Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

PRIROČNIK MERIA ZA POUČEVANJE MATEMATIKE S PREISKOVANJEM

Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

Britta Jessen, Michiel Doorman, Rogier Bos

Priročnik MERIA za poučevanje matematike s preiskovanjem

Angleški izvirnik:
MERIA Practical Guide to Inquiry Based Mathematics Teaching
http://www.meria-project.eu/activities-results/practical-guide-ibmt
www.meria-project.eu

uredil
Carl Winsløw

Oblikovanje in slikovno gradivo
Irina Rinkovec

Prevod v slovenščino
Ensitra prevajanje, Brigita Vogrinec s.p.

Strokovna redakcija slovenskega prevoda
Mojca Suban, Sonja Rajh, Mateja Sirnik

Ilustracije
Rogier Bos, Matija Bašić, Ivan Kokan, Eva Špalj

Izdal: Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Za zavod: dr. Vinko Logaj
Ljubljana, 2017

Publikacija je objavljena na povezavi https://www.zrss.si/pdf/prirocnik-meria-za-matematiko.pdf

----
Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani
COBISS.SI-ID=293081600
ISBN 978-961-03-0388-6 (pdf)

Kazalo

Uvod

Ta knjižica predstavlja teoretsko osnovo projekta MERIA in je namenjena predvsem kot podpora pri oblikovanju scenarijev in modulov znotraj projekta ter analiziranju in vrednotenju njihovih učinkov.

Cilj projekta MERIA je spodbujanje uporabe pomembnih, zanimivih in uporabnih matematičnih dejavnosti pri pouku matematike v srednjih šolah. Glavna hipoteza projekta je, da se dijaki s pomočjo takšnih dejavnosti resneje lotijo matematičnih problemov kot pri reševanju vaj z uporabo vnaprej določenih metod. V resnici je »paradigma vaj« v številnih vsakodnevnih praksah poučevanja matematike (vključno s predmeti na srednješolski in celo univerzitetni ravni) morda poglavitni dejavnik, ki oblikuje splošno mnenje dijakov o matematiki kot nezanimivi (dolgočasno rutinsko delo), nepomembni (vsaj za njih) in neuporabni (razen pri opravljanju izpitov). Alternativo, ki jo ponuja in uveljavlja ta projekt, bi lahko na grobo označili kot *poučevanje matematike s preiskovanjem*, pri čemer vaje nadomestijo različne vrste »preiskovalnih dejavnosti«. Naše poglavitne naloge so potemtakem oblikovanje takšnih dejavnosti, njihovo preizkušanje v praksi in širjenje teh dejavnosti med učitelji.

Projekt smo želeli osnovati na resnih in vizionarskih raziskavah o tem, kako izpeljati navedene naloge. Iz tega razloga smo v pričujočem delu zbrali predstavitev pomembnih pristopov in idej iz raziskovalne literature. Delo je razdeljeno na štiri poglavja:

- Poglavje 1 predstavi splošno idejo »preiskovanja« v matematičnem izobraževanju z zgodovinskega vidika in z ozirom na to, kako bi ga lahko definirali v današnjem času (na splošno in relativno na široko).
- Poglavje 2 navaja splošne strategije za izvajanje preiskovanja kot dejavnosti dijakov v razredu.
- Poglavji 3 in 4 predstavita dva podrobnejša – in dobro uveljavljena – raziskovalna programa za oblikovanje poučevanja matematike s preiskovanjem:
  - Teorija didaktičnih situacij pri matematiki, ki stremi k vključitvi dijakov v »situacije, podobne raziskovanju« (sorodno matematikom), ki so sestavljene iz faz *reševanja*, *formulacije hipoteze* in njene *verifikacije oz. dokazovanja*.
  - Učenje matematike v realnem kontekstu, pri katerem dijaki izgrajujejo matematične pojme z reševanjem problemov v kontekstih, ki so za njih »realni«, preko »matematizacije« teh kontekstov.

Literaturo smo navajali sproti za tiste, ki bi želeli določen element raziskati globlje, kot smo to lahko storili v pričujočem delu. Priloga vsebuje pregled najpomembnejše referenčne literature v okviru tega projekta. Na koncu priročnika se nahaja še slovar najpomembnejših posebnih izrazov, uporabljenih v tem besedilu.

1. Kaj je poučevanje matematike s preiskovanjem?

Preiskovanje bi lahko ohlapno definirali kot »raziskovanje problema«. Beseda »raziskovanje« nakazuje, da je trud, ki je vložen v reševanje problema, relativno avtonomen: ne usmerjajo ga druge osebe in ne sledi predpisani rutinski metodi. *Poučevanje matematike s preiskovanjem* je torej pristop v poučevanju, ki omogoča dijakom, da aktivno sodelujejo pri dejavnosti in posledično svoje obstoječe matematično znanje prilagodijo oz. izgrajujejo novo znanje. Takšno poučevanje naj bi izboljšalo dijakovo razumevanje pomena in osnov srednješolske matematike. Še posebej učinkovito je, kadar izhaja iz lastne dejavnosti in truda dijakov.

V tem poglavju bo predstavljen nastanek in podrobnejši pomen poučevanja matematike s preiskovanjem. Raziskovanje matematičnega izobraževanja je pravzaprav privedlo do različnih in dobro uveljavljenih konceptualizacij zgoraj navedene okvirne ideje – tj. metod poučevanja matematike, pri katerih dijaki sprašujejo, raziskujejo, postavljajo hipoteze in razmišljajo o matematičnih idejah. Vseeno pa je splošni izraz poučevanje matematike s preiskovanjem precej nov.

Da bi lahko razlikovali med poučevanjem matematike s preiskovanjem in drugimi načini poučevanja matematike, moramo pojasniti, kaj je mišljeno z izrazom »problem«, na kakšen način se razlikuje od naloge oz. vaje in zakaj reševanje problema ni enako kot reševanje vaje. Nazadnje bomo obravnavali še vlogo dijakovega zastavljanja vprašanj o problemu in o znanju, povezanem z njim. Raziskave kažejo, da je ključno, da se dijaki sami lotijo problema oz. situacije, saj jih to lahko privede do formuliranja hipotez, raziskovanja in eksperimentiranja z lastnim znanjem ter do formuliranja rešitev na podlagi lastnih dejanj.

Preden se lotimo opisa komponent poučevanja matematike s preiskovanjem, bomo na kratko opisali, kako in zakaj se je poučevanje matematike s preiskovanjem pred kratkim pojavilo kot krovni pristop k razvoju poučevanja matematike. MERIA vsekakor ni prva evropska pobuda za promocijo poučevanja matematike s preiskovanjem. V zadnjem desetletju je Evropska unija financirala več obsežnih projektov z namenom razvoja, implementacije in vrednotenja »poučevanja naravoslovja, ki temelji na preiskovanju« na različnih stopnjah izobraževalnih sistemov (Artigue in Baptist, 2012; Mass in Artigue, 2013; Ropohl, Rönnebeck, Bernholt in Köller, 2016). Večina teh projektov se je v okviru naravoslovja posvečala tudi matematiki. Dejansko je pojem »poučevanja, ki temelji na preiskovanju« bolj naraven in poudarjen v naravoslovnem izobraževanju kot pa v matematičnem izobraževanju. V matematičnem izobraževanju so se razvile bolj ali manj sorodne ideje in pristopi pod oznakami reševanje problemov, matematično eksperimentiranje ali matematično modeliranje itd. Vendar pa znotraj naravoslovnega (in matematičnega) izobraževanja obstajajo različnih pristopi k razvoju takšne vrste poučevanja. Ta priročnik podrobneje obravnava dva takšna pristopa v matematičnem izobraževanju (poglavji 3 in 4). Sodeč po projektu Fibonacci v naravoslovnem izobraževanju preiskovanje pogosto črpa iz čutnih izkušenj (Artigue idr. 2012, str.

9). Številni naravoslovni pojmi so povezani s čutnimi izkušnjami npr. hitrost, čas, svetloba, sila, pH vrednost, spreminjanje letnih časov itd. Te izkušnje lahko nadalje preučujemo v cikličnih procesih npr. v tako imenovanem modelu petih E-jev. Model petih E-jev se nanaša na faze poučevanja naravoslovja, ki temelji na preiskovanju, pri katerem naj bi dijaki aktivno sodelovali (»**e**ngage«), raziskovali (»**e**xplore«), pojasnili (»**e**xplain«), natančneje razložili (**»e**laborate«) in vrednotili (»**e**valuate«) znanje oz. ideje, ki jih bodo razvijali med preiskovalnim procesom (Bass, Contant in Carin, 2009, str. 91). V okviru modela petih E-jev lahko čutne izkušnje sile ali časa, ekosistemov ali kemičnih reakcij iz vsakdanjega življenja služijo kot izhodišče, ki dijake vključi v bolj sistematično preiskovanje pojavov ali vzročno-posledičnih odnosov. Ti preiskovalni procesi lahko dijake privedejo do izgrajevanja znanja o naravoslovnih zakonitostih.

Nasprotno bi lahko trdili, da je matematično znanje pogosto zgrajeno na bolj teoretični osnovi. Vsekakor lahko v številnih primerih vzpostavimo indukcijo na podlagi »eksperimentov«, npr. za številske vzorce ali specifične primere kakšnega bolj splošnega načela. Toda Artigue in Baptist (2012) trdita, da kumulativni značaj matematike predstavlja izziv za neposreden prevzem koncepta preiskovanja iz naravoslovja (Artigue in Baptist, 2012). V naravoslovju se (raziskovalčevo ali dijakovo) hipotezo verificira s pomočjo eksperimentov, medtem ko pri matematiki dokončna verifikacija zahteva dokaz, ki temelji na dedukciji.

Ta knjižica predstavlja dva različna pristopa k poučevanju matematike s preiskovanjem. Prvi pristop vsebuje primere, kako lahko dijakove izkušnje uporabimo kot izhodišče za preiskovalni proces. Imenuje se Učenje matematike v realnem kontekstu, ki ga je prvotno razvil Hans Freudenthal (Freudenthal, 1991). Drugi pristop je Teorija didaktičnih situacij, ki jo je prvotno razvil Guy Brousseau (Brousseau, 1997). Teorija didaktičnih situacij temelji na ideji, da dijaki izgrajujejo novo znanje, kadar rešijo problem med prilagajanjem t. i. didaktičnemu miljeju. O Učenju matematike v realnem kontekstu in Teoriji didaktičnih situacij bomo podrobneje spregovorili v poglavjih 3 in 4. V tem poglavju bomo predstavili osrednje pojme poučevanja matematike s preiskovanjem, da bi pojasnili njegov izvor, utemeljitve (*zakaj* ga moramo uveljavljati) in omejitve (s kakšnimi izzivi se lahko sooči).

Izvor poučevanja matematike s preiskovanjem

Pred dobrim stoletjem so bile zapisane prve formulacije ideje, da bi moralo biti poučevanje na splošno povezano z izkušnjami dijakov in se osredotočati na dejavnosti dijakov. Pedagoškega raziskovalca Johna Deweya pogosto povezujejo s frazo »učenje preko dejavnosti«. Trdil je, da bi moralo poučevanje temeljiti na aktivnosti dijakov in načinih, kako lahko dijaki s tem pridobijo znanje (Dewey, 1902). Dewey (1938) je poudaril potencialni pomen preiskovanja in njegovo vlogo v učenju in poučevanju – predvsem na naravoslovnem področju. Matematiko je v veliki meri razumel kot orodje ali jezik za ureditev kompleksnih podatkov in sistematično obravnavo izidov preiskovalnih procesov – na primer izidov dijakovih dejanj pri eksperimentiranju s fizikalnimi zakoni ali biološkimi sistemi. Čeprav Dewey ni podal jasnih predlogov za ustvarjanje poučevanja matematike s preiskovanjem, so kasneje številni matematični pedagogi sledili njegovim idejam.

Dewey je nasprotoval dolgi tradiciji transmisijskega poučevanja (*prenos gotovega znanja* z učitelja na dijake), ki je tako staro kot veda sama. Veliko matematikov je menilo, da je poučevanje ponavljanje in da morajo dijaki pri reševanju matematičnih problemov dano besedilo povedati na pamet oz. posnemati učiteljevo dejanje. To velja tudi za bolj praktične in osnovne plati matematike, ki so povezane z računskimi tehnikami. Še danes poučevanje matematike večinoma temelji na ponavljanju prikazanih tehnik in urjenju teh tehnik do popolnosti s pomočjo neskončnih zaporedij podobnih izračunov. V številnih šolah je splošna »šablona« za poučevanje matematike sestavljena iz učiteljeve predstavitve določene tehnike (npr. formule, pravila, metode itd.), nakar učitelj svojim dijakom poda nekaj »tipičnih« primerov, kako naj to novo znanje uporabijo pri reševanju določene vrste matematičnih nalog, nazadnje pa da dijakom še nekaj zelo podobnih nalog, da bi vadili to, kar je storil on (Schoenfeld, 1988). En primer tega je, ko dijakom predstavimo definicijo polinoma druge stopnje in kako poiskati njegove ničle z reševanjem enačbe

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dijakom je nato podana formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nato učitelj pokaže dijakom, kako poiskati ničle polinoma npr. $p(x) = 2x^2 + 2x - 12$ z uporabo dane formule. Preden prosi dijake, da rešijo vrsto podobnih vaj, jim učitelj lahko da še več primerov. Na ta način dijaki posnemajo učiteljevo dejanje, pri čemer morda spregledajo pomen iskanja rešitev in utemeljitev te metode. Če pa bi prosili dijake, da rešijo enačbe, v katerih ima polinom eno ničlo ali pa nobene realne ničle, bi ustvarili potencial, da dijaki raziščejo pomen ničel polinomov in rešitev enačb.

Rutinske vaje od dijakov zahtevajo zgolj preprosto posnemanje učitelja, kar pogosto počnejo, ne da bi razbrali ali zgradili osnovni princip oz. pomen nalog in tehnik, ki jih uporabljajo za reševanje teh vaj (Schoenfeld, 1988). V resnici lahko dijaki – sčasoma – obravnavajo matematiko kot precej nesmiseln nabor tehnik, ki se jih morajo naučiti s posnemanjem. Takšen način poučevanja dijakom ne omogoči izkušenj s številnimi pomembnimi vidiki matematike, kot so: reševanje kompleksnih problemov, izgrajevanje doslednih struktur znanja, domnevanje in dokazovanje, eksperimentiranje s posebnimi primeri itd.

Lahko bi trdili, da je v preteklem stoletju velikemu številu bivših dijakov zadostoval prenos znanja in učenje reševanja standardiziranih nalog. Vendar pa danes v številnih državah v srednješolsko izobraževanje vstopajo večje in bolj raznolike skupine dijakov. Njihovo poučevanje zahteva bolj izpopolnjene pristope, podprte z raziskavami matematičnega izobraževanja. Raziskovalno področje matematičnega izobraževanja je nastajalo skozi stoletja, začelo pa se je z učitelji, ki so si izmenjevali misli o lastnem poučevanju in razvili tehnike poučevanja na podlagi lastnih izkušenj (Kilpatrick, 2014). Dandanes se morajo dijaki učiti matematiko na globljih nivojih razumevanja kot v preteklosti, da bi zadostili družbenim zahtevam. Nekoč je bilo običajno, da so ljudje zaključili izobraževanje pred srednješolsko stopnjo, da bi vstopili na trg dela. Potrebovali so zgolj praktične matematične spretnosti, kot so tehnike računanja in ponavljanja uveljavljenih postopkov. Danes veliko število poklicev in visoko šolstvo zahteva, da imajo dijaki po končani srednji šoli znanje in kompetence osnovnega računanja, statistike, pojma funkcije itd. Naraščajoče število dijakov na srednješolski stopnji, pri čemer so nekateri zelo nemotivirani za učenje matematike, predstavlja specifičen izziv za poučevanje matematike. Ti dijaki morda preprosto niso sposobni tako zlahka sprejeti prenesenega znanja kot prejšnje generacije, kar je dodaten razlog, zakaj potrebujemo več pristopov, ki temeljijo na preiskovanju. Razumevanje načinov, kako dijaki razvijajo matematično znanje, je stalni predmet raziskovanja v matematičnem izobraževanju. Matematični pedagog Mogens Niss je osnovno načelo tega zanimanja formuliral na naslednji način:

> *Če bi razumeli možne poti učenja matematike in ovire, ki lahko te poti blokirajo pri povprečnih dijakih, bi bolje razumeli, kaj je matematično znanje, uvid in sposobnost (in kaj to ni), kako se proizvaja, shranjuje in aktivira ter kako ga lahko spodbujamo* (Niss, 1999, str. 4).

Skozi celotno 20. stoletje so se razvijali različni pristopi k tej temi, najbolj vztrajen pristop pa je ta, da naj se poučevanje zgleduje po tem, kako profesionalni matematiki razmišljajo o matematiki, se je učijo in jo razvijajo.

Na začetku 20. stoletju so matematiki Fehr, Laisant, Hadamard in drugi zbrali sistematična poročila o tem, kako oni in njihovi kolegi razvijajo novo matematično znanje – da bi opredelili raziskovalno dejavnost in da bi raziskovalci lahko služili kot zgled za aktivno udeležbo dijakov pri učenju matematike (Kilpatrick, 2014). Ta ideja je bila prisotna tudi v prvih reformnih gibanjih v povezavi s kurikulumom za srednje šole, med katerimi je nemški matematik Felix Klein (začetek 20. stoletja) uvedel reformni program za izobraževanje učiteljev, ki je promoviral praktična navodila, razvoj prostorske intuicije in funkcionalni pristop k matematiki (Kilpatrick, 2008). Klein je igral ključno vlogo v zgodnjem razvoju raziskovalnega področja matematičnega izobraževanja, še posebej v odnosu med raziskovanjem matematike, poučevanjem matematike in raziskovanjem matematičnega izobraževanja. Njegove ideje še danes vplivajo na poučevanje matematike na srednješolski stopnji na različne in pogosto posredne načine. Naslednji val reform, ki ga lahko povežemo z idejo poučevanja matematike s preiskovanjem, je uvedba reševanja problemov v matematično izobraževanje v osemdesetih letih. O tem bomo govorili v naslednjem poglavju kot o temeljni ideji preiskovanja na področju matematike.

Značilnosti preiskovalnih procesov

V tem poglavju predstavljamo pregled idej in konceptov, ki so v preteklem stoletju usmerjali razvoj poučevanja matematike s preiskovanjem. Osrednji pojem je *problem*.

V okviru poučevanja matematike s preiskovanjem je *problem* več kot zgolj določena naloga, vaja ali dejavnost. Problem je odprt v smislu, da zahteva aktivno udeležbo dijakov pri eksperimentiranju, postavljanju hipotez glede možnih rešitev, sporočanju hipotez in možnih strategij reševanja ter morda tudi pri postavljanju dodatnih vprašanj, na katera bo treba odgovoriti med procesom reševanja problema.

Primer problema bi se lahko glasil tako:

> »Predstavljaj si poljubni trikotnik z dolžinami stranic *a, b* in *c*. Če vse stranice enakomerno povečamo, koliko večja bo ploščina povečanega trikotnika v primerjavi s ploščino prvotnega trikotnika?«

Odvisno od konteksta podanega problema ta nudi dijakom različne možnosti sodelovanja pri opredelitvi problema in iskanju rešitve. Obstajajo različne strategije reševanja tega problema, odvisno od predznanja dijakov o trikotnikih, merah stranic, kotov in ploščin, podobnih trikotnikih in trigonometričnih razmerjih. Dijaki se lahko lotijo povečevanja in eksperimentirajo s povečavo s pomočjo seštevanja in množenja. Lahko ustvarijo veliko število trikotnikov, jih povečajo, zberejo rezultate in formulirajo hipoteze o povečanju ploščine. Nadalje lahko dijaki raziščejo posebne primere (npr. pravokotne trikotnike) in algebrsko izpeljejo hipotezo o tem, koliko večja bo povečana ploščina. Različne strategije reševanja lahko nato primerjajo, o njih razpravljajo in jih celo verificirajo oz. preizkusijo na novih trikotnikih. V kontekstu poučevanja matematike s preiskovanjem je dijakova prednost, če je sposoben slediti različnim in lastnim idejam ter jih med seboj primerjati, povezovati in ovrednotiti, da bi zgradil trdnejše znanje. To pomeni, da so dijaki sposobni narediti več kot zgolj izračunati ploščino trikotnika. Znajo združiti novo znanje z drugimi relevantnimi področji, da bi rešili odprte probleme. Znanje, ki ga zgradijo s pomočjo tega problema, se nanaša na simetrije in funkcije med geometrijskimi liki.

Na področju matematike dejanja in izkušnje, za katera Dewey svetuje, da naj služijo kot izhodišče za učenje, največkrat motivirajo poskusi reševanja točno določenega problema. Izpostavljeni problem povečave trikotnika je en primer tega. Problemi so lahko različnega značaja, izvora, težavnosti, imajo lahko različno število možnih strategij ali rešitev itd. Lahko imajo tudi različen potencial za vzbujanje matematične radovednosti oz. ustvarjalnosti med dijaki. To je pomembno kot katalizator dijakovega zastavljanja vprašanj o snovi in eksperimentiranja z njo.

Drugi primeri iz šolske prakse lahko zajemajo dinamično uporabo računalniških programov ali situacije modeliranja izven matematike. Pri delu s programom za simbolno računanje ali programsko opremo za dinamično geometrijo z grafičnim okoljem lahko dijak nariše graf linearne funkcije s formulo $f(x) = ax + b$. Tukaj ima dijak možnost graf vzporedno premakniti ali spremeniti njegov naklon. Dijak lahko raziskuje, kaj se dogaja z grafom, kadar spremeni koeficiente. Ta problem lahko spodbuja radovednost in pomaga dijakom razviti znanje o grafičnem prikazu koeficientov a in b. Informacijsko-komunikacijska tehnologija in različna programska oprema na splošno igrata pomembno vlogo v razvoju in podpori poučevanja matematike s preiskovanjem (glejte npr. Artigue in Baptiste, 2012, str. 10).

Dijaki se lahko srečajo tudi s številnimi drugimi vprašanji, ki od njih zahtevajo določeno znanje, npr. »Ali lahko vsako naravno število zapišemo kot zmnožek praštevil? Ali ga lahko zapišemo kot vsoto praštevil?« ali »Kako lahko opišeš pospešek svojega kolesa na poti v šolo, če imaš na voljo meritve hitrosti ob določenih trenutkih?« Takšna vprašanja oz. problemi zahtevajo, da dijaki razvijejo novo znanje. Problemi lahko izhajajo iz popolnoma matematičnih vprašanj, lahko pa so plod izkušenj ali dejanj v resničnem svetu. Problemi, formuliranje problemov in reševanje problemov so osrednje komponente preiskovalnega procesa v poučevanju matematike in igrajo pomembno vlogo v literaturi o matematičnem izobraževanju. Sedaj bomo podali kratek pregled tega, kako so bili ti pojmi obravnavani v kontekstu poučevanja matematike v preteklem stoletju.

Reševanje problemov kot način učenja

V nastanku poučevanja matematike s preiskovanjem je enako pomemben element kot postavljanje problemov tudi dejavnost reševanja problemov. Čeprav je *reševanje problemov* od osemdesetih let dalje osrednji element matematičnih kurikulumov v številnih državah, v literaturi tistega časa ni bil nov pojem. Leta 1945 je George Pólya izdal knjigo »Kako rešujemo matematične probleme«, ki velja za klasično referenco za pristope reševanja problemov v okviru matematičnega izobraževanja (Artigue in Blomhøj, 2013, str. 802). Knjiga opisuje reševanje problemov kot dejavnost, ki jo izvajajo matematiki med raziskovalnim delom. Poudarila je vlogo problemov in hevrističnih kompetenc, ki so potrebne za reševanje teh problemov. Hevristične kompetence črpajo iz znanja snovi in strategij, ki so potrebne za obravnavanje ne-rutinskih problemov. Problem trikotnika je takšen problem, tj. ne-rutinski problem za šolski kontekst. Lahko ga rešimo z uporabo znanja o snovi, npr. o ploščini poljubnega trikotnika, vendar zahteva tudi, da dijaki razvijejo znanje o podobnih trikotnikih, tako da združujejo že poznane strategije in znanje na nov način. V svojem delu Pólya svetuje, da dijaki uporabljajo strategije, kot so iskanje protiprimerov, skiciranje situacije npr. s pomočjo grafa, razmišljanje o posebnih primerih, ugibanje in preverjanje, dokazovanje s pomočjo protislovja itd. V primeru problema trikotnika bi bila dobra izhodiščna strategija razmislek o posebnih primerih, kot so konkretni trikotniki ali pravokotni trikotniki. Uporabljeno znanje je lahko definicija, pravilo, metoda itd. Vse to so znane komponente matematične dejavnosti na univerzitetni stopnji. Vendar pa Pólyevo delo ne vsebuje sistematičnih napotkov, kako takšne dejavnosti uresničiti pri poučevanju matematike na vseh stopnjah izobraževalnega sistema.

Schoenfeld je eden od raziskovalcev, ki so želeli sistematično uresničiti Pólyeve ideje v poučevanju matematike. Kritiziral je rabo Pólyevega dela v osemdesetih letih kot trivializirano (1992, str. 352), natančneje, da ni dovolj poudarila ključnega elementa razvoja hevrističnih kompetenc dijakov. Schoenfeld trdi, da preden se dijaki lotijo dejavnosti reševanja problemov, morajo razlikovati med problemi in vajami. Vaje lahko rešimo s pomočjo *znanih strategij reševanja*, medtem ko dejavnosti reševanja problemov zahtevajo razvoj ali kombinacijo metod in znanja na nove načine. Schoenfeld poimenuje pomembne elemente v tem procesu, ki zahtevajo, da dijaki znajo črpati iz virov. Viri so matematično znanje posameznika, ki ga lahko uporabi pri zadevnem problemu – intuicija in neformalno znanje o tem področju, dejstva, algoritemski postopki, »rutinski« nealgoritemski postopki, dogovori (propozicijsko znanje) o dogovorjenih pravilih dela na tem področju. Iz tega se morajo torej dijaki naučiti črpati med procesi reševanja problemov: iz njihovega predhodno pridobljenega znanja, kompetenc in spretnosti ter jih kombinirati z intuicijo in začetno hipotezo odgovora. Da bi to uresničili, dijaki črpajo iz lastne hevristike, ki obsega »strategije in tehnike za napredovanje pri nepoznanih ali nestandardnih problemih; praktične metode učinkovitega reševanja problemov, ki vključujejo: risanje diagramov, uvedba ustreznega zapisa, raziskovanje sorodnih problemov, preoblikovanje problemov; retrogradno delo, postopki testiranja in verifikacije« (Schoenfeld, 1985, str. 15). Te hevristike so podobne Deweyevemu opisu vloge matematike v preiskovalnih procesih, vendar jih tudi presegajo. Sodeč po Artigue in Blomhøj (2013) imajo veliko skupnih značilnosti s pristopi poučevanja naravoslovja, ki temelji na preiskovanju, kot so zastavljanje vprašanj, postavljanje hipotez, sistematično eksperimentiranje, sodelovanje, komuniciranje, predstavljanje problema na različne načine itd., vse z namenom, da bi dijaki razvili novo znanje. Moramo se zavedati, da hevristične kompetence vključujejo raziskovalni in radovedni odnos do matematične dejavnosti.

Vse to bi se lahko odražalo v problemu povečave trikotnika in njegovih možnih strategij reševanja. Ta problem lahko rešujemo z eksperimentiranjem s konkretnimi materiali (izdelovanjem trikotnikov), razmislekom o različnih načinih preoblikovanja problema (povečava s pomočjo strategij seštevanja ali množenja), lahko pa se lotimo problema z abstraktnega vidika npr. z obravnavo posebnega primera, kot je trikotnik s pravim kotom.

> Znotraj poučevanja matematike s preiskovanjem je *reševanje problemov* dejavnost, pri kateri se pričakuje aktivno udeležbo dijakov. Vključuje dijakovo uporabo predhodno razvitega znanja, intuicije, okvirnih idej in hipotez pri raziskovanju in razumevanju problema. Preko eksperimentiranja in novih načinov kombiniranja znanja, vključno z znanjem, ki ga razvijejo med raziskovanjem, dijaki zgradijo novo znanje, ki ga bodo ovrednotili s pomočjo nadaljnjih eksperimentov. Matematična ustvarjalnost in radovednost dijakov je gonilna sila procesa reševanja problemov, ki se nadalje razvija z aktivno udeležbo v reševanju problemov.

Vendar je še vedno malce nejasno, kako učiti dijake na ta način ter kdaj in zakaj uporabiti posamezni element. Učitelji morajo razviti probleme, pri katerih bodo dijaki morali ravnati kot matematični preiskovalci, vendar pa učitelji ne smejo povedati dijakom, kaj naj storijo. Učiteljev ne skrbi le, kako bodo dijakom omogočili, da pridobijo izkušnje s problemi, ki so bolj odprtega značaja kot običajne vaje, kot je bilo že ponazorjeno s problemom trikotnika, temveč tudi, kako bodo uspešno izvedli celotni opisani proces reševanja problema.

Količina usmerjanja v poučevanju skozi reševanje problemov

Že leta 1938 je Dewey zagovarjal, da morajo učni procesi dijakov temeljiti na njihovi interakciji s problemom. V idealnem primeru naj bi se takšna interakcija odvijala v dialektiki med znanimi in neznanimi situacijami, v katerih naj bi predznanje dijakov usmerjalo njihovo preučevanje neznanega. Na podlagi tega, kar dijaki že vedo, lahko na primer formulirajo hipotezo in sistematično pristopijo k problemu med preiskovalnim procesom. Pri problemu trikotnika lahko dijaki sistematično raziskujejo razmerje med povečanjem trikotnika in povečanjem ploščin. Dijaki lahko formulirajo natančne hipoteze o tem razmerju na podlagi posebnega primera pravokotnega trikotnika. Hipotezo lahko ovrednotijo, tako da ustvarijo poljubne trikotnike in izračunajo ploščine prvotnega in povečanega trikotnika. Na osnovi izkušenj, ki so jih pridobili s temi dejanji, dijaki zgradijo lastno znanje o preučevanem problemu. Pri problemu trikotnika imajo dijaki možnost zgraditi znanje o podobnih trikotnikih, splošno formulo za ploščino $p = \frac{1}{2}ab\sin\boldsymbol{\gamma}$, kjer je $\boldsymbol{\gamma}$ kot med stranicama a in b, ter razumevanje trigonometričnih razmerij. Za oblikovanje poučevanja, ki temelji na preiskovanju, mora zato učitelj ustvariti scenarije, ki mu bodo pomagali razumeti, v kateri fazi preučevanja problema dijaki črpajo iz predznanja, v kateri ustvarijo hipotezo in v kateri jo testirajo, v kateri lahko zgradijo novo znanje oz. ga formulirajo na podlagi (posplošitve) dejanj dijakov. V tem pogledu učitelj deluje kot moderator pri ustvarjanju in vodenju dijakov med izgrajevanjem njihovega znanja (Godino idr., 2015). Učitelji bi morali imeti vlogo izkušenih soraziskovalcev, ki vodijo mlajše člane raziskovalne skupnosti, ne pa vlogo osebe, ki ima odgovore na vsa vprašanja (Artigue in Baptist, 2012).

> V okviru poučevanja matematike s preiskovanjem se odranje dijakove obravnave problema nanaša na formulacijo problema. Formulacija mora omogočiti dijakom, da razvijejo množico strategij, odvisno od znanja, ki so ga že usvojili. Nadalje mora tudi spodbujati raziskovanje dijakov in njihovo eksperimentiranje s problemom, ki jih vodi k izgrajevanju novega znanja. V tem procesu mora učitelj dijake usmerjati – ne tako, da jim daje odgovore, temveč kot izkušeni soraziskovalec, ki postavlja vprašanja in na ta način poganja preiskovalni proces.

