za ocenjevanje (Škrinar Majdič, 2014).
Močno jih spodbujamo, da preverjajo svoje znanje v skupini, se vrstniško poučujejo, razvijejo večjo odgovornost in večjo kritičnost do lastnega znanja in znanja sošolcev. Vsaka nova generacija nam potrjuje, da vrstniško skupinsko ocenjevanje močno prispeva k presoji dela drug drugega in k merilom, po katerih ocenjujejo, kar je lahko izjemno dragoceno pri ocenjevanju ustvarjalnega dela (Ken Robinson, 2015).
V prvih treh letnikih gimnazije so dijaki enkrat v šolskem letu ocenjeni z vodeno razpravo, enkrat pa »klasično«. Pri naši novi obliki ocenjevanja se sami razporedijo v skupine po 4, skupaj določimo teme in datume ocenjevanja. Termine postavimo februarja in jih določimo za april in maj. V prvem letniku poskrbimo, da so dijaki seznanjeni s kriteriji ocenjevanja, da skupaj pregledamo posamezne kriterije in opisnike za določeno oceno, da razčistimo morebitne nejasnosti in dileme. Skupaj s prvošolci si pogledamo videoposnetek ustnega ocenjevanja, ga analiziramo, vrednotimo znanje posameznih dijakov na posnetku. V višjih letnikih lahko ta korak izpustimo, saj imajo dijaki že »prakso«.

Vsakoletna evalvacija ocenjevanja je pokazala, da so nekatere teme za takšen način ocenjevanja bolj primerne kot druge. Tako je v prvem letniku zelo primerna tema statistika, kjer dijaki lahko na svojih primerih pokažejo poznavanje osnovnih pojmov, prikazovanje podatkov, presojajo primernost določenih prikazov, na različne načine »obdelajo« podatke, uporabljajo različne vire. Tudi tema potence in algebrski izrazi omogoča širok pregled matematičnih pojmov, pester nabor različnih izrazov, primerov in protiprimerov uporabe in izpeljave formul. Dijaki lahko pokažejo poznavanje in razumevanje vseh operacij z izrazi, svoje spretnosti, veščine. V drugem letniku so primerna tema: vektorji, kjer lahko pokažejo obvladovanje dokazov z vektorji in gradijo povezave s fiziko. Zelo dobro se dijaki pripravijo tudi na temo funkcije in njihove lastnosti, kjer nas s svojimi primeri prepričajo, kako dobro poznajo lastnosti funkcij, kaj imajo določene funkcije skupnega, v čem se razlikujejo, kako obvladajo premike, raztege funkcij. V tretjem letniku lahko zelo dobro obdelamo geometrijska telesa, saj dijaki izdelajo lastne modele, iščejo podobnosti, razlike, osmislijo merjenje v ravnini in prostoru s primeri iz vsakdanjega življenja.

Potem ko določimo skupine in termine, se dijaki individualno in skupinsko pripravljajo na ocenjevanje (poznavanje kriterijev, vrstniško poučevanje, iskanje virov). To je najpomembnejša faza novega modela, saj se z vrstniškim poučevanjem spodbujajo, močno razvijajo kompetenco učenje učenja (VŽN-metoda, miselni vzorci), poiščejo pomoč učiteljev, tutorjev. V tej fazi sodelujejo, si dajejo pomembne medsebojne informacije, vrednotijo dosežke in se spodbujajo.

Slika 1: Vrstniško poučevanje ob izdelanih geometrijskih modelih

Pred ocenjevanjem izvedemo poskusno ocenjevanje (vsi dijaki, ki niso v vlogi izprašanega, so soocenjevalci). Ob poskusnem ocenjevanju razrešimo morebitne nejasnosti glede globine in širine tem, poznavanja kriterijev. Dijaki dobijo povratno informacijo, naredijo refleksijo svojega dela in načrt izboljšav do »zaresnega« ocenjevanja. Povratna informacija zmanjša možnost nesporazumov in okrepi učenje (Eržen, 2014).

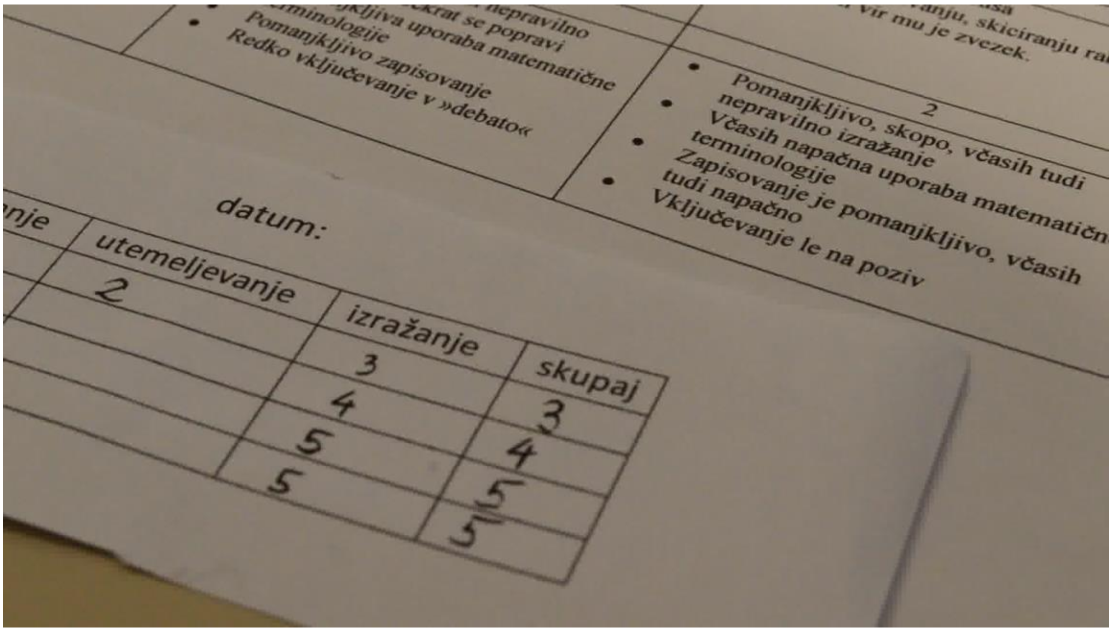
Ocenjevanje

Skupaj z dijaki smo podrobno dodelali protokol ocenjevanja (Škrinar Majdič, 2014). Dijaki sedijo skupaj z dvema učiteljema ocenjevalcema. S seboj imajo vse dovoljene pripomočke. Razpravo začne učitelj ali pa eden od dijakov.

Slika 2: Drugošolci razpravljajo o podobnosti.

Ena tema je v naprej dogovorjena, drugo izžrebajo med vnaprej dogovorjenima možnostma (ena obvezna tema + dve izbirni). Preostali dijaki oddelka so poslušalci ali dobijo zaposlitev (če poteka ocenjevanje med redno uro). Vsi sodelujoči skrbno spremljajo izvajalca, ga dopolnjujejo, popravljajo, dodajo svoja spoznanja. Učitelj usmerja pogovor, nadzoruje prispevek posameznega dijaka, pomaga pri zapletih, spodbuja poglabljanje, skrbi za časovno omejitev. Skupina štirih dijakov razpravlja predvidoma 40 minut, nato vsi kandidati anonimno ocenijo sebe in vse preostale v skupini ter ocene zapišejo v preglednico.

Prispevek posameznih dijakov ocenita tudi oba učitelja. Na koncu oblikujemo skupno oceno za vsakega izmed štirih »nastopajočih«.



Slika 3: Oblikovane so končne ocene za vsakega od 4 dijakov.

Dijaki po takem ocenjevanju ugotavljajo:

- ob takem ocenjevanju oziroma pripravi nanj ne obupamo tako hitro kot sicer,
- učenje je bolj učinkovito in zabavno,
- z opisnimi kriteriji si pomagamo že v fazi učenja,
- nov način zahteva več poglobljenega in odgovornega učenja in le-to je bolj naporno,
- dobro je za trajnost znanja in je lahko dobra priprava na maturo,
- smo bolj kritični do lastnega in sošolčevega znanja,
- ocenjevanje sošolcev in samega sebe je zelo zahtevno,
- včasih je v timu kar naporno usklajevati termine, želje, delo (kar je odlična izkušnja za nadaljnje timsko delo tudi na drugih področjih),
- takšen način ocenjevanja bi bil odličen pri drugih predmetih (ZGO, PSI, GEO).

Učitelji ugotavljamo, da dijaki:

- razvijejo večjo samostojnost pri učenju (sami poiščejo vire, sami izberejo različne predstavitve),

- razvijejo večjo kritičnost do svojega učenja (učiti se začnejopravočasno, se ne zadovoljijo le s poznavanjem vsebin, ampak težijo k doseganju višjih taksonomskih ravni),
- razvijajo samoiniciativnost za iskanje pomoči pri profesorju, sošolcih, tutorjih,
- prevzamejo odgovornost za svoje učenje (ni opravičevanj),
- z razlaganjem in podporo vrstnikom pridobijo bolj poglobljeno znanje,
- z medsebojno podporo in spodbudo izboljšajo svojo motivacijo za učenje,
- s povratnimi informacijami v fazi priprave na ocenjevanje oblikujejo jasnejša pričakovanja v zvezi s kakovostjo usvojenega znanja,
- razvijejo večjo (samo)kritičnost do usvojenega znanja in se naučijo objektivneje presojati kakovost usvojenega znanja (svojega in svojih sošolcev – zelo malo odstopanj od ocen učiteljev).

Razveseljivo je tudi, da ni izogibanj ali opravičevanj pred ocenjevanjem, kar pomembno vpliva na dobre odnose med učitelji in dijaki pa tudi med samimi dijaki. Prav tako v vseh letih ni bilo nobenih pritožb (ne dijakov ne staršev).
Učitelji, ki pri novem modelu ocenjevanja sodelujemo kot ocenjevalci, smo zelo povezani, učimo se ocenjevanja drug od drugega, se dopolnjujemo, postanemo pravi kritični prijatelji. Te naše skupne aktivnosti so dobra priprava na ustno ocenjevanje na maturi, kjer delujemo zelo usklajeno.

Tak način ocenjevanja je prispeval k temu, da dijaki objektivneje presojajo lastno znanje in znanje sošolcev tudi pri drugih predmetih. Tako se posledično razvijajo v kritične državljane. Pomembno se razvijata kompetenca učenje učenja, saj uporabljajo različne strategije učenja, in socialna kompetenca, saj skupina skrbi za napredek vsakega posameznika. Z vsem tem smo precej dobro uresničili smernice in cilje posodabljanja učnih načrtov (Smernice, 2007).

Ugotovili smo tudi pomemben vpliv na uspešnost pri pisnih nalogah, ki so jih dijaki pisali po takem ocenjevanju. Tudi primerjava ocen na maturi kaže, da imajo generacije, ki so bile deležne takega načina preverjanja in ocenjevanja, boljše rezultate pri matematiki na maturi.

Posebej sva veseli, da je tak način preverjanja in ocenjevanja zaživel tudi pri drugih predmetih – zelo uspešno pri psihologiji. S tem spreminjamo kulturo preverjanja in ocenjevanja na naši šoli.

Ob vseh prednostih, ki jih ponuja novi način ocenjevanja, želiva opozoriti na nekaj težav, ki se pojavljajo vsako leto in jih rešujemo sproti. To so težave s postavljanjem terminov in zagotavljanjem prisotnosti dveh učiteljev ocenjevalcev. Še vedno nam uspe zagotoviti dva učitelja v prvem in drugem letniku, v tretjem letniku pa je običajno ocenjevalec eden. To rešujemo s termini ocenjevanj zunaj rednih ur pred poukom in po njem, ob čemer pazimo, da dijaki ne presegajo predpisanega števila ur pouka v tednu. Na začetku smo imeli tudi nekaj težav z izborom primernih tem za vodeno razpravo. Občasno so nekateri dijaki še vedno preveč ali premalo kritični (malce navijaški zlasti do svojih dobrih prijateljev). Z argumenti razrešimo tudi te zagate. Zgodi se tudi, da kaka skupina enostavno ni kompatibilna – ne najdejo terminov za skupno pripravo na ocenjevanje, želijo si kar razdeliti učne teme, posledično je razprava »skromna«, brez argumentov, povezav in dodane vrednosti.

Ugotovitve po sedmih letih izkušenj
Cilje, ki smo si jih postavili na začetku snovanja novega načina ustnega ocenjevanja– **večja odgovornost za znanje, več povezanega in poglobljenega znanja, optimalen napredek vsakega dijaka, večja aktivnost dijaka, manj stresa** –, smo realizirali pri veliki večini dijakov. To dokazujejo zadovoljstvo dijakov in učiteljev, ki ga merimo z anketnim vprašalnikom, boljši uspeh pri pisni nalogi po takšnem ustnem ocenjevanju, večja trajnost znanja, kar zaznamo v naslednjih letnikih, pa tudi boljši uspeh na maturi tistih, ki so bili deležni novega načina ocenjevanja, v primerjavi z generacijami, ki takšnega načina še niso imele.

Z novim načinom ocenjevanja smo zadovoljni vsi učitelji matematike in veliko dijakov. Z modelom novega, drugačnega načina ustnega ocenjevanja utiramo pot spremembam na tem področju in dajemo pogum preostalim, da se lotijo sprememb. Aktivnosti pred ocenjevanjem in med njim povežejo učitelje matematike in dijake ter dijake med seboj, kar pomembno vpliva na boljše odnose. Vsi kolegi (učitelji preostalih predmetov) so spremljali proces uvajanja novega načina (predstavitve z videoposnetki) in nekateri so bili navzoči pri ocenjevanju kot opazovalci. Naše izkušnje so jih spodbudile, da poskušajo naš model vpeljati tudi pri svojem predmetu.

Izzivi za prihodnost
Nov način ocenjevanja želimo vpeljati pri večini predmetov.
Razmišljanja za naprej pa so bolj drzna. Ker je najpomembnejši korak takšnega ocenjevanja narejen že pred ocenjevanjem, v fazi priprave, ko se dijaki vrstniško poučujejo, ko jim dajemo in si dajejo povratne informacije, ko so kritični do lastnega znanja in znanja sošolcev, razmišljamo o popolnoma vrstniškem ocenjevanju brez prisotnosti učitelja. Dokaz pristnosti in verodostojnosti ocen, ki bi si jih dali, bi bil lahko videoposnetek vodene razprave.

Viri

1. Eržen, V. (2014): Povratna informacija za uspešnejše učenje. Vzgoja in izobraževanje, letn. 45, št. 5-6, str. 28–31.
2. Robinson, K. (2015): Kreativne šole. Eno, Nova Gorica.
3. Rutar Ilc, Z.(2004): Pristopi k poučevanju, preverjanju in ocenjevanju znanja. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
4. Smernice, načela in cilji posodabljanja učnih načrtov (2007). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo: http://www.zrss.si/default.asp?link=predmet&tip=42&pID=164&rID=1466 (21. 1. 2010).
5. Škrinar Majdič, M. (2014): Gimnazija in ekonomska srednja šola Trbovlje: Priprava na ocenjevanje in ocenjevanje z vodeno razpravo. Zbornik prispevkov dobre prakse. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo: http://www.zrss.si/pdf/PKP-poskus-gimn-zbornik-prispevkov.pdf 1 (1. 7. 2013).

OD MATEMATIČNE PISMENOSTI DO MEDPREDMETNEGA POVEZOVANJA

STEM-POVEZOVANJE V SLOVENSKEM IZOBRAŽEVANJU
STEM Connection in Slovenian Education

Dr. Andreja Drobnič Vidic
andreja.drobnic@fmf.uni-lj.si
Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

Povzetek
V prispevku ugotavljamo, kako učitelji v slovenskem šolskem sistemu povezujejo predmete naravoslovja, tehnike, inženirstva in matematike, ki se v svetu pod kratico STEM povezujejo skupaj kot novost oziroma trend v izobraževanju. Predstavimo nekaj primerov STEM-povezovanja z realnimi uporabnimi problemi v slovenskem šolstvu. Prek izvedene raziskave učiteljev tehniških gimnazij ugotovimo, da se pri STEM-povezovanju aktivnosti in stališča učiteljev naravoslovja in matematike na eni strani ter tehnologije in stroke na drugi precej razlikujejo.

Abstract
In the last two decades STEM education has become very popular. Taking into account a definition of STEM as educating students in Science, Technology, Engineering and Mathematics in an interdisciplinary approach based on real-world applications, we try to find such education practices in Slovenian school system. Using Engineering Education Beliefs and Expectations Instrument for teachers of technical gymnasiums that teach all STEM subjects and prepare students for tertiary education we find out that there are many activities regarding STEM education. However, we indicate differences in the level of properness and in wishes for such activities between mathematics/science teachers and technology-based/engineering teachers.

Ključne besede
STEM-izobraževanje, stališča učiteljev, realni problemi

Keywords
STEM education, teachers' beliefs, real-world problems

STEM-izobraževanje pri nas in po svetu
V ameriškem izobraževalnem sistemu je bilo v zadnjem desetletju zaslediti porast prispevkov, povezanih s STEM-izobraževanjem (Science, Technology, Engineering, Mathematics), ki povezuje učenje naravoslovja, tehnologije, inženirstva in matematike, saj je le-to tudi finančno podprto s strani države (Henderson, Beach, Finkelstein, 2011). Tudi Združenje učiteljev matematike (National Council of Teachers of Mathematics – NCTM) je podprlo STEM-iniciativo, da bi omogočilo kontinuirano financiranje STEM-programov, zaposlitev visoko kvalificiranega kadra za STEM-discipline in da bi se povečalo število vpisnih mest za izobraževanje na teh področjih (Shaughnessy, 2012).

Vendar je takratni predsednik NTCM Shaughnessy poudaril, da se v združevanju STEM-disciplin matematiko izrablja v smislu krčenja matematičnih vsebin na račun preostalih omenjenih področij, da je premalo konkretnih projektov, ki bi predstavili obliko, kakovost in prednosti STEM-izobraževanja in ki bi izpostavili matematiko kot temeljno disciplino, od katere je odvisno učenje preostalih disciplin v prvih dvanajstih letih šolanja (Shaughnessy, 2012). Prav ta neenak položaj povezovanja STEM-disciplin lahko privede do težav pri konkretnih STEM-projektih, predvsem pri usklajevanju nalog učiteljev različnih disciplin (Drobnič Vidic, 2016a).

Čeprav kratica STEM postaja floskula za finančno podporo projektov na področju izobraževanja, je ideja o interdisciplinarnem izobraževanju učencev v štirih disciplinah: naravoslovju, matematiki, tehnologiji in inženirstvu na osnovi realnih aplikativnih problemov del marsikatere uspešne pedagoške prakse v svetu (Han, Capraro, Capraro, 2014; English, Mousoulides, 2015). V evropskem prostoru se STEM-izobraževanje povezuje z »učenjem matematike v realnem kontekstu« (RME – Realistic Mathematics Education), ki je uveljavljeno na Nizozemskem in v Angliji (Gravemeijer, 1994), z »inženirsko didaktiko« (DE – Didactic Engineering), kjer avtorja Artigue in Perrin-Glorian (1991) poudarjata učenje matematike po korakih, značilnih za inženirsko stroko, in z modeliranjem, med drugim izpostavljenim v Nemčiji. In kakšno je STEM-izobraževanje in povezovanje teh disciplin v našem izobraževalnem sistemu?