Danes na splošno velja, da reševanje realnih problemov prispeva k učnim izidom poučevanja matematike: »*več* pridobimo z reševanjem problema kot pa, če nam nekdo pove pridobljeni odgovor« (Bosch in Winsløw, 2016). Beseda »več« se nanaša na zgoraj omenjeno hevristiko in uporabo virov. Morda se zdi težko opredeljiva, vendar jo vseeno prepoznamo, kadar naletimo nanjo. Starejše študije nakazujejo, da je za dobro poučevanje skozi reševanje problemov značilno ustvarjanje primernih *odnosov* med specifičnimi dijaki in specifičnimi nalogami

(Schoenfeld, 1992, str. 353). Zaradi tega se je zadnjih desetletjih raziskovalna dejavnost osredotočala na opredeljevanje primernih problemov – morajo imeti bogat potencial za dijakovo uporabo hevristike in virov. Nadalje se je osredotočala tudi na raziskovanje načel poučevanja in vodenja, ki menda učinkovito pomagajo dijakom doseči njihov polni potencial. V osemdesetih letih so se priporočila glede poučevanja gibala od vodene prakse dijakov do prakse, ki je zahtevala, da dijaki artikulirajo procese kot neke vrste *metarefleksijo* o lastni praksi. Primer takšne metarefleksije bi lahko bila pretvorba problema v matematiko, na primer pri problemu modeliranja dijakovega pospeška med kolesarjenjem do šole. Poleg tega je metarefleksija potrebna pri problemu, ki se ukvarja z grafom linearne funkcije v koordinatnem sistemu in zahteva, da dijaki zberejo konkretne podatke iz vrste primerov, da bi formulirali hipoteze o koeficientih. Načela poučevanja se tičejo tudi izzivov in skrbi učiteljev glede tega, kdaj posegati v dejavnosti dijakov, kdaj se zadržati in dijakom ne podati odgovorov oz. kako izvabiti optimalne strategije (Schoenfeld, 1992, str. 354). Če učitelj dijakom predlaga, da razmislijo o posebnem primeru ali pa grafično prikažejo podatkovne točke, da bi izvedli linearno regresijo oz. skicirajo problem v obliki grafa ali geometrijskega lika, bodo nekateri dijaki morda to razumeli kot edini možni način rešitve problema. Ne zato, ker bi bili prepričani, da bo ta strategija rešila problem, temveč zato, ker je to rekel učitelj. Zaradi tega je težko voditi ali odrati delo dijakov, ne da bi nakazali odgovor. Pri problemu trikotnika za učitelja ni trivialna naloga, da usmerja dijake, ki vztrajajo pri delu na izključno konkretnih primerih. Vprašanje, če njihova hipoteza velja tudi na splošno, bi lahko privedlo do novih pristopov k problemu, lahko pa bi bilo preveč zahtevno in v resnici ne bi služilo kot vodenje. To je splošen izziv pri odranju preiskovalnih procesov v kontekstu poučevanja. Dijakom moramo nuditi omejeno področje, na katerem naj se lotijo preiskovanja, toda če je vodenje preveč usmerjeno ali pa je preveč omejitev, uničimo potencial takšnega poučevanja. V tem primeru dijaki ne morejo graditi znanja na podlagi lastnih dejanj in izkušenj. Učitelj torej ne sme jasno povedati dijakom, kaj naj storijo. Hkrati pa mora učitelj pri dijakih vzbuditi potrebo, da ravnajo na način, s katerim bodo morda dosegli predvidene učne cilje. Potemtakem ne smemo gledati na odranje kot na dajanje primerov in strategij ter postavljanje preveč direktnih in zaprtih vprašanj.

Vloga zastavljanja vprašanja dijakov med reševanjem problemov

> Izziv pri odranju preiskovalnih procesov dijakov: če so preveč usmerjeni, ne govorimo o pravem preiskovanju in učni potencial je uničen. Če so premalo usmerjeni, dijaki obtičijo in nehajo reševati problem. Dajanje »pravšnje« količine usmerjanja je občutljivo dejanje iskanja ravnovesja.

Novejše študije predlagajo postavljanje problemov kot pristop, ki dijake aktivno vključi v reševanje problemov. Pedagoška ideja postavljanja problemov je morda prav tako stara kot ideja reševanja problemov. Ellertonova (2013) se sklicuje na Einsteina in Infelda, ki sta trdila, da je formuliranje problema bolj bistveno kot podajanje odgovora in tudi zahtevnejše (Ellerton, 2013, str. 88). Tukaj gre morda za pretiravanje, vendar poudari pomembnost tega, da dvomimo o znanju, ki ga nameravamo dodatno preučevati oz. se o njem bolje poučiti.

Pojav postavljanja problemov kot pristopa k poučevanju matematike je povezan z obnovljenim zanimanjem za reševanje problemov v osemdesetih letih. Študija Ellertonove o vključitvi bodočih učiteljev matematike v dejavnosti postavljanja problemov nakazuje, da bo postavljanje problemov morda prevzelo dominantno vlogo v matematičnih kurikulumih (Ellerton, 2013, str. 90). Razlogi za to trditev ležijo v tem, da postavljanje problemov spodbuja dijakov razvoj hevristike in virov, ki so uporabljani pri reševanju problemov in poučevanju matematike s preiskovanjem oz., kot so to formulirali Singer, Ellerton in Cai: »postavljanje problemov izboljša dijakove spretnosti reševanja problemov, odnos do matematike in samozavest pri matematiki ter prispeva k širšemu razumevanju matematičnih konceptov in razvoju matematičnega mišljenja« (Singer, Ellerton in Cai, 2013, str. 2). Sodeč po Artigue in Blomhøj (2013) ter po Hiebert idr. (1996) lahko postavljanje problemov kot dejavnost dijakov tudi podpira Deweyevo idejo refleksivnega preiskovanja iz česar sledi, da moramo dijakom dovoliti, da problematizirajo znanje, ki naj bi se ga naučili, in to celo spodbujati. Povrh tega to pomeni, da moramo dijake spodbujati, da razmišljajo o globljem pomenu problemov, s katerimi se soočajo med poučevanjem matematike s preiskovanjem. V primeru trikotnika je razumljivo, da se dijaki sprašujejo, kaj pomeni »enakomerno povečati« stranice trikotnika. Vendar je pomembno, da dijaki sami podajo odgovor na to, na primer z eksperimentiranjem s strategijami seštevanja in množenja. To podpira dijakovo avtonomno izgrajevanje znanja, natančneje odkritje, da strategija seštevanja ne privede do podobnih trikotnikov. Nadalje to lahko dijake privede do vprašanja, če lahko primerjamo ploščine le, kadar sta si prvotni in povečani trikotnik podobna. Nadalje lahko problem trikotnika dijake privede do vprašanja, kako poiskati višino poljubnega trikotnika, če poznamo le dolžine stranic kot a, b in c itd.

> Dober problem je odprt in povzroči, da se dijaki sprašujejo, razmejujejo in postavljajo vprašanja glede obravnavane snovi. Zastavljanje vprašanj je ključnega pomena kot gonilo preiskovalnega procesa in mora voditi dijake k odgovarjanju na lastna vprašanja in hipoteze.

V povezavi z usmerjanjem in odranjem so bile razvite številne ideje za oblikovanje pouka, s katerimi bi uresničili postavljanje problemov kot dejavnost pri predmetu matematike. Te ideje se gibljejo od tega, da dijakom podajamo informacije in jih prosimo, da postavijo probleme, ki bi jih lahko rešili s pomočjo prejetih informacij; da jih prosimo, da rešijo določene probleme in nato formulirajo podobne probleme; ali da dijakom opišemo nek fenomen in jih prosimo, da postavijo probleme v povezavi z opisanim fenomenom (Bosch in Winsløw, 2016). Vendar pa so te ideje za oblikovanje pouka vseeno zgrešile bistvo, če naj bi dijakova dejavnost odražala dejavnost raziskovalnih matematikov, pri kateri nova vprašanja izhajajo iz raziskovalčevih interakcij z zadevnim področjem, na primer preko preučevanja dela drugih raziskovalcev oz. preko lastnih ali kolektivnih dejavnosti reševanja problemov. Te dejavnosti lahko privedejo do spraševanja ali radovednosti in nato do formuliranja novih problemov, ki poganjajo nadaljnje raziskave. Po mnenju Kilpatricka ta značilnost ni lastna zgolj raziskovanju. Trdi, da tudi splošneje, v realnem življenju, večino problemov formulira oseba, ki jih rešuje in da bi moralo biti v tem pogledu poučevanje matematike bolj podobno realnemu življenju (Kilpatrick, 1987, str. 124). V različnih pristopih k poučevanju matematike s preiskovanjem se razlikuje eksplicitna vloga postavljanja problemov, njihova skupna značilnost pa je, da želijo doseči, da se dijaki sprašujejo, postanejo radovedni, preiskujejo domnevna razmerja in formulirajo hipoteze za nadaljnje preiskovanje.

Od kod izhajajo problemi?

Poleg literature o postavljanju problemov so tudi druge teorije o poučevanju matematike na različne načine obravnavale vlogo problema, reševanja problemov in postavljanja problemov. Reševanje ne-rutinskih problemov je gradnik številnih pristopov k matematičnemu izobraževanju, ki je bilo začeto in nadgrajeno v sedemdesetih letih in kasneje: Teorija didaktičnih situacij (Theory of Didactical Situations – TDS, Brousseau, 1997) in Učenje matematike v realnem kontekstu (Realistic Mathematics Education – RME, Freudenthal, 1991). Skupna ideja pristopov TDS in RME je, da moramo dijakom podati ne-rutinske probleme, ki jih morajo rešiti z razvojem novega znanja. V primeru TDS naj bi se to zgodilo tako, da dijaki prilagodijo milje učne situacije (Brousseau, 1997). V primeru RME se razvoj znanja zgodi, ko dijaki matematizirajo fenomene, na katere se nanaša problem. RME razlikuje med dvema vidikoma tega procesa: med vertikalno in horizontalno matematizacijo (Freudenthal, 1991). Obema teorijama je skupna ideja, da učitelj dijakom poda prvotni problem, dijaki pa nato ukrepajo in formulirajo ideje za reševanje tega problema. Te dejavnosti lahko privedejo do tega, da dijaki implicitno ali eksplicitno podvomijo o obravnavani snovi. Ta dva pristopa sta mejnika v dejavnostih projekta MERIA, zaradi česar bosta v kasnejših poglavjih te knjižice obe teoriji podrobno predstavljeni.

Obstajajo pa tudi drugi teoretični pristopi, ki obravnavajo poučevanje matematike s preiskovanjem. Za Teorijo matematične kompetence (Mathematical Competence Theory, Niss idr., 2002) lahko rečemo, da zajema hevristično kompetenco, čeprav se od omenjenih osmih kompetenc nobena ne imenuje hevristična. Predvsem t. i. kompetenca reševanja problemov in kompetenca modeliranja imata skupne točke z opisano ključno vlogo hevristike v dejavnostih, ki temeljijo na preiskovanju.

Lahko bi tudi trdili bolj na splošno, da *dejavnosti matematičnega modeliranja* podpirajo razvoj spretnosti reševanja problemov in odnosov do njega. Z vidika Teorije matematične kompetence lahko opišemo dejavnosti matematičnega modeliranja kot ciklična gibanja naprej in nazaj v določenih fazah cikla modeliranja (Blomhøj, 2004; Blum in Leiss, 2006). Cikli modeliranja bi lahko učiteljem služili kot smernice; če bi se zavedali faz, ki so del dejavnosti modeliranja, bi lahko učitelji spremljali, kako jih dijaki uresničujejo v učnih situacijah. Vendar pa študije, ki so uporabile cikle modeliranja za analiziranje dijakove dejavnosti modeliranja, nakazujejo, da temu ni vedno tako. Problemi modeliranja, ki imajo potencial za uresničitev vseh faz, morda ne bodo vedno uresničili teh potencialov v kontekstih poučevanja (Blum in Borromero Ferri, 2007). Matematično modeliranje z vidika Teorije matematične kompetence in pristopa RME vsebuje idejo, da preiskovalni procesi izhajajo iz »realističnih« problemov. To se ujema z Deweyevo idejo o poučevanju iz začetka 20. stoletja. Obstajajo tudi drugi pristopi k modeliranju, kot so Dejavnosti, ki spodbujajo modeliranje (Modelling Eliciting Activities, Doerr in Ärlebäck, 2015), ki zagovarjajo bolj odprte pristope k preiskovalnim procesom, podprte s predznanjem dijakov na področju matematičnega znanja znotraj in izven kurikuluma.

Enako lahko trdimo o Antropološki teoriji didaktike (Anthropological Theory of the Didactics – ATD). ATD ponuja splošen model matematičnega znanja, ki je predstavljeno kot človeška dejavnost preučevanja različnih vrst problemov. Urejeno je po matematičnih prakseologijah, ki so sestavljene iz praktičnega dela (vrst problemov in tehnik) ter znanja (tehnologija in teorija). Učitelja vidi kot direktorja didaktičnega procesa. Pri tem pristopu preiskovalni proces sproži odprt problem, ki ga je postavil učitelj. Ta problem je lahko popolnoma matematičen ali pa iz realnega življenja. Dijakovo jasno formuliranje vprašanja naj bi poganjalo preiskovalni proces (Chevallard, 2015). Vendar pa poučevanja in učenja ne obravnava izolirano, temveč kot del kompleksnega procesa didaktične transpozicije. Ta proces vsebuje tudi določene didaktične omejitve, ki izhajajo iz različnih udeleženih institucij (družba, matematična skupnost, izobraževalni sistem, šola, učilnica), ki zmanjšujejo avtonomijo učiteljev. ATD tudi predlaga načine, kako preoblikovati pogoje in omejitve šol ter strok. Te ambiciozne oblike poučevanja matematike s preiskovanjem v tem priročniku ne bomo obravnavali podrobneje.
Japonska tradicija (Nohda, 2000) vidi pristop odprtega tipa z raznolikimi odgovori dijakov na isti problem kot silo, ki usmerja pozornost dijakov (in učiteljev) na matematično argumentiranje in komunikacijo. Različne strategije, ki so jih razvili dijaki, lahko delimo s celotnim razredom, tako da dijaki zgradijo bolj koherentno znanje o tem problemu.

Tako v različnih teoretičnih pristopih zasledimo različne ideje o tem, kako zgraditi in poiskati probleme, ki imajo potencial sprožiti bogate preiskovalne procese med dijaki. Na področju matematičnega modeliranja prvotne probleme običajno podajo učitelji in v večini primerov obravnavajo vprašanja iz realnega življenja. Splošna značilnost poučevanja matematike s preiskovanjem, ki izhaja iz Deweya, je ideja, da se dijaki učijo preko interakcije z enim ali več problemi.

Če povzamemo do sedaj predstavljene ideje, lahko rečemo, da je poučevanje matematike s preiskovanjem katera koli dejavnost poučevanja, ki želi dijake aktivno vključiti v preiskovalne procese v okviru matematike – kar pomeni, da izgrajujejo koncepte in pojme, o njih dvomijo in jih raziskujejo, tako da ravnajo oz. se učijo ravnati kot preiskovalec matematičnega problema in na ta način razvijejo določeno matematično znanje.

Kako je bilo do sedaj promovirano poučevanje matematike s preiskovanjem?

Raziskovalci matematičnega izobraževanja želijo promovirati poučevanje matematike s preiskovanjem s pomočjo državnih in raziskovalnih projektov v več državah. V številnih državah je poučevanje matematike s preiskovanjem v neki meri vključeno v učni načrt za matematiko, vendar so njegove značilnosti formulirane različno in odražajo različne teoretične pristope. Projekti, financirani s strani Evropske unije, podpirajo in preučujejo izvajanje poučevanja matematike s preiskovanjem v izobraževalnih sistemih držav članic. Leta 2007 je EU poročilo o pedagoških trendih v evropskih izobraževalnih sistemih poročalo o »skrb vzbujajočem padcu zanimanja mladih za ključne naravoslovne študije in matematiko v Evropi« (Rocard idr., 2007). To poročilo je domnevalo, da bi »sprememba pedagogike poučevanja naravoslovja od primarno deduktivnih metod v smeri metod, ki temeljijo na preiskovanju, povečala zanimanje za naravoslovje«. Podobno je v ZDA dokument »Načela in standardi predmeta matematika« (»Principles and standards for school mathematics«) poudaril, da je cilj poučevanja matematika v srednjih šolah »naučiti dijake, kako reševati ne-rutinske probleme, tako da jim omogočimo razvoj znanja in orodij, ki jih potrebujejo za reševanje takšnih problemov« (NCTM, 2000). To kaže, da je državam po vsem svetu v interesu promovirati poučevanje matematike s preiskovanjem v vseh razredih. Vseeno pa državna poročila o promociji poučevanja matematike s preiskovanjem še vedno opozarjajo na številne izzive za implementacijo. Poročila iz Francije in Anglije trdijo, da imajo politiki dobre namene, vendar se morda ne zavedajo, kaj je dejansko potrebno, da spremenimo prakse v učilnicah in kako preoblikovati poučevanje iz prenosa znanja v poučevanje matematike s preiskovanjem (Burkhardt in Bell, 2007; Artigue in Houdement, 2007). EU projekt PRIMAS je raziskoval te izzive in priporoča, da učiteljem nudimo priložnosti za izvajanje poučevanja matematike s preiskovanjem. Predlaga tudi, da se vse projekte in dejavnosti pri pouku, ki so namenjene promociji poučevanja matematike s preiskovanjem, prilagodi lokalnim pogojem. Vendar pa učitelji potrebujejo strukture, ki bi jih podpirale in ki bi spodbujale medsebojno podporo pri implementaciji teh novih pobud (García, 2013). Podobno je EU projekt MASCIL raziskoval izzive, kako izvajati poučevanje, ki temelji na preiskovanju, in kako povezati matematično in naravoslovno izobraževanje s svetom dela. Promovira celosten pristop do nudenja podpore z »izvajanjem vrsto dejavnosti, vključno z razvojem visokokakovostnih, inovativnih gradiv in organizacijo tečajev za strokovni razvoj« s strani učiteljev, ki so usposobljeni za poučevanje s preiskovanjem, v vlogi razširjevalcev znanja.

Sedaj bomo obravnavali vprašanje realizacije poučevanja matematike s preiskovanjem, vključno s pripadajočimi izzivi.

2. Kako uvajati poučevanje matematike s preiskovanjem?

Uvod

Številni EU projekti so promovirali poučevanje matematike s preiskovanjem, da bi bolje pripravili dijake na dinamično družbo, ki temelji na znanju. Poznavanje dejstev in izolirane osnovne spretnosti ne zadostujejo za 21. stoletje. Dijaki morajo razviti veščine reševanja problemov in sposobnost, da sami pridobivajo znanje. Posledično naslednje kompetence pridobivajo na pomenu: sposobnost spoprijeti se s pomanjkanjem informacij, matematična ustvarjalnost na novih področjih znanja, sodelovanje v situacijah reševanja problemov in sporočanje (matematičnih) rezultatov. Matematično izobraževanje je odgovorno za razvoj spretnosti 21. stoletja (Rocard idr., 2007).

Poudarek na spretnostih 21. stoletja ni nekaj novega. Podobne kompetence lahko prepoznamo v pobudah, ki želijo meriti in spodbujati matematično pismenost dijakov. Program PISA definira matematično pismenost kot:

> ...sposobnost dijakov, da formulirajo, uporabljajo in interpretirajo matematiko v raznolikih kontekstih. Zajema matematično mišljenje in uporabo matematičnih konceptov, postopkov, dejstev in orodij za opis, pojasnilo in napoved pojavov. Posameznikom pomaga prepoznati vlogo matematike v svetu in sprejemati dobro utemeljene sodbe in odločitve, ki jih potrebujejo konstruktivni, angažirani in razmišljujoči državljani. (OECD, 2016a, str. 25)

Poleg tega v ZDA trenutni skupni osrednji standardi obravnavajo kompetence, ki presegajo izurjenost v postopkih (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010). Ti standardi se posebej posvečajo pomenu razvoja kompetenc, kot so reševanje problemov, razmišljanje, komuniciranje in predstavljanje.

Seznamom novih kompetenc je skupna potreba po bolj fleksibilnih spretnostih. Vprašanje je, kako lahko takšne spretnosti razvijamo v matematičnih učilnicah? En način, kako se jih lahko lotimo, je poučevanje matematike s preiskovanjem. Pri poučevanju matematike s preiskovanjem se s pomočjo procesov, kot so postavljanje hipotez, načrtovanje preiskav, sistematično eksperimentiranje in vrednotenje rezultatov, ustvarjajo poučevalne prakse. To poglavje bo obravnavalo vlogo nalog in strategij poučevanja v poučevanju matematike s preiskovanjem. Poleg tega bo opisalo in obravnavalo izkušnje različnih evropskih držav s poučevanjem matematike s preiskovanjem.

Naloge, ki spodbujajo poučevanje matematike s preiskovanjem

S tradicionalnimi nalogami v učbenikih težko razvijemo spretnosti, ki temeljijo na preiskovanju. Te naloge pogosto vsebujejo točno tisto informacijo, ki je potrebna za rešitev naloge, in so večinoma sestavljene tako, da dijakom skorajda ni treba razmišljati o postopku reševanja. Da bi lahko uveljavili poučevanje matematike s preiskovanjem, moramo ustvariti poučevalne prakse, znotraj katerih se lahko lotimo procesov, ki temeljijo na preiskovanju. Ni nujno, da se vsaka naloga izrecno nanaša na vse preiskovalne procese, vendar pa mora dijakom omogočati, da se seznanijo z vsaj enim procesom pri matematiki, ki je povezan s preiskovanjem. Nestrukturirane naloge lahko dijakom omogočajo, da preiskujejo, kritično razmišljajo, sodelujejo in sporočajo rezultate (primer je predstavljen na Sliki 1).

Strukturirana različica

Bolnik je zbolel. Zdravnik je temu bolniku predpisal zdravilo in mu svetoval dnevni odmerek 1500 mg. Po jemanju odmerka se povprečno 25 % zdravila izloči iz telesa v enem dnevu. Preostanek zdravila ostane v bolnikovi krvi.

- Koliko mg zdravila je v bolnikovi krvi po enem dnevu?
- Dokončaj preglednico.

Dan	Mg zdravila v krvi
0	0
1	1125
2	
3	

- Pojasni, zakaj lahko izračunaš količino zdravila za naslednji dan z uporabo formule: nova_količina = (stara_količina + 1500) * 0,75
- Po koliko dneh ima bolnik več kot 4 g zdravila v krvi? In po koliko dneh 5 g?
- Kakšna je maksimalna količina zdravila, ki jo lahko doseže?

Nestrukturirana različica

Bolnik je zbolel. Zdravnik je temu bolniku predpisal zdravilo in mu svetoval dnevni odmerek 1500 mg. Po jemanju odmerka se povprečno 25 % zdravila izloči iz telesa v enem dnevu. Preostanek zdravila ostane v bolnikovi krvi.

Preiskava

- S pomočjo izračunov razišči, kako se spreminja količina zdravila (v mg), kadar oseba začne jemati dnevni odmerek zdravila 1500 mg, na primer trikrat po 500 mg.
- So posledice izpuščanja dnevnega odmerka in/ali jemanja dvojnega odmerka res tako dramatične?
- Ali bolnik lahko doseže vsako količino zdravila v krvi? Pojasni svoj odgovor.

Izdelek

Oblikuj letak za bolnike, ki vsebuje odgovore na omenjena vprašanja. Vključi grafe in/ali preglednice za ponazoritev napredovanja količine zdravila tekom več dni.

Slika 1: Dve različici naloge (Doorman, Jonker in Wijers, 2016, str. 25)

Pri uporabi nestrukturirane različice naloge v matematični učilnici je učiteljeva odgovornost, da se dijaki osredotočajo na matematične vidike problema (oz. kolikor je dovoljeno, da se premikajo od matematike k npr. biologiji). Ta primer pokaže, da lahko 'odprte' naloge povežejo matematiko z drugimi strokami in da je matematika uporabna. Vendar pa 'odpiranje problemov' ne pomeni nujno, da matematične koncepte postavimo v nematematične kontekste. Tudi popolnoma matematične naloge so lahko nestrukturirane in predstavljene kot preiskava. Pomemben cilj nestrukturiranih problemov je postaviti dijake v aktivno vlogo in spodbujati njihovo aktivno udeležbo v reševanju matematičnih problemov.

Poučevanje matematike s preiskovanjem poganjajo nestrukturirane naloge, ki privedejo do strategij z več rešitvami. Strategije dijakov, njihove interpretacije problema, njihove domneve, izračuni, prikazi in sodelovanje nudijo priložnosti za razmislek o matematičnih procesih, ki so povezani s preiskovanjem. V tem procesu so učitelji proaktivni. Podpirajo in spodbujajo dijake, ki imajo težave, uspešne dijake pa vodijo s pomočjo skrbno izbranih strateških vprašanj. Cenijo prispevke dijakov – vključno z napakami – in vodijo učenje s pomočjo razmišljanja in izkušenj dijakov. To zahteva, da v razredu vzpostavimo skupen namen, npr. skupno ustvarjanje matematike, in lastništvo.

Moramo poudariti, da v vsakdanji praksi ni treba oz. celo ni mogoče vsega spremeniti v poučevanje, ki temelji na preiskovanju. Vloga preiskovanja v dnevnih pedagoških praksah je ena od sestavin dobrega izobraževanja. Uveljavljanje poučevanja matematike s preiskovanjem lahko spodbujamo s podpiranjem učiteljev, da razširijo svoje repertoarje v smeri tem, kot so obravnavanje preiskovalnih procesov v dnevni praksi, razvoj virov za poučevanje matematike s preiskovanjem, poznavanje načinov, kako učiti koncepte z uporabo poučevanja matematike s preiskovanjem, podpiranje sodelovalnega dela, merjenje napredka in vrednotenje kompetenc dijakov, ki so povezane s poučevanjem matematike s preiskovanjem.

Strategije za poučevanje matematike s preiskovanjem

PRIMAS[1] je bil EU projekt, ki je želel podpirati učitelje pri skupnem preiskovanju pedagogik poučevanja matematike s preiskovanjem s pomočjo oblikovanja in izvajanja modulov za profesionalni razvoj. Ti moduli so vsebovali dejavnosti za povezovanje preiskovalnih metod poučevanja z obstoječimi praksami, inovativne razredne dejavnosti, prikazane z videoposnetki razredov, in predloge učnih priprav. Pričakovano je bilo, da bodo ti moduli predstavljali izziv izobraževalcem bodočih učiteljev in učiteljem ter jim omogočili, da ravnajo reflektivno na nove načine (Swan idr., 2013).

Premik k pristopu poučevanja matematike s preiskovanjem učiteljem postavlja številna pedagoška vprašanja. Na primer: Kako lahko spodbudim svoje dijake, da postavljajo lastna vprašanja in poskušajo odgovoriti nanje? Kako lahko dijakom pomagam, da ta vprašanja nadgradijo na koristne načine? Kako lahko naučim dijake, da sodelujejo in se učijo drug od drugega? Kako lahko izvajam vse te nove dejavnosti v okviru mojih dnevnih odgovornosti? Ta vprašanja so dala povod za naslednje teme, ki so bile obravnavane v okviru modulov projekta PRIMAS za promocijo preiskovanja v vsakodnevni razredni praksi:

1. organiziranje preiskovanja, ki ga vodijo dijaki,
2. pomoč dijakom pri delu z nestrukturiranimi problemi,
3. spodbujanje razvoja koncepta s preiskovanjem,
4. postavljanje vprašanj, ki spodbujajo razmišljanje (in vključujejo vse dijake),
5. podpiranje sodelovalnega dela,

[1] http://www.primas-project.eu/

6. uporaba samovrednotenja in vrstniškega vrednotenja za spodbujanje učenja.

Preoblikovanje naloge iz učbenika

Prikazali bomo nekaj primerov alternativnih načinov uporabe naloge iz učbenika, ki je predstavljena na Sliki 1. Strukturirana različica naloge predstavi kontekst in navede problem in točno tisto informacijo, ki jo potrebujemo za rešitev problema. Naloga zahteva uporabo formule, medtem ko lahko kontekst zanemarimo. Naloga ne podpira uporabe matematike ali učenja uporabe matematike izven matematične učilnice. Zdi se, da nestrukturirana različica dijakom nudi možnost preiskovanja situacije, matematične ustvarjalnosti, sodelovanja, kritičnega razmisleka o ugotovitvah in sporočanja lastnih rezultatov. Vendar pa pri nestrukturirani različici naloge tvegamo, da se dijaki počutijo izgubljene in ne vedo, kaj naj storijo, ali pa, da določeni deli naloge od dijakov zahtevajo toliko časa, da ne morejo priti do smiselnega rezultata med trajanjem učne ure. Da bi to preprečil, mora učitelj učno uro strukturirati. Posledično nestrukturirana različica naloge potrebuje strukturirano učno pripravo za usmerjanje dijakovega preiskovanja.

Učna ura 1
10 minut: ustvarite skupine, predstavite problem in načrt dela ter razdelite nalogo
10 minut: dijaki v skupinah rešujejo nalogo
10 minut: s celotnim razredom se pogovorite o tem, če vse skupine vedo, kako naj začnejo in kako naj nadaljujejo. Izmenjajte strategije in poskrbite, da vsi vedo, kaj se od njih pričakuje.
15 minut: dijaki rešujejo nalogo, dokončajo izračune in pripravijo gradnike za letak.

Učna ura 2
20 minut: dijaki dokončajo letak
20 minut: predstavitve nekaterih primerov
10 minut: refleksija o nalogi (in umestitev naloge v okvir nadaljnjega dela)

Slika 2: Strukturirana učna priprava za nestrukturirano nalogo (glejte Sliko 1).

Treba je omeniti, da takšna učna priprava zahteva pedagoške spretnosti vodenja razrednega procesa. Med učno uro mora učitelj nekajkrat preiti od diskusije s celotnim razredom k skupinskemu delu.

Druga možnost vključitve dijakov v – bolj strukturiran – preiskovalni proces je razdelitev naloge na več delov. Lahko bi pokazali le uvodno besedilo in vprašali: Kaj je glavni problem? Ali potrebujemo dodatne informacije, da se lahko lotimo tega problema? Katero strategijo bi lahko uporabili, da bi našli odgovore?

Bolnik je zbolel. Zdravnik je temu bolniku predpisal zdravilo in mu svetoval dnevni odmerek 1500 mg. Po jemanju odmerka se povprečno 25 % zdravila izloči iz telesa v enem dnevu. Preostanek zdravila ostane v bolnikovi krvi.

Slika 3: Situacija naloge. Kaj bi lahko bil glavni problem?

Po tem, ko dijaki sami formulirajo problem, jim lahko daste strukturirano različico iz učbenika. Verjetno se jim bo sedaj vrstni red vprašanj zdel bolj smiseln, saj so imeli priložnost razmisliti o situaciji in možnih strategijah (Ainley idr., 2009).

Zadnji primer uporabe nalog iz učbenika je, da vzamete vsa podvprašanja in jih predstavite v drugačnem vrstnem redu ali pa kot koščke sestavljanke in dijake prosite, da poiščejo prvotni vrstni red iz učbenika.

Naloga, ki je predstavljena na Sliki 4, dijakom omogoča, da razmislijo o strukturi njihovih učbenikov. V številnih primerih so naloge podobno strukturirane, kar odraža logično strategijo preiskovanja problema in iskanja odgovora na glavno vprašanje, vendar od dijakov skoraj nikoli ne zahtevajo, da razmislijo o tej strategiji in opišejo njene značilnosti (opravijo izračun, sistematično zberejo več podatkov v preglednici, opišejo proces računanja s pomočjo formule, narišejo graf, nato pa uporabijo formulo in graf pri reševanju glavnega problema).

Bolnik je zbolel. Zdravnik je temu bolniku predpisal zdravilo in mu svetoval dnevni odmerek 1500 mg. Po jemanju odmerka se povprečno 25 % zdravila izloči iz telesa v enem dnevu. Preostanek zdravila ostane v bolnikovi krvi.

- Kakšna je maksimalna količina zdravila, ki jo lahko doseže?
- Pojasni, zakaj lahko izračunaš količino zdravila za naslednji dan z uporabo formule: nova_količina = (stara_količina + 1500) * 0,75
- Dokončaj preglednico.

Dan	Mg zdravila v krvi
0	0
1	1125
2	
3	

- Po koliko dneh ima bolnik več kot 4 g zdravila v krvi? In po koliko dneh 5 g?
- Koliko mg zdravila je v bolnikovi krvi po enem dnevu?

Slika 4: Vrstni red vprašanj je pomešan. Kakšen je bil prvotni vrstni red iz učbenika?

Še več strategij za poučevanje matematike s preiskovanjem

Predstavili smo tri alternativne načine uporabe naloge iz učbenika in preoblikovanja naloge, da bi vključevala preiskovanje pri učni uri matematike. Vsem trem načinom je skupno, da mora učitelj organizirati razredne diskusije in dijakom dati dovolj časa za razmislek. Še ena strategija za razpravljanje o preiskovalnih procesih s celotnim razredom, ki vključuje vse dijake, je strategija razmišljaj-delaj v paru-deli. Osnovna ideja je, da dijaki 2 minuti sami pri sebi razmislijo o problemu in svoje misli zapišejo, nato 2 minuti primerjajo svoje misli s sosedom, nazadnje pa še 2 minuti delijo svoje rezultate s celotnim razredom. Ta strategija da vsem dijakom čas za razmislek in učitelju možnost, da vse vključi v diskusijo.

Poleg zgoraj navedenih nalog se lahko domislite tudi nalog, ki spodbujajo dijake, da izpodbijajo hipoteze (npr. Slika 5). Dijakom bi lahko našteli vrsto izjav, ki se nanašajo na poučevano temo in jim pustili, da se odločijo, če te izjave veljajo vedno, včasih ali nikoli. Če so mnenja, da izjava velja *vedno* ali *nikoli*, naj pojasnijo, kako so lahko tako prepričani. Če so mnenja, da velja *včasih*, naj opišejo, kdaj velja in kdaj ne.

Povišica Maks dobi povišico v višini 30 %. Janez dobi povišico v višini 25 %. Torej je Maks dobil večjo povišico.	**Pravi koti** Peterokotnik ima manj pravih kotov kot pravokotnik.
Rojstni dnevi V razredu z desetimi dijaki je verjetnost, da sta bila dva dijaka rojena na isti dan v tednu, enaka ena.	**Večji ulomki** Če števcu in imenovalcu ulomka prištejemo isto število, se vrednost ulomka poveča.

Slika 5: Izjave, ki veljajo vedno, včasih ali nikoli.

Ta naloga prosi dijake, da se odločijo o veljavnosti izjav in podajo razloge za svoje odločitve. Najverjetneje bodo razlage vključevale ustvarjanje primerov in protiprimerov, ki izjave potrjujejo oz. ovržejo. Poleg tega lahko prosite dijake, da dodajo pogoje ali kako drugače spremenijo izjave, da postanejo 'vedno veljavne'. Takšna vrsta dejavnosti ima močan vpliv. Izjave lahko pripravite tako, da dijake spodbujajo, da se soočijo s pogostimi napačnimi predstavami ali napakami in o njih razpravljajo. Učiteljeva naloga je, da dijake spodbuja, da podajo utemeljitve, primere in protiprimere. Ta naloga dijakom nudi možnost, da odkrijejo vlogo primerov v matematičnem preiskovanju.

Ti primeri matematičnih nalog kažejo pomen skrbno izbranih virov pri uvajanju poučevanja matematike s preiskovanjem v pouk matematike.

Izkušnje z izvajanjem poučevanja matematike s preiskovanjem

Obstajajo empirični dokazi iz različnih raziskav o kakovosti in učinkih poučevanja matematike s preiskovanjem. Učinki poučevanja matematike s preiskovanjem vključujejo izboljšanje motivacije za učenje matematike, razvoj odnosa do matematike in razumevanje pomembnosti matematike za življenje in družbo (Bruder in Prescott, 2013; Blanchard idr., 2010; Furtak idr., 2012; Hattie, 2009; Minner). Vendar pa nekateri strokovnjaki opozarjajo, da takšen način poučevanja lahko izboljša učenje le, če je skrbno oblikovano in dobro strukturirano (Hofstein in Lunetta, 2004; Woolnough, 1991).

V primerjavi s strukturiranim preiskovanjem in odprtim preiskovanjem se je vodeno preiskovanje izkazalo za najbolj učinkovito metodo izvajanja preiskovanja v razredu, v kombinaciji z zaprtimi nalogami, ki podpirajo učenje postopkov in osnovnih spretnosti (Bruder in Prescott, 2013).

Kako vemo, kdaj je poučevanje učinkovito? Velik del današnjega pritiska na učitelje izhaja iz različnih pričakovanj o učenju dijakov, ki pogosto niso jasno formulirana. Če želimo dijake, ki matematiko razumejo, v njej uživajo, so sposobni reševati probleme in izpeljati zaključke, potem se nam bo zdelo vodeno poučevanje matematike s preiskovanjem uspešno. Če pa je naš cilj, da dijaki dosežejo visoke ocene na standardiziranih preverjanjih znanja, potem bo poučevanje matematike s preiskovanjem včasih manj uspešno.

Rezultati notranje kvalitativne evalvacije projekta PRIMAS dobro pokažejo izzive in priložnosti, s katerimi se soočajo učitelji med eksperimentiranjem s poučevanjem matematike s preiskovanjem (Maass, 2013). Večina učiteljev, udeleženih v projektu PRIMAS, vidi poučevanje matematike s preiskovanjem kot pristop, ki je osredotočen na dijake in vključuje samovodeno toda usmerjeno raziskovanje, postavljanje vprašanj, prihajanje do odkritij in testiranje domnev med iskanjem novega razumevanja.

> *Pri preiskovanju gre za to, da dajemo prednost dijakom, da ustvarijo lastne razlage in sodelujejo v kritičnem diskurzu v nasprotju s tem, da jim sploh ni treba razmišljati [...] med reševanjem kompleksnih problemov dijaki uporabijo svoje znanje o problemih iz resničnega sveta in sodelujejo v kritični diskusiji z drugimi o modelih, rešitvah in dokumentiranju.* (učitelj iz Cipra)

Vseeno pa je upoštevanje preiskovalnih procesov pri pouku zahtevna, toda produktivna priložnost za oblikovanje učnih ur na drugačen način. Učitelji so poudarili koristi, ki so jih imeli njihovi dijaki od učenja s preiskovanjem.

> *Iz lastnih izkušenj vemo, koliko je vredno, če nekaj odkrijemo sami, namesto, da nam nekdo preprosto pove rešitev. Med poučevanjem učenja s preiskovanjem se dijaki resnično naučijo nekega pristopa in imajo tako na voljo več ključev do razumevanja.* (učitelj iz Švice)

Učitelji so poudarili tudi pozitiven vpliv procesov, ki so usmerjeni na preiskovanje, na razmišljanje dijakov.

> *Opazil sem vpliv na dijakovo sposobnost indukcije. Sposobnost nekaterih dijakov, da pridejo do trdnih zaključkov in jih podprejo z matematičnimi dokazi v obliki modelov, je name naredila vtis […] ustno sodelovanje dijakov se je dramatično izboljšalo […] še posebej uporaba pravilne matematične terminologije, kar pri tej starosti ni lahka stvar.* (namestnik ravnatelja iz Cipra)

Učitelji so dejali, da jim je v njihovi praksi zelo všeč razlagati koncepte in postopke – enako menijo tudi nekateri od njihovih dijakov. Vendar pa se zdi, da so učne ure, pri katerih se dijaki mučijo z odprtimi vprašanji in problemskimi nalogami, učinkovite tudi za razpravljanje o strategijah reševanja.

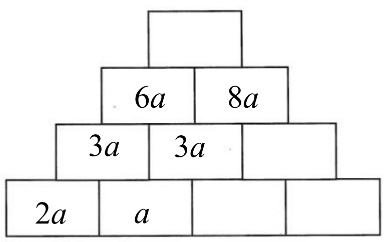
> *Všeč mi je bilo poučevanje, ki je usmerjeno na učitelja, in mislim, da je dijakom še vedno všeč. Ampak na ta način se ne bodo veliko naučili, saj jim ne bo treba reševati problema. Dobili bodo problem, postopek reševanja in na koncu še samo rešitev.* (učitelj iz Nemčije)

V tem kontekstu učitelji poudarijo pomen izmenjave s sošolci:

> *Ugotovil sem, kako pomembno je, da dijaki takšno priložnost (dialog) uporabijo zato, da ugotovijo, kaj že vedo in kaj bi se lahko naučili od drugih. In nato dijaki morda opazijo, da so prišli do odgovora, za katerega so morda mislili, da ga ne poznajo.* (učitelj iz Norveške)

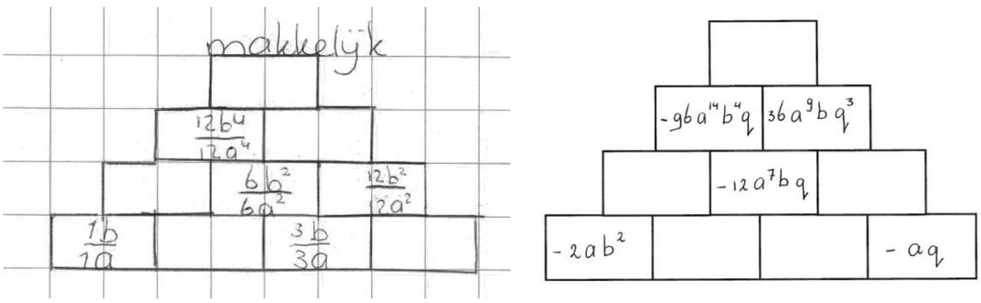
Primer iz Nizozemske

Poučevanje matematike s preiskovanjem zahteva spremembo vlog, tako učiteljeve kot dijakove. Učitelji prevzamejo vlogo moderatorja učenja, dijaki pa dobijo zelo aktivno vlogo. Na primer ena učiteljica je vzela vajo iz učbenika za matematiko iz poglavja o algebri in oblikovala nestrukturirano različico naloge. Prvotna naloga je bila sestavljena iz serije piramid, dijaki pa so morali sešteti ali pomnožiti vsebino sosednjih celic, da so lahko določili vsebino celice nad njimi. V nekaterih primerih so morali razmišljati »vzvratno«, da bi našli vsebino celic v spodnjem delu (glejte Sliko 6). S takšno prilagoditvijo naloge je želela ugotoviti, česa so njeni dijaki sposobni in kaj se jim je zdelo lahko oz. težko. Najprej je predstavila eno od takšnih piramid in prosila dijake, da poskusijo ugotoviti, kako je piramida zgrajena in če lahko poiščejo vrednosti praznih celic.



Slika 6. Piramida, ki jo je oblikovala učiteljica

Po petih minutah in malo diskusije je dijakom dala nalogo, da naredijo podobne piramide kot alternativni način reševanja vrste nalog iz učbenika. Lahko so uporabili seštevanje ali množenje, oblikovati pa so morali lahek in težek piramidni problem. Dijaki so pri tem dosegli izjemne rezultate (glejte Sliko 7). Nekateri dijaki so bili previdni in so ustvarili piramide, ki so bile precej podobne tistim iz učbenika, medtem ko so nekateri dijaki iskali skrajnosti. Ti izdelki dijakov so učiteljici dali vpogled v algebrske izraze, ki jih pozna njen razred. Gibali so se od zelo preprostih do zelo zahtevnih, npr. ulomki, decimalke in negativna števila.



Slika 7. Lahka in težka piramida z množenjem, ki so ju oblikovali dijaki

Med dejavnostjo je en par dijakov postavil problem minimalne količine informacij, ki mora biti na voljo, da lahko rešimo piramido. Druge skupine so se nato lotile tega vprašanja, kar jih je motiviralo, da so oblikovali še bolj zapletene piramide. Učiteljica je poročala, da je v tem igrivem vzdušju pri dijakih opazila izboljšanje razumevanja algebrskih spretnosti. Še posebej zgovoren je bil trenutek, ko so dijaki formulirali vprašanje o potrebni količini informacij. Preizkusili so več primerov, s čimer so pokazali razpon svojih algebrskih spretnosti in hkrati vadili.

> *Dijaki so postali avtorji matematike, bili so motivirani za matematiko in njihove sposobnosti so postale opaznejše.* (Učiteljica iz Nizozemske)

Dijaki običajno vadijo algebro z enostavnimi nalogami, kot so 'razširi' ali 'razstavi na faktorje', in razširjajo vzorce, ne da bi globlje razmišljali o tem. Pri takšnih nalogah precej težje opazimo, s kakšnimi problemi se soočajo dijaki in če so sposobni uporabiti svoje algebrske spretnosti v novih situacijah. Učiteljica je močno cenila to spremembo v razredu, vendar je nakazala, da je to bil oz. še vedno je zahteven proces. Seznanjanje z novimi strategijami poučevanja, ki so potrebne za poučevanje matematike s preiskovanjem, je očitno proces, ki zahteva čas in pozornost.

Izzivi pri izvajanju poučevanja matematike s preiskovanjem

Učitelji se soočajo s številnimi pogoji, ki omejujejo izvajanje poučevanja matematike s preiskovanjem v vsakodnevni razredni praksi. Glavni omejujoči dejavniki so učbeniki za matematiko, ki jih morajo predelati, čas, ki je na voljo za načrtovanje in izvajanje dejavnosti poučevanja matematike s preiskovanjem, razpoložljivi viri in vrednotenje dela dijakov.

> *Mislim, da je največji problem trajanje [pouka] in čas, ki je na voljo za načrtovanje pouka. [...] če predmetnik zajema veliko, veliko količino snovi, potem je zelo težko najti čas za učenje s preiskovanjem. Ker moraš predelati tako veliko snovi v tako kratkem času.* (učitelj iz Združenega kraljestva)

> *Oblikovanje učnih ur je zahtevno. Upoštevati moram veliko spremenljivk in vse dobro načrtovati, če želim, da so moji dijaki aktivno udeleženi v preiskovanju in da v resnici izpeljem na dijake usmerjeno učno uro.* (učitelj iz Cipra)

> *Seveda ti vzame veliko časa, ampak to ni neko dodatno delo. Pravzaprav sem se naučil uporabljati učenje s preiskovanjem pri delu z matematično snovjo. Dijaki se snov naučijo precej globlje in jo bolje razumejo.* (učitelj iz Španije)

Še ena skrb učiteljev je vrednotenje uspeha dijakov. Prioritetna naloga učiteljev je, da pomagajo dijakom, da se dobro odrežejo na preizkusih znanja. Šolski izpiti se večinoma osredotočajo na dijakovo sposobnost reprodukcije. Zato se učitelji znajdejo pred dilemo, ali naj dijake pripravijo na izpite ali pa v razredu izvajajo poučevanje matematike s preiskovanjem.

> *Moja primarna naloga je, da dijake pripravim na naslednje zunanje preverjanje znanja, s katerim bodo dobili spričevalo, ki jim bo v prihodnosti koristilo. Nočejo več kot to – in če bi želel storiti več, bi se mi takoj uprli. V naslednjem koraku pa bi mi starši rekli, da to ni moja naloga.* (učitelj iz Nemčije)

Res je, da v številnih državah izpiti in testi neposredno ne nagrajujejo dijakovih sposobnosti preiskovanja in reševanja netrivialnih problemov. Nekatere vlade se zavedajo tega problema in ga poskušajo rešiti. Naslednja možna ovira izvajanju učenja s preiskovanjem se tiče vodenja dijakov, kar so omenili nekateri učitelji, ko so začeli sodelovati pri projektu PRIMAS. Sprva so se bali, da bo učenje s preiskovanjem v razredu s tridesetimi dijaki problematično z vidika hrupa in nereda:

> *Pomislil sem: »To bo v mojem razredu neizvedljivo, ker moji dijaki ne bodo razmišljali o dejavnosti, zapravljali bodo čas, pogovarjali se bodo o čem drugem in hrup bo neznosen.« Nato pa sem izvedel to dejavnost in sem bil presenečen, da so vsi sodelovali in bili aktivni, tudi kadar so iskali odgovor med delom v skupinah.* (učitelj iz Španije)

Podporni dejavniki za izvajanje poučevanja matematike s preiskovanjem

Usmerjanje preiskovanja dijakov s pomočjo dobro načrtovanih vprašanj (in drugih napotkov) je pomembna naloga učitelja, ki poučuje matematiko s preiskovanjem. Z izrazom usmerjanje mislimo uporabo učnih sredstev z značilnostmi, kot sta 'odzivnost' in 'pojemanje'. Z odzivnostjo je mišljeno, da je usmerjanje prilagojeno potrebam dijakov, pojemanje pa pomeni, da usmerjanje postopoma izgine, ko dijaki napredujejo s preiskavo. Stopnjo usmerjanja moramo prilagoditi stopnji dijakov. Učitelj jo lahko spreminja tako, da zadosti potrebam dijakov z nizkimi dosežki ali pa dijakom z visokimi dosežki postavi izziv. Med opazovanimi učnimi urami so učitelji postavljali vprašanja, kot so: »Kako bi lahko ta problem poenostavili? Kakšne predpostavke bi lahko postavili?« Po tem, ko so

dijaki formulirali problem, so nekateri učitelj vprašali naslednje: »Se lahko spomnite kakšnega sistematičnega pristopa? Kako bi lahko na smiseln način zabeležili svoje podatke?« Po tem, ko so zbrali podatke, so nekateri učitelji vprašali dijake: »Ali opazite kakšne vzorce? Lahko pojasnite, zakaj se pojavijo?« Proti koncu ure so se učitelji osredotočili na sporočanje ugotovitev: »Kako bi lahko to pojasnili natančno in jedrnato?« Postavljanje takšnih vprašanj in deljenje odgovorov s celotnim razredom podpira preiskovalni proces.
Še en pomemben vidik, ki je postal očiten med hospitacijami, je, da so učitelji morali ustvariti razredno okolje, v katerem so si dijaki upali spregovoriti in delati napake. Ne samo, da si morajo dijaki upati postavljati vprašanja, delati napake in izražati svoje mnenje, ampak potrebujejo tudi jasne signale o tem, kakšno vedenje je sprejemljivo.

> *Tudi jaz, na primer, delam napake, na kar me dijaki opozorijo in pravilno izračunajo nalogo. Zaradi tega jih pohvalim in to jim je všeč. Mislim, da tudi to podpira komunikacijo. Če reagiram tako: »Res je, zmotil sem se. Oprostite. Prav imate.« Dijakom pokažem, da napake niso nekaj slabega. Zato si upajo delati napake in jih priznati.* (učitelj iz Nemčije)

Če pogledamo nazaj, so glavni učni vidiki pristopa, ki temelji na preiskovanju, povezani s spodbujanjem aktivne udeležbe dijakov tako, da jim nudimo namige, odgovornost in samozavest pri izvajanju preiskovanja. Večina intervjuvanih učiteljev je bila še posebej navdušena nad tem, kako je ta način izobraževanja motiviral njihove dijake med poukom matematike in naravoslovja. Učitelji so spregovorili o tem, kako učenje s preiskovanjem poveže učenje z zabavo:

> *Menim, da se dijaki veselijo nalog učenja s preiskovanjem, saj jih je zabavno reševati in se razlikujejo od običajnih, tradicionalnih učnih ur. Preko učenja s preiskovanjem dijaki dobijo priložnost, da odkrivajo, predstavljajo svoje ugotovitve in izrazijo svoje mnenje med učno uro matematike, medtem ko je v preteklosti učitelj sam delal vse to.* (učitelj iz Malte)

Učitelji so poudarili, da je pomembno, da dijakom pojasnimo, kaj po novem pričakujemo od njih: da se morajo naučiti, kako aktivno postavljati vprašanja, iskati odgovore, primerjati pristope in slediti lastni metodi preiskovanja – ne da bi ves čas prosili za pomoč. Morajo se tudi zavedati, kako pomembno je, da se naučijo sodelovalnega dela, tako kot to počnejo profesionalni znanstveniki in matematiki v svetu, ki jih obkroža.

Zaključek

To poglavje je opisalo načine, kako uvajati poučevanje matematike s preiskovanjem, in razredne izkušnje s poučevanjem matematike s preiskovanjem, kot so jih navedli učitelji. Te izkušnje kažejo, da učitelji naletijo na izzive, kadar poskušajo izvajati poučevanje matematike s preiskovanjem v vsakodnevni praksi. Ti izzivi izpostavljajo potrebo po skupnih vrednotah, prepričanjih in ciljih matematičnega izobraževanja. Matematično izobraževanje ni namenjeno le nudenju podpore dijakom pri učenju algoritmov in uporabe postopkov, temveč mora obravnavati tudi kompetence, kot so ustvarjalnost, spoprijemanje s pomanjkanjem informacij, vzpostavljanje povezav, kritično razmišljanje, sodelovanje in komuniciranje. Naloge in strategije poučevanja, ki so jih navdihnili preiskovalni procesi oz. ki omogočajo pristope, ki temeljijo na preiskovanju, pomagajo razvijati te kompetence. Poleg tega so učitelji poudarili pomen podpornih pogojev na ravni šole. Izvajanje poučevanja matematike s preiskovanjem zahteva dodaten čas za pripravo in izvajanje učnih ur, zaradi česar je potrebna podpora s strani kolegov in šolskih oblasti.

Izzivov, s katerimi se soočajo učitelji in dijaki, ko poskušajo izvajati poučevanje matematike s preiskovanjem, ne moremo premagati z izoliranimi in naključnimi posegi. Da bi lahko spremenili kulturo učenja in poučevanja v takšno, ki podpira poučevanje matematike s preiskovanjem, morajo biti posegi usklajeni s šolskim kontekstom in prispevati k zahtevam kurikuluma.

Na podlagi prejšnjih odstavkov lahko navedemo nekaj pomembnih točk. Uspešno izvajanje poučevanja matematike s preiskovanjem zahteva:

1. razpoložljivost virov za poučevanje matematike s preiskovanjem, ne v obliki izoliranih nalog, temveč modulov, ki prikazujejo, kako lahko pristopimo k matematičnim temam v kurikulumu na način poučevanja matematike s preiskovanjem,
2. usklajenost z institucionalnimi pogoji in omejitvami, vključno z razpoložljivimi prostori in časom, ter uradnimi zahtevami in vrednotenji dijakov in učiteljev,
3. učna skupnost učiteljev (vsaj še en učitelj in po možnosti še izkušen moderator) za izvajanje eksperimentov v razredu, pogovarjanje o izkušnjah in promoviranje profesionalnega razvoja učiteljev tudi na druge načine. Zelo zaželene so tudi možnosti izmenjave strokovnega znanja s širšo (npr. državno) skupnostjo.

Oblikovanje modulov v projektu MERIA se naslanja na dva okvira, ki sta povezana s poučevanjem matematike s preiskovanjem, namreč Učenje matematike v realnem kontekstu in Teorija didaktičnih situacij. Ta okvira bosta predstavljena v poglavjih, ki sledijo. Moramo poudariti, da sta oba okvira plod desetletij raziskovanja, zaradi česar ne moremo in tudi ni treba predstaviti vseh značilnosti obeh okvirov, da bi omogočili bralcem, da sami uporabljajo in gradijo module. V poglavju Literatura predlagamo dodatno branje za tiste, ki bi želeli poglobiti svoje znanje o enem ali obeh okvirih.

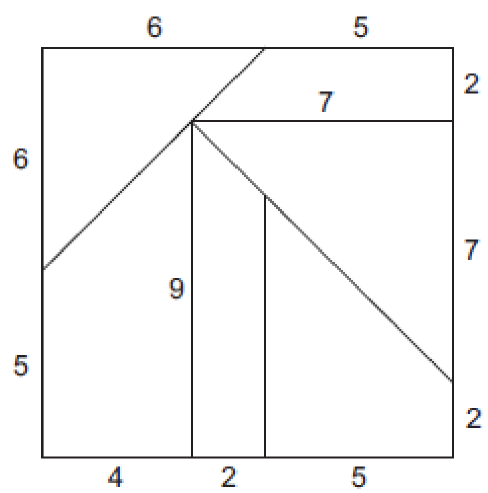
3. Teorija didaktičnih situacij

Uvod

Poglejmo si primer, kako organizirati učno uro, ki omogoča dijakom preiskovanje in samostojno izgrajevanje znanja. V predlagani učni uri dijaki odkrijejo poseben primer pomembne matematične lastnosti, da imajo podobni liki (neformalno rečeno, liki enakih »oblik«) enako razmerje istoležnih stranic (tj. da obstaja fiksni »faktor raztega«, ki nam omogoča, da izračunamo stranice drugega lika, če poznamo stranice prvega). Temu pogosto rečemo Talesov izrek. V resnici ga lahko posplošimo ne samo na poljubne večkotnike, ampak na poljubne like, katerih stranice niso ravne črte, kar pa zdaleč presega srednješolski kurikulum. Istočasno pa se podobni liki, ki niso večkotniki (npr. krog, polkrog), pojavljajo v številnih realnih kontekstih, kot na primer na slikah, prikazanih v različnih velikostih. Vidimo lahko, da zahteven matematični pojem *kot* ni potreben in se morda sploh ne bo pojavil pri tej dejavnosti.

Dijaki dobijo naslednje navodilo:

Pred vami je šest delov sestavljanke, ki jih lahko zložite v kvadrat (primer: »tangram«, Slika 8). Naredili boste podobno sestavljanko, večjo od obstoječe sestavljanke, v skladu z naslednjim pravilom: daljica, ki na prvotnem delu sestavljanke meri 4 cm, naj na vašem povečanem delu sestavljanke meri 7 cm. Vsaka skupina štirih oz. petih dijakov dobi eno sestavljanko. Vsak dijak naj naredi vsaj en del oz. par dijakov naj naredi vsaj dva dela sestavljanke. Ob zaključku se morajo vsi nastali deli na enak način zložiti v kvadrat (Brousseau, 1997, str. 177).



Slika 8: Sestavljanka, uporabljena v situaciji s sestavljanko

Po tem, ko jim učitelj predstavi problem, se dijaki lotijo dela brez učiteljeve pomoči. Ta problem postavimo dijakom, ki so seznanjeni z idejo povečevanja količin s prištevanjem. Vendar ko dijaki vsaki stranici prištejejo 3 cm, ne morejo rekonstruirati večje sestavljanke, saj se koščki ne prilegajo. Dijaki poskušajo uporabiti predhodno razvito znanje (o povečevanju s prištevanjem), da bi rešili problem, vendar jih situacija s sestavljanko prisili, da ugotovijo, da v tem primeru način razmišljanja, ki so ga uporabljali do sedaj, ne deluje in da morajo razviti novo matematično znanje. To lahko premagajo s spremembo strategije, pri kateri dolžine stranic povečajo z množenjem. Pomembno je, da dijaki sami razvijejo ideje o podobnosti in še posebej, da spoznajo, da strategijo z množenjem zahteva sama situacija in ne le učitelj.

V naslednjem koraku učitelj prosi vse skupine, da formulirajo in predstavijo svoje ugotovitve. Nekatere dijake lahko, na primer, prosi, da predstavijo in pojasnijo, kako so povečali svoj del sestavljanke. Skupine poročajo tudi o tem, ali se njihovi povečani deli sestavijo skupaj v kvadrat ali ne. V primeru, da se ne, jih povprašamo, kaj nameravajo storiti glede tega.

Da bi lahko pravilno sestavili novo sestavljanko, mora vsak dijak iz skupine priti do hipoteze, da je treba dolžine stranic vseh delov povečati za faktor 7/4. Učitelj je lahko prepričan, da so dijaki dosegli zaželen cilj razumevanja proporcionalnosti, če svojo strategijo verificirajo tako, da sestavijo novo sestavljanko.

Za zaključek lahko učitelj formulira idejo o proporcionalnosti med geometrijskimi liki na formalen način. Na podlagi diskusije med učno uro in končno refleksijo o problemu postanejo osebne ideje dijakov skupno znanje, podobno tistemu, ki ga najdemo v različnih medijih, kot so učbeniki ali spletni viri.

Oblikovanje te situacije poučevanja je klasičen produkt Teorije didaktičnih situacij. V preostanku poglavja bomo predstavili osnovne pojme in načela te teorije, ponazorjena z dodatnimi primeri in smernicami, kako ta pristop uporabiti v razredu.

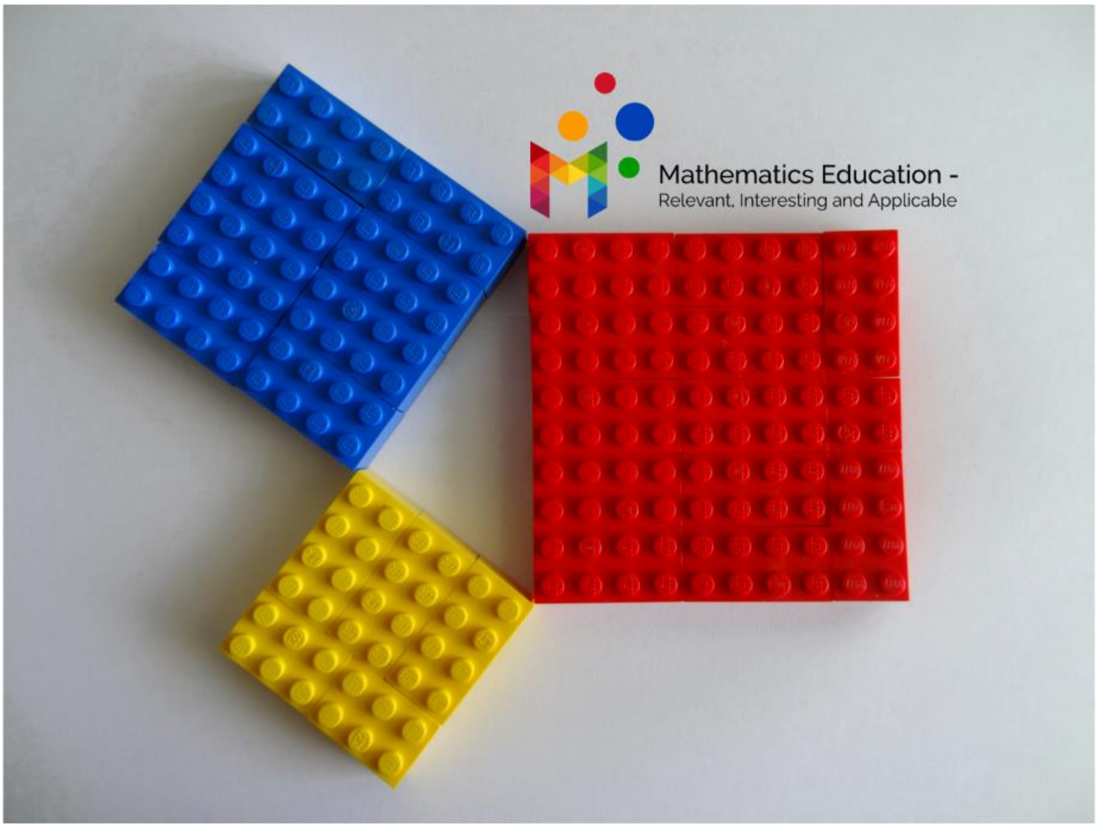
Osebno in institucionalno znanje

Teorija didaktičnih situacij (TDS), ki jo je zasnoval Guy Brousseau v poznih šestdesetih letih 20. stoletja, je botrovala nastanku številnih idej in rezultatov, ki lahko učiteljem pomagajo uporabljati in razvijati njihovo matematično znanje, saj se ukvarjajo z oblikovanjem in organizacijo poučevanja. TDS podpira poučevanje, ki dijakom omogoča, da so preiskovalci in graditelji matematičnega znanja na način, ki zajema bistvene elemente poučevanja matematike s preiskovanjem.