V Sloveniji kratice STEM ne zasledimo pogosto. Če se namreč omejimo na slovenske zadetke STEM-izobraževanja ali učenja, jih je na spletnih portalih malo. Vzrok je v tem, da se namesto tuje kratice STEM v slovenskem osnovnošolskem in srednješolskem izobraževanju uporablja kratica NAMA. Ta kratica v svojem imenu poudarja povezovanje naravoslovja in matematike (NA-MA), saj naj bi v osnovnem in srednjem šolstvu tehnologije in inženirskih vsebin ne poučevali pri samostojnih predmetih. Povezovanje matematike in naravoslovja vzpodbujajo tako učni načrti (Učni načrt za gimnazije, 2015) kot mednarodni projekti, na primer SCIENTIX, v katere je vključena tudi naša država (Bačnik, Banko, Bone, Slavič, Moravec, Krajnc, 2016).

V prispevku se osredotočamo na povezovanje vseh štirih disciplin, tako naravoslovja, tehnologije, inženirstva kot matematike, ki so na nivoju srednješolskega izobraževanja zastopane v kurikulu (bio)tehniških gimnazij v celoti. Ker nas zanima predvsem odnos povezovanja naravoslovno-matematičnih disciplin z disciplinami tehnologije in inženirstva, ohranjamo kratico STEM, saj v kratici NAMA ni poudarjen vidik tehnologije in inženirstva.

Primeri STEM-povezovanja v slovenskem izobraževalnem sistemu

V Sloveniji zasledimo združevanje matematike, naravoslovja, tehnologije in inženirstva z realnimi aplikativnimi projekti, četudi morda STEM-povezovanje ni posebej omenjeno in izpostavljeno. Eden takih projektov je bil 4-letni projekt tehniške gimnazije Novo mesto z naslovom *Energija kot vrednota*, v katerem so se povezali učitelji vseh štirih področij in tudi širše. Vsako leto so učitelji matematike, kemije, fizike, biologije, informatike, strokovnih predmetov in angleščine izbrali skupno temo v povezavi z energijo in pri svojih predmetih in razlagi snovi uporabili probleme, ki so predstavili izbrano tematiko. Tako so učenci dobili vpogled na varčno rabo energije, na energijske spremembe, na energijo v prometu in na zmanjšanje rabe energije iz različnih perspektiv (Drobnič Vidic in Pustavrh, 2009).

Zelo uspešna je bila ekipa gimnazijcev iz različnih slovenskih gimnazij s projektom o biogorivih, saj so leta 2015 zasedli so prvo mesto na svetovni ravni (Delo, 29. 9. 2015). Tudi v okviru gimnazijskih modulov mladi ponekod obravnavajo aktualne inženirske probleme, kot je varovanje okolja, četudi niso sestavni del šolskega kurikula. Rešujejo jih ob pomoči učiteljev naravoslovja, informatike, matematike in morda geografije.

Realni projekti, ki združujejo vse STEM-discipline, so značilni za terciarno izobraževanje na področju naravoslovja in inženirstva. Ker pa je študij v Sloveniji večinoma izveden s predmetnikom po posameznih disciplinah, je tudi na tem nivoju zahtevno izpeljati projekte, ki zahtevajo znanje vseh STEM-disciplin. Kot zgled predstavimo projekt, zastavljen študentom začetnikom in bodočim inženirjem tehniške varnosti, ki so bili na začetku študijske poti z ne več kot srednješolskim predznanjem s področja matematike, naravoslovja, tehnologije in inženirstva. Ob predstavitvi projekta in njegovega reševanja opozorimo tudi na težave učencev in učitelja, ki je projekt pripravil.

OPREMLJENOST IN VZDRŽEVANJE GASILNIKOV V OBJEKTIH PO SLOVENIJI
Vprašalnik o opremljenosti in vzdrževanju gasilnikov je oblikovan z namenom, da ugotovimo stanje opremljenosti objektov z gasilniki po Sloveniji in kakovost njihovega vzdrževanja. Ali lahko na podlagi vzorca ugotovimo, da požarna opremljenost objektov zadošča predpisanim standardom? Ali menite, da je vzdrževanje odvisno od ustrezne opremljenosti objektov? (Drobnič Vidic, 2016b)

Na kratko povzemimo aktivnosti, ki so jih mladi morali izvesti za rešitev zastavljenega projekta. Z anketiranjem skrbnikov izbranih objektov po Sloveniji so pridobili podatke, ki so bili zahtevani v vprašalniku. Vprašalnik je sestavil učitelj matematike ob pomoči učitelja inženirstva. Za različne vrste 208 objektov po Sloveniji so učenci na podlagi *Pravilnika o izbiri in namestitvi gasilnih aparatov* ugotovili, katere podatke potrebujejo za določanje teoretičnega minimalnega potrebnega skupnega števila enot gasila (teoretični EG) za posamezen objekt. Potrebno je bilo določeno inženirsko znanje za pravilno branje pravilnika in izbiro podatkov, ki so potrebni za izračun teoretičnega EG. Ta je odvisen od vrste objekta (torej od dejavnosti, s katero se v objektu ukvarjajo) ter kemijskih in fizikalnih lastnosti materialov, ki jih proizvajajo ali shranjujejo v objektu (od katerih je odvisna stopnja požarne nevarnosti), in fizikalnih lastnosti objekta (površina, razpored prostorov, velikosti objekta). Na podlagi tabel v pravilniku, kot je na primer tabela pod sliko 1, so učenci izpeljali formule za izračun teoretičnega EG za posamezno vrsto objekta.

Površina do (m2)	Enot gasila (EG)		
	majhna	srednja	velika
50	6	12	18
100	9	18	27
200	12	24	36
300	15	30	45
400	18	36	54
500	21	42	63
600	24	48	72
700	27	54	81
800	30	60	90
900	33	66	99
1000	36	72	108
na vsakih nadaljnjih 250	6	12	18

Priloga 2: pravilnik o izbiri in namestitvi gasilnih aparatov

…Izpeljava formul iz priloge:

Prostori površine X z nizko nevarnostjo površine do 1000 m²: teoEG =3X/100+6

nad 1000 m²: teoEG =6 (X-1000)/250+36

Prostori skupne površine Y srednjo nevarnostjo:

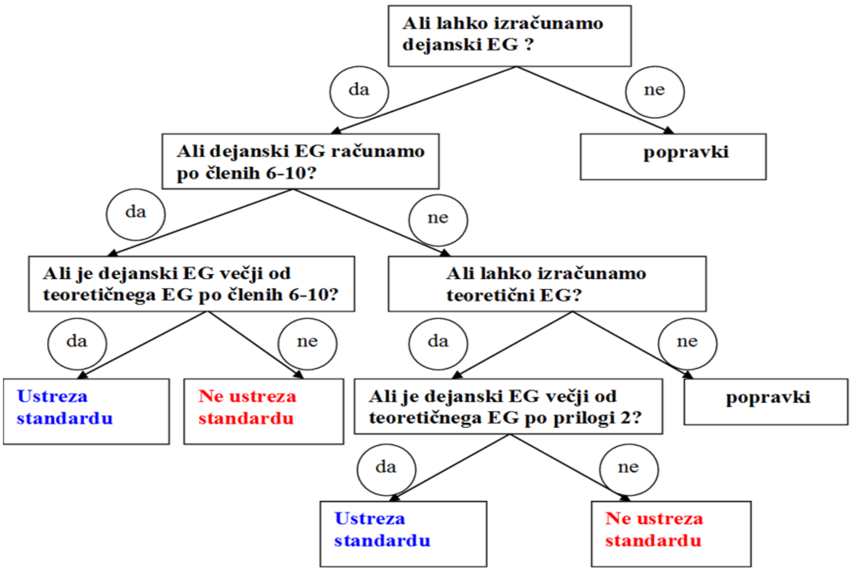
teoEG =6Y/100+12 površine do 1000 m²

teoEG =12 (Y-1000)/250+72 nad 1000 m²

…je naloga učencev.

Slika 1: Priloga Pravilnika o izboru in namestitvi gasilnih aparatov za izračun potrebnega števila enot gasila pri objektih z majhno, srednjo in veliko požarno ogroženostjo

Na podlagi podatkov o opremljenosti objektov z elementi požarne zaščite so mladi določili dejansko število enot gasila za posamezen objekt (dejanski EG), ki seveda ni odvisno le od števila gasilnikov, ampak tudi od gasilne sposobnosti in kemijskih lastnosti gasilnikov in drugih naprav za požarno zaščito. Pri določenih podatkih gasilnikov so morali uporabiti znanje kemijskih lastnosti medijev v gasilnikih, kot so voda, prah, ogljikov dioksid in pena, da so lahko na podlagi standarda pravilno določili dejanski EG in ga primerjali s teoretičnim EG pri posameznem objektu. Razsevni diagram in naklon prilegajoče regresijske premice sta jima bila lahko v pomoč za splošno določanje kakovosti opremljenosti objektov po Sloveniji. Ker pa je bilo objektov veliko, je bila izvedena izpeljava algoritma na sliki 2 s programskim paketom Excel za avtomatično določanje ustrezne opremljenosti objekta na podlagi standarda.



Slika 2: Algoritem za avtomatsko določanje ustrezne opremljenosti objekta

Nazadnje so učenci uporabili pridobljeno znanje statistike, da so odgovorili na zastavljena vprašanja. Analiza je pokazala, da je ustreznost namestitve gasilnikov glede na standard odvisna od tega, ali so objekti javni, torej obravnavani po členih od 6 do 10 v pravilniku, ali gre za industrijske, obrtne, upravne ali trgovske objekte (χ^2 = 8,9427, p = 0,003). Dalje so učenci ugotovili, da ni razlike v vzdrževanju med objekti, ki ustrezajo standardu, in tistimi, ki standardu ne ustrezajo (χ^2 = 0,129, p = 0,719).

Projekt je zahteval izpeljavo empirične raziskave, ki je zahtevala znanje vseh STEM-disciplin:

- znanje matematike z elementi statistike za pridobivanje podatkov o opremljenosti objektov iz vzorca, urejanje in obdelavo podatkov,
- inženirsko znanje za branje standardov ter za preoblikovanje podatkov o opremljenosti in požarni ogroženosti,
- znanje matematike za določanje formul na podlagi standardov ter izračun teoretičnih zahtev o opremljenosti objektov,
- znanje kemije in fizike za določanje stopnje opremljenosti in požarne nevarnosti objektov,
- znanje tehnologije za algoritmično preverjanje opremljenosti objektov,
- novo pridobljeno znanje statistike za analiziranje podatkov dveh spremenljivk, interpretacijo in predstavitev rezultatov.

Pri izvedbi takih projektov v šolstvu pogosto nastopijo težave a) v ocenjevanju, b) v časovni neusklajenosti obravnave snovi pri predmetih in c) v časovni potratnosti.

a) Pri kompleksnejših projektih navadno sodeluje več učencev v skupini, ki ne prispevajo vsi enak delež k izvedbi in rezultatom. Težave se zato pojavijo pri oceni posameznika znotraj skupine. Seveda je potrebna dovolj majhna skupina, kar posledično pomeni več različnih problemov za več skupin v razredu, ki pa morajo biti glede težavnosti in zahtevanega znanja dokaj enakovredni. Podrobnejši opis take delitve dela in ocenjevanje je zapisan v Drobnič Vidic, 2010. Pri konkretnem projektu smo imeli le nekaj več kot 20 učencev v skupinah po dva, zato večjih težav z ocenjevanjem ni bilo; vsak par je dobil nekoliko prilagojen problem, ki je zahteval samostojno statistično analizo. Ocena je bila predvsem odvisna od izkazanega matematičnega oziroma statističnega znanja in ne znanja naravoslovja, tehnologije in inženirstva. Pri inženirskem izrazoslovju jim je ob branju standardov pomagal učitelj stroke, vendar inženirsko znanje v tem projektu ni bilo posebej ocenjeno, saj kot predmet pri študiju nastopi v višjih letnikih.
b) Časovna neusklajenost predmetov je pogosto težava pri izvajanju STEM-povezovanja v šoli. Snov drugih področij pogosto ni pravočasno obravnavana ali ni zapisana v ciljih predmetov, tako kot v našem primeru, ko je sistematično znanje o gorenju, gašenju in dinamiki požarov pridobljeno šele v višjih letnikih študija.
c) Projekt je od učencev in učitelja zahteval precej časa za izpeljavo. Učitelj matematike se je moral seznaniti z drugimi STEM-področji ter njihovo kurikularno obravnavo. Sestaviti je moral primerne variante projekta, vprašalnik in pomožno gradivo za izvedbo. Samostojno delo in aktivnosti zunaj pouka pričakujemo tudi od učencev, ki so bolj motivirani za delo, če jih področje zanima. Slednje je laže doseči na področju terciarnega izobraževanja, saj mladi sami izberejo področje študija.

Stališča učiteljev naravoslovja ali matematike in učiteljev s področja tehnologije ali stroke o STEM-povezovanju

Aktivnosti na področju STEM-povezovanja v (bio)tehniških gimnazijah, v katerih se srednješolci pripravljajo na študij naravoslovja in tehničnih strok, smo raziskali pred začetkom šolskega leta 2015/2016. Kurikul (bio)tehniških gimnazij vsebuje STEM-discipline v celoti:

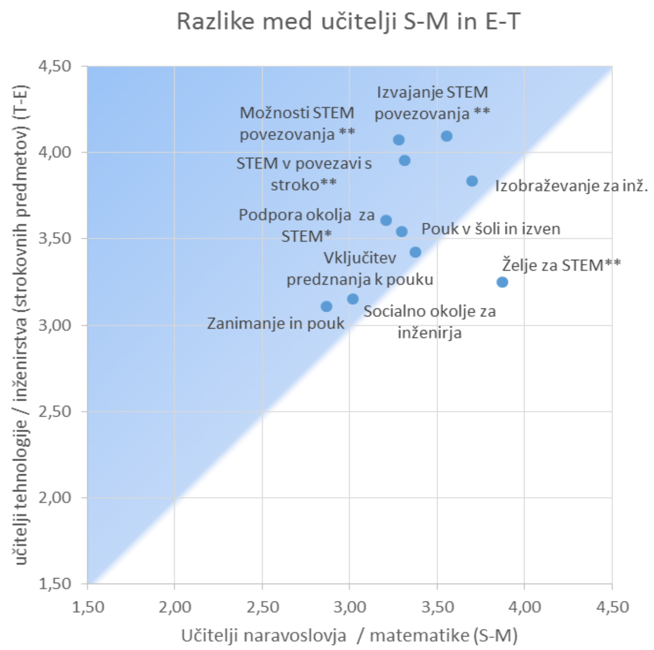
1. matematika (z elementi statistike),
2. naravoslovje (fizika, kemija, biologija),
3. tehnologija (informatika, računalniški sistemi in omrežja, biotehnologija …),
4. inženirstvo (strokovni predmeti: elektrotehnika, mehanika, gradbeništvo, elektronika …).

STEM-povezovanje vseh disciplin je v tem kurikulu zelo smotrno, saj je učencem teh gimnazij študij inženirstva, tehnologij, naravoslovja ali matematike posebej privlačen in se povezovanje tega znanja zahteva po opravljenem študiju v poklicu.

Uporabili smo uveljavljeni vprašalnik Engineering Education Beliefs and Expectations Instrument (EEBEI), ki je namenjen dokumentiranju učiteljevih stališč in pričakovanj o preduniverzitetnem izobraževanju na področju inženirstva, pripravi na kariero mladih na tem področju in primerjavi učiteljevih pogledov na STEM-izobraževanje (Nathan, Tran, Atwood, Prevost and Phelps, 2010). Prevedeni in dopolnjeni vprašalnik smo razdelili učiteljem STEM-predmetov na vseh enajstih (bio)tehniških gimnazijah v Sloveniji in analizirali odgovore z desetih področij, povezanih s STEM-izobraževanjem.

Odgovore na vprašanja s 5- ali 7-stopenjsko lestvico stališč je podalo 80 učiteljev desetih (bio)tehniških gimnazij (64 % žensk in 36 % moških) s povprečno 20 leti poučevanja. Med njimi je bilo 49 učiteljev naravoslovnih predmetov ali matematike (skupina S-M) ter 31 učiteljev s področij tehnologije ali stroke (skupina E-T). Če so učitelji poučevali na več področjih, so izbrali področje in predmet, na katerega so se nato nanašali odgovori.

Rezultati sklopov vprašanj kažejo, da učitelji E-T na njihovi (boi)tehniški gimnaziji vidijo večjo povezanost matematike, naravoslovja in tehnologije s stroko kot učitelji S-M. Učitelji E-T vidijo večjo podporo v šoli in bolj sodelujejo s šolo kot učitelji S-M. Obe skupini učiteljev se statistično značilno razlikujeta v odgovorih na vse tri dodatne sklope v vprašalniku, razlike pa so statistično značilne pri stopnji značilnosti, manjši od 0,01. Če upoštevamo naravo vprašanj v teh sklopih, lahko rečemo, da učitelji E-T poročajo o večji angažiranosti za medpredmetno povezovanje in povezovanje predmetov s stroko kot učitelji S-M, a izražajo manj želja po izboljšanju povezovanja med predmeti in s stroko kot učitelji S-M. V drugih sklopih, prikazanih na sliki 3, razlike niso statistično značilne niti pri stopnji značilnosti 0,05.



Slika 3: Razlike v 5-stopenjskih odgovorih desetih sklopov vprašalnika med učitelji S-M in E-T

Od 80 učiteljev je 10 učiteljev odgovorilo, da poznajo kratico STEM, med njimi 8 učiteljev naravoslovja in matematike. Kljub temu da jim STEM-povezovanje teoretično morda ni dobro poznano, pa so učitelji S-M in E-T izpostavili precej aktivnosti medpredmetnega povezovanja oziroma povezovanja predmetov s stroko. V vprašalniku je 39 učiteljev izpostavilo vsaj eno aktivnost medpredmetnega povezovanja in 31 učiteljev povezovanje predmetov s stroko.

Sklep

Povezovanje matematike, naravoslovja, tehnologije in inženirstva v izobraževanju za mlade inženirje se zdi naravno, saj konkretni problemi na delovnih mestih, ki so povezana s tehnologijo in inženirstvom, zahtevajo uporabo matematike in naravoslovja za njihovo reševanje. Vendar je v šolskem sistemu, kjer discipline učimo ločeno in časovno neusklajeno, povezovanje pogosto težavno ali manj učinkovito. Pri učenju matematike s takšnim povezovanjem izpostavimo njeno uporabno vrednost, a hkrati lahko nevede nižamo raven matematičnega znanja, če porabimo preveč časa za nematematične vsebine.

Analiza je pokazala, da učitelji (bio)tehniških gimnazij delujejo na področju STEM-povezovanja, vendar se kažejo razlike v stališčih med učitelji naravoslovja in matematike na eni ter učitelji tehnoloških in strokovnih vsebin na drugi strani. Matematika in naravoslovje, kamor spadata fizika in kemija, so bazične discipline, ki spoznavajo in razlagajo svet okoli nas na primarni ravni, medtem ko sta tehnologija in inženirstvo disciplini, ki s pomočjo poznavanja sveta le-tega spreminjata. Uporaba bazičnih disciplin pri učenju tehnologije in inženirstva je naravna, medtem ko uporaba tehnologije in inženirstva pri učenju bazičnih disciplin ni nujna. Ta razlika se najbrž kaže tudi pri učenju in povezovanju teh disciplin, saj se kaže večja angažiranost v povezovanju pri učiteljih tehnologije in inženirstva kot pri učiteljih bazičnih vsebin.

Menim, da je STEM-povezovanje koristno pri učenju matematike, ker izpostavimo njeno uporabno vrednost, zato bi morali učitelji tehniških gimnazij svoje aktivnosti predstaviti, četudi so se soočali s težavami. Učinkovito je predvsem pri obravnavi statističnih vsebin, če le izvajanje realiziramo tako, da pri tem ne zmanjšamo časa, namenjenega osnovni obravnavi teh vsebin.

Viri

1. Artigue, M., Perrin-Glorian, M. (1991): Didactic engineering, research and development tool: Some theoretical problems linked to this duality. For the Learning of Mathematics, letn. 11, str.13–17.
2. Bačnik, A., Banko, J., Bone, J., Slavič, S., Moravec, B., Krajnc, R. (2016): Izobraževalni lističi Scientix NA-MA. ZRSŠ (Izlake: Grafex).
3. Drobnič Vidic, A. (2010): Assessment in problem-based learning incorporated into traditional engineering education: difficulties and evaluation. Int. J. Eng. Ed., letn. 26, št. 3, str. 554–563.
4. Drobnič Vidic, A. (2016a): Students' and teachers' difficulties in dealing with realistic tasks. Presented on 13th International Congress on Mathematical Education (ICME-13), 24-31 July 2016, Hamburg.
5. Drobnič Vidic, A. (2016b): Using a problem-based learning approach to incorporate safety engineering into fundamental subjects. J. Prof. Issues Eng. Educ. Pract., letn. 142, št. 2, str. 1–9 (http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)EI.1943-5541.0000264).
6. Drobnič Vidic, A., Pustavrh, S. (2009): Difficulties in teaching statistics in Slovenian secondary schools. Presented on the International Conference Applied Statistics, 20.–23. 9. 2009, Ribno – Bled.
7. English, L., Mousoulides, N. (2015): Bridging STEM in a real-world problem. Mathematics teaching in the middle school, letn. 20, št. 9, str. 532–539.
8. Gravemeijer, K. P. E. (1994): Developing realistic mathematics education. CDbeta press, Utrecht.
9. Han, S., Capraro, R., Capraro, M. (2014): How science, technology, engineering, and mathematics (STEM) project based learning (PBL) affects high, middle, and low achievers differently: The impact of student factors on achievement. Int J Sci Math

Educ, str. 1–25 (doi:10.1007/s10763-014-9526-0).
10. Henderson, C., Beach, A., Finkelstein, N. (2011): Facilitating change in undergraduate STEM instructional practices: An analytic review of the literature. J Res Sci Teach, letn. 48, št. 8, str. 952–984.
11. Nathan, M., Tran, N., Atwood, A., Prevost, A, Phelps, A. (2010): Beliefs and expectations about engineering preparation exhibited by high school STEM teachers. J Eng Educ, letn. 99, št. 4, str. 409–426.
12. Novi veliki uspeh slovenskih dijakov: z biogorivi do zlate medalje. Delo, 29. 9. 2015, http://www.delo.si/novice/okolje/z-biogorivi-do-zlate-medalje.html.
13. Shaughnessy, M. (2012): STEM – An advocacy position, not a content area. http://www.nctm.org/News-and-Calendar/Messages-from-the-President/Archive/J_-Michael-Shaughnessy/STEM_-An-Advocacy-Position,-Not-a-Content-Area/ (2. 2. 2012).
14. Učni načrti za gimnazije (2015). Dostopno na http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2015/programi/gimnazija/ucni_nacrti.htm.

TEORIJA GRAFOV V SREDNJEŠOLSKEM IZOBRAŽEVANJU

Graph Theory in Secondary Education

Jasmina Ferme, dr. Boštjan Brešar
jasmina.ferme@gmail.com, bostjan.bresar@um.si
Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Pedagoška fakulteta, Univerza v Mariboru

Povzetek
V prispevku navajamo razloge, ki podpirajo poučevanje teorije grafov, sicer novejše, a zelo uporabne veje matematike, v osnovnih in srednjih šolah ter podajamo primer obravnave nekaterih vsebin s tega področja v srednješolskem izobraževanju. Ta je namenjen predvsem gimnazijskim učiteljem, služi jim lahko za različne namene. Usmerjen je k uresničevanju splošnih ciljev in kompetenc, navedenih v učnih načrtih za matematiko v gimnazijskem izobraževanju, k uresničevanju nekaterih elementov matematične kompetence in drugih kompetenc ter k doseganju kakovostnega, trajnega znanja dijakov. Hkrati bi lahko prispeval k povečanju zanimanja dijakov za matematiko in poudaril vidike njene praktične uporabnosti.
Izvedli smo tudi raziskavo, ki pa ni zaznala večjega vpliva poučevanja teorije grafov na nivo znanja splošne matematike.

Abstract
By teaching graph theory in secondary (and primary) schools we can demonstrate the usefulness of mathematics to the students, and further motivate them for learning it. In this way we can realize some goals and competences listed in mathematical curriculum for secondary education.
We provide examples of discussions of some topics of graph theory in secondary education. They can be used for enrichment of teaching and studying process, preparations of projects, student research assignments, mathematical activities, etc.

Ključne besede:
teorija grafov, gimnazija, problemsko orientiran pouk.

Keywords
graph theory, secondary school, problem-oriented approach.

Uvod

Teorija grafov spada med novejša področja matematike. Eden izmed prvih znanstvenih zapisov kasneje razvite vede je članek iz leta 1741, ki ga je objavil znani švicarski matematik Leonhard Euler. V članku je predstavil formulacijo in rešitev problema sedmih mostov mesta Königsberg, enega izmed najbolj znanih problemov iz teorije grafov. Prvi slovenski znanstveni prispevki s tega področja so nastali ob koncu sedemdesetih let 20. stoletja. A kljub relativno poznemu razvoju danes teorija grafov velja za eno izmed najbolj prepoznavnih in v svetu uveljavljenih področij slovenske matematike.

Področje teorije grafov ima izjemno širok spekter uporabe. Izsledke te veje matematike namreč uspešno uporabljajo v kemiji, biologiji, računalništvu in na številnih družboslovnih področjih. Iskanje najkrajše poti do izbranega kraja, risanje družinskih dreves, določanje skupnega prostega termina prijateljev, reševanje uganke Sudoku ... V ozadju vseh teh in številnih drugih primerov so ideje iz teorije grafov in pravzaprav lahko rečemo, da se s to vedo srečujemo na skoraj vsakem koraku.

Glavni namen prispevka je spodbujati poučevanje teorije grafov v srednjih šolah in s tem uresničiti možnost bogatitve učnega procesa prek poučevanja vsebin s tega področja. V ta namen navajamo dejstva, ki utemeljujejo poučevanje teorije grafov v osnovnih in srednjih šolah, ter podajamo primer obravnave izbranih vsebin s področja teorije grafov, namenjen predvsem gimnazijskim učiteljem.

Teorija grafov v srednješolskem izobraževanju

Zakaj poučevati teorijo grafov v osnovnih in srednjih šolah?

Model teorije grafov je tako bogat, da lahko z njim modeliramo raznolike realne situacije in odkrivamo netrivialna spoznanja, a hkrati relativno preprost in zato dostopen širši množici (Klavžar in Žigert, 2002). Raziskave kažejo, da lahko z določenimi vsebinami iz teorije grafov seznanimo že osnovnošolce nižjih razredov (Fellows, 1993).

Zaradi številnih možnosti uporabe konceptov s področja teorije grafov ter preprostosti modela lahko oblikujemo situacije, skladne z interesi in kognitivnimi sposobnostmi učencev in dijakov, prek katerih jim prikažemo uporabnost omenjenega področja. Prek tega jim prikažemo tudi uporabnost matematike.

Zlasti ustrezno izbrane naloge, takšne, ki ponazarjajo realne situacije, lahko pri učencih, dijakih in drugih spodbudijo željo po učenju vsebin s tega področja ter hkrati povečajo njihovo motiviranost za učenje matematike. To dejstvo predstavlja enega izmed glavnih razlogov, ki utemeljujejo in spodbujajo poučevanje teorije grafov v osnovnih in srednjih šolah.

Poleg tega lahko s poučevanjem teorije grafov uresničujemo splošne cilje, ki v učnih načrtih za matematiko opredeljujejo namen učenja in poučevanja te vede, razvijamo osnovno matematično kompetenco in spodbujamo razvoj drugih kompetenc, navedenih v omenjenih učnih načrtih.

Kljub vsemu navedenemu in možnosti bogatitve učnega procesa prek poučevanja vsebin s področja teorije grafov pa smo ugotovili, da je le-to v osnovnih in srednjih šolah zastopano v manjši meri, poteka namreč le v okviru dodatnega pouka, interesnih dejavnosti, raziskovalnih nalog ipd. Glavni razlog za to je, da vsebin s področja teorije grafov ne zasledimo v učnih načrtih za matematiko v osnovnošolskem in srednješolskem izobraževanju. Posledica tega je med drugim tudi majhen nabor virov za učitelje, ki bi jim služili kot vodilo pri obravnavi vsebin.

O primeru obravnave izbranih vsebin s področja teorije grafov

Primer obravnave izbranih vsebin s področja teorije grafov je namenjen predvsem gimnazijskim učiteljem. Služi jim lahko kot vir idej za izvedbo interesne ali projektne dejavnosti, učne ure, raziskovalne naloge, gradivo za samoizobraževanje ipd., skratka kot pripomoček pri pripravi dejavnosti, ki bogatijo proces učenja.

Opisani potek učnega procesa je usmerjen k uresničevanju splošnih ciljev in kompetenc, navedenih v učnih načrtih za matematiko v gimnazijskem izobraževanju, ter tudi k uresničevanju nekaterih elementov matematične kompetence in drugih kompetenc. Upošteva učna načela postopnosti, sistematičnosti, nazornosti, znanstvenosti, aktualnosti, racionalnosti, povezovanja teorije in prakse ter je osnovan tako, da dijake spodbuja k aktivnemu sodelovanju in izgradnji znanja. Pomembno vlogo namenjamo tudi motivaciji dijakov, ki jo dosegamo z uporabo kognitivnih konfliktov v okviru učenja preko problemskih situacij. Učinkoviti načini motiviranja učencev in dijakov lahko namreč veliko pripomorejo k doseganju kakovostnega znanja (Žakelj, 2003).

Vsebinsko-metodične napotke, ki jih navajamo v prispevku, smo izbrali in izpopolnili tudi na podlagi izkušenj, dobljenih med poučevanjem navedenih vsebin. Na I. gimnaziji v Celju smo namreč izvedli krožek iz teorije grafov, namenjen dijakom vseh letnikov. Organizirali smo pet srečanj, vsako je trajalo približno dve šolski uri, v povprečju pa se ga je udeležilo devetnajst dijakov.

Primer obravnave izbranih vsebin s področja teorije grafov smo podrobno obdelali in evalvirali v magistrskem delu z naslovom Obravnava barvanj grafov in tetivnih grafov v srednješolskem izobraževanju (Ferme, 2016).

Obravnava vsebine Uvod v teorijo grafov
V sklopu te vsebine so dijaki spoznali osnovne pojme in dejstva s področja teorije grafov ter se seznanili z izbranimi družinami grafov in tako dobili temeljno znanje s tega področja.

Najprej smo jim predstavili problem königsberških mostov. Ob ustni predstavitvi problema smo uporabili skico mesta in mostov, temu pa bi lahko dodali tudi slike mesta Königsberg. Dijaki so poskušali v dvojicah razrešiti ta znameniti problem oziroma ugotoviti, da ni rešljiv.
Obravnavo smo nadaljevali z navajanjem nalog in problemov, ki jih lahko razrešimo s pomočjo znanja iz teorije grafov.

<u>Primeri nalog, vprašanj, problemov</u>

- Z avtom se želimo peljati od Radovljice do Portoroža. Katera med vsemi možnimi potmi je najkrajša?
- Katero pot po mestu naj izberemo, da bomo do vsake znamenitosti, ki si jo želimo ogledati, prišli natanko enkrat?

V glavnem delu smo podali definicije osnovnih pojmov, ki smo jih predstavili na različne načine in ponazorili tudi s primeri. Obravnavali smo pojme: graf, vozlišča grafa, povezave grafa, krajišči povezave, incidenčni povezavi, sosed, soseščina in stopnja vozlišča, najmanjša in največja stopnja vozlišč v grafu, izomorfna grafa, inducirani in vpeti podgraf grafa, sprehod, obhod, cikel in pot v grafu, povezani in nepovezani graf, regularni in *r*-regularni graf. Dijake smo seznanili tudi s simbolnimi zapisi.
Sledilo je reševanje razmeroma enostavnih nalog, namenjenih predvsem izboljšanju razumevanja pojmov in utrjevanju pridobljenega znanja.

<u>Primera nalog</u>

- Leon, Matic, Niko, Tina, Ula in Vesna živijo v Celju. Leon, Niko in Ula so sošolci. Tina veliko prostega časa preživi z Maticem. Ta trenira košarko skupaj z Leonom, Vesna in Ula pa plešeta v isti plesni skupini. Situacijo predstavite z grafom, katerega vozlišča naj predstavljajo posamezne osebe, povezave pa naj ponazarjajo navedena poznanstva med njimi.
- Poiščite primer nepovezanega grafa na šestih vozliščih, ki ga tvorijo tri komponente.

V drugem delu tega sklopa smo dijake z vprašanji spodbujali k samostojnemu odkrivanju Leme o rokovanju. Po potrebi smo jih usmerjali in s pomočjo dodatnih vprašanj vodili do odkritja leme ter jo šele nato zapisali ter ob aktivnem sodelovanju dijakov tudi dokazali.

<u>Primera vprašanj</u>

- Ali obstaja 3-regularen graf na 7 vozliščih?
- Ali obstaja k-regularen graf na n vozliščih, kjer sta k in n lihi naravni števili?

Dijakom smo predstavili tudi primere družin grafov. Podali smo več primerov in dijake spodbudili k temu, da so navajali realne situacije, ki jih lahko ponazorimo z določenimi grafi.

V zaključnem delu so samostojno reševali naloge, ki so bile namenjene predvsem utrjevanju in poglabljanju znanja, služile pa so tudi za preverjanje razumevanja.

<u>Primera nalog</u>

- Skicirajte graf G, za katerega je $V(G) = \{\lozenge, \nabla, \square, \bullet, \infty\}$ in:
    a) $E(G) = \{\lozenge\bullet, \lozenge\infty, \nabla\square, \nabla\infty, \square\bullet, \square\infty\}$;
    b) $N(\Delta) = \{\lozenge, \bullet, \infty\}$, $\delta(G) = 0$, $deg(\infty) = 3$, $deg(\bullet) = 2$;
    c) ima 6 povezav, a ni povezan;
    d) ima K_4 za inducirani podgraf ter osem povezav.
- Narišite vseh enajst neizomorfnih dreves na sedmih vozliščih. Koliko povezav ima posamezno drevo? Koliko povezav ima drevo na n vozliščih? Pojasnite.

Obravnava vsebine Barvanje vozlišč grafa
Temo barvanja vozlišč grafov smo za obravnavo v srednješolskem izobraževanju izbrali zaradi njene pomembne vloge v diskretni matematiki in tudi pri razreševanju vsakdanjih situacij. Poleg tega smo predvidevali, da bo za dijake zanimiva, saj naloge iz teh vsebin dopuščajo veliko kreativnosti, povezovanje teorije z vsakdanjimi situacijami ter sodelovanje med dijaki.

Za uvodni del smo pripravili motivacijsko nalogo, ki je opisovala realno situacijo, dobro poznano dijakom. Prek naloge so dijaki kasneje prepoznali uporabnost teorije grafov. Naloga je namreč zasnovana tako, da jo je enostavno rešiti z uporabo koncepta barvanja vozlišč grafa, sicer pa je reševanje te naloge lahko zelo zahtevno.

<u>Primer naloge:</u> *Izbirni predmeti za sedmošolce*
Slovenske osnovne šole morajo v pouk za učence sedmega, osmega in devetega razreda poleg izvajanja obveznih predmetov vključiti tudi izvajanje izbirnih predmetov. Tako učencem najprej ponudijo več možnih izbirnih predmetov, izvajajo pa le tiste, za katere se je odločila dovolj velika skupina osnovnošolcev. Učenci, ki so izbrali predmete, ki se ne bodo izvajali, izberejo druge predmete. V eni izmed celjskih osnovnih šol bodo tako za učence sedmega razreda izvajali naslednje izbirne predmete: nemščino, italijanščino, računalništvo, likovno snovanje 1, literarni klub, izbrani šport, šport za sprostitev, raziskovanje domače okolice in sodobno pripravo hrane. Najmanj koliko različnih terminov izvajanja izbirnih predmetov morajo vključiti v urnik, da bodo vsi učenci lahko obiskovali vse izbrane predmete, če določeni predmeti zaradi izbire učencev ne smejo potekati sočasno? Predmeti, ki ne smejo potekati sočasno, so navedeni v tabeli spodaj.

Tabela 1

Izbirni predmeti	Predmeti, ki ne smejo potekati sočasno s tem izbirnim predmetom
nemščina (N)	R, LS, LK, IŠ, ŠS, RDO, SPH
italijanščina (I)	R, LS, LK, ŠS, RDO, SPH
računalništvo (R)	N, I, LS, IŠ, ŠS
likovno snovanje (LS)	N, I, R, ŠS, RDO
literarni klub (LK)	N, I, ŠS, SPH
izbrani šport (IŠ)	N, R, ŠS
šport za sprostitev (ŠS)	N, I, R, LS, LK, IŠ, RDO
raziskovanje domače okolice (RDO)	N, I, LS, ŠS
sodobna priprava hrane (SPH)	N, I, LK

Dijakom smo pred formalno vpeljavo pojmov poljudno predstavili barvanje vozlišč grafov.
V sklopu celotne vsebine so usvojili naslednje pojme in koncepte: *k*-barvanje, dobro barvanje, *k*-obarvljivi graf, kromatično število grafa, optimalno barvanje, požrešna metoda, neodvisna množica, ravninski graf.
Dijakom smo predstavili tudi probleme in naloge, pri katerih je pogosto prisoten omenjeni koncept, ter skupaj z njimi odkrivali strategije, ki nam pomagajo pri določanju kromatičnega števila grafa. Dijaki so samostojno preiskovali in odkrivali nova spoznanja ter reševali probleme, pri tem bi lahko uporabljali tudi informacijsko-komunikacijsko tehnologijo.