V primeru TDS je zelo pomembno, da ločimo med dvema vrstama znanja:

Institucionalno znanje (včasih imenovano *javno* ali *uradno znanje*) je znanje, ki je predstavljeno v učbenikih, na spletnih straneh, strokovnih raziskovalnih revijah in drugih objavljenih virih. Predstavlja sintezo matematičnih dejavnosti, ki so jih izvedli posamezniki, kasneje pa potrdili drugi in javno objavili. V teh virih je matematično znanje predstavljeno v jedrnati in precizni obliki, medtem ko preiskovalni proces, ki je pripeljal do njegovega razvoja, običajno ni viden. Ta deduktiven način predstavljanja matematičnega znanja si deli in vrednoti skupnost raziskovalcev in učiteljev, občasno pa tudi splošna javnost. Enostaven primer je predstavitev Pitagorovega izreka kot $a^2 + b^2 = c^2$, kjer sta a in b kateti, c pa hipotenuza pravokotnega trikotnika. Danes je ta formula »institucionalno znanje«, ki ga učitelji predstavijo svojim dijakom in ki jim tudi kasneje ostane v spominu, ne pa geometrijska ideja ali dokaz, ki stoji za tem. Institucionalnemu znanju včasih rečemo tudi skupno, javno ali uradno znanje.

Osebno znanje je znanje, ki ga dijaki (in drugi) izgrajujejo med interakcijo z matematičnim problemom. Te ideje oz. znanje so pogosto podane implicitno in se nanašajo na kontekst, v katerem so bile razvite. Dijak lahko razvije osebno znanje o Pitagorovem izreku med igro s trikotnimi in kvadratnimi ploščicami, kot je prikazano na Sliki 9. Seveda je potrebno več, da pridemo do uradne oblike, ki je opisana zgoraj.



Slika 9. Sestavljene ploščice, ki ponazarjajo Pitagorov izrek

V primeru sestavljanke je osebno znanje, ki ga dijaki zgradijo najprej, povezano le z uspehom ali neuspehom specifičnih metod povečanja delov. Uradno znanje, h kateremu stremimo, je, če sta si lika A in B podobna (sta enake »oblike«), potem je količnik med istoležnima stranicama (a/b, pri čemer je a stranica lika A in b istoležna stranica lika B) konstantno. Morda bo potrebnih več situacij, da dosežemo tako splošno uradno znanje. Ob zaključku situacije s sestavljanko bodo dosegli kvečjemu dogovor o tem, da v danem primeru deluje le množenje s faktorjem 7/4.

Kadar se dijaki ukvarjajo z matematičnim problemom in razvijejo lasten odgovor na dano vprašanje, širijo svoje osebno znanje. Osebno znanje dijakov se bo najverjetneje malce razlikovalo od institucionalnega znanja. Ko ga bodo delili z drugimi in o njem razpravljali, ga bodo nadalje razvijali in formalizirali. Posledično bo komunikacija s sošolci oz. vrstniki nadalje razvila in formalizirala prvotne ideje dijakov.

Bistvenega pomena je, da učitelj izzove osebno znanje dijakov s postavljanjem novih problemov, ki zahtevajo znanje, ki ga še niso povsem razvili. Na ta način potrjujejo osebno znanje. Potrdi ga lahko učitelj, sama problemska situacija ali pa primerjava z drugimi dijaki, npr. z njihovimi strategijami reševanja problema. Na ta način se osebno znanje preoblikuje in postane bolj formalno. To pomeni, da se to znanje približa temu, čemur rečemo institucionalno znanje.

Didaktične in adidaktične situacije

Razlikovanje med osebnim in institucionalnim znanjem, ki ga predstavi Teorija didaktičnih situacij, omogoča učiteljem, da organizirajo pouk z uporabo preiskovalnih situacij, tj. pristopa poučevanja matematike s preiskovanjem. Del ideje poučevanja matematike s preiskovanjem je, da mora poučevanje dijakom nuditi priložnost, da se lotijo dejavnosti, ki so podobne raziskovalnim.

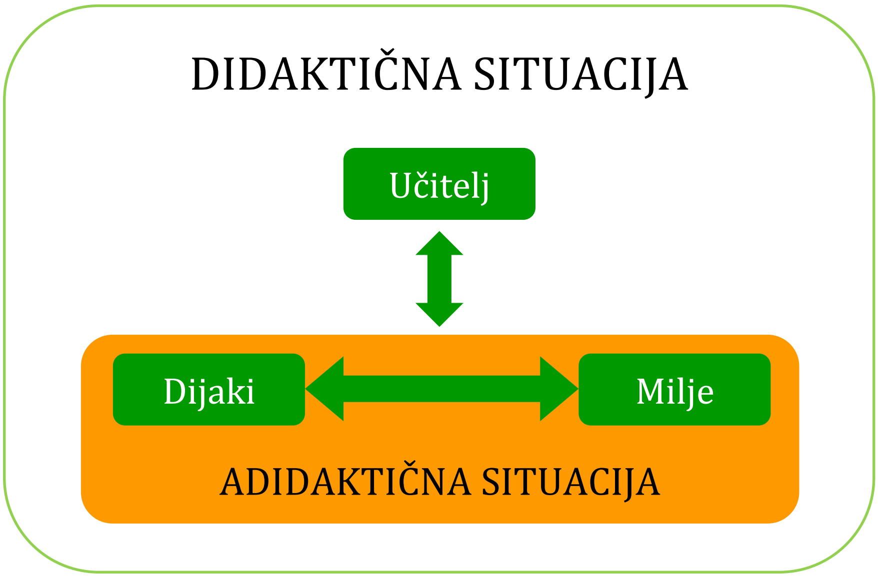
Ključna komponenta oblikovanja takšnih situacij je pojem *didaktičnega miljeja*. Milje je okolje, s katerim dijak stopi v interakcijo, da bi pridobil novo znanje. Sestavljeno je iz problema, predznanja in pripomočkov, kot so svinčnik in papir, ravnilo, žepno računalo, program za simbolno računanje (Computer Algebra System – CAS), sestavljanka itd. Med pripravo učne ure učitelj določi *standarde znanja* in oblikuje ustrezen milje za dijakov razvoj tega znanja. Vendar so miljeji lahko bolj ali manj primerni za razvoj določenega znanja. V zgoraj opisani situaciji s sestavljanko je milje sestavljen iz sestavljanke, novih listov papirja, škarij, ravnil in predznanja dijakov. (Epistemološka) ovira, s katero se soočijo dijaki, izvira iz matematične narave problema. Torej ima milje visok potencial, da dijaki zgradijo predvideno znanje, ne da bi jim učitelj predaval o podobnosti med geometrijskimi liki ali načelih podobnih trikotnikov. Milje med dijaki ustvari potrebo po izgrajevanju tega znanja.

Lahko se zgodi, da ne bodo vsi dijaki ugotovili, da strategija množenja dolžin stranic ohranja velikost kotov, čeprav bi za združitev delov v nov, večji kvadrat, to morali. Iz tega sledi, da pravilna strategija privede do razvoja predvidenega institucionalnega znanja. TDS pristop k poučevanju in učenju je pogosto opisan kot igra. Oblikovanje situacije in njenega miljeja lahko primerjamo s tem, ko začrtamo igrišče za športno tekmo in formuliramo pravila igre. Če dijaki v igri zmagajo, pomeni, da so razvili optimalno strategijo za to igro. Zmaga torej sovpada z učenjem, optimalna strategija pa pomeni, da so dijaki razvili predvideno znanje in metode. Drugače povedano, igra ustvari potrebo po razvoju zmagovalne strategije. »Igralna površina« (situacija) bi morala biti oblikovana tako, da maksimira potencial dijakov, da to strategijo najdejo.

Kadar je milje ustrezno oblikovan, lahko dijaki avtonomno stopijo v interakcijo z njim, brez dodatnega vodenja s strani učitelja. *Adidaktične situacije* so tiste, v katerih se dijaki lotijo problema in raziskujejo milje brez posredovanja s strani učitelja. V takšnih situacijah dijaki razvijajo svoje osebno znanje tako, da ga prilagajo problemu, ki ga rešujejo, preko dodatnih preiskovalnih dejavnosti ali preizkušanja idej v milјeju oz. preko formulacije argumentov, ko poskušajo prepričati vrstnike.

Didaktične situacije so tiste, v katerih učitelj stopa v interakcijo z dijaki, da bi jim pomagal pri učenju specifične snovi. Pravzaprav se izraz *didaktično* nanaša na *namerno dejanje osebe, da z nekom drugim deli znanje*. V didaktičnih situacijah je ena od glavnih funkcij začeti, urejati in voditi adidaktične situacije ter poskrbeti, da se znanje, ki je bilo razvito v teh situacijah, deli, potrdi in prepozna kot »pravilno« (oz. vsaj ustrezni deli znanja). Kot je prikazano na Sliki 10, to pomeni, da didaktične situacije tvori učiteljeva interakcija z adidaktičnimi situacijami. Seveda imajo te adidaktične situacije lahko bolj ali manj bogat potencial – od tihega poslušanja učiteljevih razlag do aktivne udeležbe v bogati problemski situaciji. Resnično se glavni učni potencial dijakov nahaja v adidaktičnih situacijah, saj imajo te potencial, da razvijejo osebno znanje dijakov, ki skozi didaktične situacije lahko postane skupno znanje. Drugače povedano, učni potencial se nahaja v dialektiki med adidaktičnimi in didaktičnimi situacijami oz. med osebnim in skupnim znanjem. Slika 10 tudi prikazuje, kako so didaktične situacije kot celota sestavljene iz »dvojne igre«: igre dijakov z miljejem (adidaktičnih situacij) in učiteljeve igre z adidaktičnimi situacijami (ki jih načrtuje, izvaja in ureja). Slika pokaže, da adidaktične situacije ne pomenijo, da je učitelj odsoten oz. neaktiven. Spontano samoučenje ni adidaktična situacija, temveč nedidaktična.

Adidaktičnost je poseben fenomen *znotraj* didaktičnih situacij: oseba, ki želi deliti določeno znanje, se lahko *namenoma* umakne iz interakcije, da bi omogočila učencu, da ravna na načine, ki so koristni ali celo nujni za pridobitev tega znanja. To je zelo splošen pojav in ne izum TDS. Določene elemente adidaktičnosti lahko opazimo v večini didaktičnih situacij. Seveda pa je kakovost avtonomnih dejanj dijakov odvisna od miljeja.



Slika 10: Didaktične situacije kot dvojno vzajemno vplivanje

Vloga učitelja

Moramo pojasniti, kako se učiteljeva vloga pri pouku, ki temelji na TDS, razlikuje od tega, česar so številni učitelji vajeni med običajnim poučevanjem.

Pri velikem številu opazovanih učnih ur matematike učitelj sprva predstavi nov pojem, metodo ali izrek. Nato pokaže primere, v katerih uporabi to novo znanje, nakar dijaki posnemajo učitelja tako, da rešijo podobne vaje. Nazadnje učitelj vrednoti delo dijakov. Pri takšnem pristopu učitelj začne z institucionalizacijo institucionalnega znanja. Tukaj ni miljeja, ki bi ga dijaki lahko raziskali – v najboljšem primeru je skromen in ne omogoča preiskovalnih procesov s strani dijakov, saj je očitno, da je zmagovalna strategija to, da posnemajo učiteljev zgled. Med reševanjem vaj so dijaki aktivni in verjetno tudi formulirajo odgovore v zvezkih, toda to ni preiskovanje, saj že poznajo ustrezno metodo (ob pogoju, da so poslušali učitelja). Verifikacija je v celoti odvisna od učitelja, ki potrdi ali zavrže odgovore dijakov. V takšnem okolju je učitelj vir vsega znanja, dijaki pa ga zgolj vpijajo in sledijo učiteljevemu dobremu zgledu.

Ta pristop ima svoje pomanjkljivosti. Kadar se institucionalizacija zgodi na začetku učnega procesa in dijakom poda vso relevantno uradno znanje ter jih prosi, da ga zgolj »uporabijo« v specifičnih primerih, dijaki morda ne razvijejo ustreznega osebnega znanja – v nekaterih primerih zgolj prevzamejo uradno znanje kot taktiko za reševanje določenih nalog, ki jih da učitelj ali ki so dane na izpitih. Vzporedno s tem pa lahko vseeno ohranijo nasprotujoče si ideje in prepričanja, vključno z napačnimi predstavami. To uniči potencial racionalnega procesa izgrajevanja znanja, ki se nahaja v dialektiki med osebnim in institucionalnim znanjem, kot je prikazano na Sliki 11. Ko dijaki razmišljajo o vajah, se o njih pogovarjajo in o njih pišejo, poskušajo storiti to, kar pričakuje in nagrajuje njihov učitelj, tudi če jim ni jasno, kaj to pomeni ali zakaj deluje. Učni izid ponavljanja strategije reševanja je lahko presenetljivo slab, saj je v celoti odvisen od površinskega prepoznavanja nalog, na katere se nanaša. Večina učiteljev je bila že priča absurdnim primerom, ko je dijakom s takšnim pristopom spodletelo.

Nasprotno, ko dijaki jasno prepoznajo javno ali institucionalno znanje kot usklajeno z znanjem, ki so ga zgradili sami med interakcijo z ustreznim nizom problemov (v adidaktičnih situacijah), potem se jim bo javno znanje zdelo racionalno in dobro utemeljeno ter ga bodo lažje prenesli na nove vrste problemov, saj bodo poznali osnovne principe. Toda da bi dosegel ta boljši rezultat, se mora učitelj vzdržati pripovedovanja in razlage. Ta pristop od učitelja matematike zahteva veliko več, kot se običajno pričakuje od njega.

Pravzaprav je sodeč po pristopu TDS učiteljeva vloga to, da oblikuje ali izbere situacije, v katerih lahko dijaki razvijejo osebno znanje, ki se ujema z institucionalnim znanjem, *vključno z* osnovnimi principi slednjega. Učitelj mora tudi organizirati ciklično dialektiko, prikazano na Sliki 11: za poučevanje novega znanja učitelj oblikuje in poenostavi matematično situacijo, v kateri bodo dijaki lahko razvili svoje osebno znanje. Učitelj mora tudi pomagati dijakom deliti to znanje v javnem prostoru učilnice, kjer ga lahko sčasoma uskladimo z novim znanjem, ki ga morajo pridobiti dijaki. *Učitelji* morajo poznati več kot le institucionalno znanje, poznati morajo tudi *situacije, ki dijakom omogočajo, da to znanje pridobijo*.

Slika 11: Vzajemno vplivanje osebnega in institucionalnega znanja v didaktičnih situacijah

Didaktične pogodbe

Celo za izkušene učitelje je lahko delo s scenariji, ki temeljijo na preiskovanju, izziv, saj dijakom ne smejo preprosto podajati uradnega znanja in nadzorovati njihov sprejem tega znanja, temveč morajo dijake usmerjati pri lastni izgradnji znanja. Kadar učitelj pozna vse pravilne odgovore in vidi, da so dijaki pristopili k problemu napačno ali manj ustrezno, je resnično izziv, da dijake ne popravi oz. jih vodi v smeri najboljše strategije. Zelo pomembno je, da učitelj ve, katere dele znanja morajo dijaki zgraditi sami v adidaktičnih situacijah (brez posredovanja s strani učitelja) in katere lahko učitelj institucionalizira neposredno. V situaciji poučevanja imajo dijaki in učitelji določena pričakovanja o vlogah in

Dijaki igrajo igro, kjer zmaga tisti, ki prvi doseže število 20. Dva igralca igrata drug proti drugemu. En igralec začne igro tako, da izbere število 1 ali 2. Drugi igralec prejšnjemu rezultatu prišteje število 1 ali 2, oba pa stremita k temu, da bi prišla do števila 20.

odgovornostih drug drugega v razredu. Zbirki teh pričakovanj rečemo *didaktična pogodba* situacije. Ni pogodba v običajnem pomenu pisnega dokumenta, vseeno pa lahko opazimo njen vpliv na dejanja učiteljev in dijakov. Npr. kadar dijak prosi učitelja, da mu pove, če je njegova rešitev linearne enačbe pravilna, pokaže svoje pričakovanje, da preverjanje pravilnosti takšnega izračuna (še) ni njegova odgovornost. Učitelj lahko ravna v skladu s tem in mu pove svoje mnenje, lahko pa poskusi prilagoditi ta del pogodbe tako, da med dijaki organizira igro z novim problemom (kakšne tehnike obstajajo za preverjanje pravilnosti predlagane rešitve linearne enačbe).

Če so dijaki vajeni, da jim učitelj na samem začetku poda odgovore, lahko občutijo določeno frustracijo, ko jim naloži dejavnosti odprtega tipa, ki temeljijo na preiskovanju. V takšnih situacijah dijaki pogosto prosijo učitelja, bolj ali manj posredno, da jim pove pričakovano strategijo. Učitelja lahko zamika, da bi dijakom pojasnil, kaj morajo storiti – seveda bi bilo to najlažje za vse. Vendar pa, kot je bilo že pojasnjeno, to uniči učni potencial situacije poučevanja. Da bi preprečili takšne frustracije, je lahko v pomoč, da na začetku dijakom pojasnimo, da bomo spremenili način poučevanja in da pričakujemo, da bodo sodelovali pri reševanju problemov, tudi če se sami sebi zdijo nepripravljeni.

Ko bodo dijaki ugotovili, da je učiteljeva institucionalizacija na koncu ure le preoblikovanje osebnega znanja, ki so ga zgradili sami, bodo dobili občutek, da je to, kar so počeli, smiselno in pomembno ter bodo postopoma sprejeli svoje nove vloge in odgovornosti. Obstaja veliko dokazov, da bodo dijaki sčasoma tudi razvili pozitivnejši odnos do matematike kot celote: namesto nesmiselnega in neskončnega inventarja danih odgovorov bodo matematiko po novem razumeli kot racionalen, zahteven in zadovoljujoč podvig – podobno, kot jo razumejo uspešni raziskovalci.

Faze didaktičnih situacij

Ideja pristopa TDS je ustvariti situacije, ki obravnavajo znano oviro na poti do določenega matematičnega znanja in pri dijakih ustvarijo potrebo, da razvijejo oz. zgradijo novo matematično znanje. Oblikovanje in prilagajanje takšnih situacij je osrednji element pristopa TDS in njegovega »didaktičnega inženiringa«.

Situacije poučevanja so razdeljene na pet faz. Vsako fazo bomo opisali, skupaj s komentarji glede njihove vloge v učnem procesu dijakov. Zaporedje faz ni strogo

določeno, pregled pa bomo podali kasneje. Vsako fazo bomo ponazorili s pomočjo dveh primerov. Prvi primer je situacija s sestavljanko, ki je bila predstavljena v uvodu, drugi pa je znana *Dirka do 20*.
Cilj Dirke do 20 je, da se dijaki naučijo, kako z deljenjem dobijo odgovor na novo vrsto problemov ter se zgodaj seznanijo z dokazi (za utemeljitev »zmagovalnih strategij«). Konkretneje, od dijakov se pričakuje, da bodo poiskali vsa zmagovalna števila 20, 17, 14, … , 2 (števila, manjša od 20, ki pri deljenju s številom 3 dajo ostanek 2) in utemeljili, da so zmagovalna. Poskusi s to situacijo so potrdili, da dijaki ta števila odkrijejo kot delne zmagovalne strategije in v tem vrstnem redu, s čimer postopoma pridejo do končne strategije (ostanek pri deljenju s številom 3), na poti do tega pa dejansko odkrijejo nekatere osnovne objekte in načela modularne aritmetike, kot je (v očeh matematika) specifičen kongruenčni razred.

Faza devolucije

Prva faza se imenuje faza devolucije. Na splošno je devolucija prenos ali spust nečesa na nižjo raven. V pristopu TDS je devolucija izhodišče. Je faza, v kateri učitelj predstavi problem in pojasni pravila za reševanje problema. Drugače povedano, učitelj preda milje dijakom. Če uporabimo terminologijo iger, učitelj predstavi igralno površino in pravila igre. Moramo poskrbeti, da so dijaki razumeli pravila in da bodo lahko sodelovali v predvidenih dejavnosti po zaključku faze devolucije. V situaciji s sestavljanko je očitno, da se igro igra tako, da dijaki ustvarijo nove koščke in sestavijo povečano sestavljanko. V tej fazi učitelj ne nudi dodatne pomoči. V fazi devolucije pri igri Dirka do 20 učitelj predstavi pravila, vendar tudi odigra eno igro z dijakom pred tablo kot prikaz, kako igrati to igro. Ali se bo učitelj odločil predati milje s pomočjo primera dejavnosti ali preprosto s predstavitvijo miljeja, skupaj z njegovimi pravili in predmeti, je odvisno od konkretnega problema in situacije.

Faza reševanja

V fazi reševanja se dijaki avtonomno lotijo problema. V situaciji s sestavljanko bodo dijaki sprva uporabili predhodne izkušnje z matematičnimi problemi povečevanja velikosti in bodo prišteli 3 cm vsaki stranici danega geometrijskega lika. Uporaba predhodno razvitega znanja in izkušenj je naravna začetna hipoteza, četudi se lahko izkaže, da je napačna.

V primeru Dirke do 20 dijake prosimo, da igro igrajo z osebo, ki je poleg njih. Na začetku bo delo dijakov morda temeljilo na metodi »poskusov in napak« in ne bo vsebovalo jasne strategije. Ko bodo pridobili izkušnje s to igro, bodo morda ugotovili, da lahko zmaga oseba, ki reče 17, ne glede na to, kaj bo druga oseba dodala temu številu.
Obema primeroma je skupno to, da vsebujeta bogat milje, ki podpira dijakov razvoj osebnega znanja o problemu, ki ga rešuje. V tej fazi je lahko znanje precej implicitno in osnovno, dijakom pa bo morda težko (ali celo nemogoče) formulirati predpostavke glede dejanj, ki jih izvajajo. Dijaki črpajo iz prehodno razvitih hevrističnih kompetenc in jih hkrati nadalje razvijajo. To fazo bi lahko primerjali z raziskovalčevim prvim pristopom k odprtemu problemu. Morda bodo poznali predpise igre ali miljeja v obliki definicij, premis ali izrekov z njihovega

raziskovalnega področja ter splošno priznane matematične tehnike, povezane s tem področjem. Morda pa se bodo samo igrali s predpostavkami, ne da bi hoteli dokazati kakšen točno določen »izrek«.

Faza formulacije

V fazi formulacije morajo dijaki predstaviti, kaj so storili v fazi reševanja – začetne ideje in hipoteze ali zgolj, kaj so poskušali storiti do sedaj. To lahko izvedemo v učilnici na različne načine, ni pa vedno dovolj, da prosimo dijake, da se udeležijo razredne diskusije. Prvič, običajno se razredne diskusije udeležijo eni in isti zagnani dijaki. To je težava, če želimo, da se vsi dijaki udeležijo učenja s preiskovanjem. V okviru poučevanja matematike s preiskovanjem morajo dijaki komunicirati in deliti osebne hipoteze, ki jih morajo nato komentirati njihovi vrstniki, da bi formalizirali osebno znanje posameznega dijaka, ki se je izoblikovalo v dijakovem umu, medtem ko se je ukvarjal s problemom v danem miljeju. To pomeni, da morajo v fazi formulacije vsi dijaki izoblikovati osebne ideje in jih tudi predstaviti. Pogosto to lahko izvedemo v manjših skupinah.

V situaciji s sestavljanko predstavlja zbiranje koščkov fazo formulacije, v kateri vsak dijak predstavi in pojasni svojo strategijo konstruiranja novega koščka sestavljanke. Pričakujemo, da se bodo dijaki kot skupina soočili z oviro, da se koščki ne prilegajo. To bo privedlo dijake do pogovora o strategijah, ki so jih že preizkusili, in morda celo do razvoja novih idej za drugačne pristope. Četudi je en dijak že na začetku izbral pravilno strategijo, mora ta oseba prepričati preostanek skupine z uporabo matematičnih dokazov, ki jih je preostanek skupine zmožen razumeti in sprejeti.

V primeru Dirke do 20 se faza formulacije izvede kot nov krog iger, v katerem vsaka ekipa dveh sosednjih igralcev igra proti drugi ekipi. Dogovarjanje o skupni strategiji dijake prisili, da delijo osebno znanje in drug drugega prepričajo o tem, kakšna bi bila optimalna strategija njune ekipe. Zopet ponavljamo, da je izražanje izkušenj in idej z besedami prvi korak k ustvarjanju institucionalnega znanja. Faza formulacije deluje tako, da ustvari situacijo, v kateri milje ali predpisi igre dijake prisilijo, da artikulirajo izkušnje in ideje, ki so jih pridobili med reševanjem problema, kar sproži grajenje elementov matematične teorije.

Faza verifikacije

V fazi verifikacije dijaki svoje strategije oz. hipoteze testirajo na miljeju. To pomeni, da se lahko delo dijakov verificira, ne da bi jim učitelj povedal, če imajo prav ali ne. Matematični problem bo dijakom do neke mere odgovoril glede izvedljivosti njihovega odgovora ali strategije, če sta bila situacija in milje dovolj trdno oblikovana.

V primeru s sestavljanko je bil milje oblikovan tako, da z uporabo metode seštevanja oz. dejansko *katere koli druge metode* kot metode množenja dijaki ne morejo sestaviti koščkov sestavljanke in ustvariti povečave prve sestavljanke. Torej, če dijaki sprva izberejo manj produktivno strategijo, jim bo faza verifikacije pokazala, da je njihova ideja napačna in da potrebujejo drugo strategijo, ki jo bodo lahko kasneje verificirali na enak način. Naj poudarimo, da mora biti produktivna strategija na dosegu matematičnih sposobnosti dijakov. Če se bo dijakom pri problemu »zataknilo« in ne bodo vedeli, kako nadaljevati, bo to seveda protiproduktivno, kar se tiče razvoja matematične radovednosti in raziskovalnega duha.

Pri Dirki do 20 je verifikacija predvsem to, da uberejo strategijo, ki vsakič zmaga. Predvideva se, da ima zmagovalec najmočnejšo strategijo reševanja. V nasprotnem primeru bi lahko obe ekipi razvili optimalno strategijo. Ali pa bi obe ekipi nadaljevali brez prave strategije. Tudi če ima zmagovalec najboljšo strategijo od obeh ekip, ni nujno, da je ekipa razvila optimalno strategijo že na samem začetku igre. V takšnem primeru lahko učitelj razred razdeli na dve veliki skupini, ju prosi, da pripravita optimalni strategiji in se na koncu pomerita druga proti drugi. To lahko razumemo kot dodatno fazo formulacije, v kateri poskušajo dijaki drug drugega prepričati o strategiji. Nazadnje se odvije zadnja tekma, v kateri se bo zmagovalčeva strategija izkazala za najmočnejšo – bo tako rekoč verificirana.

Faza institucionalizacije

Zadnja faza je faza institucionalizacije, v kateri bo osebno znanje končno doseglo raven institucionalnega znanja. V tej fazi učitelj najpogosteje zbira ideje, povzema glavne točke predstavljenih strategij in jih predstavi kot eno optimalno strategijo. Predstavitev tega, kar bo institucionalizirano, je pogosto enako jedrnata in natančna predstavitev matematičnega znanja kot v učbenikih.

V situaciji s sestavljanko lahko učitelj predstavi neformalno idejo o podobnih likih v smislu, da je »en lik povečava drugega« (pri čemer nobena povečava ni »enake oblike in velikosti«), z uporabo pogovora na način, ki ga podpirajo uradne smernice ali učbeniška gradiva za poučevanje na tej stopnji. Dejstvo, da so istoležne stranice v enakem razmerju, je priročno ponazorjeno z množenjem s skupnim faktorjem (7/4), s pomočjo preiskovalne dejavnosti pa je bilo dokazano, da to ustvari povečano sestavljanko, podobno prvotni. Zahtevnejši načini predstavitve razmerja med prvotnim likom in na novo oblikovanim likom z uporabo funkcij bi bili morda preveč zahtevni za 14-letnike. Bistveno je, da se matematično znanje gradi na podlagi izkušenj in razmišljanja, ne pa preprosto prikaže kot nedvoumno dejstvo. To je na nek način še težje doseči na ravni, kjer so bolj formalne definicije in argumenti še vedno izven dosega dijakov.

V primeru Dirke do 20 se institucionalizira zmagovalna strategija. To lahko skrčimo na seznam števil, ki bi jih igralec moral povedati, da bi lahko nadzoroval igro in na koncu zmagal. Morda bo dijakom relativno enostavno izpostaviti pomembnost števila 17, kot je bilo že omenjeno. Zmagovalna števila ali strategijo lahko zapišemo kot $Z = 3n+2$, pri čemer je n zaporedno število kroga, v katerem je Z zmagovalno število. Če na začetku izberete število 2, lahko ves čas nadzorujete igro. Da bi dijaki prišli do tega uvida, jih bo moral učitelj morda nenehno spodbujati, da izboljšajo svojo zmagovalno strategijo. Odvisno od stopnje bi lahko sčasoma analizirali bolj abstraktno igro »Dirka do N«, pri kateri na vsakem koraku dodajo eno od števil 1, 2, … , n. Nato jim le še malo manjka do kongruenc.

Količina matematičnih podatkov, ki jih učitelj predstavi v tej fazi, bi morala biti usklajena z dejavnostmi, ki jih izvajajo dijaki. Morala bi biti sinteza znanja, ki so ga zgradili dijaki, s katero bi lahko prepoznali in povezali svoje osebno znanje z znanjem, ki ga institucionalizirajo in za katerega velja, da je skupno znanje razreda.

Pomembno je, da se ta faza ne konča kot predavanje, ki bi razveljavilo dejanja dijakov – institucionalizacija mora nadaljevati oblikovanje znanja dijakov o danem problemu. Če učitelj začne predavati o stvareh, ki presegajo delo dijakov, tvega, da bodo dijaki svoja dejanja razumeli kot izgovor za učitelja, da jim lahko predava o temah, ki so zares pomembne. V takšnih primerih dijaki najverjetneje ne bodo cenili matematičnega preiskovanja in avtonomnega izgrajevanja znanja in ne bodo sodelovali v njem, temveč bodo pri pouku matematike posnemali učitelja.

O pomenu adidaktičnih situacij

V situacijah poučevanja, v katerih dijaki ne napredujejo po pričakovanjih, bo učitelja morda zamikalo, da bi prešel na faze, v katerih bodo oni obvladovali situacijo. Toda, kot smo že namignili, to običajno uniči nekaj dijakovega potenciala za učenje. Devolucija in institucionalizacija sta didaktični situaciji. Reševanje je adidaktična situacija, zadnji dve fazi pa sta lahko nekje vmes. Vseeno pa moramo težiti k maksimiranju vloge adidaktičnih komponent. Elementi adidaktične verifikacije – brez učitelja v vlogi razsodnika – so ključnega pomena pri zagotavljanju, da dijaki razvijejo popolnoma racionalen odnos do standardov znanja in ne pristop poskusa in napake, pri čemer uspešen poskus prepoznajo le s pomočjo učiteljeve potrditve. Na splošno govorimo o adidaktičnem potencialu didaktične situacije – tj. o potencialu, da dijaki samostojno rešujejo njen matematični problem in na podlagi tega dosežejo standarde znanja. Gre za pomembno idejo, da naj učitelji poskušajo uresničiti polni adidaktični potencial situacije – s pomočjo ustreznih odločitev v fazi devolucije in s previdnim prilagajanjem poenostavljenega miljeja zmožnostim dijakov (ne da bi problem trivializirali).