V sklop reševanja nalog smo vključili naloge, ki so bile namenjene utrjevanju in poglabljanju razumevanja nove snovi ter so ponazarjale tudi realne situacije in so bile namenjene predvsem temu, da dijaki v različnih situacijah prepoznajo matematično ozadje in s tem tudi uporabnost matematike.

Dijakom smo predstavili tudi problem štirih barv, njegovo zgodovinsko ozadje ter jih spodbudili k samostojnemu odkrivanju izreka o barvanju ravninskih grafov. V ta namen smo jim pripravili tudi zemljevide, ki so jih barvali. Obravnavo snovi smo popestrili z razreševanjem uganke Sudoku in prikazom matematičnega ozadja te miselne igre.

V zaključnem delu obravnave te vsebine so dijaki ponovili novo snov tako, da so odgovarjali na zastavljena vprašanja.

Obravnava vsebine Tetivni grafi
Tetivni grafi so popolni grafi, uporabni na različnih področjih. Obravnavamo jih lahko z več različnih vidikov.

Za uvodni del smo pripravili nalogo, prek katere so dijaki obnovili nekatere že usvojene pojme in tako utrdili osnovna znanja in vedenja, poleg tega pa je naloga vodila do pojma tetiva oziroma tetivni graf.

Primer naloge: *Pohodniška krožna pot*
Eden izmed načinov, da pohodniki osvojijo več vrhov v enem dnevu, je tudi pohod po krožni poti. Na izbrani krožni poti lahko tako pohodniki osvojijo kar pet vrhov. Označimo jih s številkami od 1 do 5. Posebna značilnost te poti je, da se lahko pohodniki iz vrha 1 spustijo v dolino in nato nadaljujejo vzpon na kateri koli drugi vrh. Vse te poti so

namreč dobro označene in urejene, medtem ko v drugih smereh vzponi za veliko večino niso mogoči. Najmanj kolikokrat mora pohodnik na pohod, če želi osvojiti vseh pet vrhov in vsakič osvojiti en vrh ali vrhove, ki niso neposredno povezani z urejeno in označeno potjo?

a) Predstavite zgoraj opisano situacijo z grafom. Kolikšna je dolžina najdaljšega vpetega cikla, ki ga vsebuje narisani graf?
b) Ali ima ta graf kakšen inducirani cikel dolžine 4?
c) Koliko različnih induciranih ciklov dolžine 3 vsebuje ta graf?
d) Krožno pot predstavite s krožnico, vrhove pa s točkami na njej. Z daljicami označite še dodatne poti od vrha z oznako 1 do preostalih vrhov. Kako imenujemo te daljice znotraj kroga?

V glavnem delu je potekala obravnava tetivnih grafov, ki poleg definicij vključevala tudi zglede in naloge. Dijaki so spoznali pojme: tetiva grafa, tetivni graf, simplicialno vozlišče grafa, popolna eliminacijska shema grafa, popolni graf.
Spodbujali smo jih, da so sami ali s pomočjo ustrezno zastavljenih vprašanj (spodaj navajamo tri primere) odkrivali nekatere lastnosti tetivnih grafov.

<u>Primera nalog</u>

- Narišite graf s šestimi vozlišči in osmimi povezavami, ki ni tetiven.
- Aljaž, Barbara, Denis, Eva, Hana in Iva obiskujejo isto srednjo šolo, vendar se vsi ne poznajo med seboj. Aljaž pozna Denisa, Hano in Evo. Barbara pozna le Evo in Ivo. Eva se veliko druži s Hano in Ivo, malo manj pa z Barbaro. Pozna tudi Aljaža in Denisa. Denis je Hanin sošolec, pozna tudi Aljaža in Evo. Preostali dijaki se med seboj ne poznajo, vsa navedena poznanstva pa so obojestranska.
  a) Ali se vsi Barbarini znanci med seboj poznajo?
  b) Navedite imena vseh oseb, katerih vsi znanci se med seboj poznajo.
  c) Situacijo ponazorite z grafom, katerega vozlišča predstavljajo dijaki, povezave pa naj nakazujejo poznanstva med njimi. Kaj v grafu pravzaprav iščemo, če iščemo osebe, katerih vsi znanci se med seboj poznajo?

<u>Primeri vprašanj</u>

- Narišite poljubno drevo na petih vozliščih. Poiščite popolno eliminacijsko shemo tega drevesa. Ali je narisano drevo tetivni graf?
- Narišite poljubne tri tetivne grafe. Ali ti grafi premorejo popolne eliminacijske sheme?
- Ali so vsi grafi, ki premorejo popolno eliminacijsko shemo, tetivni?

Ob koncu učne ure so dijaki reševali naloge, namenjene ponavljanju in utrjevanju znanja.

Obravnava vsebine Grafi intervalov
Grafi intervalov sodijo med tiste matematične strukture, ki so najuporabnejše pri modeliranju realnih problemov. V širokem spektru uporabnosti grafov intervalov zlahka najdemo primere in oblikujemo naloge, primerne kognitivni zrelosti dijakov. Z njihovo pomočjo pri dijakih krepimo prepričanje o uporabnosti matematike in s tem tudi njihov pozitiven odnos do te vede.

V prvem, uvodnem delu obravnave te vsebine smo dijakom zastavili motivacijsko nalogo, v sklopu katere so ponovili znanje o grafih in ponazarjali intervale na realni osi, kar se je navezovalo na obravnavo nove snovi.

Primer naloge: *Turistična agencija*
Turistična agencija med drugim ponuja tudi prevoz in preživljanje počitnic v hotelu v Italiji. Termini, v katerih bodo turisti dopustovali v hotelu, so: 1. 8. – 5. 8., 3. 8. – 7. 8., 6. 8. – 13. 8., 6. 8. – 20. 8., 10. 8. – 14. 8., 10. 8. – 17. 8., 15. 8. – 20. 8., 18. 8. – 21. 8., 19. 8. – 26. 8., 24. 8. – 28. 8.
Termine dopustovanja ponazorite z intervali na realni osi in odgovorite na vprašanja.

a) Predpostavimo, da bo v vsakem izmed zgoraj navedenih terminov prek te agencije dopustovalo približno enako število ljudi. Kdaj bo v hotelu največ turistov iz te agencije in kdaj najmanj?
b) Najmanj kolikokrat mora direktor obiskati hotel, da se bo lahko osebno srečal z vsemi turisti? V katerih terminih?
c) V vsakem terminu skupino turistov spremlja turistični delavec, ki poskrbi, da vse poteka tako, kot mora. Najmanj koliko turističnih delavcev za izvajanje navedenih storitev potrebuje agencija?

V sklopu obravnave nove snovi smo dijakom najprej podali definicijo grafov intervalov, nato z grafom ponazorili situacijo uvodnega problema in predstavili uporabnost omenjene družine grafov. Sledilo je reševanje nalog, ki so jih spodbujale k samostojnemu raziskovanju in odkrivanju, ponazoritev realnih situacij v nekaterih nalogah pa k reševanju vsakdanjih problemov. Prek nalog so spoznali tudi nove pojme. Dijaki so v sklopu te vsebine spoznali pojme: graf intervalov, intervalna predstavitev grafa, asteroidna trojka.
S postavljanjem vprašanj smo jih spodbujali k aktivnemu razmišljanju ter odkrivanju lastnosti grafov intervalov.

Primera nalog

- Poiščite primer grafa na šestih vozliščih, ki premore asteroidno trojko. Ali je to graf intervalov?
- V mestu potekajo Gledališki dnevi, v sklopu katerih bo v mestu potekalo kar devet predstav. Vsaka predstava se bo odvijala nekaj dni zapored, razpored je prikazan v spodnji tabeli. Kadar bo na isti dan na sporedu več predstav, bodo te v različnih terminih, tako da si bo mogoče ogledati prav vse. Predstavite situacijo z grafom in odgovorite na vprašanja.
  a) Najmanj koliko dni moramo biti v mestu, da si bomo lahko ogledali vse predstave? Kdaj moramo v tem primeru obiskati gledališče?
  b) Pri vsaki predstavi sodelujejo tudi tehniki, ki skrbijo za ustrezno osvetljenost odra. Za izbrano predstavo je odgovoren le en tehnik. Vsaka predstava zahteva tudi veliko predpriprav, tako da lahko en tehnik v enem dnevu sodeluje pri izvedbi le ene predstave. Najmanj koliko tehnikov moramo najeti?

Predstava	Dnevi uprizoritve
1	10. 5. – 13. 5.
2	11. 5. – 13. 5.
3	11. 5. – 15. 5.
4	14. 5. – 16. 5.
5	15. 5. – 18. 5.
6	17. 5. – 18. 5
7	17. 5. – 20. 5.
8	18. 5. – 21. 5.
9	19. 5. – 22. 5.

Ob koncu obravnave te vsebine naj bi dijaki samostojno reševali naloge, s katerimi bi utrjevali osnovna, konceptualna in proceduralna znanja. Naloge bi lahko služile za preverjanje razumevanja znanja dijakov in utrjevanje znanja, kot naloge za domače samostojno obvezno ali dodatno delo, ali pa za preverjanje znanja dijakov.

Barvanje vozlišč grafov, tetivni grafi in grafi intervalov
V tem delu so dijaki obnovili vsebine o barvanju grafov, tetivnih grafih in grafih intervalov, jih nadgradili ter povezali v celoto.

Predvsem ponovitvi, priklicu že znanih pojmov oziroma dejstev in s tem pripravi na pridobivanje novega znanja je bila namenjena uvodna naloga.

V sklopu obravnave nove snovi naj bi najprej vpeljali pojma presečni in drevesni graf. Ker sta predvsem koncept drevesnih grafov in karakterizacija tetivnih grafov kot presečnih grafov družine poddreves nekega drevesa za dijake nekoliko zahtevnejša, za ta del predvidevamo več časa. Učitelji naj bi definirali pojem drevesnih grafov in prikazali zglede, ki pripomorejo k boljšemu razumevanju, počasi, sistematično in nazorno. Pri podajanju zgledov in reševanju nalog naj bodo posebej pozorni na razumevanje dijakov. Za razmislek pri zastavljenih vprašanjih naj imajo dijaki na voljo dovolj časa.
Sami smo menili, da so dijaki v krožku iz teorije grafov spoznali dovolj širok nabor pojmov in konceptov s tega področja, zato smo se odločili, da izpustimo predvideno obravnavo pojmov presečnih in drevesnih grafov ter tetivnih grafov kot presečnih grafov. Predvidevali smo tudi, da v času, ki smo ga imeli na voljo, dijakom ne bi mogli ustrezno predstaviti teh zahtevnejših konceptov. Zadnje srečanje smo izvedli malo drugače, kot smo sprva načrtovali, obravnavo nove snovi smo namreč bistveno omejili in razširili zaključni del.

<u>Primera nalog</u>

- Narišite poljubna dva grafa intervalov na 4, 5, 6 ali 7 vozliščih. Ali sta ta grafa intervalov popolna?
- Poiščite tri grafe intervalov in ugotovite, ali so tetivni.

Za sklop zaključnega dela smo pripravili vprašanja, prek katerih so dijaki obnovili pridobljeno znanje. Služila so nam pri pripravi kviza, lahko pa bi jih uporabili tudi za izvedbo druge miselne igre.

Primeri vprašanj

- Kateri dve množici sestavljata graf?
- Kako imenujemo množico vseh sosedov izbranega vozlišča?
- Ali je cikel C_4 dvodelni graf?
- Kakšno lastnost ima množica vozlišč grafa, ki pri dobrem barvanju prejme enako barvo?
- Kakšna je povezava med tetivnimi grafi in grafi intervalov?

Raziskava o vplivu poučevanja teorije grafov na nivo znanja splošne matematike
Raziskavo smo izvedli na podlagi pedagoškega eksperimenta, v katerem je sodelovalo 24 dijakov drugega, tretjega in četrtega letnika I. gimnazije v Celju. Oblikovali smo dve skupini, eksperimentalno in kontrolno. Prvo so sestavljali dijaki, ki so obiskovali krožek iz teorije grafov, drugo skupino pa tisti, ki se krožka niso udeleževali. Pred začetkom izvajanja krožka so vsi dijaki pisali začetni preizkus znanja, ki je vključeval 11 nalog, uporabljenih že v programu mednarodne primerjave dosežkov učencev – PISA. Povprečno število točk, ki so jih dijaki eksperimentalne skupine dosegli na začetnem testu, je bilo enako povprečnemu število točk dijakov iz kontrolne skupine. Po zaključku izvajanja krožka so vsi dijaki pisali končni test, tudi naloge tega preizkusa so bile uporabljene v projektu PISA. Ker je bila povprečna ocena končnega preizkusa znanja v obeh skupinah približno enaka, sklepamo, da poučevanje teorije grafov ne vpliva izrazito na nivo znanja splošne matematike. A kljub temu verjamemo, da pozitivni vplivi obstajajo, saj zaradi premajhnega števila udeležencev raziskave in le desetih šolskih ur izvajanja krožka, ta raziskava ne more biti veljavna in posledično tudi rezultati niso verodostojni. Potrebne bodo dodatne raziskave, ki bodo vpliv poučevanja teorije grafov na nivo znanja splošne matematike testirale na večjem številu udeležencev in v daljšem časovnem obdobju.

Sklep
S poučevanjem vsebin s področja teorije grafov v osnovnih in srednjih šolah lahko dosegamo številne cilje, med katerimi je treba izpostaviti možnost prikazovanja uporabnosti matematike in s tem spodbujanje motivacije učencev in dijakov za učenje matematike ter krepitev pozitivnega odnosa do te vede.

Upamo, da bo prispevek s primerom obravnave vsebin s področja teorije grafov marsikateremu učitelju koristil pri njegovemu delu, da bo marsikdo v njem našel idejo, navdih za izvedbo aktivnosti ali priložnost za osebni razvoj.

Primer obravnave izbranih vsebin s področja teorije grafov je mogoče nadgraditi in razširiti. Vključimo lahko dodatne tematike s področja teorije grafov, primerne kognitivni zrelosti dijakov in skladne z našimi interesi. Poleg tega lahko posamezno vsebino nadgradimo, navedemo lahko zelo veliko raznolikih primerov nalog ali drugih aktivnosti, vendar predlagamo, da pri tem pustimo učiteljem dovolj manevrskega prostora, da aktivnosti prilagajajo sebi in poučevani skupini dijakov. Pravzaprav bi lahko za omenjene vsebine (ali/in druge) podali tudi primer obravnave v osnovnih šolah.

Viri

1. Fellows, M. R. (1993): Computer science and mathematics in the elementary schools. V Mathematicians and Education Reform 1990–1991. Providence: American Mathematical Society.

2. Ferme, J. (2016): Obravnava barvanj grafov in tetivnih grafov v srednješolskem izobraževanju. Magistrsko delo. Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor.
3. Klavžar, S., Žigert, P. (2002): Izbrana poglavja uporabne matematike. Pedagoška fakulteta Maribor, Maribor.
4. Žakelj, A. (2003): Kako poučevati matematiko: teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava. Zavod Republike Slovenije za šolstvo, Ljubljana.

PROGRAMIRANJE PRI POUKU MATEMATIKE

Programming and Mathematics

Mag. Radovan Krajnc, mag. Melita Gorše Pihler
radovan.krajnc@zrss.si, melita.gorse-pihler@zrss.si
Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Povzetek
Živimo v informacijski družbi, v kateri naj bi bili učenci po šolanju sposobni polnopravno sodelovati ter biti kreativni in učinkoviti pri rabi novih tehnologij. Izsledki raziskav kažejo, da lahko sistematično in premišljeno vključevanje programiranja predstavlja dodano vrednost pouka matematike. Ob tem moramo biti pozorni na ustrezno uvajanje izbranega orodja, smiselno izbrane naloge in pomoč učencem, ki jim delo z izbranim orodjem predstavlja težave, ter na ustrezno vodenje pouka.
V prispevku navajamo izsledke nekaterih raziskav in primere možnega vključevanja programiranja v pouk matematike.

Abstract
We live in the information society, in which the students should be able to fully participate and to be creative and efficient in the use of new technologies after leaving high school. Solving problems by using tools Scratch increases the activity of students and improves understanding of mathematical concepts. Concerning this, it is relevant that students create programes during maths lessons as well.
Scratch is a good choice, since the students learn to use it quickly. There are no syntax errors, but there are already many good practice examples of programming integration into mathematics.

Ključne besede
programiranje, Scratch, pouk matematike

Keywords
programming, Scratch, mathematics education

Uvod
Živimo v informacijski družbi, v kateri naj bi bili učenci sposobni po zaključeni osnovni ali srednji šoli polnopravno sodelovati ter biti kreativni in učinkoviti pri rabi novih tehnologij. Izkušnje učiteljev in raziskave kažejo, da vsi učenci tehnologije ne znajo uporabljati smiselno, varno in kreativno. Ta ugotovitev je za nas učitelje spodbuda, da analiziramo lastno pedagoško prakso in ustrezno načrtujemo dejavnosti, v katerih učenci pridobivajo veščine 21. stoletja.

To dosežemo z razvijanjem področja **digitalnih kompetenc** (v učnem načrtu za matematiko v osnovni šoli je uporabljen izraz digitalna pismenost), kjer se učenci učijo smiselne in učinkovite rabe tehnologij informacijske dobe. V učnih načrtih je razvijanje digitalnih kompetenc zapisano kot ena od osmih ključnih kompetenc iz evropskega referenčnega okvirja. V modelu DigComp (Ferrari, 2013) so digitalne kompetence razdeljene na pet področij: delo z viri, komunikacija, ustvarjanje vsebin, varnost in reševanje problemov.

V učnem načrtu za matematiko v osnovni šoli je med didaktičnimi priporočili predlagana tudi uporaba **informacijsko-komunikacijskih tehnologij** ter različnih orodij. V to področje spada na primer poznavanje rabe numeričnih in grafičnih računal, matematičnih računalniških programov, pisarniških orodij – predvsem preglednic, poznavanje delovanja iskalnikov in drugih orodij.

Obstaja še eno področje, ki sicer ni vključeno v obvezni predmetnik slovenskega osnovnošolskega sistema. To je **računalništvo** (**in informatika**), ki je znanstvena veda s svojimi temeljnimi znanji, z zbirko tehnik in metod za reševanje problemov ter s posebnim načinom razmišljanja in dela. Razumevanje računalništva je nujni pogoj za posameznika, da zmore razmišljati inovativno in ustvarjalno ter pri reševanju problemov (tako matematičnih kot avtentičnih) vključevati in uporabljati digitalne tehnologije. Del tega področja – programiranje – je sicer tudi ena od digitalnih kompetenc v modelu DigComp.

Namen prispevka je predstaviti ugotovitve raziskav o vključevanju programiranja v pouk matematike in prikazati konkretne naloge, ki jih lahko učenci rešijo z orodjem Scratch. Ker je razvijanje digitalnih kompetenc vključeno v učni načrt za matematiko, lahko učitelj, če to področje pozna (in če učenci s programiranjem dosegajo učne cilje), programiranje vključi tudi v pouk matematike.

Računalniško razmišljanje

Pri reševanju problemov, kjer rešitev pripravimo tako, da jo lahko izvede računalnik (ali človek), razvijamo tako imenovano računalniško razmišljanje (computational thinking). Ta izraz je prvi uporabil Seymour Papert leta 1980 v svoji knjigi Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas. V njej je opisal razloge, zakaj je treba v pouk matematike in fizike (pa tudi v druge predmete) vključevati računalnik in programiranje. Avtor je kot raziskovalec preživel štiri leta v Švici pri Jeanu Piagetu, psihologu, filozofu in naravoslovcu. Ta je nanj vplival s svojimi raziskavami o razvoju mišljenja otrok. Papert je po izkušnji s Piagetom s skupino raziskovalcev na MIT-u (Massachusetts Institute of Technology) razvil računalniški jezik LOGO. V tem jeziku so učenci programirali želvo, ki je za seboj puščala sled in s tem ustvarjala različne oblike in vzorce. Naredil je veliko raziskav, s katerimi je ugotovil, da učencem programiranje v jeziku LOGO pomaga pri razumevanju matematičnih konceptov in idej. Menil je, da je treba računalnik uporabljati za razvoj višjih, abstraktnejših oblik mišljenja, razumevanje pojmov in reševanje problemov. Računalnik se sicer lahko uporabi kot orodje pri utrjevanju, kjer učenci uporabljajo že sprogramirane aktivnosti, vendar takšna uporaba računalnika učenja in kakovosti znanja bistveno ne izboljša. Papert ugotavlja, da programiranje v jeziku LOGO učencem pomaga pri razumevanju geometrije in drugih pojmov, poleg tega jim pomaga, da zmorejo probleme opisovati v takšnem jeziku, ki ga razume tudi računalnik. S tem se učijo ustvarjati modele, kompleksne probleme deliti na manjše probleme, iskati vzorce in razmišljati abstraktno. Pri tem se učijo učiti, saj morajo razmišljati tudi o svojem razmišljanju. Vse te elemente računalniškega razmišljanja je v svojem članku opisala tudi Jeanete Wing (Wing, 2006) in argumentirala razloge, zakaj bi računalniško razmišljanje morali pridobivati prav vsi učenci.

V Evropi je programiranje in računalništvo v svoje predmetnike vključilo že vsaj 16 držav (European Schoolnet, 2015). V Sloveniji je računalništvo v osnovni šoli le izbirni predmet, pri katerem učenci v večini primerov uporabljajo program Scratch.[1] V njem lahko učenci uporabljajo tudi želvjo grafiko (tako kot v Logu), lahko pa ga uporabijo za razvoj programov, iger, predstavitev, zgodb ipd.

Pri neobveznem izbirnem predmetu računalništvo učenci četrtega in petega razreda pri reševanju problemov velikokrat uporabljajo matematične pojme (negativna števila, koordinatni sistem in koti), ki jih pri pouku matematike še niso spoznali. Učenci po izkušnjah nekaterih učiteljev s pomočjo programiranja te pojme usvojijo in razumejo hitreje, zato bi lahko takšen način dela vključevali tudi v pouk matematike.

Raziskave o vključevanju programiranja v pouk matematike
Številne raziskave kažejo pozitivne učinke sistematičnega in premišljenega vključevanja programiranja v pouk matematike. V nadaljevanju opisujemo nekatere med njimi.

Cheng, profesor na Oddelku za mehanski in vesoljski inženiring na Univerzi Kalifornija, je skupaj s sodelavci vodil obsežno 10-letno raziskavo o tem, kako uporabljati programiranje za vzpodbujanje in pomoč učencem pri učenju vsebin s področja naravoslovja in matematike. Ugotovili so, da sta se ob sestavljanju programa za preprosto nalogo iz algebre (npr. Cena jogurta je 0,39 $, davek je 8,25 %. Zapiši program za izračun prodajne cene jogurta.) algebrsko razmišljanje in računalniško razmišljanje med seboj dopolnjevala. Ob sestavljanju programov so učenci razvijali logično in kritično mišljenje, učili so se kritično vrednotiti delo sošolcev in si ob medsebojni pomoči razvijali veščine za sodelovalno učenje.

Raziskava je pokazala, da je bilo znanje matematike v oddelkih, v katerih so vključevali programiranje, boljše od znanja matematike v kontrolnih oddelkih. Celo učitelji brez predhodnih izkušenj s programiranjem so uspešno vključevali programiranje v pouk matematike že po kratkem profesionalnem usposabljanju. Še več, izkazalo se je, da se je z vključevanjem programiranja v pouk matematike izboljšala uspešnost vseh učencev ne glede na družinsko ozadje, socialni položaj ali lokacijo (Cheng, 2016).
Calao, Moreno-Leon, Correa in Robles opisujejo raziskavo, ki je bila narejena na eni od osnovnih šol v Kolumbiji na 42 učencih šestega razreda (11- in 12-letniki). Z njo so želeli ugotoviti, ali vključevanje programiranja v pouk matematike izboljša znanje matematike. Narejena je bila primerjava med dvema skupinama učencev s primerljivim znanjem matematike, pri čemer je ena skupina predstavljala kontrolno in druga eksperimentalno skupino. Pri učencih eksperimentalne skupine so tri mesece v pouk matematike vključevali programiranje z uporabo orodja Scratch. Kontrolna skupina je v tem obdobju nadaljevala z uporabo enakih metod in dejavnosti, kot jih je uporabljala pred tem.

Učenci so pred vključevanjem orodja Scratch pisali začetni test in ob koncu trimesečnega obdobja končni test, sestavljen iz 16 nalog (štiri naloge za preverjanje zmožnosti matematičnega modeliranja, štiri naloge iz utemeljevanja, štiri naloge iz reševanja problemov ter štiri naloge, ki preverjajo zmožnost izvajanja postopkov in algoritmov). Pri začetnem testu med uspešnostjo eksperimentalne in kontrolne skupine ni bilo statistično značilnih razlik. Prav tako pri učencih kontrolne skupine ni bilo

[1] Scratch je orodje za učenje programiranja, ki je nastalo na MIT-u, na njegov razvoj pa sta močno vplivala delo Seymourja Paperta in jezik LOGO.

statistično značilnih razlik med uspešnostjo pri začetnem testu in končnem testu. Učenci eksperimentalne skupine pa so bili pri končnem testu bistveno uspešnejši kot pri začetnem testu. Uspešnost učencev eksperimentalne skupine se je povečala pri vseh štirih sklopih nalog, najbolj pa pri nalogah, ki so preverjale izvajanje postopkov in algoritmov.

Izsledki raziskave kažejo, da so se učencem z razvojem računalniškega razmišljanja z uporabo orodja Scratch izboljšale zmožnosti matematičnega modeliranja, utemeljevanja, reševanja problemov ter izvajanja postopkov in algoritmov. Razen tega je vključevanje programiranja v pouk matematike vplivalo tudi na večjo motivacijo učencev (Calao, Leon-Moreno, Correa, Robles, 2015).

Calder, profesor na eni od univerz na Novi Zelandiji, opisuje raziskavo, v kateri so preučevali vpliv ustvarjanja iger v orodju Scratch na razvoj matematičnih pojmov. Pilotna raziskava je bila izvedena s 26 učenci šestega razreda, ki so uporabljali orodje Scratch za pripravo matematičnih iger, namenjenih razvoju številskih predstav učencev prvega razreda.

Učenci šestega razreda so bili razdeljeni v skupine. Vsaka skupina je pripravila matematično igro in jo na podlagi povratnih informacij izboljševala. Povratne informacije so potekale na različne načine: takojšnje povratne informacije skozi program (ko so spremenili svoj program), povratne informacije preostalih članov v skupini, učiteljeve povratne informacije in predlogi, povratne informacije uporabnikov igre (učencev prvega razreda), povratne informacije drugih skupin (ko so si skupine med seboj predstavljale igre, ki so jih pripravile). Proces, ki so ga bili deležni učenci, ko so se odzvali na različne oblike povratnih informacij, je vzpodbujal ustvarjalno reševanje problemov. Učencem je bilo dovoljeno eksperimentirati in raziskovati: opazovali so povezavo med sestavljenim programom in tem, kar se je pojavilo na zaslonu, ter učinek sprememb, ki so jih naredili v programu. Videti je bilo, da so imele napake pri programiranju pozitiven učinek, da so bili učenci pozvani k nadaljnjemu eksperimentiranju.

Vključevanje programiranja ob ustrezno vodenem pouku se je izkazalo kot učinkovit pristop za reševanje problemov, ki je hkrati omogočal učinkovito raziskovanje matematičnih pojmov (koti, dolžinske merske enote …), razvoj kritičnega mišljenja in metakognicije. Izbrani način dela je vzpodbudno vplival tudi na komunikacijo in sodelovanje med učenci ter na motivacijo učencev (Calder, 2010).

Voskoglou iz TEI (Technological Educational Institute of Partas) in Buckley iz Univerze v Južnoafriški republiki sta raziskovala vpliv vključevanja programiranja v matematične predmete na sposobnost reševanja matematičnih problemov. Opisujeta dva eksperimenta, ki sta potekala na Tehnološko pedagoškem inštitutu v Patrasu.

V prvem eksperimentu je sodelovalo 90 študentov. Razdeljeni so bili v dve skupini (kontrolno in eksperimentalno). V kontrolni skupini so bili deležni klasičnih predavanj, katerim je sledilo utrjevanje z nalogami in s primeri iz vsakdanjega življenja ter reševanje problemov. Pri reševanju nalog in problemov so bili študenti aktivno vključeni v učni proces. V eksperimentalni skupini je približno tretjina učnega procesa (predavanj in utrjevanja) potekala v računalniški učilnici, kjer so študenti ob uporabi ustrezne programske opreme v manjših skupinah reševali naloge in probleme. Ob zaključku semestra so pisali test, namenjen preverjanju njihovega napredka, ki je obsegal: v prvem delu teoretična vprašanja in naloge in v drugem delu tri probleme iz vsakdanjega življenja, v katerih je bilo treba uporabiti znanje matematičnega modeliranja. V prvem delu testa ni bilo zaznati statistično značilnih razlik med uspešnostjo obeh skupin študentov. Izkazalo se je, da so bili študenti eksperimentalne skupine bistveno uspešnejši v drugem delu testa: pri reševanju problemov.

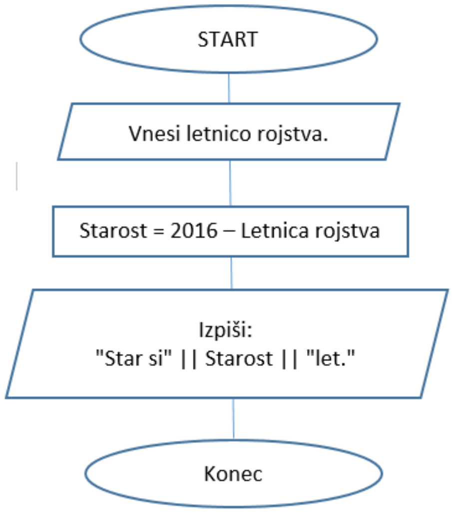
V drugem eksperimentu, ki je potekal pod podobnimi pogoji kot prvi, je sodelovalo 200 študentov. V tem primeru se je ponovno pokazalo, da so bili študenti eksperimentalne skupine v drugem delu testa uspešnejši v primerjavi s kontrolno skupino študentov.

Izsledki obeh eksperimentov so pokazali, da je ustrezna uporaba računalnika pri poučevanju matematike povečala sposobnost študentov za matematično modeliranje in reševanje problemov iz vsakdanjega življenja (Voskoglou in Buckley, 2012).

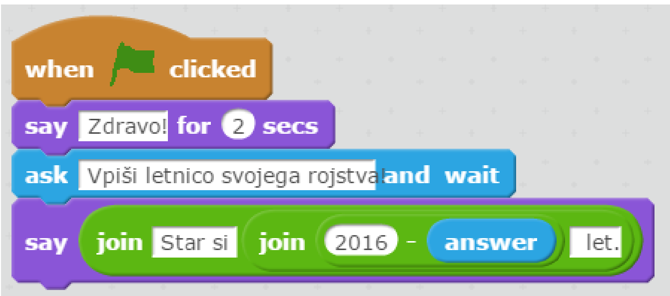
Ob vseh ugotovitvah navedenih raziskav moramo upoštevati tudi dejstvo, da je učno učinkovitost različnih tehnologij težko primerjati, saj vključitev zahtevnejše tehnologije v pouk matematike pomeni velik poseg v učni proces. Napredna tehnologija ne pomeni le spremembe učnega procesa, temveč tudi spremembo v razumevanju matematičnih vsebin in spremembo v matematičnem razmišljanju učencev (Magajna, 2014).

Primeri možnega vključevanja programiranja v pouk matematike

V nadaljevanju prikazujemo nekaj primerov vključevanja programiranja v pouk matematike z uporabo orodja Scratch. Program smo izbrali zato, ker je bilo glede na izkušnje učiteljev ugotovljeno, da se ta program učenci hitro naučijo uporabljati.
Učenci od četrtega razreda osnovne šole dalje lahko sestavijo preprost program, ki izračuna trenutno starost osebe. Uporabnik vpiše letnico rojstva (sliki 1 in 2).



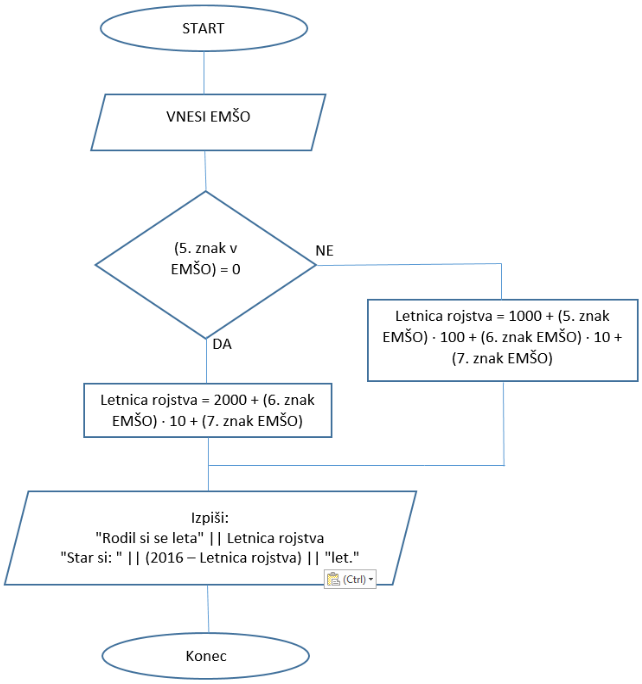
Slika 1: Diagram poteka za izračun trenutne starosti osebe



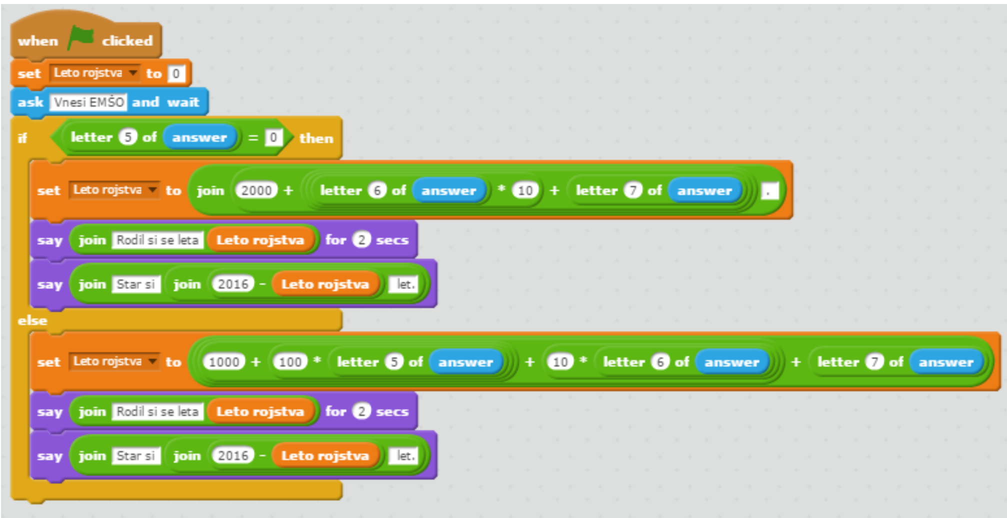
Slika 2: Program v Scratchu za izračun trenutne starosti osebe

S tem ko učenec nariše diagram poteka, dejansko reši problem. Računalniku pove, da mora od števila, ki predstavlja trenutno leto, odšteti letnico rojstva izbrane osebe. Nato sestavi program in preveri, ali je problem pravilno rešil. V nadaljevanju lahko problem razširimo: kako bi spremenili program, da bi pravilno računal vsako leto?

V višjih razredih lahko učenci rešujejo podoben, a nekoliko zahtevnejši problem. Sestavijo program, ki izračuna trenutno starost osebe. Uporabnik vpiše svojo EMŠO (sliki 3 in 4).