Povzetek faz

Slika 12 nudi pregled petih faz, ki tvorijo didaktične situacije.

	Vloga učitelja	Vloga dijakov	Milje	Situacija
Devolucija	Predstavi, preda milje	Sprejmejo, se poskušajo lotiti problema	Se vzpostavlja	Didaktična
Reševanje	Opazuje in razmišlja	Ukrepajo in razmišljajo	Raziskujejo problem	Adidaktična
Formulacija	Organizira in po potrebi spodbuja s pomočjo vprašanj	Formulirajo čimbolj specifično	Odprta diskusija	Adidaktična ali didaktična
Verifikacija	Posluša in po potrebi vrednoti	Argumentirajo, poskušajo slediti argumentom drugih	Vodena diskusija	Pogosto didaktična
Institucionalizacija	Predstavi in pojasni	Poslušajo in razmišljajo	Institucionalizirano znanje	Didaktična

Slika 12: Pregled faz TDS, njihovega delovanja in dejanj udeležencev poučevanja in učenja (prevedeno po Winsløw, 2006, str. 140)

Kot je bilo povedano že na začetku, teh petih faz nismo uporabili zgolj kot orodja za oblikovanje, ki veljajo le za poučevanje, razvito na podlagi TDS. S temi fazami lahko analiziramo kakršno koli poučevanje matematike (npr. da bi ugotovili, če določene faze manjkajo ali so premalo razvite). Tudi če se poučevanje močno razlikuje od tega, ki je predstavljeno v tem poglavju, so faze še vedno uporabne pri analizi poučevanja – učiteljem pa nudijo pomembno orodje za prepoznavanje bistveno drugačnih elementov njihovega poučevanja, ki imajo izrazite vloge in vplive na učenje njihovih dijakov.

Dinamična uporaba faz

V dveh enostavnih primerih, ki ju uporabljamo skozi celotno predstavitev faz, je očitno, da sta bila oba zasnovana tako, da didaktični milje podpira dejanja dijakov, jim omogoča eksperimentiranje in formuliranje hipotez (tako dobrih kot slabih) ter nudi pogoje, ki so dovolj trdni za verifikacijo teh hipotez. Konkretneje, delov sestavljanke ni mogoče sestaviti oz. dijaki nenehno izgubljajo pri določenih igrah. Obe situaciji tudi predstavljata dokaj strogi interpretaciji faz in njihovih medsebojnih povezav. Kaj se zgodi, če učitelj preda milje s problemom, ki ga dijaki ne morejo rešiti?

Pri oblikovanju poučevanja matematike je seveda pomembno, da imamo oz. pridobimo uvid v obstoječe znanje dijakov. Učiteljevo poznavanje tega lahko temelji na kurikulumu za srednješolsko matematiko, učbeniku, ki ga je razred uporabljal pred tem ali drugih virih, ki nakazujejo pričakovane izide. Tudi kadar predvidevamo, da so se dijaki nečesa naučili, je dobra ideja, da »preverimo«, česa se dejansko spomnijo iz prejšnjih učnih ur kot del faze devolucije.

Direkten način preverjanja bi bil, da dijake vprašamo, na primer, če se spomnijo Pitagorovega izreka. Vendar obstaja tveganje, da dijaki ne bodo želeli oz. se bodo bali priznati, da se izreka ne spomnijo. Nekateri dijaki bodo odgovorili pritrdilno, da bi ugodili učitelju. Druge bo strah, da bi »izgubili veljavo«. Bolj produktiven način bi bil, da vprašamo, kaj vedo o pravokotnih trikotnikih. Če dijaki ne omenijo pričakovanega znanja, jim bo učitelj morda moral predstaviti nov problem, preden jim preda načrtovani problem in milje. Ta novi problem bi moral dijakom dati priložnost, da ponovno odkrijejo znanje, ki so ga morda pozabili in dobijo skupno izhodišče tako, da rekonstruirajo znanje, ki bi ga morali že imeti.

Podoben problem se lahko pojavi med fazo reševanja: dijaki lahko napačno razumejo devolucijo. V primeru s sestavljanko ne poznajo nobenih alternativ povečevanju dolžin stranic likov s seštevanjem. Kako premostiti takšen izziv v situaciji poučevanja je odvisno od tega, koliko dijakov se ne zna lotiti problema in od matematičnih dosežkov dijakov na splošno. V takšnih situacijah mora učitelj skrbno razmisliti o reguliranju miljeja. Tukaj tvegamo, da razkrijemo standarde znanja, ki naj bi jih dijaki dosegli. V situaciji s sestavljanko lahko učitelj začne fazo formulacije, v kateri dijaki delijo svoje začetne ideje, nato pa naredi preglednico, ki v eni vrstici prikazuje dolžine stranic dane sestavljanke, v drugi pa povečane dolžine stranic. To lahko privede do ideje, da obstaja več različnih »metod« povečevanja, kar je nekakšna groba ideja o funkcijah. Število 4 zares lahko postane 7 z uporabo različnih izračunov. Ključno vprašanje, ki se lahko pojavi in o katerem se lahko razpravlja, je: kaj se zgodi s stranico dolžine 1? Ali po povečavi res postane 1+3=4? Če upoštevamo, da je stranica dolžine 4 sestavljena iz štirih koščkov dolžine 1, nam to lahko namigne, da naj bi štiri povečave dolžine 1 skupaj tvorile stranico dolžine 7. Dijaki naj bi sami prišli do takšnih ugotovitev, kolikor je le možno. V takšnem primeru so lahko tudi dijaki, ki na začetku niso imeli idej, sposobni razviti drugačen pristop k danemu problemu. To pomeni, da lahko faze uporabljamo dinamično, na nadzorovan način. Odvisno od sodelovanja dijakov pri reševanju problema in milju, bo morda smiselno, da se premikamo nazaj ali naprej med fazami, da bi zagotovili, da lahko vsi ukrepajo in zgradijo določeno osebno znanje o pričujočem problemu. Vzajemno vplivanje osebnega in skupnega znanja je ključna dinamika, ki jo lahko nadziramo s pomočjo sistematične in načrtovane uporabe faz.

Podrobnejši primer za srednjo šolo

V tem podpoglavju predstavljamo primer oblikovanja poučevanja, ki temelji na TDS, z učnim ciljem »predstaviti idejo in nekatere metode optimizacije«. Problem, ki naj bi se ga lotili dijaki, je sledeč:

> Dobil si vrvico dolžine 1 m. To vrvico moraš razdeliti na dva kosa. Z enim kosom oblikuj kvadrat, z drugim pa enakostranični trikotnik. Kje moraš prerezati vrvico, da bi imela oba geometrijska lika skupaj minimalno ploščino?

Teoretična rešitev vodi do natančnega odgovora, za dijake pa ni dovolj prepričljiva. Še vedno zahteva precejšnjo količino algebrskih operacij na podlagi dijakovega znanja o npr. geometriji ali regresiji. V obeh primerih postane očitna potreba po novih metodah za reševanje ekstremalnih problemov oz. problemov optimizacije.

Milje je sestavljen iz problema, vrvice (npr. 5 vrvic na skupino dijakov), ravnila, škarij in morda žepnega računala ali računalnika. Fazo devolucije začne učitelj, ki razred vpraša: »Kaj veste o ploščinah geometrijskih likov?« S tem naj bi dijake spomnil na formuli, kot sta ploščina kvadrata in trikotnikov:

$p_{kvadrata} = a^2$ (pri čemer je a dolžina stranice),
$p_{\text{trikotnika}} = \frac{1}{2}vb$ (v je višina in b je dolžina osnovnice)
$p_{\text{trikotnika}} = \frac{1}{2}ab\sin\boldsymbol{\gamma}$ (kjer sta a in b dolžini stranic trikotnika, $\boldsymbol{\gamma}$ pa je kot med njima).

Obravnavajo lahko tudi druge like. Po ponovitvi tega institucionalnega znanja o ploščinah učitelj dijake razdeli v skupine. Vsaka skupina dobi pet vrvic, škarje in ravnilo. Če želijo, lahko uporabljajo žepna računala ali računalnike. Skupinam sedaj preda problem. Ta celotna faza je didaktična situacija, v kateri je učitelj moderator razrednega dialoga.

V fazi reševanja se dijaki lotijo problema. Pri tem lahko izberejo številne strategije, omenili pa bomo samo tri. Nekateri dijaki bodo morda izbrali strategijo »poskusi in napake«, kar pomeni, da bodo prerezali vrvico, ustvarili oba lika, nato pa izmerili in izračunali ploščino kvadrata in trikotnika. Z isto vrvico lahko ustvarijo dva para likov. Nato prerežejo naslednjo vrvico, čemur sledijo nove meritve itd. Na koncu bodo dijaki dobili občutek, kje je mesto optimalnega reza na podlagi lastnih izkušenj. Druge skupine bodo morda prišle do ideje, da bi takšne meritve uporabile kot podatke. Te lahko prikažejo z računalniškim programom ali grafičnim računalom ali pa jih narišejo na papir s svinčnikom, s čimer ustvarijo grafični prikaz vsot vseh ploščin in tega, kje je treba prerezati vrvice. Če so bili podatki skrbno izbrani, v smislu, da pokrivajo celotno vrvico, vključno z minimumom, bodo nakazali parabolo. Če so podatkovne točke grafično prikazane z računalniškim programom, lahko dijaki izvedejo regresijo, s katero pridejo funkcijskega predpisa, ki opisuje te podatke. Odvisno od strategije in orodij, ki so dijakom na voljo, lahko določijo minimum funkcije za ploščino in ocenijo najmanjšo vrednost za y na podlagi tega, kje leži minimum. Če so dijaki uporabili svinčnik in papir, lahko narišejo približek parabole, ki se najbolje prilagaja izračunanim točkam. Če so dijaki uporabili grafično računalo ali računalniški program, lahko s pomočjo regresije poiščejo funkcijo, ki opisuje odvisnost med ploščino in točko, kjer so prerezali vrvico. Z uporabo programa za simbolno računanje lahko dijaki določijo ekstrem tako, da izberejo ukaz za analizo grafa, ali pa tako, da sami analizirajo graf. Če so dijaki pravilno izvedli regresijo, bodo prišli do funkcijskega predpisa

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

kjer je f ploščina, x pa je dolžina enega kosa vrvice. V tem primeru najmanjšo skupno ploščino dobimo s formulo

$$y = -\frac{b^2-4ac}{4a},$$

ki se ujema s formulo

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Dijaki, ki izberejo slednjo strategijo, morajo seveda poznati polinome (druge stopnje) in parabole ter kako izračunati njihove ekstreme.

Druge skupine bodo morda razumele problem kot algebrski problem. Če je metrska vrvica enaka 4 stranicam kvadrata, $4k$, in trem stranicam trikotnika, $3t$, potem dobimo enačbo $1 = 4k + 3t$. Nato lahko dijaki skupno ploščino izrazijo kot

$$p_{\text{skupna}} = p_{\text{kvadrata}} + p_{\text{trikotnika}} .$$

Ta funkcija je polinom druge stopnje, za katerega lahko poiščete najmanjšo vrednost z uporabo zgoraj opisanih metod, če ste izbrali strategijo regresije.
Ta faza je adidaktična. Učitelj ne posega v skupinsko delo, vendar lahko usmerja pri uporabi programa za simbolno računanje, žepnega računala ali drugih bolj praktičnih problemih, če je to potrebno. Hkrati učitelj dobi uvid v to, katere skupine so izbrale katero strategijo oz. s kakšnimi izzivi se soočajo skupine med preiskovanjem. Ta konkretni primer se naslanja na pristop odprtega tipa, pri katerem dijakom postavimo problem, ki ima lahko množico strategij reševanja, vse pa se stekajo v en sam odgovor.

Po prvi kratki fazi dijake prosimo, da predstavijo svojo strategijo za reševanje problema. Ubeseditev dejanj pomaga dijakom, da svoje dokaj ohlapne ideje in hipoteze iz preiskovalnega procesa natančneje določijo. Lahko bi trdili, da skupinsko delo predstavlja prvo fazo formulacije, saj se morajo dijaki v vsaki skupini dogovoriti o strategijah oz. hipotezah, da lahko sodelujejo. Poleg tega lahko reševanje v skupinah povzroči, da člani skupine določene ideje zavrnejo in sledijo drugim. Ta proces lahko vsebuje tudi elemente verifikacije. Na podlagi prvih izkušenj z rezanjem, merjenjem in računanjem ploščin dijaki lahko mislijo, da vedo, kje morajo prerezati vrvico. Toda tretji izračun jih lahko privede do še večje ploščine kot prva dva izračuna. Skupina mora v takšnem primeru razmisliti o svoji strategiji. Obstaja torej možnost, da so se vse adidaktične ali potencialno adidaktične situacije odvile med skupinskim delom, še preden je skupina delila svoje strategije z drugimi skupinami.

Ko dijaki oblikujejo prvotni odgovor na problem, morajo skupine predstaviti svoje delo preostanku razreda. V prvi predstavitvi lahko prosite skupine, da povedo dolžino enega kosa vrvice, da bi videli, če se vsi strinjajo o tem, kje jo je treba prerezati. Če se skupine ne strinjajo, je to še dodaten razlog, da predstavijo svoje strategije in poslušajo strategije drugih skupin. Pričakuje se, da bodo na podlagi tega nekateri dijaki spoznali, da je strategija »poskus in napaka« manj uspešna, kadar želimo poiskati natančen odgovor, in da lahko uporabijo svoje ugotovitve pri strategiji regresije, če se odločijo zanjo.

Na tem mestu se lahko faza formulacije prekriva s fazo verifikacije. Vse predloge točk, kjer naj prerežemo vrvico, lahko testirate v miljeju. Za vsako predlagano dolžino lahko izračunate skupno ploščino kvadrata in trikotnika. V tem smislu lahko milje pomaga verificirati, katera skupina je predlagala rez, ki privede do najmanjše ploščine. Izziv je privesti dijake do tega, da razpravljajo tudi o lastni strategiji. Učitelj jih lahko vpraša, če so trdno prepričani, da ne obstaja boljše mesto reza. Če se je razred odločil, da bo nalogo rešil s pomočjo metode »poskusa in napake«, to pomeni, da mora sedaj pripraviti natančnejše argumente.

Tistim dijakom, ki so izbrali regresijo, bo izziv odkriti, katera funkcija dejansko najbolje opiše situacijo. Če imajo na razpolago le podatke v neposredni okolici ekstremov, bodo morda videli odvisnost kot npr. linearno ali eksponentno. Da bi se izognili takšnim situacijam, moramo vprašati dijake, kje je ta odvisnost sploh smiselna. To lahko razumemo kot novo devolucijo malce drugačnega problema znotraj podobnega miljeja.

Optimalne strategije ne moremo verificirati tako, da jo testiramo na razpoložljivem milјeju. Torej v tem delu verifikacije učitelj igra aktivnejšo vlogo, vendar je še vedno pomembno, da tudi preostanek razreda verjame v predstavljeno strategijo.

V fazi institucionalizacije je pomembno, da učitelj povzame ideje in jih medsebojno poveže. Na primer dijaki, ki so sprva izbrali metodo »poskusa in napake«, so naredili enako kot tisti, ki so ustvarili nabor podatkov. In tisti, ki so ustvarili podatke, so dejansko našli točke, ki bi se teoretično morale nahajati na grafu, ki prikazuje funkcijo za ploščino. Vsem strategijam je skupno iskanje točne vrednosti najmanjše ploščine – problem optimizacije. V vseh primerih izračuni niso enostavni, čeprav so izvedljivi. To ustvari potrebo po pogovoru o drugih metodah za probleme optimizacije, še posebej v primerih, ko pridemo do polinomov višjih stopenj.

Dodatne primere uporabe teh idej in drugih principov oblikovanja modulov, ki temeljijo na poučevanju matematike s preiskovanjem, lahko najdete v drugih publikacijah projekta MERIA (glejte http://www.meria-project.eu/).

4. Učenje matematike v realnem kontekstu

Uvod

Kot je bilo omenjeno v prejšnjih poglavjih, Artigue in Blomhøj (2013) poudarjata, da so številni dobro uveljavljeni raziskovalni programi v matematičnem izobraževanju razvili metode in ideje za to, čemur danes pravimo poučevanje matematike s preiskovanjem. Poleg TDS-ja je Učenje matematike v realnem kontekstu (RME) ena od najopaznejših.

RME je sestavljen iz idej in principov za oblikovanje učnega procesa. To poglavje nudi pregled glavnih idej Učenja matematike v realnem kontekstu, ki je namenjen učiteljem in oblikovalcem izobraževalne politike. Ideje so ponazorjene s primeri nalog. V tem besedilu teorija RME temelji na dveh osrednjih načelih:

(1) Matematika je človeška dejavnost.
(2) Smiselna matematika temelji na bogatih kontekstih.

V zadnjih podpoglavjih opisujemo povezavo med načeli RME in poučevanjem matematike s preiskovanjem ter obravnavamo ideje RME, ki so lahko v pomoč pri oblikovanju scenarijev poučevanja matematike s preiskovanjem.

Strukturiranje matematičnega znanja

Matematično znanje lahko v zelo veliki meri strukturiramo, medtem ko Učenje matematike v realnem kontekstu trdi, da učni proces zahteva manj formalen pristop. Pri formalnem pristopu začnemo z aksiomi, postulati in definicijami ter iz njih izpeljemo premise in izreke. Dokazi potrdijo resničnost teh trditev znotraj aksiomatskega okvira. Tradicija organiziranja in predstavljanja matematičnih rezultatov na takšen formalen način sega vse od Evklida (300 pr. n. št.) do sodobnih matematičnih raziskav. Podoba matematike kot zgradbe, kjer so aksiomi temelji, logika pa malta, je impresivna in učinkovita. Formalna predstavitev rezultatov omogoča nedvoumno akademsko komunikacijo. Nič čudnega, da so nekateri osnovali matematično izobraževanje na njej. V številnih državah so do petdesetih let 20. stoletja za poučevanje geometrije uporabljali Evklidove Elemente. V petdesetih in šestdesetih letih je gibanje Nova matematika uvedlo teorijo množic kot osnovo za srednješolsko matematično izobraževanje.

Matematika kot človeška dejavnost

Ali bi morala biti ta močno strukturirana celota matematičnega znanja glavni navdih za to, kako oblikujemo matematično izobraževanje? Učenje matematike v realnem kontekstu na to gleda z drugačnega vidika. Glavni navdih RME je, da je matematika *človeška dejavnost*. Organizirana celota matematičnega znanja je produkt te dejavnosti. Na primer dobra definicija matematičnega objekta je pogosto rezultat dolgega procesa matematičnih misli, idej in poskusov. RME izpostavlja pomen teh procesov, ki vodijo do izpopolnjene različice matematičnega objekta ali rezultata.

Na samem začetku poglavja o logaritmih bi lahko definirali logaritemsko funkcijo kot inverz eksponentne funkcije. Pristop, ki temelji na Učenju matematike v realnem kontekstu, raje začne z nalogo, ki pokaže potrebo po tem konceptu. Naloga bi morala dijakom omogočiti, da sami občutijo potrebo po logaritemski funkciji. Predstavljamo primer takšne naloge.

Robert je položil 100 evrov na bančni račun. Obrestna mera je 2 %. Izpolni preglednico.

Znesek (Z)	100	$\approx$ 108,24	$\approx$ 129,36	$\approx$ 199,99	$\approx$ 507,24
Število minulih let (t)	0				

Poznaš funkcijo, s katero izračunaš t iz Z?

Seveda bo odgovor na to vprašanje najverjetneje »ne«, vendar je pomembno, da se dijaki to vprašajo in spoznajo, da potrebujejo novo funkcijo. Dijaki niso vajeni takšnih vprašanj. Zaradi tega bodo verjetno bolje odgovorili na to vprašanje med razredno diskusijo, ki jo vodi učitelj. Dijaki bodo morda pomislili na funkcije (kvadratnega) korena in jih bo treba usmerjati, da bodo ugotovili, zakaj niso ustrezne.

Anti-didaktična inverzija

Ko dijaku predstavimo matematiko v močno strukturirani različici, ki temelji na aksiomatskem sistemu, gre za *inverzijo*. Dijaka soočimo z rezultatom pogosto dolgega in zahtevnega matematičnega procesa. Če naj bi se dijak na ta način učil matematiko, potem je učni proces inverzija procesa, ki je privedel do matematike. Moral bo trdo delati (ali čakati), da bi odkril, katera vprašanja so privedla do nastanka takšne matematike in katere probleme je slednja rešila. Učitelj se je morda zavestno odločil za takšen pristop, toda Učenje matematike v realnem kontekstu trdi, da tukaj ne gre za didaktičen pristop, temveč za *anti-didaktično inverzijo* (Freudenthal, 1991).

Splošno gledano je formalna predstavitev matematike začetnikom precej nedosegljiva. Obstajajo številni didaktični argumenti proti soočenju dijaka z matematiko v njeni močno strukturirani, izpopolnjeni obliki na začetku učnega procesa:

- Naravni proces (ki ga vodijo vprašanja, problemi, radovednost itd.), s katerim pridemo do matematike, ni prikazan. Dijaku odvzamemo smisel in motivacijo.
- Intuicija, ki vodi do teorije, je tuja učnemu procesu.
- Ni jasno, kaj sistem rešuje, modelira ali zajema (in česa ne).
- Hevristike, ki so bile potrebne za organiziranje matematike na ta način, so zanemarjene.

- Predstavitev ima lahko preveč ali premalo vsebine. Določen vidik matematike je morda zelo težko razumljiv, vendar je v formalni predstavitvi deležen le malo pozornosti.

Številni matematiki, vključno z učitelji matematike, se še spomnijo, ko so se v prvih letih študija ali celo v srednji šoli soočili z ε, δ-definicijo limit. Zakaj jim je bila tako nerazumljiva? Dijaku ne bo smiselna, če ne razume problemov s strogimi dokazi, ki so se pojavili pri analizi na začetku 19. stoletja. Kakšen problem rešuje? Zakaj toliko truda, da dokažejo nekaj očitnega? Zakaj druge definicije ne delujejo?

Podobno je, če v srednjih šolah navedemo distributivnostni zakon »$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$« brez konteksta, čemur sledijo vaje, kot so »*razčleni* $5 \cdot (a + 2)$«, kar je formalno gledano pravi vrstni red, vendar je za dijaka nesmiselno. Poleg tega ne odgovori na vprašanje, zakaj je to koristno pravilo oz. spretnost.

Vloga realističnosti situacij v učnih procesih

Seveda je (formalni) pomen matematičnih objektov in postopkov v formalnih predstavitvah matematike skrbno in natančno opisan. Glede na to, da so predstavitve s formalnimi značilnostmi lahko za začetnike nerazumljive in nedidaktične, kako naj jih naučimo?

Učni proces je sestavljen iz učnih dejavnosti. Ena osrednjih idej Učenja matematike v realnem kontekstu je, da morajo biti te dejavnosti osnovane na realnih oz. realističnih situacijah. Pomen matematičnih konceptov in postopkov konstruiramo iz tega, kar je dijaku že smiselno, kar je zanj *realno*.

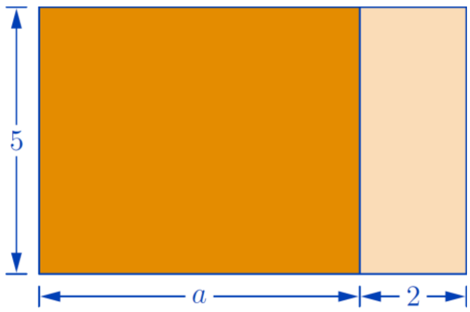
Kaj je v okviru RME mišljeno z besedo »realno/realistično«? Dijaku je nekaj *realno*, če ima zanj nek jasen pomen, ki ga je sposoben razumeti. Skupini dijakov je nekaj *realno*, če se jim z njihovega vidika to zdi smiselno in logično. »Realno« ne pomeni (nujno), da je »oblikovano po realnosti«, npr. po situacijah iz drugih strok, kot sta fizika ali ekonomija. Prav tako tudi »realistična« učna situacija ne pomeni nujno, da je osnovana na vsakdanjih življenjskih izkušnjah. In »realno« vsekakor ni mišljeno ontološko, tj. kot kar obstaja in kar ne. Pravzaprav bi bil morda izraz »smiselna matematika« boljši od izraza »matematika v realnem kontekstu«, vendar je to uradna oznaka, ki se je pojavila v prejšnjem stoletju. Smiselno matematiko učimo iz tega, kar je dijaku že smiselno, predvsem iz smiselnih kontekstov. Kot pravi Freudenthal:

> *»Kako realni so koncepti, je odvisno od ustvarjalca, in pod danimi okoliščinami so lahko kognitivni prijemi prodornejši kot ročni in čutni prijemi, ki so v resnici vedno pomešani s spoznavanjem« in »(Realno je) medsebojno povezano z dejanskimi, izmišljenimi in simboliziranimi razmerji (....), ki lahko segajo od jedra vsakdanjih življenjskih izkušenj do skrajnih meja matematičnega raziskovanja, odvisno od angažiranosti vpletenih oseb.«* (Freudenthal, 1991, str. 30).

Distributivnostne zakone lahko predstavimo v realnem geometrijskem kontekstu:
Izračunajte ploščino celega pravokotnika na dva načina:

(1) Najprej ploščino temnega in nato svetlega pravokotnika, nakar ju seštejte.
(2) Najprej izračunajte celotno širino in jo nato pomnožite z višino.

(povzeto po van den Broek idr., n.d.)



Zakaj je to (bolj) realističen pristop? Predvideva se, da je dijak seznanjen z računanjem ploščin. Pomen enakosti se pojavi naravno, saj morata biti izida obeh izračunov enaka. Naloga sama ustvari pomen. Učiteljeva vloga je predstaviti nalogo, voditi dijake in v razredu izvesti refleksijo o nalogi. Nalogo mora vključiti v učni proces na pravilen način. V preostanku besedila navajamo več pogledov na to temo v okviru RME.

Bogate strukture in bogati konteksti

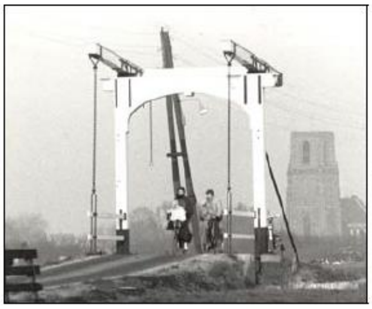
Sodeč po RME, dijak novega pomena matematike ne izpelje iz formalne matematične zgradbe, temveč predvsem iz tega, kar je zanj realno. Didaktična situacija mora omogočati razvoj novega znanja iz tega, kar je že smiselno. To pomeni, da mora biti bogata z nematematičnimi konteksti in matematičnimi strukturami. Navajamo možne načine, kako lahko matematična struktura ali kontekst postane *bogat*:

(1) povezuje se z različnimi vidiki dijakove zdrave pameti – več je povezav, bogatejša je struktura,
(2) njena matematična uporabnost presega situacijo, v kateri je bila predstavljena,
(3) omogoča različne pristope ali rešitve na različnih ravneh.

V nadaljevanju bomo te načine ponazorili s konkretnimi primeri.

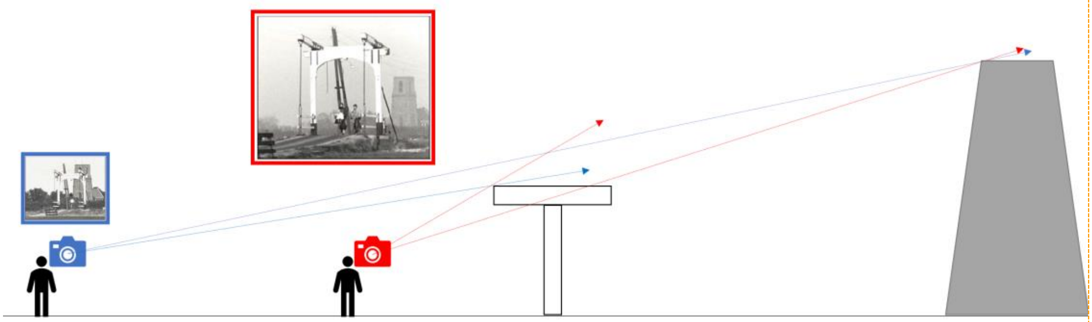
Točko (1) ponazarja naloga »Stolp in most«. Uporabljena je bila pri poskusu uvoda v merilo in geometrijsko razmišljanje v 3D kontekstu (Goddijn, 1979).

Spodaj vidite dve fotografiji iste lepe nizozemske pokrajine s stolpom in mostom z različnih zornih kotov. Kateri je višji: stolp ali most?

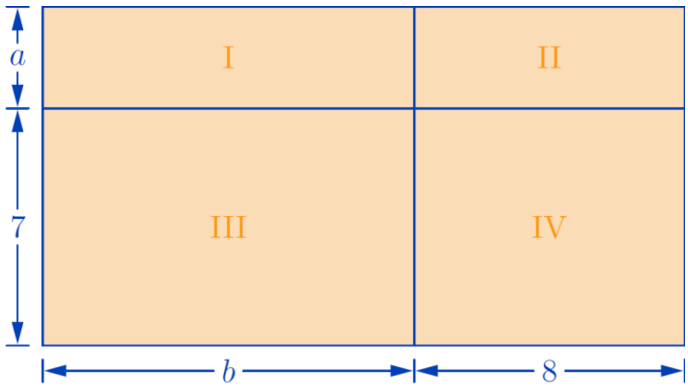


Nizozemski šolarji se veliko vozijo s kolesi, še posebej v šolo. Zagotovo so videli takšne mostove in stolpe iz različnih položajev. Vsak dan jih fotografirajo (in urejajo) s svojimi pametnimi telefoni. Poleg tega ima vsak od nas prirojeno sposobnost, da si predstavlja prizorišče z različnih perspektiv. Torej je ta situacija realistična v številnih pogledih, sedaj pa morajo o njej razmišljati matematično. Da bodo lahko dijaki razpravljali o situaciji, bodo morali uvesti pojme, kot so zorni koti, projekcije, žarek in merilo, to pa je tudi cilj te naloge.

Spodnja slika povzema nekatere matematične vidike problema. Fotografiji sta prikazani v bolj realnem merilu.



Točko (2) ponazarja zgornji primer pravokotnika. Lepo ga lahko prenesemo na vaje, kot so: razčleni $3 \cdot (x + y + 3)$, kjer pravokotnik razdelimo na tri dele namesto na dva. Velja tudi za $(a + 7)(b + 8)$, kjer pravokotnik razdelimo na štiri dele.



Ta primer je včasih razložen s pomočjo drugega modela, ki ne izpolnjuje točke (2). Temu drugemu modelu rečemo »papagajev kljun«, ponazorimo pa ga lahko tako:

$$(a + 7)(b + 8) = a\,b + 8a + 7b + 56$$

Ko pomnožite dva člena, povlecite črto med njima. Če ste dobro opravili, se pojavi kljun. Ta model je mnemotehnično sredstvo, ki ne pojasni, kaj se dogaja. Ne izpolnjuje točke (2), saj dobite le kljun, ki razčleni $(a + c)(b + d)$, vendar ne z $(a + c)(b + d + e)$ ali kompleksnejšimi izrazi.

Če se osredotočamo na formalno predstavitev matematike kot navdih za izobraževanje, potem je logična izbira, da začnemo z najmanj strukturiranimi matematičnimi objekti. Na ta način izgrajujemo matematično znanje od temeljnih pojmov navzgor. Geometrijo bi tako začeli z aksiomi o točkah in črtah. Analizo bi lahko začeli s številskimi množicami, od naravnih do realnih števil, ki bi jim sledile funkcije itd. Takšen pristop je bil uporabljen med gibanjem Nova matematika v šestdesetih letih 20. stoletja. Toda to je le še ena inkarnacija anti-didaktične inverzije. Te strukture so večinoma končne točke procesa abstrahiranja, »osiromašenja« in reorganizacije matematičnega znanja. Učenje matematike v realnem kontekstu meni, da je za dijake bolj poučno, da sami gredo skozi proces, s katerim to dosežejo.