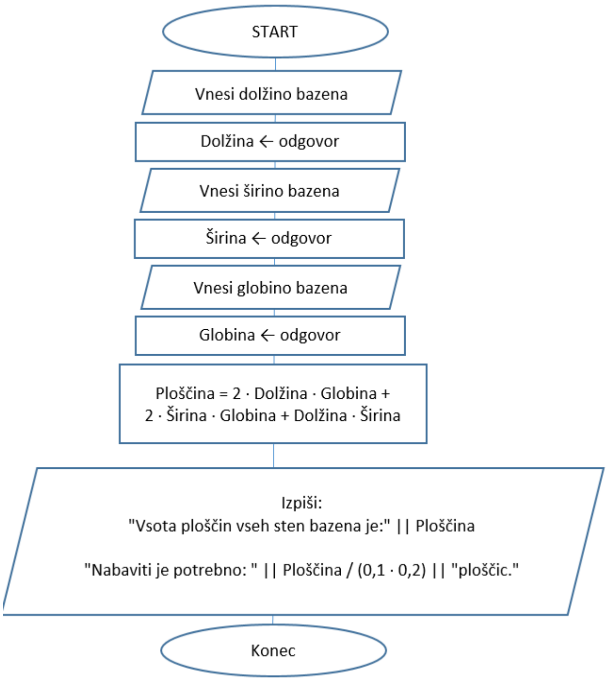
Slika 3: Diagram poteka za izračun trenutne starosti osebe iz EMŠO



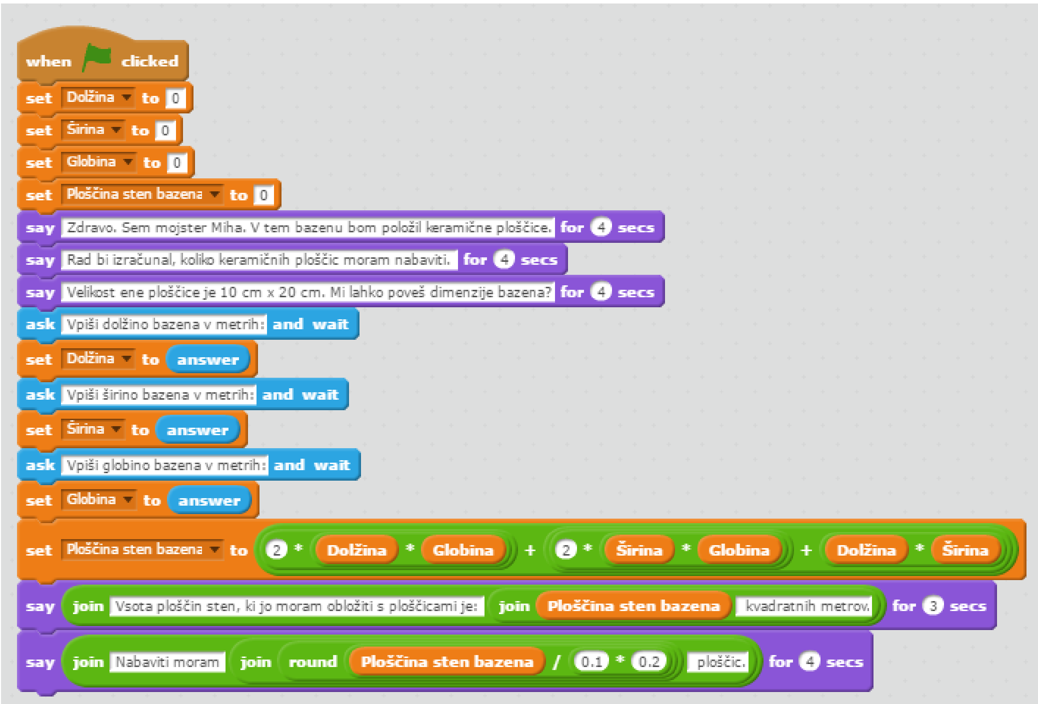
Slika 4: Program v Scratchu za izračun trenutne starosti osebe iz EMŠO

Podobno kot v prejšnjem tudi v tem primeru učence izzovemo, naj program popravijo tako, da bo veljal vsako leto.

Problem “Koliko ploščic?” je namenjen učencem šestega razreda osnovne šole. Učenci sestavijo program, ki izračuna, koliko ploščic dimenzije 10 cm x 20 cm potrebujemo za obložitev bazena. Dimenzijo bazena (širino, višino in globino) vnese uporabnik programa (sliki 5 in 6).

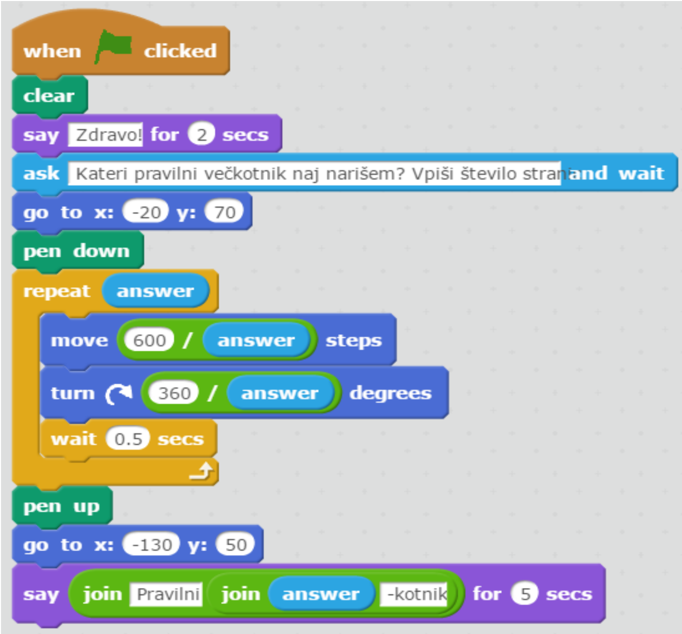


Slika 5: Diagram poteka za izračun števila ploščic v bazenu



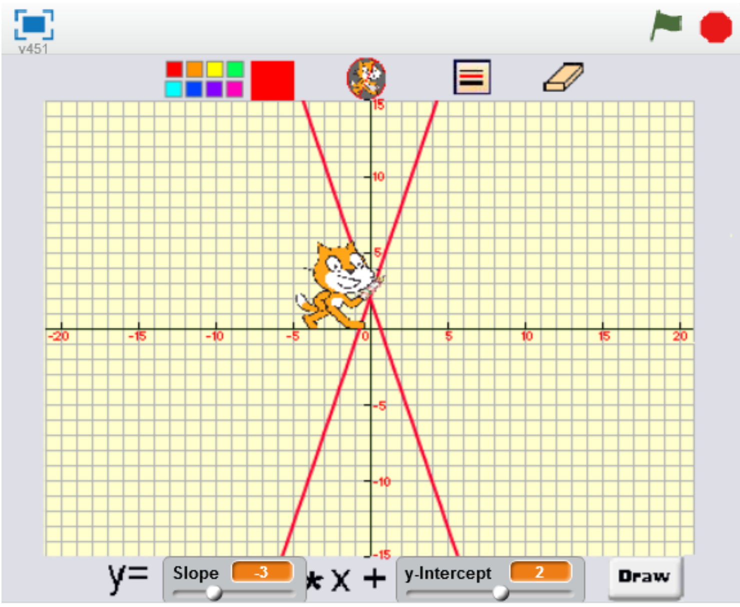
Slika 6: Program v Scratchu za izračun števila ploščic v bazenu

Ob nalogi se z učenci pogovorimo o tem, kaj smo pri reševanju naloge privzeli. Ali tudi keramičar tako izračuna število ploščic, ki jih potrebuje?
Učenci osmega razreda lahko sestavijo program, ki izriše pravilni večkotnik. Število stranic večkotnika je podano. Izziv za sposobnejše učence je sestaviti program, ki izriše poljuben večkotnik, pri čemer število stranic izbere uporabnik (slika 7).



Slika 7: Zapis programa v Scratchu za izris pravilnega večkotnika

V opisanih primerih učenci sestavljajo programe za dane naloge. Druga možnost uporabe programiranja in orodja Scratch pri matematiki je nazornejši prikaz nekaterih matematičnih pojmov. V ta namen lahko učitelj sestavi program (ali ustrezen program poišče na spletu) in ga uporabi pri poučevanju. Eden izmed možnih primerov je program, ki je učencem devetega razreda osnovne šole v pomoč pri raziskovanju lastnosti smernega koeficienta in začetne vrednosti linearne funkcije (slika 8).



Vir: https://scratch.mit.edu/projects/128873760/.

Slika 8: Raziskovanje lastnosti smernega koeficienta in začetne vrednosti linearne funkcije

Vključevanje programiranja v pouk matematike

Magajna, profesor na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani, opozarja, da mora učitelj ob vključevanju napredne tehnologije v učni proces posvetiti dovolj pozornosti uvajanju pripomočka, kajti če se uporabnik ne nauči primerno uporabljati pripomočka, lahko postane pripomoček vir nepotrebnih težav. Razen tega učenec po navadi dela z orodjem, katerega funkcije razume le deloma. Nerazumljene funkcije orodja za nekatere učence predstavljajo motnjo. Ob tem ne gre pozabiti na dejstvo, da so orodja praviloma na napravah, ki niso namenjene izključno učenju, temveč so namenjene tudi komuniciranju in povezovanju s spletom (Magajna, 2014).

Zato moramo v primeru vključevanja programiranja v pouk matematike razen za premišljeno pripravljene naloge poskrbeti tudi za ustrezno seznanitev učencev z izbranim orodjem, nameniti posebno pozornost učencem, ki jim delo z izbranim orodjem predstavlja težave, in voditi pouk tako, da bo računalnik namenjen le usvajanju ciljev pouka.

Sklep
Raziskave so pokazale, da s sistematičnim in premišljenim vključevanjem programiranja v pouk matematike učenci razvijajo problemska znanja. Lahko se izboljšata razumevanje matematičnih pojmov in zmožnost izvajanja postopkov in algoritmov. Vključevanje programiranja v pouk matematike lahko spodbudno vpliva tudi na motivacijo učencev.

Ob vključevanju programiranja v pouk matematike mora učitelj premišljeno izbirati naloge, skrbno načrtovati uvajanje izbranega orodja, ustrezno voditi pouk in poskrbeti za učence, ki jim delo z izbranim orodjem dela težave.

Viri

1. Calao, L. A., Leon-Moreno, J., Correa, H., Robles, G. (2015): Developing Mathematical Thinking with Scratch, An Experiment with 6th Grade Students. Pridobljeno iz Springer: https://www.google.si/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=24&ved=0ahUKEwj6zMr9kMHPAhVNOMAKHR6_A-I4FBAWCDIwAw&url=http%3A%2F%2Fwww.springer.com%2Fcda%2Fcontent%2Fdocument%2Fcda_downloaddocument%2F9783319242576-c2.pdf%3FSGWID%3D0-0-45-1544771-p177698665& .
2. Calder, N. (2010): Using Scratch: An Integrated Problem solving Approach to Mathematical Thinking. Pridobljeno iz ERIC: http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ906680.pdf .
3. Cheng, H. (4. oktober 2016): Teaching math with computer programming can help narrow achievement gap. Pridobljeno iz EdSource Higlighting Strategies for Student Success: https://edsource.org/2016/teaching-math-with-computer-programming-can-help-narrow-achievement-gap/563371.
4. European Schoolnet (2015): Computing our future. Pridobljeno 10. oktobra 2016 iz European Schoolnet: http://www.eun.org/c/document_library/get_file?uuid=3596b121-941c-4296-a760-0f4e4795d6fa&groupId=43887.
5. Ferrari, A. (avgust 2013): DIGCOMP: A Framework for Developing and Understanding Digital Competence in Europe. Pridobljeno iz European Commission: Joint Research Centre: http://ipts.jrc.ec.europa.eu/publications/pub.cfm?id=6359 .
6. Magajna, Z. (2014): Pouk matematike med preprosto in zahtevnejšo tehnologijo. V: Zbornik prispevkov 2. mednarodne konference o učenju in poučevanju matematike KUPM 2014, ZRSŠ, str. 55–67.
7. Papert, S. (1980): Mindstorms. New York: Basic Books, Inc. Publishers.
8. Voskoglou, M., Buckley, S. (2012): Problem solving and Computers in a Learning Environment. Pridobljeno 5. januarja 2017 iz Egyptian Computer Science Journal: https://pdfs.semanticscholar.org/eee0/1bc7d124cba94e9f90c5de39fccec9106fc8.pdf .
9. Wing, J. (2006): Computational Thinking. Pridobljeno 13. januarja 2017 iz Carnegie Mellon University: https://www.cs.cmu.edu/~15110-s13/Wing06-ct.pdf .

STALIŠČA SLOVENSKIH IN HRVAŠKIH UČITELJEV O RAZLIKAH MED KURIKULARNIMI MATEMATIČNIMI VSEBINAMI

Opinions of Slovenian and Croatian Teachers on Differences in Mathematics Curriculum Contents

Mag. Mateja Sabo
matejasabo88@gmail.com
Prva privatna gimnazija s pravom javnosti Varaždin

Povzetek
Kurikulum pomeni načrtovanje, strukturo ter preverjanje procesa dela in delovanja glede na cilje, vsebine, kot tudi kontrolo globalno postavljenih ciljev. Kurikulum potrjuje Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport tako v Sloveniji kot tudi na Hrvaškem. Niso pa znana stališča in prepričanja tistih, ki vsakodnevno izvajajo ta kurikulum v šolah. Zakaj ravno primerjava Slovenije in Hrvaške? Odgovor je, ker sta sosedi in ker imata del skupne zgodovine. Kljub temu bomo ugotovili, da so razlike med njima kar precejšnje, tako v izobraževanju na splošno kakor tudi v vsebinah, ki jih obravnavajo pri matematiki v osnovnih šolah in gimnazijah.

Abstract
We wanted to see what the real differences between the two neighboring countries are. Our focus was on views and opinions of teachers. We compared course of education in both countries focusing on mathematics. Special attention we have paid to the curriculum in mathematics in primary school and high school. We conducted a survey on math teachers in Slovenia and Croatia. Using the results we compared their views, and came up with interesting insights such as, that Croatian teachers are more open to change in curriculum in mathematics as Slovenian teachers.

Ključne besede
primerjalna analiza, Slovenija, Hrvaška

Keywords
comparative analysis, Slovenia, Croatia

Namen

Namen prispevka je s sistematično analizo primerjati:

- formativne podlage za matematično izobraževanje v Sloveniji in na Hrvaškem,
- stališča in prepričanja slovenskih in hrvaških učiteljev,
- učinkovitost matematičnega izobraževanja,
- uspehe učencev in dijakov na matematičnih tekmovanjih.

Menimo, da bo poglobljen kvantificiran pogled na oba sistema prispeval k izboljšanju stanja v obeh šolskih sistemih.

Primerjava šolskih sistemov Slovenije in Hrvaške pri pouku matematike

Vrtec

Pri primerjavi Slovenije in Hrvaške opazimo, da razlika nastopi pri vpisu otroka v vrtec; v Sloveniji je to mogoče, ko otrok dopolni enajst mesecev, medtem ko na Hrvaškem to lahko naredijo že s šestimi meseci starosti. Naslednja razlika, ki je še pomembnejša, je v kurikulumu za vrtce. V Nacionalnem kurikulumu za zgodnjo in predšolsko vzgojo in izobraževanje, ki je v veljavi v Republiki Hrvaški, se področje matematike pojavlja v ključnih kompetencah vseživljenjskega učenja in je opisano zelo jedrnato in kratko, medtem ko je v Kurikulumu za vrtce, ki je v veljavi v Republiki Sloveniji, matematika navedena pod področjem dejavnosti v vrtcu ter je opisana zelo podrobno in pregledno. Področje se deli na prvo in drugo, in to od 1. do 3. leta starosti in od 3. do 6. leta starosti, ter je temu primerno napisano, kaj vse bi moral v zvezi z matematičnim znanjem obvladati otrok.

Osnovna šola

	Slovenija	Hrvaška
Vstopna starost:	5 let 8 mesecev	6 let
Trajanje:	9 let	8 let
Razdelitev:	1.–5. r. Razredni pouk 6.–9. r. Predmetni pouk	1.−4. r. Razredni pouk 5.–8. r. Predmetni pouk
Ure matematike:	1. in 2. r. – 140 ur/letno ⇩ 3. in 4. r. – 175 ur/letno ⇩ 5.–8. r. – 140 ur/letno ⇩ 9. r. – 128 ur/letno ∑ 1318 ur/letno	1.−8. r. – 140 ur/letno ∑ 1120 ur/letno

Srednja šola

Pri srednjih šolah je, kar se tiče matematike, razlika v tem, da na Hrvaškem obstaja možnost izbire naravoslovno-matematične gimnazije, ki je v Sloveniji ni. Pri maturi je matematika med obveznimi predmeti tako v eni kot drugi državi na splošni maturi, medtem ko se v Sloveniji na poklicni maturi pojavlja kot predmet izbirnega dela. Tega na Hrvaškem ni glede na to, da obstaja samo splošna matura. Matematika se v Sloveniji in na Hrvaškem vedno lahko opravlja na osnovni in višji ravni zahtevnosti.

Višješolsko izobraževanje

Republika Slovenija in Republika Hrvaška imata nadaljnje izobraževanje urejeno po bolonjskem procesu. Republika Slovenija je bolonjski proces uvedla v šolskem letu 2009/2010, medtem ko je Republika Hrvaška to naredila v šolskem letu 2005/2006.

Izobraževanje učiteljev matematike

Bistvenih razlik v izobraževanju učiteljev matematike med državama ni.

Primerjava učnega načrta za matematiko za osnovne šole

Prva razlika v učnih načrtih za matematiko za osnovne šole med Slovenijo in Hrvaško je, da ima Slovenija za vsak predmet posebej učni načrt kot en dokument, medtem ko ima Hrvaška en dokument za vse predmete osnovne šole, v katerem je eno poglavje namenjeno posameznemu osnovnošolskemu predmetu.

Slovenski učni načrt za matematiko je razdeljen na tri vzgojno-izobraževalna obdobja in znotraj njih na posamične razrede. V vsakem vzgojno-izobraževalnem obdobju so tri glavne teme: geometrija in merjenje, aritmetika in algebra ter druge vsebine. Vsaka tema se deli na sklope, znotraj katerih so opredeljene vsebine in postavljeni cilji. Cilji so obvezni in izbirni. Obvezni cilji so namenjeni vsem učencem in morajo biti vključeni v pouk, medtem ko so izbirni cilji namenjeni dodajanju in poglabljanju znanja, pri čemer učitelj sam izbira učence, ki bodo vključeni v pouk.

Hrvaški učni načrt za matematiko je razdeljen po razredih, tj. od prvega do osmega razreda osnovne šole. Za vsak razred so navedene vsebine, ki se obravnavajo v posameznem razredu. Vsaka tema pa ima navedene ključne pojme in izobraževalne dosežke.

Primerjava učnega načrta za matematiko za gimnazije
Slovenski in hrvaški učni načrt za matematiko za gimnazije zajemata cilje in vsebine, ki bi jih dijaki morali doseči v času gimnazijskega izobraževanja.
Slovenski učni načrt za matematiko za gimnazije navaja delitev znanj na splošna (SZ) in posebna znanja (PZ) ter izbirne vsebine (I). Nadalje je učni načrt razdeljen na poglavlja, znotraj katerih so opredeljeni cilji, vsebine in didaktična priporočila. Pri vsakem poglavju je navedeno število ur, predvidenih za obravnavo posameznega poglavja. V učnem načrtu so navedeni še pričakovani dosežki/rezultati, ki so razdeljeni na vsebinska in procesna znanja, medpredmetne povezave, dodatna didaktična priporočila in na koncu vrednotenje dosežkov.

Hrvaški učni načrt za matematiko za gimnazije je razdeljen na namen in cilj, programsko gradivo in didaktična priporočila. Programsko gradivo je sestavljeno po letnikih od prvega do četrtega letnika gimnazije. Na začetku vsakega letnika so zapisane naloge, ki bi jih dijak moral obvladati, zatem sledijo vsebine, namenjene za posamezni letnik.
Opažamo, da se učna načrta precej razlikujeta. Slovenski ni razdeljen po letnikih, hrvaški pa je. V hrvaškem ni medpredmetnih povezav, niti vrednotenja dosežkov. Razlikujeta se tudi po kvantiteti zapisanega, slovenski ima 49 strani, medtem ko jih ima hrvaški samo štiri.