Točko (3) lahko ponazorimo z naslednjim primerom. Po prehodu iz števil na spremenljivke lahko nadaljujemo z reševanjem enačb.
Rešite enačbe:

$$2x = 8$$
$$7 + x = 15$$
$$x^2 = 25$$
$$x + 8 = 2x + 2$$
$$(x + 2)^2 = 16$$

Primerov je lahko še več. Bolj ko bodo enačbe raznolike, bogatejša bo naloga. Uspešnost dijakov pri tem primeru bo različna, saj se pred tem niso naučili nobenih metod reševanja. Uporabili bodo tudi različne načine razmišljanja. S pomočjo tega primera lahko učitelj ugotovi, kateri postopki so dijakom naravni, in to uporabi v kasnejši fazi, ko bodo obravnavali formalne metode reševanja enačb. Učitelj ob tem spozna tudi razlike med dijaki.

Matematiziranje

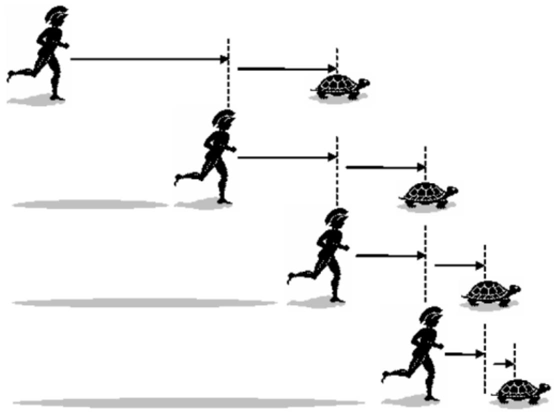
Učenje matematike v realnem kontekstu promovira matematiko kot človeško dejavnost. Freudenthal je eno od glavnih komponent te dejavnosti poimenoval *matematiziranje*:

> *Matematiziranje je celotna dejavnost organiziranja, ki jo izvaja matematik, ne glede na to, ali se tiče matematične snovi in izražanja ali bolj naivne, intuitivne, recimo temu doživete izkušnje, izražene v vsakdanjem jeziku... (Cilj je) nudenje bogatih, nematematičnih struktur, da učečega seznanimo z odkrivanjem strukture, strukturiranjem, osiromašenjem struktur in matematiziranjem. Na ta način bo morda odkril mogočne skromne strukture v kontekstu bogatih struktur v upanju, da bodo z uporabo tega pristopa delovale tudi v drugih (matematičnih in nematematičnih) kontekstih. Če začnemo s skromnimi matematičnimi strukturami, morda nikoli ne bomo dosegli bogatih, nematematičnih struktur, ki so v resnici pravi cilj.* (Freudenthal, 1991, str. 31 in str. 41)

Matematiziranje vključuje: aksiomatiziranje (ustvarjanje aksiomatskega matematičnega sistema), formaliziranje (prehod od intuitivnega na formalni pristop), shematiziranje (oblikovanje smiselnih mrež konceptov in procesov), algoritmiranje (prehod od reševanja problema s trdim delom na reševanje problema z rutino), modeliranje (grajenje shem, ki predstavljajo, idealizirajo ali poenostavljajo druge sheme) itd.
Znotraj matematiziranja ločimo dve usmeritvi: horizontalno in vertikalno (Treffers, 1987). Horizontalno matematiziranje je prehod problema ali situacije v matematični diskurz. Omogoča *matematično* obravnavo ali diskusijo situacije. Vertikalno matematiziranje je matematiziranje znotraj matematičnega diskurza.
Ko nekdo postavi vprašanja o določeni situaciji v zvezi s količinami, razdaljami, obliko, simetrijo, redom, verjetnostjo ali drugo vrsto struktur, ki jih preučuje matematika (in na ta vprašanja odgovori), se odvija horizontalno matematiziranje. Dijaki bi morali prakticirati obe vrsti matematiziranja. Če zanemarimo horizontalni del, potem dijak izgubi povezavo med matematičnim znanjem in situacijami, v katerih ga uporabljamo. Če zanemarimo vertikalni proces, dijak zamudi priložnost, da oblikuje globoke povezave znotraj matematike, zgradi formalni sistem in pride do boljšega razumevanja.

Ta naloga je del predmetnega gradiva o diskretnih modelih za 16 oz. 17-letnike. Cilj naloge je vaditi spretnosti modeliranja zaporedij, vaditi zaporedja vsot in seznaniti se z geometrijskim zaporedjem. Na začetku predstavi znan paradoks o Ahilu in želvi. Veliko dijakov ga pozna, vendar lahko zlahka naletijo na težave, ko ga poskušajo razvozlati (npr. med razredno diskusijo).

Ahil in želva tekmujeta v teku. Ker je Ahil hitrejši, da želvi začetno prednost. Na žalost vsakič, ko Ahil doseže mesto, na katerem se je še pred trenutkom nahajala želva, je želva že malce napredovala. Ahil torej nikoli ne more prehiteti želve in želva zmaga. Kaj je narobe s takšnim razmišljanjem? Kako lahko ta paradoks rešimo z matematičnim razmišljanjem?



Dijaki so nato postavljeni pred izziv, da situacijo modelirajo (kot matematično zaporedje). To seveda privede do vprašanj o vlogi časa in razdalje kot spremenljivkah.

Eden od možnih odgovorov se začne z določenimi predpostavkami, npr.: začetna prednost je 1, Ahilova hitrost je 1, želvina pa ½. Potemtakem je razmik med trenutki, ko Ahil doseže želvin prejšnji položaj, modeliran z zaporedjem

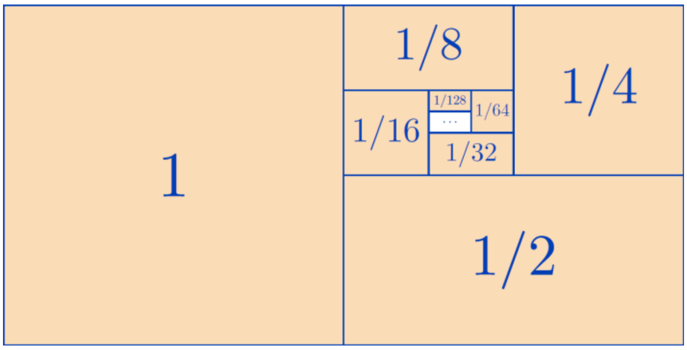
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

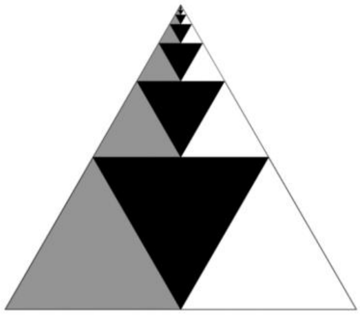
Skupna razdalja, ki jo je pretekel Ahil, in količina časa, ki je pretekla ob posameznem trenutku, sta modelirani z zaporedjem

$$1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, \ldots$$

Toda, kako naj se lotimo neskončnih zaporedij? Če seštejemo neskončno število členov, ali ni izid neskončno število? To je srž paradoksa! Odgovor leži v geometrijskem zaporedju, kar je glavni učni cilj naloge.

V nadaljevanju primera dijaki preučujejo naslednjo sliko:





Neformalno razmišljanje o tej sliki dijakom omogoči, da izračunajo geometrijsko zaporedje in rešijo paradoks.

Temu sledi proces vertikalnega matematiziranja. Dijaka postavimo pred izziv, da poišče podoben rezultat za sliko na desni in nato formalizira ter posploši, kar je na teh dveh slikah predstavljeno vizualno, v formulo

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}.$$

Odkritje izraza $\frac{1}{1-x}$ je velik izziv.

Po uporabi tega rezultata v drugih zanimivih situacijah, npr. 0,9999 … = 1 (lep primer matematičnega konteksta), bi morali biti dijaki še bolj motivirani, da poiščejo dokaz. Pri dokazu uporabijo psevdoformalne tehnike.

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots - x - x^2 - x^3 + \cdots = 1.$$

Kasneje lahko to dodatno formaliziramo v matematičnem zapisu z uvedbo limit in zapisa $\sum$.

Ta opis učnega scenarija prikazuje primere modeliranja in formaliziranja, ki se začnejo z bogatim kontekstom znanega paradoksa in razumljivimi slikami. Bodite pozorni na vrstni red dejavnosti – dijaku omogočimo, da s preučevanjem konkretnih kontekstov pride do bolj formalnega rezultata.

Horizontalno matematiziranje od bogatih kontekstov do vzpostavljanja povezav z realnostjo

Učenje matematike v realnem kontekstu se ukvarja s povezavo matematike z realnostjo. Kot pravi Freudenthal (1991, str. 81):

> *Svet je razburkan. Matematiziranje sveta pomeni iskanje bistva, zaznavanje sporočila znotraj tega nemira. Tudi tega se mora učeči naučiti, tj. raziskati, in sicer čim bolj zgodaj v učnem procesu. Ko ga v celoti indoktriniramo z vnaprej pripravljenimi shemami in algoritmi, bo morda že prepozno.*

Poleg »matematike kot človeške dejavnosti« so »povezave z realnostjo« eno od glavnih zanimanj Učenja matematike v realnem kontekstu. Da bi takšne povezave spodbujali, morajo učne dejavnosti vsebovati dovolj bogat (nematematični) kontekst. Na začetku tega poglavja smo obravnavali bogate kontekste.

Podrobneje jih bomo pojasnili s pomočjo primerov kontekstov. Vsak primer mora seveda izpolnjevati kriterije bogatosti, ki smo jih že omenili.

a) Lokacija, na primer skladišče ali glasbeni festival.
b) Zgodba, na primer zgoraj opisani paradoks o Ahilu in želvi.
c) Človeška dejavnost, na primer načrtovanje hiše ali pilotiranje letala.
d) Novica ali zgodovinski dogodek, na primer statistične trditve v časopisu.

Spodnji primer je povzet po »De Wageningse Methode« (van den Broek idr., n.d.). in je del poglavja o matrikah. Velik del tega poglavja govori o bogatem kontekstu podjetja, ki prodaja avtomobile. To podjetje ima sedež in podružnico ter prodaja avtomobile tipa A, B in C. Zalogo avtomobilov predstavlja matrika S

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{r} Sedež \\ Podružnica \end{array} & \begin{pmatrix} 15 & 13 & 7 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

V prejšnjih nalogah so dijaki seštevali matrike, da bi se prilagodili zalogi. Sedaj uvedemo matriko vrednosti V (v tisočih evrov)

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} prodajna & stroškovna & profitna \end{array} \\ \begin{array}{r} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 12 & 11 & 1 \\ 30 & 28 & 2 \\ 20 & 17 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Skupna prodajna vrednost avtomobilov na sedežu podjetja je

$$15 \cdot 12 + 13 \cdot 30 + 7 \cdot 20 = 710 \text{ (tisoč evrov).}$$

a) Izračunaj skupno prodajno vrednost avtomobilov v podružnici.
b) Izračunaj skupno stroškovno vrednost avtomobilov na sedežu podjetja in v podružnici.
c) Izračunaj skupno profitno vrednost avtomobilov na sedežu podjetja in v podružnici.
d) S skupnimi vrednostmi, ki si jih dobil pod a), b) in c), izpolni matriko skupnih vrednosti S

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} prodajna & stroškovna & profitna \end{array} \\ \begin{array}{r} Sedež \\ Podružnica \end{array} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

Temu sledi razlaga, da je bilo izvedeno dejanje v resnici neka vrsta množenja za matrike $S \cdot V = T$, in T je definirana kot matrika produkta. Prednost tega pristopa je v tem, da dijaka po naravni in smiselni poti privede do operacij, ki jih je treba izvesti za množenje matrik, zahvaljujoč skrbno izbranemu kontekstu.

Modeli v nastajanju

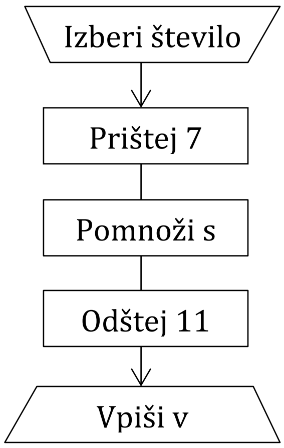
Kako v okviru Učenja matematike v realnem kontekstu dijak pride do bolj formalnega matematičnega znanja? V delih avtorjev Streefland (1985), Treffers (1987) in kasneje Gravemeijer (1994) je posebna vloga pripisana *modelom*, katerih se domislijo dijaki. V njihovih delih so modeli miselne sheme konceptov in procesov, ki so povezani s situacijo. Iz horizontalnega matematiziranja nastane *model situacije*. Ta model predstavlja dijakovo neformalno matematično dejavnost z ozirom na situacijo. Dijaku situacijo osmisli. Od tu se lahko odvija proces vertikalnega matematiziranja: grajenje (bolj abstraktnega) matematičnega objekta iz koncepta ali pa algoritma iz procesa. Novi model je bolj formalen. Po enem ali več takšnih korakov ni več *model specifične situacije*, temveč *model za vrsto situacij*, ki omogoča matematično dejavnost brez sklicevanja na situacijo, ki je dala povod za nastanek modela. Vendar, če bi bilo potrebno, bi lahko model osmislili tako, da bi ustvarili povezavo preko vmesnih modelov vse do prvotnega. To je en razlog, zakaj Učenje matematike v realnem kontekstu raje uporablja modele, ki presegajo situacijo, v kateri so nastali (glejte točko (2) o bogatih primerih).

Postopno nastajanje formalnega modela se lahko razteza preko dolgega izobraževalnega obdobja. Kot primer si oglejmo nastajanje koncepta *funkcije* (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon in Reed 2012). Za izhodišče vzamemo prepričanje, da je dijak seznanjen s konceptom spremenljivke, vključno z zamenjavo vrednosti spremenljivke. Vaja za 12-letnike (prirejena po »De Wageningse Methode«, cf. van den Broek idr., n.d.):

Poglej shemo na desni.
Naredi preglednico s števili 1, 2, 3, 4, 5 in 10.

Samo pride do rezultata 10. S katerim številom je začel?

Kaj pa v primeru števila 343?



Ta neformalna dejavnost se bo kasneje nadgradila v uporabo formul za prikaz te sheme s puščicami. Dijaki bodo delali s takšnimi računskimi shemami in formulami, ki bodo sčasoma za njih postale realnost.

Na določeni točki dodamo nove funkcije: sinus, kosinus in tangens, oznaka $\sin(x)$ itd. Dijaki se ne naučijo računati njihovih vrednosti (na splošno), temveč le, kakšen je njihov geometrijski pomen. Gre za pomemben premik gledišča. Naslednji korak je to, da po analogiji vstavimo nov zapis: $f(x)$, ki predstavlja funkcijski predpis. Na tej točki funkcijski predpis postane objekt. Dijaki bodo morali preučiti lastnosti objekta, kot sta domena ali odvod. Toda koncept funkcije predstavimo na podlagi transformacije modelov: koncept funkcije je tako osnovan na modelih teh funkcij in ne na definiciji. Do dejanske formalne definicije funkcije pridemo po popolnoma drugačni poti: teoriji množic!

Vodeno raziskovanje

Horizontalna dejavnost matematiziranja odpre situacijo oz. vrsto situacij matematičnemu diskurzu. Preko vertikalnega matematiziranja postopoma preoblikujemo modele neformalne matematične dejavnosti v modele, ki predstavljajo formalno matematično znanje. Lahko bi rekli, da na ta način dijak *ponovno odkrije* formalno matematiko. V številnih primerih se bo ta proces morda razlikoval od prvotnega odkritja. Profesionalni matematik je mogoče prišel do rezultata z uporabo motivacije in znanja, ki dijaku nista dostopna. Za učitelja matematike v realnem kontekstu je izziv moderirati proces, ki je primeren za dijaka. Ta proces mora biti *voden*. Kot je zapisal Freudenthal (1991): »Odkritja, kot so pojmovana v tem besedilu, so koraki v učnih procesih, kar pojasnjuje uporabo besede »ponovno« v ponovnem odkrivanju, medtem ko pridevnik »vodeno« nakazuje učno okolje učnega procesa.« Poleg tega bi lahko v podporo vodenemu preiskovanju dodali naslednje argumente (Freudental 1991):

1. Znanje in sposobnost, ki smo ju pridobili z lastno aktivnostjo, si bolje zapomnimo in do njiju lažje dostopamo, kot če so nam ju vsilili drugi.
2. Odkrivanje je lahko prijetno in zato je učenje z preiskovanjem lahko motivirajoče.
3. Spodbuja doživetje matematike kot človeške dejavnosti.
4. Poskrbi, da matematični pristop ustreza stopnji dijaka.

Načelo preiskovanja moramo gledati s stališča osrednje trditve Učenja matematike v realnem kontekstu, s katero smo začeli to obravnavo: da pri matematičnem izobraževanju ne gre le za celoto matematičnega znanja, temveč tudi za učenje matematiziranja. Zato je proces preiskovanja enako cenjen kot njegov izid.

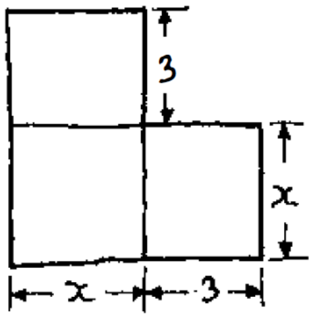
Vodenje k odkritjem

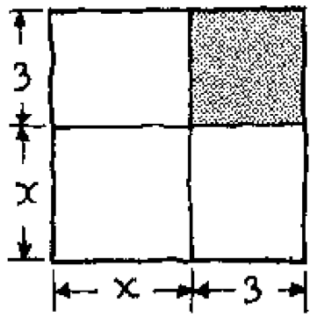
Kako naj vodimo dijake k lastnim odkritjem? »Vodenje pomeni najti krhko ravnovesje med močjo poučevanja in svobodo učenja« (Freudenthal 1991). Vodene dejavnosti bi seveda morale spodbujati horizontalno in vertikalno matematiziranje. Cilj bi moral biti, da dijaki sami ustvarijo rešitve danih problemov in morda celo ustvarijo nove probleme.

Učiteljevo navodilo naj spodbuja diskusije med samimi dijaki ter med dijaki in učiteljem. Diskusije med dijaki slednjim omogočajo, da ideje testirajo, osredotočijo in preoblikujejo, ne da bi jih učitelj usmerjal k želenemu izidu. Vsi dijaki ne bodo matematizirali in odkrivali z enako hitrostjo. Diskusije pomagajo dijakom uskladiti ideje.

Če učitelj sodeluje v diskusiji, potem imajo dijaki korist od njegovih poskusov, da nadaljuje njihov tok misli in jim tako pomaga ugotoviti, kam vodi. Razlog za to je, da pristopi dijakov temeljijo na tem, kar je njim smiselno. Če je učitelj sposoben takšne metode privesti do sprejemljive rešitve, potem se poveča verjetnost, da bo dijak rešitev razumel.

Primer je prirejen po »De Wageningse Methode« (van den Broek idr., n.d.) in želi pripeljati dijaka do odkritja metode za *dopolnjevanje do popolnega kvadrata*. Na desni sliki je lik v obliki črke L dopolnjen do kvadrata.





a) Zapišite izraz za ploščino lika v obliki črke L, ki je na levi sliki.
b) Kolikšna je ploščina sivega kvadrata?
c) Kolikšna je dolžina stranice velikega kvadrata?
d) Pojasni, kako (a) in (b) privedeta do enakosti $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$.
e) To enakost preveri tako, da odpraviš oklepaje v desnem izrazu.
f) Skiciraj lik v obliki črke L s ploščino $x^2 + 10x$.
g) Katero enakost lahko izpelješ iz lika v primeru (f) v obliki črke L?

Primer ponovimo z različnimi števili (tudi z uvedbo ulomkov), risanje lika v obliki črke L pa prepustimo dijaku. Pomembno je poudariti, da ponovno odkrivanje algoritma prepustimo dijaku. Dijak naj bi bil tisti, ki izvede algoritmiranje.

Dijakovo lastno odkritje (npr. koncept, algoritem, model ali način reševanja problema) morda ne bo najbolj učinkovito ali elegantno. Morda se bo razlikovalo od tistega, ki ga je imel učitelj v mislih kot zaželen učni izid. Ob zaključku dejavnosti preiskovanja bi učitelj lahko poskusil formulirati skupen izid med razredno diskusijo. Učitelj naj pri tem pazi, da izid poveže s prispevki dijakov.

Učenje matematike v realnem kontekstu in poučevanje matematike s preiskovanjem

Kje leži skupna točka med Učenjem matematike v realnem kontekstu in poučevanjem matematike s preiskovanjem? Osrednji koncept poučevanja matematike s preiskovanjem je *preiskovanje*: proces, podoben delu matematikov in znanstvenikov, ko so soočeni z novim fenomenom.

> *Številne vsakodnevne fenomene lahko opišemo, raziskujemo in razumemo s pomočjo matematike v kombinaciji z naravoslovjem ali zdravo pametjo in so potemtakem bogat vir za poučevanje matematike s preiskovanjem*[2]*... (*Artigue in Blomhøj, 2013*)*

[2] V tej knjižici uporabljamo izraz poučevanje matematike s preiskovanjem, medtem ko Artigue in Blomhøj uporabljata izraz matematično izobraževanje s preiskovanjem.

Učenje matematike v realnem kontekstu in poučevanje matematike s preiskovanjem imata nekaj skupnih načel. Obe teoriji opisujeta, kako so vsakdanje situacije bogat vir za učenje. Zagovarjata izgrajevanje znanja z metodami, ki sta jih navdihnila znanost in izgrajevanje znanja: preiskovanje, raziskovanje ali (ponovno) odkrivanje. Poučevanje matematike s preiskovanjem in Učenje matematike v realnem kontekstu opisujeta te procese kot družbene: dijaki sodelujejo, da bi ponovno odkrili in rekonstruirali znanje. Učenje matematike v realnem kontekstu poudarja, da se (ponovno) odkritje razlikuje od odkritja, saj se znanje, ki tvori izhodišče za specializiranega raziskovalca, močno razlikuje od tistega, ki tvori izhodišče za učenca začetnika.

Poleg tradicionalnih vlog učitelj v okviru Učenja matematike v realnem kontekstu in poučevanja matematike s preiskovanjem pridobi novo vlogo: je moderator in usmerjevalec preiskovanja in matematiziranja. Dijaki in njihove ideje igrajo osrednjo vlogo. Kot je bilo že povedano, učitelj pomaga formalizirati neformalne pristope dijakov.

Za Učenje matematike v realnem kontekstu in poučevanje matematike s preiskovanjem sta spretnost v preiskovanju in matematiziranju učna cilja, poleg vsebinskega matematičnega znanja. Gre za pomemben odmik od pristopov, ki so usmerjeni izključno na vsebinsko znanje.

Struktura Učenja matematike v realnem kontekstu za module poučevanja matematike s preiskovanjem

Do sedaj smo obravnavali različne vidike Učenja matematike v realnem kontekstu in podali več primerov nalog. Za zaključek bomo na kratko opisali, kako vse te naloge nanizati v učno tirnico, npr. modul.

1. Uvod: predstavite kontekst z relativno odprtim problemom (po možnosti naj ga dijaki sami odkrijejo oz. formulirajo). Ta problem bo krovni problem celotnega modula. K njemu boste pristopili na različne matematične načine.
2. Faza horizontalnega matematiziranja: uvedete matematični jezik za pogovor o situaciji. Dijaki oblikujejo prvi neformalni model situacije.
3. Faza vertikalnega matematiziranja: nadalje razvijete matematiko, na katero se nanaša problem. Model postane abstraktnejši, splošnejši.
4. Zaključek in refleksija: dijak razmisli o celotnem procesu, povezuje ideje, jasno izrazi pridobljene metakognitivne spretnosti, dijaki z drug drugim delijo svoja spoznanja, učitelj usmerja in poudari glavne učne točke.

Vsaka faza vsebuje elemente preiskovanja: odkritje in/ali formulacija problema, oblikovanje prvega neformalnega modela, abstrahiranje, deljenje spoznanj. Izzivi, ki se pojavijo pri uporabi teh idej in drugih principov oblikovanja modulov, ki temeljijo na poučevanju matematike s preiskovanjem, so obravnavani v drugih publikacijah projekta MERIA (glejte http://www.meria-project.eu/).

Literatura

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32*(1), 23-38. http://dx.doi.org/10.1080/01411920500401971 .
Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. V: C. Winsløw (ur.), *Nordic Research in Mathematics Education: Proceedings from NORMA08*, str. 7-16. Copenhagen, Denmark.

Artigue, M. in Baptist, P. (2012). *Inquiry in Mathematics Education (Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School)*. Pridobljeno s spletne strani http://www.fibonacci-project.eu

Artigue, M. in Blomhøj, M. (2013) Conceptualizing inquiry-based education in Mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45, str. 797-810.

Artigue, M. in Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 39, 365–382

Barquero, B. in Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study and research paths. V: A. Watson in M. Ohtani (ur.), *Task Design In Mathematics Education*, pogl. 8, str. 249-272. Springer International Publishing.

Bass, J. E., Contant, T. L. in Carin, A. A. (2009). Teaching Science for Understanding: The 5-E Model of Instruction. *Teaching science as inquiry*, pogl. 4, str. 87-95. Allyn & Bacon/Pearson.

Blanchard, S., V. Freiman in N. Lirrete-Pitre (2010). Strategies used by elementary schoolchildren solving robotics-based complex tasks: Innovative potential of technology. *Procedia-Social and Behavioral Sciences 2*(2). 2851-2857. http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.427 .

Blomhøj, M. (2004), Mathematical modeling – a theory for practice. V: B. Clarke, D. Clark, D. Lambdin, F. Lester, G Emanuelsson, B. Johansson, A. Walbym in K. Walby (ur.), *International perspectives on learning and teaching mathematics*, str. 145-160. Gothenburg: NCM, Gothenburg University.

Blum, V. in Borremero Ferri, R. (2007). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1, str. 45-58.

Blum, W. / Leiß, D. (2006). „Filling up“ – The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. V: Bosch, M. (ur.), *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Guixol

Bosch, M. in Winsløw, C. (2016) Linking problem solving and learning contents: the challenges of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35 (3), str. 333-374.

Brousseau G. (1981a) Problemes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques* 2(1) 37–127

Brousseau G. (1981b) *Le cas de Gaël*. Bordeaux: IREM de Bordeaux

Brousseau G. (1984) Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. *Actes de le IIIe école d'été de didactiques des mathématiques* (str. 99–108) Grenoble: IMAG.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*, 1970 – 1990. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bruder, R. in Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45(6), 811-822.

Burkhardt, H. in Bell, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom. *ZDM -- The International Journal on Mathematics Education*, 39, 395–403.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. V: *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, str. 173-187. Springer International Publishing.

Dewey, J. (1902). *The Child and the Curriculum*. Chicago: University of Chicago Press.

Dewey, J. (1938). Logic: *The theory of inquiry*. New York: Henry Holt and Company, Inc.

Doerr, H. in Ärlebäck, J. B. (2015, februar). Fostering students' independence in modelling activities. V: K. Krainer in N. Vondrova (ur.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2015, Prague, Czech Republic. str. 855-861.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. in Reed, H. (2012). *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(6), 1243-1267. http://dx.doi.org/10.1007/s10763-012-9329-0

Doorman, M., Jonker, V. in Wijers, M. (2016). *Mathematics and Science in Life: Inquiry Learning and the World of Work*. University of Education Freiburg.

Dorier, J. in Garcia, F.J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45*(6), 837-849.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T. in Zoulinaki, F. (2009). Geometric and Algebraic Approaches in the Concept of "Limit" and the Impact of the "Didactic Contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7 (4), 765–790.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 1, str. 87-101.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Furtak, E.M., Seidel, T., Iverson, H., Briggs, D.C. (2012). Experimental and quasi-experimental studies of inquiry-based science teaching a meta-analysis. *Review of*

Educational Research 82(3). 300-329. http://dx.doi.org/10.3102/0034654312457206.

García, F. J. (2013) *PRIMAS guide for professional development providers*.

Goddijn, A. (1979). De weerbarstigheid van klein en groot [The stubbornness of small and large]. *Wiskrant, 17*, 1-4.

Godino, J.D., Batanero, C., Canadas, G., Contreras, J.M. (2015) Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. V: K. Krainer in N. Vondrova (ur.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2015, Prague, Czech Republic. str. 2642-2648.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: CD-β Press.

Hattie, J. (2009). *Visible Learning: A Synthesis of 800+ Meta-analyses on Achievement*. Routledge, Abingdon. http://dx.doi.org/10.1007/s11159-011-9198-8 .

Hattie, J. in H. Timperley (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research 77*(1). 81-112. http://dx.doi.org/10.3102/003465430298487 .

Hiebert, J, Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H. et al. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, (25), 4, str. 12-21.

Hofstein, A. in V.N. Lunetta (2004). The laboratory in science education: Foundations for the twenty-first century. *Science Education 88*(1). 28-54. http://dx.doi.org/10.1002/sce.10106 .

Kilpatrick, J. (1987). What Constructivism Might Be in Mathematics Education. V: *Proceedings of PME XI*, Montreal.

Kilpatrick, J. (2008). The Development of Mathematics Education as an Academic Field. V: The first Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). *Reflecting and shaping the world of Mathematics Education*, str. 25-39

Kilpatrick, J. (2014). History of Research in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, str. 267-272

Maaß, K. in Artigue, M. (2013) Implementation of iquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45, str. 779-795.

Maaß, K. in Doorman, L.M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 45 (6), 887-89.

Maaß, K. (2013). PRIMAS report on the results of the internal evaluation. http://www.primas-project.eu/artikel/en/1247/Reports+and+deliverables/

Minner, D.D., A.J. Levy in J. Century (2010). Inquiry-based science instruction: What is it and does it matter? Results from a research synthesis years 1984 to 2002. *Journal of Research in Science Teaching 47*(4). 474-496. http://dx.doi.org/10.1002/tea.20347.

Miyakawa,T. in Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, 72 (2), str. 199–218.

National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, Washington D.C.

http://www.k12.wa.us/CoreStandards/Mathematics/pubdocs/CCSSI_MathStandards.pdf

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, str. 1-24.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T, Bai Andersen, T., Wåhlin Andersen, R., Christoffersen, T., Damgaard, S., Gustavsen, T, Jess, K., Lange, J., Lindenskov, L., Bonné Meyer, M. in Nissen, K. (2002). Competencies and mathematical learning – Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Copenhagen: Ministry of Education. Pridobljeno s spletne strani http://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ_MN_KOM_in_english.pdf.

OECD (2016a). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264266490-en

OECD (2016b). *PISA 2015 Results (Volume II): Policies and Practices for Successful Schools*. PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264267510-en .

OECD (2016c), *Ten Questions for Mathematics Teachers ... and how PISA can help answer them*. PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264265387-en .

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. in Hemmo, V. (2007) L'enseignement scientifique aujourd'hui: une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe. Commission Européenne, Direction générale de la recherché, Science, économie et société.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. in Hemmo, V. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe*. Brussels: European Commission.

Ropohl, M., Rönnebeck, S., Bernholt, S. in Köller, O. (2016). A definition of inquiry-based STM education and tools for measuring the degree of IBE. (Resources for Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education, ASSISTME). Pridobljeno s spletne strani http://assistme.ku.dk/pdf-uploads/D2.5.pdf

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of "Well-Taught" Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, 23 (2), 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. V: D. A. Grouws (ur.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics,* str. 334–370. New York: MacMillan Publishing Company.

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics,* 83, 1, str. 1-7.

Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron [Mathematics as an activity and reality as a source]. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs (Nieuwe Wiskrant), 5*(1), 60-67.