Razčlenitev in opredelitev raziskovalnega problema
Raziskovalni problem sestavlja primerjavo stališč slovenskih in hrvaških učiteljev glede ustreznosti učnih načrtov in glede pripravljenosti za oz. potrebe po spremembah.

Raziskovalna vprašanja

Vprašanje 1: Ali obstajajo razlike v stališčih slovenskih in hrvaških učiteljev/profesorjev matematike o vsebinah, ki so vključene v učne načrte, in tistih, ki niso.
Vprašanje 2: Ali obstajajo razlike v stališčih slovenskih in hrvaških učiteljev/profesorjev matematike o primernosti težavnosti matematike v osnovnih oz. srednjih šolah.
Vprašanje 3: Ali obstajajo razlike v pripravljenosti slovenskih in hrvaških učiteljev/profesorjev matematike za spremembe v učnem načrtu ali pa so zadovoljni s trenutnimi razmerami.

Raziskovalna metoda

V našem primeru smo izdelali dve anketi. Eno za hrvaške učitelje/profesorje matematike in eno za slovenske učitelje/profesorje matematike. Obe sta vsebovali podobna vprašanja, prilagojena razlikam v učnih načrtih, ter enaka vprašanja, ki so nam omogočila, da spoznamo in primerjamo njihova stališča. Imeli sta 14 vprašanj, od katerih so bila prva tri enaka v obeh, saj so to bila splošna vprašanja o anketirancu. Naslednjih osem vprašanj se je razlikovalo po državah, so se pa nanašala na razlike v učnih načrtih. Zadnja tri vprašanja so bila prav tako enaka v obeh anketah in so se nanašala na stališča anketirancev o učnih načrtih iz matematike.
V raziskavi smo se omejili samo na učitelje oz. profesorje matematike. Glede na to, da nam je bila zelo pomembna ustrezna velikost vzorca, smo zbrali 105 vprašalnikov, ki so jih izpolnili slovenski anketiranci, in 111 vprašalnikov, ki so jih izpolnili hrvaški.
Za statistično analizo podatkov smo uporabili računalniški program SPSS.

Rezultati

Hipoteza 1: Predpostavljam, da med učitelji, ki učijo v slovenski osnovni šoli, in učitelji, ki učijo v osnovni šoli na Hrvaškem, ne bo razlik v pripravljenosti za vključevanje sprememb v učni načrt.

Tabela 1: Razlike med državama glede vključevanja sprememb v osnovnih šolah

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2"></th><th colspan="2">Vključevanje sprememb</th><th rowspan="2">Skupaj</th></tr>
<tr><th>DA</th><th>NE</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Država</td><td rowspan="2">SLO</td><td>f</td><td>43</td><td>62</td><td>105</td></tr>
<tr><td>f%</td><td>40,7 %</td><td>59,3 %</td><td>100,0 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">HR</td><td>f</td><td>61</td><td>50</td><td>111</td></tr>
<tr><td>f%</td><td>54,7 %</td><td>45,3 %</td><td>100,0 %</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Skupaj</td><td>f</td><td>106</td><td>110</td><td>216</td></tr>
<tr><td>f%</td><td>48,9 %</td><td>51,1 %</td><td>100,0 %</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vrednosti neodvisnega t-testa</td><td colspan="4">F[1] = 6,955 P[2] = 0,009 t[3] = 3,945 P[4] = 0,000</td></tr>
</table>

Iz tabele 1 v odstotkih vidimo, da je bilo 54,7 % hrvaških učiteljev za vključevanje sprememb, slovenskih učiteljev pa 40,7 %. Iz tabele 1 je razvidno,da je med skupinama prišlo do razlik. S t-testom pa smo preverili, ali so te razlike dovolj velike, da jih lahko statistično potrdimo.

Ker je signifikanca (stopnja zaupanja) <0,05, pomeni, da je med skupinama prišlo do statistično pomembne razlike (razlika je dovolj velika, da jo lahko potrdimo).

Zato hipotezo 1, ki pravi, da med učitelji, ki učijo v osnovni šoli v Sloveniji, in učitelji, ki učijo v osnovni šoli na Hrvaškem, ne bo razlik, zavrnemo.

Možno je, da je prišlo do takšnega rezultata zato, ker so učitelji v Sloveniji bolj zadovoljni s trenutnim učnim načrtom, medtem ko učitelji na Hrvaškem želijo spremembe in niso zadovoljni s trenutnim stanjem. Obstaja možnost, da je dana ugotovitev posledica dotrajanosti ali dolgoletne utečenosti učnega načrta matematike

[1] F = Vrednost Levenovega testa
[2] P = Stopnja zaupanja Levenovega testa
[3] t = Vrednost T-testa
[4] P = Signifikanca

za osnovne šole. Saj je začel veljati leta 2006 in je v času raziskave dopolnil 10 let od implementacije.

Hipoteza 2: Med učitelji, ki učijo v srednji šoli v Sloveniji, in učitelji, ki učijo v hrvaški srednji šoli, ne bo razlik v pripravljenosti za vključevanje sprememb v učni načrt.

Tabela 2: Razlike med državama glede vključevanja sprememb v srednjih šolah

			Vključevanje sprememb		Skupaj
			DA	NE	
Država	SLO	f	50	55	105
		f%	47,2 %	52,8 %	100,0 %
	HR	f	62	49	111
		f%	56,3 %	43,7 %	100,0 %
Skupaj		f	112	104	216
		f%	51,4 %	48,6 %	100,0 %
Vrednosti neodvisnega t-testa		**F[5] = 3,947 P[6] = 0,047 t[7] = 2,68 P[8] = 0,007**			

Iz tabele 2 v odstotkih vidimo, da so se hrvaški učitelji bolj odločali za vključevanje sprememb, in sicer jih je bilo za spremembe 56,3 %, slovenskih pa 47,2 %. Očitno je, da je med skupinama prišlo do razlike. Ker je signifikanca (stopnja zaupanja) <0,05, pomeni, da je med skupinama prišlo do statistično pomembne razlike (razlika je dovolj velika, da jo lahko potrdimo). Zato hipotezo 2 zavrnemo.
Iz rezultatov lahko sklepamo, da so tudi profesorji v srednjih šolah v Sloveniji zadovoljni s trenutnimi učnimi načrti in ne želijo sprememb, medtem ko so pa profesorji na Hrvaškem bolj nezadovoljni s stanjem učnih načrtov in želijo spremembe. Iz zgornjih rezultatov povzemamo, da so se hrvaški učitelji/profesorji matematike bolj strinjali z vključevanjem sprememb v učni načrt kot slovenski.

Hipoteza 3: Predpostavljam, da med učitelji, ki so izobraževanje končali na pedagoških fakultetah, in učitelji, ki so izobraževanje končali na naravoslovno-matematičnih fakultetah, ne bo razlik v pripravljenosti za vključevanje sprememb v učne načrte.

[5] F = Vrednost Levenovega testa
[6] P = Stopnja zaupanja Levenovega testa
[7] t = Vrednost t-testa
[8] P = Signifikanca

Tabela 3: Razlike med študiji glede vključevanja sprememb v šolah

			Vključevanje sprememb		Skupaj
			DA	NE	
Študij	Pedagoška	f	59	73	132
		f%	44,7 %	55,3 %	100,0 %
	FNM	f	45	39	84
		f%	53,5 %	46,5 %	100,0 %
Skupaj		f	104	112	216
		f%	50,1 %	49,9 %	100,0 %
Vrednosti neodvisnega t-testa		**F[9] = 2,07 P[10] = 0,15 t[11] = 3,51 P[12] = 0,000**			

Učitelji, ki so izobraževanje končali na pedagoški fakulteti, so se za vključevanje sprememb odločali v 44,7 %, medtem ko so se profesorji, ki so izobraževanje zaključili na FNM, v 53,5 %. Iz tabele 3 je razvidno, da je prišlo do razlike, ki smo jo preverili s t-testom, ali je statistično značilna. Ker je signifikanca (stopnja zaupanja) <0,05, je med skupinama prišlo do statistično pomembne razlike. Zato hipotezo 3 zavrnemo.
Verjetno je rezultat posledica preprostega dejstva, da imajo anketiranci s končano naravoslovno-matematično fakulteto bolj poglobljeno matematično znanje kot anketiranci s končano pedagoško fakulteto. Zato so tudi mnenja, da so v matematičnih učnih načrtih možne izboljšave.

Hipoteza 4: Predpostavljam, da med učitelji v Sloveniji in učitelji na Hrvaškem ne bo razlik v njihovih stališčih glede stopnje zahtevnosti matematike v osnovni šoli.

Tabela 4: Razlika glede stopnje zahtevnosti v osnovni šoli

Stopnja zahtevnosti v osnovni šoli	N	Povprečna ocena	Standardni odklon	Standardna napaka povprečja
SLOVENIJA	95	2,768	0,659	0,067
HRVAŠKA	108	2,518	0,648	0,062
Vrednosti neodvisnega t-testa	**F[13] = 1,81 P[14] = 0,18 t[15] = 2,72 P[16] = 0,007**			

Povprečna ocena stopnje zahtevnosti v osnovni šoli je pri slovenskih učiteljih 2,77 in pri standardnem odklonu 0,66, pri učiteljih hrvaških šol pa 2,52 in pri standardnem odklonu 0,65. Vidimo, da je signifikanca (stopnja zaupanja) <0,05, zato je med

[9] F = Vrednost Levenovega testa
[10] P = Stopnja zaupanja Levenovega testa
[11] t = Vrednost t-testa
[12] P = Signifikanca

[13] F = Vrednost Levenovega testa
[14] P = Stopnja zaupanja Levenovega testa
[15] t = Vrednost t-testa
[16] P = Signifikanca

skupinama prišlo do statistično pomembne razlike. Na podlagi teh ugotovitev lahko hipotezo 4 zavrnemo.
Opažamo, da so učitelji v Sloveniji mnenja, da je težavnost matematike v osnovni šoli kar precej zahtevna, medtem ko učitelji na Hrvaškem mislijo, da težavnost ni prezahtevna.

Hipoteza 5: Predpostavljam, da med slovenskimi in hrvaškimi učitelji ne bo razlik v njihovih mnenjih glede stopnje zahtevnosti matematike v srednji šoli.

Tabela 5: Razlika v stopnji zahtevnosti v srednji šoli

Stopnja zahtevnosti v srednji šoli	N	Povprečna ocena	Standardni odklon	Standardna napaka povprečja
SLOVENIJA	91	2,813	0,613	0,064
HRVAŠKA	99	2,878	0,500	0,050
Vrednosti neodvisnega t-testa	**F[17] = 5,68**	**P[18] = 0,018**	**t[19] = 0,81**	**P[20] = 0,419**

Povprečna ocena stopnje zahtevnosti v srednji šoli pri slovenskih učiteljih je bila 2,81 pri standardnem odklonu 0,61, pri učiteljih hrvaških šol pa 2,88 pri standardnem odklonu 0,5.

Ker je signifikanca (stopnja zaupanja) >0,05, smo obdržali ničelno hipotezo glede na t-test, ki pravi, da med povprečji skupin ni pomembnih razlik oz. se povprečji statistično značilno ne razlikujeta.

Kljub majhni razliki iz tabele 5 med povprečjema smo s t-testom ugotovili, da je razlika premajhna, da bi jo lahko potrdili kot statistično značilno, zato hipotezo 5 potrdimo.

Iz anketnih rezultatov opažamo, da se profesorji matematike v Sloveniji in na Hrvaškem strinjajo s stopnjo zahtevnosti matematike v srednjih šolah. Tako eni kot drugi menijo, da je slednja na visoki ravni.

Hipoteza 6: Predpostavljam, da med slovenskimi in hrvaškimi učitelji ne bo razlik v številu predlogov za izboljšavo učnih načrtov v osnovnih in srednjih šolah.

[17] F = Vrednost Levenovega testa
[18] P = Stopnja zaupanja Levenovega testa
[19] t = Vrednost t-testa
[20] P = Signifikanca

Tabela 6: Razlika v številu komentarjev glede na državo

			Komentarji		Skupaj
			DA	NE	
Država	SLO	f	59	46	105
		f%	56,2 %	43,8 %	100,0 %
	HR	f	48	63	111
		f%	43,2 %	56,8 %	100,0 %
Skupaj		f	107	109	216
		f%	49,5 %	50,5 %	100,0 %
Vrednosti neodvisnega t-testa		**F[21] = 0,56 P[22] = 0,81 t[23] = -2,71 P[24] = 0,008**			

Število komentarjev slovenskih učiteljev v anketi je bilo 59 od 105, kar predstavlja 56,2-odstotni delež. Število komentarjev hrvaških učiteljev pa je bilo 48 od 111 možnih, kar pa predstavlja 43,2-odstotni delež. Med skupinama je ponovno prišlo do vidne razlike v deležih komentarjev.

Ker je signifikanca (stopnja zaupanja) <0,05, pomeni, da je med skupinama prišlo do statistično pomembne razlike; s tem smo računsko le še potrdili našo domnevo. Na podlagi teh ugotovitev lahko hipotezo 6 zavrnemo.

Učitelji v Sloveniji so imeli precej več komentarjev in predlogov kot njihovi hrvaški kolegi. Glede na rezultate hipotez 1 in 2 nismo pričakovali takega rezultata, sploh ker učitelji/profesorji v Sloveniji niso pripravljeni na spremembe učnih načrtov in so zadovoljni s trenutnim položajem, imajo pa veliko predlogov za izboljšanje stanja.

Sklep

Srečali smo se z mnogimi in velikimi razlikami v šolskih sistemih obeh držav. Ena večjih razlik je seveda že trajanje osnovnošolskega izobraževanja. Na Hrvaškem imajo dijaki možnost izbrati naravoslovno-matematično gimnazijo, medtem ko v Sloveniji te možnosti ni. Pri visokošolskem izobraževanju nismo naleteli na razlike, kar smo tudi pričakovali, saj imata obe državi bolonjski sistem. Rrazlika je le v letu uvedbe bolonjskega sistema. Pri primerjavi učnih načrtov za osnovne šole smo opazili, da enajstih vsebin, kot so vektorji, seštevanje in odšetavanje vektorjev, obrestni račun idr., ki so v hrvaškem matematičnem učnem načrtu, ni v slovenskem. Po drugi strani pa je v slovenskem učnem načrtu kar 45 vsebin, kot so neenačbe, merila za sredino in razpršenost idr., ki pa jih ni v hrvaškem. V slovenskih gimnazijskih učnih načrtih ni 13 vsebin, ki so v hrvaških (prostornina poševne prizme, prisekani stožec, prisekana piramida, trigonometrične neenačbe idr.), in obratno na Hrvaškem ne obravnavajo 53 vsebin, ki so v slovenskem učnem načrtu (statistika, polinomske neenačbe, povezava med skalarnim produktom in kosinusnim izrekom idr.). Pri maturah so se prav tako pojavile razlike. V Sloveniji lahko dijaki opravljajo splošno ali poklicno maturo, medtem ko je na Hrvaškem samo splošna matura. Pogledali smo tudi uspehe tekmovalcev obeh držav na treh najbolj znanih matematičnih tekmovanjih (Srednjeevropska matematična olimpijada, Evropski matematični kup, Internacionalna matematična

[21] F = Vrednost Levenovega testa
[22] P = Stopnja zaupanja Levenovega testa
[23] t = Vrednost t-testa
[24] P = Signifikanca

olimpijada). Ugotovili smo, da Hrvaška na teh tekmovanjih dosega precej boljše rezultate.

Prikazali in analizirali ter statistično obdelali smo rezultate ankete, ki smo jo izvedli pri učiteljih matematike v Sloveniji in na Hrvaškem. Namen ankete je bil, da spoznamo njihova stališča in mnenja o trenutnem stanju učnih načrtov, o težavnosti matematike v osnovnih in v srednjih šolah, ter jih vprašamo, ali imajo kakšne predloge za njihovo izboljšanje. Postavili smo 6 hipotez, in sicer ničelno, kar pomeni, da smo bili mnenja, da ker gre za sosednji državi s skupno zgodovino, med njima ne bo odstopanj. Vendar smo bili po statistični analizi presenečeni. Vse hipoteze razen ene smo zavrnili. Prišli smo do sklepa, da so učitelji na Hrvaškem bolj pripravljeni na spremembe učnih načrtov kot učitelji v Sloveniji, tako v osnovnih kot tudi v srednjih šolah. Učitelji s končano naravoslovno-matematično fakulteto so bili bolj pripravljeni na spremembe kot učitelji s končano pedagoško fakulteto. Kar se težavnosti matematike v osnovnih šolah tiče, so bili učitelji v Sloveniji mnenja, da je težavnost precej velika, medtem ko so učitelji na Hrvaškem menili, da ne. Edina hipoteza, pri kateri so učitelji obeh držav enotnega mnenja, je, da je težavnost matematike v srednjih šolah zahtevna. Učitelji iz Slovenije so imeli precej več predlogov in komentarjev v zvezi z učnimi načrti za osnovne in srednje šole kot učitelji iz Hrvaške.
Primerjava učnih načrtov in uspehov na tekmovanjih kaže, da je hrvaški učni načrt učinkovitejši (vsaj za matematično sposobnejše učence) kot slovenski. Kljub temu hrvaški učitelji kažejo večjo naklonjenost spremembam učnih načrtov. Menimo, da do tega prihaja zato, ker je hrvaški učni načrt starejši kot slovenski. Ker je šolski sistem izjemno občutljiva stvar, je po našem mnenju spremembe treba vpeljevati počasi in previdno.

Kakor koli že, namen te raziskave je bil ugotoviti dejanska stališča in mnenja učiteljev matematike v obeh državah, pri čemer smo bili uspešni. Čeprav sta Slovenija in Hrvaška sosedi s skupno preteklostjo, so v poučevanju matematike razlike precejšnje in raziskava je to tudi dokazala.

Viri

1. Sabo, M. (2016): Stališča slovenskih in hrvaških učiteljev o razlikah med kurikularnimi matematičnimi vsebinami v obeh izobraževalnih sistemih. Magistrsko delo. Maribor: Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko.

MATEMATIKA PRI POUKU TUJEGA JEZIKA
Mathematics in Foreign Language Teaching

Dr. Alenka Lipovec[1], dr. Martina Rajšp[1], dr. Alja Lipavic Oštir[2]
alenka.lipovec@um.si, martina.rajsp@um.si, alja.lipavic@um.si
[1]Univerza v Mariboru Pedagoška fakulteta/Oddelek za razredni pouk
[2]Univerza v Mariboru Filozofska fakulteta/Oddelek za germanistiko in UCM Trnava/Oddelek za germanistiko, Slovaška

Povzetek
Razvoj matematičnih kompetenc je sestavni del pristopa Content Language Integrated Learning. Žal prihaja v izvedbeni praksi večkrat do t. i. kognitivnega poniževanja, saj so matematične vsebine zaradi prilagoditev, ki so potrebne v okolju tujega jezika, pretirano poenostavljene. V prispevku predstavljamo izsledke raziskav s tega področja, ki poudarjajo, da ob učinkoviti praksi do tega ne prihaja. Predstavimo tudi nekatere problemsko zasnovane matematične izzive, ki jih je možno udejanjiti tudi pri začetnem pouku drugega tujega jezika. Poudarimo, da je potrebna previdnost pri izbiri matematičnih problemov, če želimo doseči dvig jezikovnih in matematičnih kompetenc učencev.

Abstract
Development of mathematical competence is an integral part of the Content Language Integrated Learning approach. Unfortunately, in classroom practice students' are not cognitively challenged, as the mathematical content is over-simplified due to the adjustments that are needed in the environment of a foreign language learning. The paper presents the results of research in this area, pointing out that the effective practice alleviate that phenomenon. We also present some problem-based mathematical challenges, which can be realized even in the initial teaching of a second foreign language. Such carefully chosen mathematical problems raise students' linguistic and mathematical competencies.

Ključne besede
CLIL, problemsko orientiran pristop, zgodnje učenje in poučevanje

Keywords
CLIL, problem oriented approach, early learning and teaching

Uvod

Pri pouku tujega jezika se tudi v Sloveniji vse bolj uveljavlja pristop CLIL (ang. *Content Language Integrated Learning*), ki predvideva usvajanje jezikovnih kompetenc skozi usvajanje nejezikovnih (v našem primeru matematičnih) kompetenc. Kratica CLIL je krovno poimenovanje za različne oblike pristopa, pri katerem učenci skozi usvajanje nejezikovnih vsebin usvajajo tujejezikovne spretnosti. Spekter oblik CLIL-a sega od tako imenovanega jezikovnega tuširanja do popolne imerzije, pri čemer je kriterij določevanja posamezne oblike predvsem količina jezikovnega vnosa. Razlogi za aktualnost in smiselnost ter uspeh CLIL-a so različni in segajo na socialno-ekonomsko področje kot tudi na možnost kulturnega ozaveščanja in medkulturnega razumevanja. Ob vsem tem pa je stalnica dejstvo, da je CLIL kot pristop izjemno uspešen, saj se najbolj približuje naravnemu usvajanju jezika. Trenutna zakonodaja v Sloveniji praviloma ne dopušča uvajanja CLIL-a v okviru nejezikovnih predmetov, torej razmišljamo predvsem o uvajanju CLIL-a v okviru pouka tujih jezikov. To predvidevata tudi nova učna načrta za prvi tuji jezik (2013) in drugi tuji jezik (2013) v osnovni šoli. S šolskim letom 2014/2015 smo v slovenske šole začeli vpeljevati obvezni prvi tuji jezik v drugem razredu in izbirni drugi tuji jezik v četrtem razredu. Posebej pri drugem se pojavljajo mnoge težave. Lipavic Oštir, Lipovec in Rajšp (2015a) izpostavljajo naslednje: a) drugi tuji jezik je v podrejenem položaju glede na prvi tuji jezik (v Sloveniji je to angleščina), b) pouk poteka kot izbirni predmet, c) prihaja do podvajanja vsebin pri prvem in drugem tujem jeziku in d) gradiva za učence brez jezikovnega predznanja so kognitivno zelo preprosta.

Na izvedbeni ravni se zato vse prevečkrat dogaja, da je matematika v tujem jeziku znotraj pristopa CLIL omejena na poučevanje izrazov za števila in osnovne računske operacije v tujem jeziku. Namen prispevka je predstaviti teoretična in empirična spoznanja, ki lahko to prakso omilijo. Podali bomo izsledke tujih in domačih raziskav s tega področja, nekaj konkretnih primerov problemsko zasnovanih nalog in napotkov, kako jih vnesti v pouk tujega jezika.

CLIL

Uspešnost pristopa CLIL potrjuje vrsta raziskav (prim. delni pregled pri Sylven in Thompson, 2015). Učitelji, ki poučujejo po pristopu CLIL, se na splošno zavedajo, da je potrebna sprememba paradigme poučevanja, pouk postane bolj nazoren, osredotočen na učenca, ki v procesu pridobivanja znanja prevzema aktivno vlogo (Lyster in Ballinger, 2011). Pouk tujega jezika, ki sledi smernicam problemske orientiranosti znotraj CLIL-a, označuje na učenca osredotočen pouk z aktivno vlogo učenca, ki jo dosežemo skozi kognitivne izzive, kakršni so lahko matematični problemi. Rajšp, Lipavic Oštir in Lipovec (2016a) so s kvalitativno analizo refleksij, ki so jih zapisali učitelji po poskusnem izvajanju pouka tujega jezika s pristopom CLIL, oblikovale osem tem, ki ilustrirajo empirična spoznanja učiteljev: prepričanja učiteljev o CLIL-u, prevladujoče učne aktivnosti, medpredmetnost, usvajanje jezikovnih kompetenc, profesionalni razvoj učitelja, kognitivni izzivi za učence, sprememba didaktične poti in sprememba paradigme poučevanja tujih jezikov v nižjih razredih osnovne šole ob uvajanju CLIL-a. Med temami, ki so se izoblikovale, so bile nekatere bolj pričakovane in nekatere manj. Pričakovano so učitelji kritično razmišljali o začetnih nelagodnih prepričanjih in nastali spremembi paradigme poučevanja, o paleti učnih aktivnosti in spremembi didaktične poti, o medpredmetnosti in nujnosti profesionalnega razvoja učitelja. Razveseljujoča je ugotovitev o spremenjeni paradigmi poučevanja, ki je bila zaznavna v refleksijah. Prej nezaupljivi in dvomeči, včasih celo delno anksiozni učitelji so po poskusnem izvajanju izražali trdno prepričanost o učinkovitosti pristopa, ki so ga utemeljevali skozi motivacijo in učne dosežke učencev ter zavedanje o nujnosti sprememb pri načinu poučevanja.

V Sloveniji so Lipavic Oštir, Lipovec in Rajšp (2015a), ki se sicer niso posebej osredotočile na matematiko, potrdile izsledke tujih raziskav, ki kažejo, da so naravoslovno-matematične vsebine za CLIL primernejše od družboslovnih vsebin, ki so večkrat obremenjene z besediščem, ki ne ustreza SEJO (Skupni evropski jezikovni okvir) za mlajše učence. Pri izbiri matematičnih problemov je seveda treba razen matematično pogojenih zahtev (npr. primerna kognitivna zahtevnost, možnost transferja, možnost diferenciacije …) upoštevati tudi primerno jezikovno zahtevnost. Figueiredo Alvarenga (2012) meni, da četrtošolci lahko uspešno kombinirajo angleščino kot jezik sporazumevanja in matematiko pri reševanju matematičnih problemov že po petih polurnih lekcijah. Portugalska raziskovalka je ugotovitev potrdila na manjšem vzorcu 18 učencev, ki so se v obliki interesne dejavnosti v angleščini spoprijemali z deduktivnim sklepanjem znotraj kontekstualiziranih matematičnih problemov. Mnogo večjo raziskavo so izvedli na Finskem. V okviru leto dni trajajočega pedagoškega eksperimenta s skoraj 700 učenci osnovne šole so eksperimentalno skupino poučevali matematiko v angleščini, francoščini in švedščini. Ugotovili so, da imajo mlajši učenci sicer nekaj težav z zelo abstraktnimi koncepti, a so proceduralno in konceptualno boljši od kontrolne enojezične skupine (Jäppinen, 2006).

Češki raziskovalci ugotavljajo, da učitelji, ki učijo po pristopu CLIL, uporabljajo bolj interaktivne tehnike poučevanja (Novotná in Moraová, 2005), saj se zavedajo tega, da učenci verbalne razlage ne razumejo popolnoma. Hkrati pa izpostavljajo nekatere kulturne in terminološke posebnosti, na katere mora biti učitelj pozoren pri uporabi pristopa CLIL. Do težav lahko pride, če gradiva za tuji jezik (npr. angleški učbenik za matematiko) nekritično prenesemo v drugo okolje (npr. kot gradivo za CLIL na Češkem).

Pregled učnih gradiv za pouk tujega jezika v tujini (Banegas, 2014) in v Sloveniji (Lipavic Oštir, Lipovec in Rajšp, 2015a) kaže, da so gradiva večkrat kognitivno premalo zahtevna, zaradi česar prihaja do t. i. kognitivnega poniževanja učencev, ki posledično vodi v upad motivacije.

Matematični problemi

Problemski pouk kot vodilna paradigma aktivnega učenja, osredinjenega na učenca, se vse bolj uveljavlja tudi v slovenskih šolah. Prednjačijo področja, kot sta matematika in naravoslovje, ki po naravi stroke izhajajo iz kognitivnih problemov, vezanih na razumevanje okolja. Tudi družboslovje (npr. zgodovina) sledi temu trendu, zdi pa se, da tuji jeziki nekoliko zaostajajo. V nadaljevanju prispevka bomo podale nekaj konkretnih primerov, skozi katere lahko v šoli dosegamo problemska znanja. Problemi so bili preizkušeni v praksi in so dostopni med viri za učitelje (Lipavic, Lipovec in Rajšp, 2015b; Lipavic, Lipovec in Rajšp, 2015c; Lipavic, Lipovec in Rajšp, 2016b; Lipavic, Lipovec in Rajšp, 2016c).

V prvih urah pouka tujega jezika se npr. učenci učijo, kako se predstavimo drugim ljudem. To situacijo lahko preoblikujemo v problem rokovanja (ang. *The Hand Shake Problem*). Problem si oglejmo podrobneje skozi prizmo pouka tujega jezika. V sobi je deset ljudi, ki se med seboj ne poznajo. Zanima nas, koliko rokovanj je potrebnih, da se vsi predstavijo. Pri enem rokovanju se, kot je v življenjski situaciji, običajno prva oseba predstavi drugi in druga oseba prvi. Nalogo lahko učenec reši s preprostim razmislekom. Prva oseba se mora predstaviti devetim neznanim osebam, druga oseba se mora predstaviti le še osmim osebam, tretja le še sedmim itd. Situacija rokovanja se torej prevede v iskanje vrednosti vsote prvih devetih naravnih števil. Že učenci konec prvega VIO imajo vsa potrebna znanja in spretnosti, da izračunajo tako vsoto. Učitelj pa lahko dodatno na to situacijo naveže anekdoto o Gaussu in pokaže učinkovit način izračunavanja vsote nekaj prvih naravnih števil. Začutimo lahko, da v omenjenem problemu znanje, ki ga učenec pridobi, zelo presega rutinske računske veščine. Učenec je moral situacijo najprej analizirati, iskal je različne poti reševanja (morda je kaj narisal, poskušal z manjšim številom oseb), preučeval pravila, ki se pojavljajo … Rokovanja smo izbrali kot primer za problem zato, ker jih zlahka umestimo v kontekst poučevanja tujih jezikov. V začetnih urah se učenci mnogokrat predstavljajo. Sama situacija ni preveč motivirajoča. Učitelj, ki namesto direktnega poučevanja predstavljanja pred učence zastavi nalogo *rokovanja*, doseže dvig motivacije. Dodati mora le napotek, da se učenci skozi igro vlog zares predstavljajo, in prikazati demonstracijski primer, ko se sam predstavi nekaj učencem. Učenci se bodo predstavljali, a ne zato, da bi rutinsko vadili fraze predstavljanja, ampak zato ker jih bo zanimal odgovor na vprašanje, koliko predstavitev je potrebnih. Učitelj jim bo morda svetoval, naj se dela lotijo najprej v manjših skupinah, npr. štirih ali petih učencev, nato pa jih bo usmeril v sistematično zapisovanje rešitev. Jezikovno bo od njih morda pričakoval različne oblike predstavitve, ki so bolj ali manj formalne. Pri problemskem pouku tako prihaja do naravne diferenciacije tako na jezikovnem kot na nejezikovnem nivoju. Bistveno pa je, da bodo učenci začutili nejezikovni kognitivni izziv.

Na drugi strani obstajajo matematični problemi, katerih terminologija presega SEJO (npr. poimenovanje likov/teles, krožnica, zaporedja, ulomki …). Ti problemi niso primerni za pouk tujega jezika, dokler jih ne preoblikujemo v jezikovno ustreznejše probleme. V četrtem razredu lahko izvedemo usvajanje pojma krožnica, če matematični pojem postavimo v realni kontekst okrogle cvetlične grede. Besedišče je tako usklajeno s SEJO, odpovedati se moramo le matematičnemu izrazu za krožnico v tujem jeziku. Krožnico tako npr. »preimenujemo« v rob okrogle grede z rožami, razdalja med rožami in središčem grede (kamor lahko postavimo vodnjak) pa predstavlja polmer, ki ga v tujem jeziku ne poimenujemo. Tudi v drugih primerih lahko s tem, da matematično vsebino postavimo v realen kontekst in opustimo za razvoj nejezikovnih kompetenc nepomembno matematično terminologijo, dosežemo učinkovito izvedbo tudi pri učencih, katerih jezikovno predznanje je šibko.

Matematika predstavlja ugodno okolje za pouk tujega jezika, ker lahko kontekst problema prilagajamo jezikovnemu predznanju učencev. Ilustrirajmo to na primeru znanega problema Volk, koza in zelje. Problem govori o možu, ki mora v čolnu prepeljati čez reko volka, kozo in zelje, vendar je v čolnu prosto le zanj in še enega. Če mož pusti na bregu samega volka s kozo, bo volk kozo požrl, če pusti kozo z zeljem, bo koza požrla zelje. Učenci kmalu ugotovijo, kdo/kaj se čez reko pelje prvi. Večinoma se jim ustavi, ker ne ugotovijo, da lahko nekoga oz. nekaj peljejo tudi nazaj. Največkrat jim je to dejstvo treba izpostaviti, vendar je veliko bolj učinkovito, da to spoznajo sami. Problem je kognitivno dovolj zahteven, da predstavlja četrtošolcem izziv. Možno ga je predstaviti tudi učencem z zelo šibkim jezikovnim predznanjem, še posebej če uporabimo igro vlog. Dodatno lahko kontekst prilagajamo besedišču, ki ga učenci že obvladajo. V božičnem kontekstu lahko kozo spremenimo v jelenčka Rudolfa. Če učenci izraza za zelje ne poznajo, poznajo pa izraz za korenje, lahko brez težav uporabimo ta izraz. S tem omogočimo izvajanje t. i. jezikovne zanke, ki je pri pouku tujega jezika zelo pomembna.

Sklep

Matematika ponuja mnogo znanih problemov (npr. problem Montyja Halla ali problem königsberških mostov), ki so lahko izvrsten vir kognitivno primerno zahtevnih problemov za pouk tujega jezika, saj jezikovne kompetence razvijamo, če le izberemo primeren kontekst. Nekateri izmed teh problemov so že didaktizirani v slovenskih gradivih za drugi tuji jezik (Lipavic Oštir, Lipovec in Rajšp, 2015b, 2015c, 2016b, 2016c). Kljub temu pa lahko iskanje matematičnih problemov, ki so primerni za metodo CLIL, predstavlja celo izkušenemu učitelju matematike izziv, kajti razen na kognitivno zahtevnost mora biti pozoren tudi na besedišče. Da to dosežemo, je nujno tesno sodelovanje med učiteljem matematike in učiteljem tujega jezika. Menimo, da lahko ob upoštevanju zgoraj zapisanih omejitev vključevanje matematičnih problemov v pouk tujega jezika učinkovito dvigne motivacijo učencev in pripomore k razvoju tako matematične kot jezikovne kompetence. Poudarjamo pa, da se mora spremeniti paradigma poučevanja in da je nujno biti previden pri nekritičnem vnosu tujih gradiv v slovenski šolski prostor.

Viri

1. Banegas, D. L. (2014): An investigation into CLIL-related sections of EFL coursebooks: issues of CLIL inclusion in the publishing market. International Journal of Bilingual Education and Bilingualism, letn. 17, št. 3, str. 345–359.
2. Figueiredo Alvarenga, D. M. (2012): Developing Young Learners' Logical/Deductive Thinking Skills and Second Language Skills through a CLIL approach. Pridobljeno 23. 11. 2016 s http://run.unl.pt/handle/10362/8651.
3. Jäppinen, A. K. (2005): Thinking and content learning of mathematics and science as cognitional development content and language integrated learning (CLIL): Teaching through a foreign language in Finland. Language and Education, letn. 19, št. 2, str. 148–169.
4. Lipavic Oštir, A., Lipovec, A., Rajšp, M: (2015a). CLIL – orodje za izbiro nejezikovnih vsebin. Revija za elementarno izobraževanje, letn. 8, št. 1/2, str. 11–26.
5. Lipavic Oštir, A., Lipovec, A., Rajšp, M: (2015b). Bunte Welt : delovni učbenik za pouk nemškega jezika v 4. razredu osnovne šole. Založba Obzorja, Maribor.
6. Lipavic Oštir, A., Lipovec, A., Rajšp, M: (2015c). Bunte Welt : priročnik za učitelje k delovnemu učbeniku za pouk nemškega jezika v 4. razredu osnovne šole. Založba Obzorja, Maribor.
7. Lipavic Oštir, A., Rajšp, M., Lipovec (2016a): Problemski pristop pri pouku tujih jezikov. V: Zbornik prispevkov Inovativna učna okolja: 12. mednarodni znanstveni sestanek, PEF UP, Koper, sprejeto v objavo.
8. Lipavic Oštir, A., Lipovec, A., Rajšp, M. (2016b): Bunte Welt : delovni učbenik za pouk nemškega jezika v 4. razredu osnovne šole. Založba Obzorja, Maribor.
9. Lipavic Oštir, A., Lipovec, A., Rajšp, M. (2016c): Bunte Welt : priročnik za učitelje k delovnemu učbeniku za pouk nemškega jezika v 4. razredu osnovne šole. Založba Obzorja, Maribor.
10. Lyster, R., Ballinger, S. (2011): Content-based language teaching: Convergent concerns across divergent contexts. Language Teaching Research, letn. 15, št. 3, str. 279–288.
11. Novotná, J., Moraová, H. (2005): Cultural and linguistic problems in the use of authentic textbooks when teaching mathematics in a foreign language. ZDM, letn. 37, št. 2, str. 109–115.
12. Rajšp, M., Lipavic Oštir, A., Lipovec, A. (2016): Refleksije učiteljev ob poskusnem izvajanju CLIL-a v prvih treh razredih osnovne šole. V: HORVAT, Tadeja (ur.) et al., Novodobni izzivi družbe : znanstvena monografija (str. 168–180). Rakičan: RIS Dvorec.
13. Sylvén, L. K., Thompson, A.S . (2015): Language learning motivation and CLIL. Is there an connection? Journal of Immersion and Content-Based Language Education, letn. 3, št. 1, str. 28–50.