Swan, M., Pead, D., Doorman, L.M. in Mooldijk, A.H. (2013). Designing and using professional development resources for inquiry based learning. *ZDM - International Journal on Mathematics Education,* 45 (7), 945-957.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas Project.* Dordrecht: Reidel.

Van den Broek, L., Hombergh, D. van den, Smaalen, D. van, Haandel, M van, Geurtz, T., Reuling, H. (n.d.). *De Wageningse Methode*. V nizozemščini. Pridobljeno s spletne strani https://www.wageningse-methode.nl/

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer - en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik* [Didactical elements – an introduction to the didactics of mathematics and science]. Copenhagen: Biofolia.

Woolnough, B. E. (1991). Setting the scene. V: B. E. Woolnough (ur.). *Practical Science*. Open University Press, Milton Keynes, str. 3-9.

Priloga. Pregled ključne literature: predlogi za nadaljnje branje v zvezi s projektom MERIA.

Artigue, M. in Blomhøj, M. (2013). »Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. [Konceptualiziranje matematičnega izobraževanja, ki temelji na preiskovanju.]« ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 45, (6), str. 797-810.

Ta prispevek govori o tem, da matematično izobraževanje, ki temelji na preiskovanju, nagovarja dijake, da »delajo na podobne načine kot matematiki in znanstveniki«. Avtorja na začetku predstavita Deweya kot filozofa, ki je želel preseči razlikovanje med védenjem in delovanjem, tako da je človeško vedênje razumel kot reflektivno preiskovanje. Nato naštejeta avtorje, ki so vplivali na Deweya. Naštejeta elemente preiskovalne prakse, ki se jima zdijo bistveni: reflektivno preiskovanje, ki združuje indukcijo in dedukcijo, proces, ki se nanaša na vsakdanje življenje in znanstveno dejavnost, ter praktične dejavnosti. Omenita tudi, da bi moralo izobraževanje, ki temelji na preiskovanju, razvijati dijakov način razmišljanja v smeri teh temeljnih preiskovalnih procesov. Opisujeta preiskovanje v okviru projektov PRIMAS in Fibonacci ter kako sta ta dva projekta povezana z idejo progresivnega razvoja »velikih idej«. Prenos izobraževanja, ki temelji na preiskovanju, v matematično izobraževanje argumentirata z navezovanjem na Polyevo delo »Kako rešujemo matematične probleme« in na novejše teorije in pristope k poučevanju matematike. Sledi kratka predstavitev teh teorij in pristopov ter pojasnilo, kako so povezani z izobraževanjem, ki temelji na preiskovanju. Obravnavani so naslednji pristopi: Tradicija reševanja problemov, Teorija didaktičnih situacij, Učenje matematike v realnem kontekstu, Vidiki modeliranja (iz Teorije matematične kompetence), Antropološka teorija didaktike in Dialoški in kritični pristopi. V povzetku avtorja trdita, da morajo biti učitelji izkušeni in sami izvajati preiskovanje pri pouku matematike, da bi lahko poučevali s preiskovanjem. Svetujeta, da razlikujemo med »preiskovanjem s strani učiteljev in preiskovanjem v poučevanju«, pri čemer slednje očitno zahteva precejšnje sodelovanje med učitelji, da bi lahko v razredih izvajali matematično izobraževanje, ki temelji na preiskovanju. Kot zaključno ugotovitev avtorja navajata deset pomislekov, ki jih moramo upoštevati med izvajanjem matematičnega izobraževanja, ki temelji na preiskovanju, in ki jim moramo pripisati različno težo, kadar je poučevanje zasnovano na obstoječih pristopih k poučevanju matematike, ki sta jih avtorja predstavila v tem prispevku.

Artigue, M. in Baptist, P. (2012). Inquiry in Mathematics Education, Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School [Preiskovanje v matematičnem izobraževanju. Viri za izvajanje preiskovanja pri naravoslovju in matematiki v šoli]. Pridobljeno s spletne strani http://www.fibonacci-project.eu

Ta del knjižice projekta Fibonacci opisuje starejše in sedanje poskuse poučevanja matematike na način, ki temelji na preiskovanju. Projekt Fibonacci nadaljuje nekatere od idej nemškega projekta SINUS, ki je opredelil lastnosti preiskovalnih procesov v poučevanju matematike. Prvi del knjižice izpostavlja pristope k

matematičnemu izobraževanju, ki jih poznamo iz literature, ki vsebujejo lastnosti matematičnega izobraževanja, ki temelji na preiskovanju. V naravoslovju preiskovanje pogosto črpa iz že občutenih izkušenj, ki jih lahko nadalje preučujemo v cikličnih procesih, kar pa ne velja za matematiko. Kumulativna narava te vede predstavlja izziv. Način oblikovanja se mora v tem primeru razlikovati, če želimo zagotoviti, da dijaki dosežejo določen učni cilj, ki se zopet navezuje na že razvito znanje dijakov in tvori osnovo bolj formalnemu dokazovanju konkretnih idej, ki so jih razvili med preiskovalno dejavnostjo. V tem kontekstu IKT ali programi za simbolno računanje nudijo posebne priložnosti in izzive pri oblikovanju dejavnosti matematičnega izobraževanja, ki temelji na preiskovanju – podani so primeri različnih zasnov z IKT. V prvi polovici knjižice je na kratko pojasnjeno, kateri elementi: modeliranje, RME, ATD, TDS, kritični pristopi in reševanje problemov, omogočajo matematično izobraževanje, ki temelji na preiskovanju. To poglavje knjižice predstavi tudi ovire, na katere lahko naletimo med izvajanjem takšnega izobraževanja v šolskem sistemu.
V drugem delu je predstavljen bolj praktičen (učiteljev) pogled na matematično izobraževanje, ki temelji na preiskovanju. Poudarja, kako bi morali spremeniti poučevanje z ozirom na standardno poučevanje: česa bi morali učitelji početi manj in česa več? Katera dejanja bi morali izvajati dijaki in kako naj jih učitelji pripravijo do tega? Pojasnjuje, kako ta dejanja podpirajo dijakov razvoj kompetence reševanja problemov in metakognitivnih kompetenc. Nazadnje predstavi še primere nalog matematičnega izobraževanja, ki temelji na preiskovanju, z uporabo računalnikov ali brez.

Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W. in Léna, P. (2012). Learning through inquiry, Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School [Učenje s preiskovanjem. Viri za izvajanje preiskovanja pri naravoslovju in matematiki v šoli]. Pridobljeno s spletne strani http://www.fibonacci-project.eu/resources
Splošnejše informacije o idejah projekta Fibonacci, ki niso omejene na matematiko.

Artigue, M. in Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives [Reševanje problemov v Franciji: Didaktični in kurikularni vidiki]. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 39, str. 365-382.
Ta prispevek nudi pregled, kako lahko obravnavamo reševanje problemov in k njemu pristopimo z vidika Teorije didaktičnih situacij, Antropološke teorije didaktike in »konceptualnih področij«. Poda nekaj primerov, kako je reševanje problemov artikulirano v učnih načrtih za različne stopnje matematike. Večina predstavljenih rezultatov se navezuje na novo osredotočenost na reševanje problemov v kurikularnih reformah med leti 1945 in 2002. Spremembe v učnih načrtih odražajo spremenjeno vlogo osnovnega izobraževanja. S pomočjo primerov opisuje, kako je didaktično raziskovanje vplivalo na kurikularne spremembe v povezavi z reševanjem problemov preko centrov, pristojnih za oblikovanje (npr. IREM), ki prakticirajoče učitelje podpirajo pri realizaciji predvidenih sprememb. Pri preučevanju realiziranega kurikuluma v učilnicah še

vedno prihaja do težav, saj se učiteljem nekatere definicije problemov zdijo nejasne, s težavo vodijo odprte procese in pogosto pripisujejo enako vrednost različnim odgovorom drugačne kakovosti. Avtorja menita, da bi trdnejše povezave med raziskovanjem in prakso ter usposabljanje učiteljev izboljšalo realizirani kurikulum.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990 [Teorija didaktičnih situacij pri matematiki, 1970-1990]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Ta knjiga predstavi večino Teorije didaktičnih situacij, ki jo je razvil Guy Brousseau in kasneje izpopolnil skupaj s svojo raziskovalno ekipo. Teorija didaktičnih situacij je predstavljena s pomočjo primera »Dirke do 20«. V uvodu je pojasnjena analogija med učenjem in zmagovanjem v igri, nato pa je podana prva predstavitev faz reševanja, formulacije in verifikacije. Prvo poglavje se začne s predstavitvijo tega, kaj pomeni izraz *didactique* v francoskih raziskavah glede na objekte in fenomene, ki jih preučuje. Med fenomeni je tudi nekaj nenamernih učinkov poučevanja: učinek Topaza, Jourdainov učinek, metakognitivni premiki in nepravilna uporaba analogij. Nadalje predstavi pojme didaktična situacija, adidaktična situacija in didaktična pogodba. Poda primere devolucije adidaktične situacije in obravnava dodatne paradokse v zvezi z didaktično pogodbo. Ti paradoksi se nanašajo na dijakovo prilagajanje situacijam in na učne potenciale tega procesa. V zadnjem delu je poudarek na tem, kako lahko modeliramo faze in situacije s pomočjo oblikovanja miljeja, kar privede do formuliranja predvidenega učenja, če se dijaki prilagodijo miljeju situacije.
Drugo poglavje nadaljuje z elementom oblikovanja s predstavitvijo pojma epistemoloških ovir, problema in didaktičnega inženiringa z vidika Teorije didaktičnih situacij. To poglavje se nanaša na problemske situacije in na Brousseaujevo raziskavo o poučevanju decimalk. Sledi razlikovanje med ovirami, ki se jih lahko lotimo v učilnici, in ovirami, ki se nahajajo izven učilnice.
Tretje poglavje vsebuje analizo možnih izidov poučevanja decimalk v francoskih osnovnih šolah v šestdesetih in sedemdesetih letih 20. stoletja, na podlagi prejšnjih učnih načrtov in pristopov k poučevanju. To se nadaljuje v četrtem poglavju, v katerem so izpeljani zaključki o matematični, epistemološki in didaktični analizi. Na podlagi teh primerov oblikovanja so predstavljeni in obravnavani še drugi primeri: pantograf in skaliranje risb, naloga s sestavljanko, ki se giblje od seštevanja do množenja, decimalna števila in racionalna števila. Nato je predstavljena analiza situacije, ki obravnava oblikovanje situacije, v kateri so dijaki določali debelino lista papirja, in analogijo z učno situacijo (didaktične) igre.
Peto poglavje podrobneje pojasni pojem didaktične pogodbe v povezavi s težavami z oblikovanjem in v povezavi z vplivi na dijakovo učenje. Navezuje se na faze didaktične igre, s poudarkom na znanju, ki naj bi se ga poučevalo v tako oblikovani situaciji.
Zadnje, šesto poglavje obravnava pomen raziskav v sklopu Teorije didaktičnih situacij za prakso učiteljev, vključno s tehnikami za učitelje in kako lahko v razredni praksi raziskovalno znanje postane realnost.

Burkhardt, H. in Bell, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom [Reševanje problemov v Združenem kraljestvu]. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 39, str. 395-403.
Ta prispevek nudi zgodovinski pregled političnih odločitev v zadnjih sto letih na področju poučevanja matematike. Izpostavlja problem, da se v zadnjih letih zdi, da snovalci politik delujejo na podlagi lastnih izkušenj s tem, kaj poučevanje matematike je in kaj bi moralo biti, ne pa na podlagi raziskovalnega znanja. Posledično britanski šolski sistem ne poudarja oz. podpira preiskovalnih pristopov k poučevanju matematike.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm [Poučevanje matematike v jutrišnji družbi: argument za prihajajočo protiparadigmo]. V: The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (str. 173-187). Springer International Publishing.
Gre za raziskovalni prispevek, ki predstavlja elemente Antropološke teorije didaktike (ATD), še ene francoske teorije didaktike. Običajno poučevanje v razredu s predstavljanjem in pojasnjevanjem postopkov oz. formul, je označeno kot paradigma opravljenih hospitacij. Prispevek trdi, da bi se moralo poučevanje matematike usmeriti proti novi (proti)paradigmi: spraševanje o svetu. Predlaga, da naj poučevanje temelji na odprtih vprašanjih, na katera dijaki odgovarjajo s pomočjo aktivnega preučevanja obstoječih virov in z uporabo na novo pridobljenega in obstoječega znanja odgovorijo na odprto vprašanje. V tem procesu naj bi dijaki iz danega vprašanja izpeljali nova. Orodje za oblikovanje takšnega poučevanja se imenuje Študijske in raziskovalne poti (Study and Research Paths – SRP), ki so ga tudi drugi raziskovalci (vključno s prispevki na tem seznamu) izpostavili kot obetaven model za matematično izobraževanje, ki temelji na preiskovanju.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. in McNeal, B. (1992). Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An Interactional Analysis [Značilnosti tradicij šolske matematike: interakcijska analiza]. American Educational Research Journal, 29 (3), str. 573–604.
Avtorji analizirajo dva primera poučevanja sistema mestne vrednosti v drugih in tretjih razredih v ZDA. Predstavijo številne pojme iz ameriške literature o matematičnem izobraževanju, da bi analizirali obe situaciji poučevanja. Situaciji identificirajo kot šolska matematika in preiskovalna matematika. Poudarijo različni vlogi navodil in verifikacije odgovorov dijakov. Omenijo delo Brousseauja in nekatere pojme njegove Teorije didaktičnih situacij, vendar ne želijo analizirati obeh situacij poučevanja z uporabo pojma didaktičnih situacij. Zaključijo z naslednjo mislijo: »Poleg tega trdimo, da so kognitivni modeli, ki dokumentirajo dijakovo konstruiranje vedno bolj prefinjenih matematičnih objektov, bistveni za analizo dijakove dejavnosti med sodelovanjem v interaktivni izgradnji tradicije preiskovalne matematike.« V prispevku je opazen poskus konceptualiziranja tega, kako lahko matematično izobraževanje, ki je podobno preiskovanju, analiziramo

in primerjamo s tradicionalnimi pristopi. Večino spoznanj lahko povežemo s pojmom didaktične pogodbe iz Teorije didaktičnih situacij, vendar tega v prispevku niso storili.

Dewey, J. (1902). The Child and the Curriculum [Otrok in učni načrt]. Chicago: University of Chicago Press.
Avtor obravnava, kako so izobraževalni sistemi razporejeni v logične strukture. Vendar pa to logiko pogosto ustvarijo odrasli kot produkt večletnega raziskovanja znanja, ki ga morajo poučevati. To lahko privede do izzivov za otroka in njegovo učenje, saj se morda ne ujema z otrokovimi izkušnjami. Poučevanje bi se moralo osredotočati na otrokova dejanja, s čimer Dewey zaključi: »Dejanje je odziv, je prilagoditev. Gola samoaktivnost ne obstaja, saj se vsa aktivnost odvija v nekem mediju, v neki situaciji in z ozirom na njene pogoje.«

Dewey,J. (1929). The Sources of a science of education [Viri znanosti izobraževanja]
Prvo poglavje: Izobraževanje kot znanost. Zagovarja potrebo po obravnavi izobraževanja kot znanosti, pri kateri si znanje delimo na znanstven način. Nekateri učitelji so nadarjeni za poučevanje, toda če ne raziščemo, iz česa je sestavljen ta talent, potem ne moremo deliti njihove prakse ali idej o poučevanju. Vendar pa obstaja nevarnost, da bodo osebe znotraj izobraževalnih sistemov zbrano znanje o izobraževanju kot znanosti zlorabile kot hitro rešitev.
Drugo poglavje: Sposojene tehnike ne zadostujejo. Trdi, da si ne moremo sposoditi tehnik od naravoslovja in da v tem trenutku ni jasno, katere objekte s področja raziskovanja izobraževanja naj bi merili in kako.
Tretje poglavje: Zakoni proti pravilom.
Obravnava, kako so urejeni šolski sistemi in znanje in kako to lahko privede do neuspeha vseh pri poučevanju in učenju. Obravnava tudi prosto igro misli, ki bi lahko bila osrednjega pomena za učenje.

Dewey, J. (1938). Logic: The theory of inquiry [Logika: teorija preiskovanja]. New York: Henry Holt and Company, Inc.
Knjiga obravnava preiskovanje z različnih vidikov: zdrava pamet in znanstveno preiskovanje, struktura preiskovanja in izgradnje znanja, delovne hipoteze itd. Glavni poudarek je na preiskovanju v naravoslovju. Eno poglavje je posvečeno matematičnemu diskurzu preiskovanja, kjer avtor pride do naslednjega zaključka: »Tu navedeni pomisleki imajo očiten vpliv na naravo testiranja in verifikacije (glejte zgornje delo, str. 157). Dokazujejo, da v preiskovalni praksi pri verifikaciji ideje ali teorije ne gre zgolj za iskanje obstoja, ki bi izpolnjeval zahteve ideje ali teorije, temveč za sistematično razvrščanje kompleksnih nizov podatkov s pomočjo ideje ali teorije kot inštrumenta.« Zaradi tega je zanimiva splošnost, ki jo lahko izpeljemo iz konkretnega eksperimenta ali izkušnje. Dewey obravnava različne pojme in koncepte iz matematike (npr. izomorfen, razmerje itd.) v kontekstu preiskovanja in matematike ter do kakšne mere imajo enak pomen.

Dorier, J. in Garcia, F.J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching [Izzivi in priložnosti za izvajanje učenja s preiskovanjem v vsakdanjem poučevanju]. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45(6).
Ta prispevek razpravlja o pogojih in omejitvah, ki bi lahko spodbujale ali nasprotno otežile obsežno izvajanje matematičnega in naravoslovnega izobraževanja, ki temelji na preiskovanju, na podlagi dela v okviru projekta PRIMAS v dvanajstih evropskih državah. Model izobraževalnega sistema, ki ga ponuja Chevallardova Antropološka teorija didaktike (ATD) kot sistemski institucionalni vidik, je prispeval k strukturiranju analize pogojev in omejitev sistemov v teh državah. S pomočjo analize prepričanj in praks učiteljev služi kot dopolnilo pristopu (Engeln idr. v ZDM Int J Math Educ 45(6) 2013). Pri tem pristopu so učitelji akterji institucij, ki predstavljajo določene vede, vpete v šolski sistem, ki so jim skupne določene pedagoške težave, obravnavane v povezavi z družbo. Analiza je organizirana v skladu s štirimi stopnjami institucionalne organizacije, ki sooblikujejo vsebinske in didaktične vidike poučevanja matematike in naravoslovja: družba, šola, pedagogika in stroka.

Drobnič Vidic, A. (2011). »Impact of Problem-based Statistics Course in Engineering on Students' Problem Solving [Vpliv problemsko zasnovanega predmeta inženirska statistika na študentovo reševanje problemov].« International Journal of Engineering Education 27(4):885-896.
Izvleček. V tej primerjalni študiji smo preučili stopnjo osnovnega področnega znanja in sposobnosti reševanja problemov v okviru učenja skozi reševanje problemov, vpetega v tradicionalni kurikulum predmeta Uvod v statistiko. Študentom inženirstva smo predstavili manj progresivno strukturirane, manj poznane in bolj odprte probleme. Inženirski problemi so sprožili učenje nove statistične snovi in aktivirali reševanje problemov v majhnih skupinah. Študenti so kot skupina določili učne cilje, individualno iskali informacije in nato skupaj analizirali zbrane informacije. Pogosto menimo, da je takšen proces reševanja realnih problemov nestrukturiran in zamuden. Izvedli smo eksperiment, da bi ugotovili, če ta pristop privede do zadovoljivega osnovnega znanja statistike in izboljša reševanje problemov. Primerjali smo dve naključni skupini študentov iz istega inženirskega študijskega programa: ena skupina je uporabljala učenje skozi reševanje problemov, druga pa je sledila tradicionalnemu pouku. Rezultati statistične analize so pokazali, da so študenti inženirstva z uporabo pristopa učenja skozi reševanje problemov pridobili zadovoljivo osnovno znanje statistike in so bolje reševali statistične probleme s področja inženirstva kot pa študenti, ki so sledili tradicionalnemu pouku. Obravnavane so nekatere značilnosti izvajanja predmeta in tudi nekatere omejitve pričujoče študije.

Drobnič Vidic, A. (2015). »First-year students' beliefs about context problems in mathematics in university science programmes [Prepričanja študentov prvega letnika o kontekstualnih problemih pri matematiki v univerzitetnih naravoslovnih programih].« International Journal of Science and Mathematics Education, 13 (5), str. 1161–1187.

Izvleček: Prepričanja v zvezi z matematiko igrajo pomembno vlogo v pripravljenosti za sodelovanje v akademskih dejavnostih v okviru matematičnega izobraževanja. Nekatera prepričanja morda niso usklajena s prepričanji študentov o kontekstualnih problemih, ki zahtevajo zadostno matematično znanje in uporabo tega znanja v različnih življenjskih situacijah. Ta študija je bila zasnovana z namenom preučevanja razlik med prepričanji študentov v zvezi z matematiko in njihovimi prepričanji o kontekstualnih problemih. Razlike med temi prepričanji bi lahko pojasnile različno količino truda, ki ga študenti vložijo v reševanje kontekstualnih problemov na eni strani in reševanje tipičnih matematičnih nalog na drugi strani. Študija je vključevala 261 študentov prvega letnika: študenti ene skupine so bili vpisani v akademsko zahtevnejše študijske programe (n = 162), medtem ko so bili študenti druge skupine (n = 99) vpisani v akademsko manj zahtevne študijske programe. Rezultati so pokazali pomembne razlike v prepričanjih med obema skupinama. Podrobna analiza nakazuje dejavnike, ki jih moramo poudariti, kadar oblikujemo matematično izobraževanje skozi reševanje problemov, da bi spodbujali uspešno reševanje kontekstualnih problemov.

Drobnič Vidic, A. (2016). »Using a Problem-Based Learning Approach to Incorporate Safety Engineering into Fundamental Subjects [Vključitev varnostnega inženiringa v osnovne predmete z uporabo učenja skozi reševanje problemov].« Journal of Professional Issues in Engineering Education and Practice. 142 (2).

Izvleček. Varnost velja za pomembno področje inženirskega izobraževanja, vendar v kurikulumih inženirskih programov običajno ni dovolj poudarjena. Snov varnostnega inženiringa smo vključili v predmet Uvod v statistiko s pomočjo učenja skozi reševanje problemov. Začetniki so se učili statistično snov preko reševanja problemov s področja varnostnega inženiringa. Razdelili smo jih v dve skupini glede na izbrano možnost delnega vrednotenja: skupina s klasičnim vrednotenjem in skupina z vrednotenjem samostojnega inženirskega problema, ki je bil oblikovan v skladu s kampanjo, ki jo usklajuje Evropska agencija za varnost in zdravje pri delu. V primeru tega problema so študenti analizirali kakovost namestitve gasilnih aparatov v več kot 200 objektih in njihovo vzdrževanje. Cilj te raziskave je bil ugotoviti, če lahko vrednotenje takšnega problema uporabimo za vrednotenje celostnega statističnega znanja študentov, če lahko študenti pridobijo nov uvid v področje varnostnega inženiringa in če takšno vrednotenje ustreza kriterijem organizacije ABET. S pomočjo vprašalnika za študente smo pridobili informacije o njihovem dojemanju težavnosti pristopa učenja skozi reševanje problemov pri obeh možnostih vrednotenja.

Drobnič Vidic, A. (2017). »Teachers' Beliefs about STEM Education Based on Realisation of the "Energy as a Value" Project in the Slovenian School System [Prepričanja učiteljev o naravoslovno-matematičnem izobraževanju na podlagi realizacije projekta »Energija kot vrednota« v slovenskem šolskem sistemu].« International journal of engineering education (v tisku).

Izvleček. Medpredmetni projekt Energija kot vrednota, opisan v tej raziskavi, je zajemal skoraj vse predmete kurikuluma za t. i. tehniške gimnazije. Postal je okvir za učinkovito NAravoslovno-MAtematično izobraževanje (NA-MA). Čeprav je projekt ponujal interdisciplinarno povezovanje vseh NA-MA predmetov, spodbujal učenje skozi reševanje problemov in izpostavil uporabnost učne snovi predmetov za inženirski poklic, na koncu ni veljal za uspešnega. Po zaključku štiriletnega projekta je bilo zadovoljstvo učiteljev vprašljivo. Učitelji niso dali pobude za nov projekt. Vprašalnik Prepričanja in pričakovanja o inženirskem izobraževanju za NA-MA izobraževanje smo uporabili, da bi odkrili razloge, zakaj tako ambiciozen projekt ne bo ponovno izvajan. Ta vprašalnik dokumentira prepričanja in pričakovanja učiteljev o poučevanju inženirstva v srednjih šolah, o pripravi na univerzitetni študij in o uspešni karieri v inženirstvu ter primerja poglede učiteljev. Izpolnili so ga učitelji tehniških gimnazij v Sloveniji, ki poučujejo NA-MA predmete, da bi ugotovili, če obstajajo razlike med prepričanji učiteljev, ki so izvedli projekt Energija kot vrednota, in učitelji z drugih tehniških gimnazij ter razlike med prepričanji učiteljev matematike / naravoslovja in učitelji tehničnih predmetov / inženirstva. Rezultati statističnih analiz pojasnjujejo ovire, s katerimi so se morda soočili učitelji, ki so izvedli ambiciozno NA-MA izobraževanje v določenem šolskem sistemu.
Ključne besede: NA-MA izobraževanje, prepričanja učiteljev, kurikulum za srednje šole, interdisciplinaren inženirski projekt, učenje skozi reševanje problemov.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T. in Zoulinaki, F. (2009). »Geometric and Algebraic Approaches in the Concept of "Limit" and the Impact of the "Didactic Contract« [Geometrijski in algebrski pristopi v konceptu »limite« in vpliv »didaktične pogodbe«].« International Journal of Science and Mathematics Education, 7 (4), 765–790.
Ta prispevek poroča o raziskavi, ki je bila izvedena med velikim številom dijakov in raziskovala njihovo reševanje problemov, povezanih s konceptom limite, pri katerem naj bi dijaki prosto prehajali od algebrske h geometrijski domeni in nazaj. Koliko so bili dijaki uspešni pri ne-rutinskih problemih, ki so zahtevali spremembo domene, je bilo odvisno od tega, koliko so bili omejeni s tradicionalno didaktično pogodbo.

Ellerton, N. (2013). »Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework [Vključevanje bodočih učiteljev predmetne stopnje v postavljanje matematičnih problemov: razvoj okvira aktivnega učenja].« Educational Studies in Mathematics, 83, 1, str. 87-101.
Prispevek izpostavlja pomembnost tega, da smo sposobni podvomiti o snovi, ki naj bi se jo naučili in jo poučevali. Zastavljanje vprašanj o obstoječem znanju zahteva ustvarjalnost in domišljijo, kar privede do napredka v znanosti. Zato bi morali to spodbujati pri poučevanju. Prispevek na kratko opiše nekaj modelov, ki so jih ustvarili bodoči učitelji predmetne stopnje, v katerih učenci sodelujejo pri postavljanju problemov.

Engeln, K., Euler, M. in Maaß, K. (2013). »Inquiry-based learning in mathematics and science: a comparative baseline study of teachers beliefs and practices across 12 European countries [Učenje s preiskovanjem pri matematiki in naravoslovju: primerjalna referenčna raziskava prepričanj in praks učiteljev v dvanajstih evropskih državah].« ZDM – The International Journal on Mathematics Education. Vnaprejšnja spletna publikacija. http://link.springer.com/journal/11858
Ta prispevek predstavlja nekatere rezultate vprašalnika, ki so ga izpolnili učitelji, ki so sodelovali pri projektu PRIMAS. Pokaže, da imajo učitelji na splošno pozitiven odnos do učenja s preiskovanjem, vendar vidijo pomanjkanje virov kot glavno oviro pri izvajanju učenja s preiskovanjem. Kot izziv so izpostavili tudi državne omejitve znotraj izobraževalnega sistema. Nasprotno pa vodenje razreda učiteljem ne predstavlja posebnih težav.

Euler, M. (2011). PRIMAS survey report on inquiry-based learning and teaching in Europe [Poročilo o raziskavi PRIMAS o učenju in poučevanju s preiskovanjem v Evropi]
Projekt PRIMAS je pokazal, da ima v večini EU držav vsaj nekaj učiteljev matematike in naravoslovja izkušnje z učenjem s preiskovanjem, toda da si ta pojem različno razlagajo, zaradi česar se lahko učne ure učenja s preiskovanjem med posameznimi državami močno razlikujejo. Poročilo svetuje dajanje pobud za izvajanje učenja s preiskovanjem, ki naj se osredotočajo na učitelje, ki že imajo nekaj izkušenj in se zanimajo za pedagoška oz. didaktična vprašanja. Projekt je prepoznal tri glavne dejavnike, ki otežujejo izvajanje učenja s preiskovanjem: vodenje razreda, viri in omejitve izobraževalnega sistema specifičnih držav.

García, F. J. (2013) PRIMAS guide for professional development providers [Priročnik projekta PRIMAS za izvajalce profesionalnega razvoja].
To poročilo našteva številne konkretne pobude za navajanje prakticirajočih učiteljev na uporabo učenja s preiskovanjem. Teoretični pristopi zajemajo modeliranje, preučevanje učnih ur skupaj z drugimi učitelji in usklajevanje učenja s preiskovanjem z lokalnimi zahtevami za usposabljanje prakticirajočih učiteljev. Moduli usposabljanja prakticirajočih učiteljev v okviru projekta PRIMAS so pokrivali naslednje teme: preiskovanje, vodeno s strani dijakov, delo z nestrukturiranimi problemi, učenje konceptov s preiskovanjem, postavljanje vprašanj, ki spodbujajo učenje s preiskovanjem, sodelovalno delo dijakov, grajenje na obstoječem znanju dijakov, samovrednotenje in vrstniško vrednotenje.

Godino, J.D., Batanero, C., Canadas, G., Contreras, J.M. »Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics [Povezovanje preiskovanja in prenosa pri poučevanju in učenju matematike].« V: K. Krainer in N. Vondrova (ur.). Proceeding of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 2015, Prague, Czech Republic, str. 2642-2648.

Ta prispevek opisuje različne teorije, ki trdijo, da mora učenje matematike temeljiti na konstruktivističnih metodah, pri katerih dijaki preiskujejo problemske situacije, učitelj pa ima vlogo moderatorja (Učenje matematike v realnem kontekstu, Teorija didaktičnih situacij) ter jih primerja s teorijami, ki zagovarjajo bolj osrednjo vlogo učitelja z izrazitim prenosom znanja in aktivnim sprejemanjem le-tega s strani dijakov. Avtorji so mnenja, da optimizacija učenja matematike zahteva sprejetje vmesnega položaja med tema dvema skrajnima modeloma.

Gravemeijer, K. in Terwel, J. (2000). »Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory [Hans Freudenthal: matematik o didaktiki in teoriji kurikuluma].« Journal of Curriculum Studies, 32, 6, str. 777-796.
Avtorja pripovedujeta o glavnih prispevkih Hansa Freudenthala k matematičnemu izobraževanju. Matematiko je razumel kot človeško dejavnost. Nadaljeval je idejo o vodenemu raziskovanju (poznano že iz Deweyevega dela), ki je podvomila v takratno oblikovanje kurikuluma. Želel je promovirati idejo o tem, da naj bodo procesi osrednji element, ki naj bi se ga naučili dijaki, in ne fiksni deli snovi. Posledično bi moralo poučevanje matematike temeljiti na modeliranju problemov, kjer bi dijaki matematizirali snov iz realnosti, toda brez jasne intra- ali ekstra-matematične realnosti. Kasneje je uvedel razliko med vertikalno in horizontalno matematizacijo. Freudenthal je kritiziral vlogo generičnih teorij o pedagogiki ali teorij učenja v raziskavah matematičnega izobraževanja. Namesto tega je predlagal pristop Učenje matematike v realnem kontekstu, ki je fenomenološki pristop k poučevanju matematike.

Gueudet, G. in Trouche, L. (2011). »Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry [Napredne metode izobraževanja učiteljev matematike: primer iz dinamične geometrije].« ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 43 (3), str. 399-411.
Primer, kako lahko usposabljanje prakticirajočih učiteljev podpira učitelje pri oblikovanju oz. razvoju poučevanja, ki temelji na preiskovanju, z uporabo računalniškega programa za dinamično geometrijo (izobraževanje s preiskovanjem, podprto z IKT). Učitelji, ki so bili udeleženi v tej raziskavi, poučujejo v srednjih šolah, uporabljeni teoretični pristop pa je nova Teorija dokumentacijske geneze (Theory of Documentational Genesis).

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour [Matematično izobraževanje na Nizozemskem: voden ogled]. ***Freudenthal Institute CD-ROM for ICME9. Utrecht: Utrecht University.***
Gre za raziskovalni prispevek, ki predstavlja osrednje konstrukte in pojme pristopa Učenje matematike v realnem kontekstu in nizozemske didaktične tradicije, vse od prispevkov Hansa Freudenthala do novejših dosežkov. Besedilo predstavi tri osnovnošolske primere.

Hersant, M. in Perrin-Glorian, M.-J. (2005). »Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations [Karakterizacija običajne pedagoške prakse s pomočjo Teorije didaktičnih situacij].« Educational Studies in Mathematics, 59 (13), str. 113-151.
Ta prispevek predstavi nekatere izzive, s katerimi se sooča učitelj, kadar je poučevanje zasnovano tako, da dijakom omogoča večjo iniciativnost v razredu, in kako to poveča učiteljevo negotovost. Z uporabo pojmov iz Teorije didaktičnih situacij sta avtorja analizirala dve študiji primera s področja poučevanja, pri katerih avtorja nista vplivala na oblikovanje poučevanja ali na samo izvajanje poučevanja. Na podlagi tega avtorja razpravljata o izzivih in možnostih za uvedbo konstruktivističnih pristopov k poučevanju v učilnice.

Kilpatrick, J. (2014). »History of Research in Mathematics Education [Zgodovina raziskovanja matematičnega izobraževanja].« Encyclopedia of Mathematics Education, str. 267-272. Springer publishing.
Besedilo nudi kratek pregled tega, kako se je začelo razvijati raziskovalno področje matematičnega izobraževanja in pokaže, da se je to zgodilo veliko pozneje kot vzpostavitev same prakse. Vsebuje tudi kratko poročilo o tem, kdo je dal pobudo za ustanovitev institucij (kot so ERME, ICMI, IREM in druge), kjer se lahko matematiki in raziskovalci izobraževanja sestanejo in pogovarjajo. Dotakne se tudi idej Felixa Kleina in odnosa med prakso raziskovalnih matematikov in poučevanjem in učenjem matematike. Nakaže tudi druge, novejše težave na tem področju kot npr. dejanska in potencialna vloga tehnologije v poučevanju matematike. Besedilo nudi pregled raziskav na področju matematičnega izobraževanja in zato specifičnih raziskav ne predstavi podrobneje.

Kilpatrick, J. (2008). »The Development of Mathematics Education as an Academic Field. [Razvoj matematičnega izobraževanja kot akademskega področja.]« V: The first Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of Mathematics Education, str. 25-39
Prispevek na začetku poda zgodovinski pregled, ki zajema nastanek komisij za razvoj matematičnega izobraževanja, pri čemer je bil Felix Klein pomembna osebnost. Uvedel je reformni program, osnovan na skupnosti učiteljev, znanstvenikov in inženirjev. Njegova ideja je bila spremeniti izobraževanje učiteljev, da bi spremenili poučevanje v smeri spodbujanja praktičnega pouka in razvoja prostorske intuicije. Razpravlja o tem, kaj je matematika (česar matematiki ne znajo zlahka opredeliti) in kaj je izobraževanje. Predstavljeni so različni pristopi, npr. nordijska pedagoška tradicija in frankofonska tradicija didaktike. Prispevek trdi, da se matematika kot študijsko področje in kot praksa vrti okoli poučevanja. Matematiko se namreč promovira in izgrajuje s poučevanjem. To privede do vprašanja (ki so si ga zastavili tudi drugi), kakšen je in kakšen bi moral biti odnos med matematiko kot raziskovalnim področjem in kot vedo, ki se jo poučuje v različnih šolskih okoljih?

Legrand, M. (2001). »Scientific debate in mathematics courses [Znanstvena debata pri predmetu matematika].« V: Holton, D. (ur.) The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study (str. 127-135). Springer Netherlands.
Prispevek trdi, da aktivno sodelovanje pri predmetu matematike ne pomeni, da študenti postanejo matematiki, lahko pa od njih zahteva, da poskusijo ravnati kot matematiki in da razred oblikuje znanstveno skupnost, ki razpravlja o matematiki. Zato prispevek predlaga organiziranje poučevanja v obliki znanstvene debate. To debato lahko sprožimo kot »nenačrtovano debato« na podlagi vprašanja, ki ga je postavil študent, kot načrtovano situacijo z namenom predstavitve novega koncepta oz. premostitve epistemološke ovire, ali pa kot poglobitev koncepta oz. teorije. Navaja primere pobudnikov iz prvega letnika univerzitetnega študijskega programa matematika (vključno z interdisciplinarnimi primeri), vseeno pa bi bilo nekaj primerov lahko primernih za srednje šole.
Da bi znanstvena debata lahko delovala, je pomembno, da učitelj da študentom dovolj časa za individualen razvoj argumentov, da učitelj zapiše vse argumente na tablo, ne da bi o njih presojal, učitelj pa mora tudi stremeti k temu, da se maksimalno število študentov angažira in vključi v odkrivanje racionalne rešitve obravnavanega problema ali domneve. Študentova odgovornost je, da verjame v domnevo, ki jo zagovarja, da razvije racionalne argumente za domnevo in nazadnje, da tako prepričljivo formulira argumente, da prepriča tudi druge študente in učitelja. Na ta način se didaktična pogodba poučevanja matematike eksplicitno spremeni v takšno, v kateri postane odgovornost študentov, da ukrepajo, formulirajo in verificirajo matematične odgovore, očitna. Prispevek črpa iz pojmov Teorije didaktičnih situacij.

Legrand, M. (n.d.) »Les deux ateliers proposés par Marc Legrand reposent sur: Le “Débat scientifique” en cours de mathématiques.« Pridobljeno s spletne strani http://kordonnier.fr/IMG/pdf/legrand.pdf
Besedilo ponuja dodatne argumente za to, kako znanstvena debata spremeni didaktično pogodbo v okviru poučevanja in kako je matematična dejavnost (matematikov) prežeta z znanstveno debato. Omenja tudi dodatne komentarje učencev. Nekateri so si le s težavo predstavljali uvedbo znanstvene debate v osnovnošolsko izobraževanje, čeprav se jim je zdelo takšno poučevanje razsvetljujoče in dobro. Veliko učencem so se zdele debate zamudne v smislu, da jih je skrbelo, če bo učna ura znanstvene debate sploh pokrila snov kurikuluma.

Margolinas, C. in Drijvers, P. (2015). »Didactical engineering in France; an insider’s and an outsider’s view on its foundations, its practice and its impact [Didaktični inženiring v Franciji: pogled udeleženca in zunanjega opazovalca na njegove temelje, prakso in vpliv]«, ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 47(6).
Prispevek obravnava pojem didaktičnega inženiringa, ki je vplival na sodobno raziskovanje matematičnega izobraževanja v Franciji in ga opredelil. Prispevek obravnava naslednje teme z vidika udeleženca in zunanjega opazovalca: (1) način, kako je ta pojem teoretično osnovan, (2) različne prakse raziskovanja

oblikovanja, do katerih je ta pojem privedel in do katerih bo še privedel, in (3) način, kako je povezan s paradigmo raziskovanja oblikovanja. Prispevek primerja nizozemski pogled na Učenje matematike v realnem kontekstu in značilnosti didaktičnega inženiringa v Franciji.

Maaß, K. in Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis [Izvajanje poučevanja, ki temelji na preiskovanju, v vsakdanjem poučevanju: sinteza]. ZDM Mathematics Education, 45, str. 779-795

Izvleček: Ta sinteza je bila oblikovana z namenom, da poda uvid v najpomembnejša vprašanja, ki se pojavijo med izvajanjem učenja s preiskovanjem v velikem obsegu. Sprva se loti obravnave samega učenja s preiskovanjem tako, da (1) razmišlja o definiciji učenja s preiskovanjem in (2) preuči trenutno stanje implementacije tega. Nato se loti izvajanja učenja s preiskovanjem in si ogleda, kako se širi preko virov, profesionalnega razvoja in vključitvijo konteksta. Na osnovi teh teoretičnih razmislekov razvije konceptualen okvir za analizo dejavnosti širjenja, nato pa na kratko analizira štiri vzorne primere. Cilj te analize je preučitev različnih strategij izvajanja in ozaveščanje o različnih načinih uporabe in kombiniranja le-teh. Sinteza se zaključi z opažanji o okviru in zaključki o bodočih potrebnih ukrepih.

Miyakawa, T. in Winsløw, C. (2009). »Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation" [Didaktične zasnove za učenčevo proporcionalno razmišljanje: učna ura »odprtega pristopa« in »temeljna situacija«].« Educational Studies in Mathematics, 72 (2), str. 199–218.

Prispevek analizira in primerja dve didaktični zasnovi na temo proporcionalnega razmišljanja. Ena zasnova je povečava sestavljanke, ki jo poznamo iz literature o Teoriji didaktičnih situacij. Druga zasnova temelji na japonski tradiciji preučevanja učnih ur skupaj z drugimi učitelji in pristopa odprtega tipa. Oba pristopa vsebujeta element preiskovanja, obema pa je skupna tudi ideja, da se učenci učijo iz morebitnih napak.

Monaghan, J., Pool, P., Roper, T. in Threlfall, J. (2009). »Open-Start Mathematics Problems: An Approach to Assessing Problem Solving [Matematični problemi z odprtim začetkom: pristop k vrednotenju reševanja problemov].« Teaching Mathematics and its Applications, 28 (1), str. 21–31.

Prispevek predstavi reševanje problemov in kaj označuje problem z odprtim začetkom, za katerega je značilno, da ima več izhodišč, vendar le en odgovor. Prispevek predlaga, kako lahko takšne probleme uporabimo v namene vrednotenja, s spremembo vrednotenja pa predvideva, da bodo tudi razredne dejavnosti temeljile bolj na preiskovanju.

Niss, M. (1999). »Aspects of the Nature and state of research in mathematics education. [Vidiki narave in stanja raziskav na področju matematičnega izobraževanja]« Educational Studies in Mathematics, 40, str. 1-24.

Prispevek obravnava nekatera temeljna vprašanja za izvajanje raziskav na področju matematičnega izobraževanja: s katerimi izzivi se sooča izobraževalni sistem in zakaj bi se morali raziskovalni matematiki zanimati za poučevanje matematike. Prispevek formulira, kaj je mišljeno z izrazom teorija, kaj je matematično izobraževanje kot raziskovanje oblikovanja in kateri so produkti takšnega raziskovanja. Obravnava številna spoznanja, kot so pogledi na učenje, znane ovire in vloga IKT, medtem ko zaključki nakazujejo potrebo po razvoju bolj hevrističnih kompetenc učencev z uporabo ne-rutinskih matematičnih problemov, kar lahko razumemo kot pristope, ki temeljijo bolj na preiskovanju.

Nohda, N. (1995). »Teaching and Evaluating Using "Open-Ended Problems" in Classroom [Poučevanje in evalvacija z uporabo »problemov odprtega tipa« v razredu].« Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 27 (2), str. 57–61.

Nohda, N. (2000). »Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom [Poučevanje s pomočjo metode odprtega pristopa v japonski matematični učilnici].« Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), (1), str. 39–53.
Prispevek predstavi pristop odprtega tipa: na podlagi prvotnega problema, hipotez in prvih odgovorov učencev se izoblikujejo nova vprašanja za nadaljnje preiskovanje. Navaja primere različnih problemov in obravnava, kako se učitelj spopada z raznolikostjo odgovorov učencev. Na kratko opiše učne situacije s poudarkom na komunikaciji med učenci in učiteljem. Na koncu svetuje nadaljnje preučevanje povezave med pristopom odprtega tipa in modeliranjem ter kako ta način poučevanja vpliva na odnos učencev do matematike.

Polya, G. (1945). »How to solve it? [Kako rešujemo matematične probleme]« Princeton, NJ: Princeton University Press.
Med raziskovalci reševanja problemov in matematičnega izobraževanja, ki temelji na preiskovanju, ta knjiga velja za ključno delo kot izhodišče za pristop k poučevanju in učenju matematike, ki temelji na preiskovanju. Polya opiše procese, ki se pojavijo med reševanjem problemov, kot osrednjo dejavnost matematika. Poudari ustvarjalnost in odnos do matematike, ki sta potrebna za aktivno sodelovanje v dejavnostih reševanja problemov. V proces reševanja problemov uvede pojem hevristike.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving [Matematično reševanje problemov]. San Diego: Academic Press.
Pojasnilo in nadgradnja Polyevih idej. Podroben uvod v to, kaj je reševanje problemov, iz katerih virov naj bi učenci črpali in kakšni odnosi do matematičnih problemov so potrebni.

Schoenfeld, A. H. (1992). »Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics [Učenje matematičnega razmišljanja: reševanje problemov, metakognicija in

osmišljanje pri pouku matematike].« V: D. A. Grouws (ur.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics (str. 334–370). New York: MacMillan Publishing Company.
To poglavje knjige poda uvod v reševanje problemov in omenja Piageta in konstruktivizem ter vpliv epistemološkega, ontološkega in pedagoškega pogleda učiteljev na matematiko. Obravnava Polyeve ideje o hevristiki in njeno povezavo z metakognicijo. Prispevek vsebuje splošne ideje o vodenju ali nudenju pomoči študentom (univerzitetna stopnja) pri razvijanju spretnosti in kompetenc reševanja problemov. Kljub temu je še vedno (oz. vsaj leta 1992 je bil) izziv, kako poučevati reševanje problemov, saj moramo najprej doseči nekakšno soglasje glede njegove definicije.

Schoenfeld, A. H. in Kilpatrick, J. (2013). »A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics [Ameriški pogled na izvajanje učenja s preiskovanjem pri pouku matematike].« ZDM – The International Journal on Mathematics Education, letnik 45, številka 6, str. 901–909.
Razprava o izzivih, s katerimi se lahko sooči implementacija poučevanja matematike s preiskovanjem v Združenih državah, upoštevajoč dejavnike, kot so trenutni kurikulum, zmogljivost učiteljev matematike in javne zahteve ter prepričanja o naravi in namenu šolske matematike.

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J. (2013). »Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions [Raziskovanje s postavljanjem problemov v matematičnem izobraževanju: nova vprašanja in usmeritve].« Educational Studies in Mathematics, 83, 1, str. 1-7.
To je pregledni prispevek, ki predstavlja trenutno stanje raziskovanja s postavljanjem problemov v matematičnem izobraževanju. Prispevek se začne z argumentiranjem, kako postavljanje problemov podpira razvoj hevrističnih kompetenc učencev in kako se to povezuje z raziskovanjem lastnih vprašanj. Ta prispevek je uvod v posebno izdajo revije ESM in poda pregled pristopov k spodbujanju učencev, da postavljajo vprašanja z matematično vsebino, ki so navedena v tej posebni izdaji.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. in Hughes, E. K. (2008). »Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell [Organiziranje produktivnih matematičnih diskusij: pet praks v pomoč učiteljem, da presežejo metodo pokaži in povej].« Mathematical Thinking & Learning, 10, str. 313–340.
Prispevek poda pregled literature o razrednih diskusijah in se nadaljuje s predstavitvijo modela, ki so ga ustvarili avtorji in ki zajema: predvidevanje, spremljanje, izbiranje, ustvarjanje zaporedja in povezovanje. Zaključi se s to mislijo: »Te prakse torej ne nudijo instant rešitve za pouk matematike. Namesto tega ponujajo nekaj veliko pomembnejšega: zanesljiv proces, na katerega se učitelji lahko zanesejo, da bo sčasoma izboljšal njihove razredne diskusije.«

Ulm, V. (2012). »Inquiry-based mathematics education in primary school: Overview and examples from Bavaria/Germany [Poučevanje matematike s preiskovanjem v osnovni šoli: pregled in primeri iz Bavarske, Nemčija].« V: P. Baptist in D. Raab (ur.), Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School. Implementing Inquiry in Mathematics Education (str. 65–81). Pridobljeno s spletne strani http://www.fibonacci-project.eu/resources

Gre za primer oz. model oblikovanja učnih okolij, ki temeljijo na preiskovanju, čemur sledi nekaj nemških primerov učnih ur o osnovni teoriji števil na predmetni stopnji.

Slovar posebnih izrazov, uporabljenih v tem priročniku

Nekateri od navedenih člankov temeljijo na formulacijah z interneta, ki je splošno gledano dober vir za ustvarjanje prvega vtisa o pomenu nekega izraza. Tukaj jih predstavljamo kot priročno pomoč bralcu in ne smejo nadomestiti potrebnega poglobljenega študija gradiva, ki je opisano v bibliografiji.

Filozofija učenja in znanja

Epistemologija – ozko gledano gre za vejo filozofije, ki se ukvarja s teorijo znanja, naravo znanja, njegovo utemeljitvijo in racionalnostjo prepričanj. V matematičnem izobraževanju se epistemološki vidiki splošneje ukvarjajo z deli matematike, ki so specifični za njeno strukturo, ter z ovirami in težavami, ki jo predstavlja učencem kot posledica takšne strukture.

Konstruktivizem – filozofski pogled na načine, kako se ljudje učimo. Formalizacijo konstruktivizma na splošno pripisujemo Jeanu Piagetu (1896-1980), slavnemu švicarskemu psihologu, ki je del svoje kariere izvajal klinične raziskave tega, kako se otroci med drugim učijo osnovno matematiko. Človeško znanje je obravnaval tako, kot da je zgrajeno iz različnih vrst miselnih shem. Domneval je, da lahko te sheme (učenje) zgradimo s pomočjo asimilacije in prilagoditve obstoječih shem izkušnjam učenca. Konstruktivistično poučevanje temelji na prepričanju, da učenje poteka, kadar so učenci aktivno udeleženi v procesu izgrajevanja pomena in znanja, ne pa med pasivnim sprejemanjem informacij. Učenci so ustvarjalci pomena in znanja.

Izobraževanje v splošnem (vključno z žargonskimi in nejasnimi izrazi)

Pristop v poučevanju – sklop načel za poučevanje in v širšem smislu način interakcije z učenci, ki olajša njihovo učenje. Lahko ga opišemo preko uveljavljenih teorij v matematičnem izobraževanju ali bolj neformalno z naštevanjem načel, ki temeljijo na naravi matematičnega znanja in učenja le-tega.

Metoda poučevanja – sestavljena je iz načel in metod, uporabljenih pri pouku, ki naj bi jih izvajali učitelji, da bi njihovi učenci dosegli želene cilje učenja. Te metode so deloma določene s snovjo, ki naj bi se jo naučili (npr. kvadratne enačbe), in deloma s tem, kar o učencu predvidevamo oz. vemo (npr. seznanjenost s kvadratnimi koreni, zanimanje za to temo, sposobnost koncentracije in samostojnega dela itd.). Metode poučevanja vključujejo predavanje, vodenje in organiziranje dela učencev (z razrednimi diskusijami, skupinskimi projekti, delom v parih itd.).

Učni izid – pričakovanje o znanju ali spretnostih učenca, ki naj bi jih pridobil po končanem učenju. Takšna pričakovanja so pogosto precej implicitna. Učitelji naj *uporabljajo učne izide* le, če jih jasno navedejo – na primer v pripravi, med podajanjem snovi v razredu in ocenjevanjem.

Tradicionalen pouk – izraz se nanaša na uveljavljene navade, ki so bile v šolah dolgo v uporabi (se ne nanaša na pristop!). Pogosto te navade oz. prakse niso bile eksplicitno navajane. Nekatere oblike reforme izobraževanja promovirajo prevzem alternativnih izobraževalnih praks, npr. zavzemanje za večji poudarek na potrebah in samonadzoru posameznega dijaka. Številni reformatorji trdijo, da nasprotujejo tradicionalnim metodam, usmerjenim na učitelja, ki so se osredotočale na učenje na pamet oz. memorizacijo. V resnici je izraz »tradicionalno« pogosto uporabljen precej nenatančno.

Pasivno učenje – metoda učenja oz. pouka, pri kateri učenci prejmejo informacije od učitelja in jih ponotranjijo, pogosto skozi obliko memorizacije ali učenja na pamet, pogosto brez povratne informacije s strani učitelja.

Učenje na pamet – tehnike memorizacije na podlagi ponavljanja. Osnovna ideja pri tem je, da večkrat kot ponovimo metode ali dejstva, hitreje jih lahko prikličemo. Učenje na pamet je običajno predstavljeno kot nezadostno glede na alternative s privlačnimi imeni, kot so smiselno učenje, asociativno učenje in aktivno učenje.

Aktivno učenje – učenje, ki temelji na lastnih dejanjih in pobudah učencev, vključno s sodelovanjem pri načrtovanju in vrednotenju lastnega učenja.

Na učenca usmerjeno poučevanje (na učenca usmerjen pouk) – dosežemo ga z metodami poučevanja, ki učenca postavijo v središče učnega procesa. Osnovna ideja je, da razvijemo avtonomijo in samostojnost učencev s tem, da jim prepustimo večjo odgovornost za učenje.

Učenje s preiskovanjem – oblika aktivnega učenja, ki obsega odgovarjanje na vprašanja, probleme ali scenarije ter zastavljanje vprašanj, problemov ali scenarijev – namesto preprostega sprejemanja uveljavljenih dejstev ali sledenja uhojeni poti do znanja. Učencem v tem procesu pogosto pomaga moderator. Tako bodo prepoznavali in preiskovali probleme ter vprašanja z namenom razvijanja lastnega znanja oz. rešitev. Učenje s preiskovanjem vključuje učenje skozi reševanje problemov in se uporablja pri preiskavah, manjših projektih in raziskavah.

Učenje z odkrivanjem – tehnika učenja s preiskovanjem, ki je včasih predstavljena kot konstruktivistični pristop k izobraževanju. Učenje z odkrivanjem poteka preko reševanja problemov, kjer učenec črpa iz lastnih izkušenj in predznanja. Je metoda poučevanja, pri kateri učenci raziskujejo objekte iz svojega okolja in z njimi manipulirajo, zastavljajo vprašanja, rešujejo protislovja in izvajajo eksperimente.

Odranje (usmerjanje oz. podpiranje učenčevega razmišljanja) – učencu prilagojena podpora pri doseganju njegovih učnih ciljev. Združuje nudenje podpore v obliki virov, primernih nalog in smernic ter svetovanja in postavljanja vprašanj, ki vodijo k napredku pri učenju. Tako kot pri gradnji stavb, podporo (oder) postopoma odstranjujemo, ko učenci razvijajo avtonomne učne strategije.

Hevristika – vsakršen pristop k reševanju problemov, učenju ali raziskovanju, kjer je uporabljena metoda, za katero ni zajamčeno, da bo optimalna ali popolna, vendar zadostuje trenutnim ciljem.

Uvid – razumevanje vzroka in posledice v okviru specifičnega konteksta ali pa nenadno odkritje pravilne rešitve po številnih nepravilnih poskusih na podlagi metode poskusov in napak. Rešitve, ki so povezane z uvidom, naj bi bile bolj prepričljive kot rešitve, ki niso povezane z njim.

Aha učinek – nanaša se na pogosto človeško izkušnjo, ko nenadoma razumemo problem oz. koncept, ki nam je bil prej nerazumljiv. V nekaterih primerih sta s takšnimi učinki povezana tudi intuicija in spomin, ki pa sta na splošno nekoliko nerazložljiva.

Razumevanje – odnos med učečim in predmetom razumevanja. Splošno gledano je razumevanje priročen, toda precej nejasen izraz. Učitelj lahko uporabi »razume računske operacije« kot kratko opredelitev uspeha, ki zadovoljuje bolj eksplicitne kriterije. Na splošno je natančnejša opredelitev »razumevanja« pomemben cilj teoretičnih okvirov na področju izobraževanja in učenja.

Reševanje problemov – doseganje cilja v situaciji, ki je za učenca nova, kjer ne pozna pravilne poti reševanja ali rešitve ne prepozna samodejno. Nekatera vprašanja so lahko za enega učenca problem (če ne pozna nobene direktne metode reševanja), za drugega pa ne (ker pozna takšno metodo). Drugače povedano, reševanje problemov je odvisno od znanja in predhodnih izkušenj učenca.

Učenje skozi reševanje problemov – na učenca usmerjena pedagogika, pri kateri se učenci učijo o določeni predmetni vsebini skozi izkušnjo reševanja problemov.

Teorija didaktičnih situacij

Institucionalno znanje (včasih poimenovano tudi *javno, skupno* ali *uradno znanje*) – znanje, ki je predstavljeno v učbenikih, strokovnih revijah in drugih virih ter predstavlja sintezo oz. rezultat različnih matematičnih dejavnosti. Z lahkoto ga prepoznamo, saj je eksplicitno. V nekaterih jezikih obstaja specifičen termin za institucionalno znanje – v francoščini mu na primer pravijo *savoir.*

Osebno znanje (včasih poimenovano tudi *individualno znanje*) – znanje, ki ga učenci gradijo med interakcijo z matematičnim problemom (miljejem). Pogosto ga je težje prepoznati, saj je lahko le nakazano, še posebej v primeru individualnega dela. V nekaterih jezikih obstaja specifičen termin za osebno znanje – v francoščini mu na primer pravijo *connaissances.*

Didaktična situacija – situacija poučevanja in učenja, v kateri je učitelj v eksplicitni vlogi moderatorja.

Didaktični milje – okolje, s katerim učenec stopi v interakcijo, da bi pridobil novo znanje. Sestavljen je iz problema in pripomočkov, kot so svinčnik in papir, žepno računalo, program za simbolno računanje (Computer Algebra System – CAS), sestavljanka itd. V didaktičnih situacijah ga oblikujejo učitelj in drugi učenci. Učenje je modelirano kot učenčevo prilagajanje osebnega znanja didaktičnemu milјeju.

Adidaktična situacija – učenčeva interakcija z miljejem (matematičnim problemom) brez učiteljevega posredovanja.

Standard znanja (pričakovani dosežek) – matematično znanje (vsebinsko, procesno), ki ga učitelj določi svojim učencem kot učni cilj v didaktični situaciji. (Didaktična situacija je vedno situacija *za* nekaj – namreč za standard znanja, ki je učitelju poznan, učencem pa sprva ne.)

Faza devolucije – faza, v kateri učitelj milje preda učencem. Devolucija se nanaša na prenos odgovornosti za reševanje problema na učence oz. vsaj poskus tega. Morda bo učitelj kdaj menil, da je za doseganje določenega standarda znanja potrebnih več devolucij. Vendar naj to izvede na kontroliran način, da bi se izognil nepotrebnemu trivializiranju ali drobljenju problema, saj to lahko privede do tega, da učenci ne dosežejo standardov znanja (glejte tudi *Didaktična pogodba*).

Faza reševanja – faza, v kateri se učenci avtonomno lotijo problema.

Faza formulacije – faza, v kateri učenci eksplicitno oblikujejo svoje ugotovitve po fazi reševanja (začetne ideje, hipoteze ali strategije za reševanje problema ter bolj ali manj splošne rešitve).

Faza verifikacije – faza, v kateri učenci svoje strategije ali hipoteze testirajo na miljeju, da bi ugotovili veljavnost svojih metod in rešitev.

Faza institucionalizacije – faza, v kateri učitelj neposredno posreduje institucionalno znanje. V nekaterih oblikah poučevanja, npr. predavanju, se lahko zgodi sama od sebe. V drugih oblikah, kot so zasnove v okviru Teorije didaktičnih situacij, je tesno povezana s predhodnimi fazami. V tej fazi se osebno znanje, ki so ga dosegli učenci, zgolj na novo formulira. Eksplicitno je prepoznano kot znanje, ki je usklajeno z uradnim znanjem, za katerega jamči stroka.

Didaktična pogodba – sklop medsebojnih pričakovanj med učitelji in učenci glede njihovih odgovornosti v konkretni didaktični situaciji (ali v delu le-te). Ta pogodba je običajno implicitna in zato lahko njene učinke zaznamo le v dejanjih učiteljev in učencev. Nekateri učinki so v okviru poučevanja matematike precej splošni in pogosti, na primer učenčevo vztrajanje, da mu mora učitelj priskrbeti odgovore, do katerih ni uspel takoj priti, ali pa učiteljeva nagnjenost k temu, da ustreže takšnemu vztrajanju na bolj ali manj prikrite načine, npr. z dajanjem »namigov« ali zreduciranjem prvotne naloge. Teorija didaktičnih situacij navaja in preučuje nekatere od najpogostejših tovrstnih učinkov. Učiteljem in raziskovalcem je v interesu, da se seznanijo s to klasifikacijo. Zainteresirani bralci naj si preberejo delo Brousseauja (1997), poglavji 1 in 5.

Didaktični inženiring – raziskovalna metodologija na osnovi kontroliranega oblikovanja zaporedij poučevanja in eksperimentiranja z njimi, ki uporablja interne potrditve na podlagi primerjave *a priori* in *a posteriori* analiz teh zaporedij. Vendar pa se že od njegovega nastanka v zgodnjih osemdesetih letih dalje izraz didaktični inženiring uporablja tudi za označevanje razvojnih dejavnosti, ki se nanašajo na oblikovanje izobraževalnih virov na podlagi rezultatov ali konstruktov raziskav in na delo didaktičnih inženirjev. (Vir: Encyclopedia of Mathematics Education).

Učenje matematike v realnem kontekstu

Realistična situacija – nanaša se na situacijo, ki je učencu »realna« v smislu, da se tiče objektov, pojmov itd., ki so mu poznani. Takšna situacija je učencem smiselna in jih zaradi tega spodbudi k razmišljanju, saj se navezuje na njihovo predznanje. Lahko je povezana z vsakdanjim (realnim) življenjem, vendar to ni nujno.

Bogata (struktura ali kontekst) – omogoča različne pristope ali rešitve, povezuje se z različnimi vidiki učenčevega znanja in je uporabna tudi izven situacije, v kateri smo jo uvedli.

Matematizacija – dejavnosti, ki jih izvaja matematik in vključujejo ustvarjanje aksiomatskih sistemov, formaliziranje, oblikovanje smiselnih mrež konceptov in procesov, konstruiranje algoritmov, prikazovanje in poenostavljanje itd.

Anti-didaktična inverzija – ko uporabimo rezultate dejavnosti matematikov kot izhodišče za poučevanje matematike.

Modeliranje v nastajanju – ustvarjanje miselnih shem konceptov in procesov, ki so povezani s problemsko situacijo, v mislih učenca. Modeli neformalne matematične dejavnosti se razvijejo v modele za matematično razmišljanje.

Vodeno raziskovanje – proces, v katerem učenci rekonstruirajo in razvijejo matematični koncept znotraj problemske situacije s pomočjo knjig, vrstnikov ali učitelja.

Horizontalna matematizacija – prehod ali modeliranje problema iz resničnega sveta v matematični diskurz.

Vertikalna matematizacija – razvoj metode ali teorije za reševanje matematičnega problema.

Didaktična fenomenologija – umetnost iskanja pojavov, kontekstov ali problemskih situacij, ki vabijo učence k temu, da bi jih uredili z matematičnimi sredstvi in k razvoju ciljno usmerjenih matematičnih konceptov.