

Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi

MATEMATIKA

Modra stožka (*Molinia caerulea* (L.) Moench)

Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi

MATEMATIKA

Mag. Mojca Suban
Silva Kmetič
Dr. Amalija Žakelj
Dr. Alenka Lipovec
Dr. Zlatan Magajna
Mag. Mateja Sirnik
Vesna Vršič
Polona Legvart
Andreja Perkovič
Damijana Čekada
Metka Flisar
Marija Magdič
Katja Kmetec
Ana Kodelja
Jerneja Bone
Mag. Sonja Rajh
Boštjan Repovž
Jože Senekovič

Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi

Matematika

Uredili:	mag. Mojca Suban, Silva Kmetič
Avtorji:	mag. Mojca Suban, Silva Kmetič, dr. Amalija Žakelj, dr. Alenka Lipovec, dr. Zlatan Magajna, mag. Mateja Sirnik, Vesna Vršič, Polona Legvart, Andreja Perkovič, Damijana Čekada, Metka Flisar, Marija Magdič, Katja Kmetec, Ana Kodelja, Jerneja Bone, mag. Sonja Rajh, Boštjan Repovž, Jože Senekovič
Strokovni pregled:	dr. Marko Razpet, Sonja Kosič, Mateja Peršolja, Davorka Pregl
Jezikovni pregled:	Tatjana Ličen
Izdal in založil:	Zavod RS za šolstvo
Predstavniki:	mag. Gregor Mohorčič
Urednici zbirke:	dr. Amalija Žakelj, mag. Marjeta Borstner
Tehnična urednica:	Alenka Štrukelj
Oblikovanje:	Irena Hlede
Postavitev:	Present d.o.o.

Objava na spletnem naslovu:

[http://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi_matematika.pdf](http://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/Posodobitve_pouka_v_osnovnošolski_praksi_matematika.pdf)

Druga izdaja

Ljubljana, 2013

Zbirka Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi je nastala v okviru projekta Posodobitev kurikularnega procesa na osnovnih šolah in gimnazijah v sklopu Posodobitev pouka na osnovnih šolah in gimnazijah.

Izid publikacije sta sofinancirala Evropski socialni sklad Evropske unije in Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport.



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

© Zavod Republike Slovenije za šolstvo, 2013

Vse pravice pridržane. Brez založnikovega pisnega dovoljenja gradiva ni dovoljeno reproducirati, kopirati ali drugače razširjati. Ta prepoved se nanaša tako na mehanske (fotokopiranje) kot na elektronske (snemanje in prepisovanje na karšenkoli pomnilniški medij) oblike reprodukcije, razen delov, kjer je to posebej označeno.

CIP – Kataložni zapis o publikaciji

Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

37.091.3:51(082)(0.034.2)

373.3.016:51(082)(0.034.2)

POSODOBITVE pouka v osnovnošolski praksi. Matematika [Elektronski vir] / [avtorji] Mojca Suban ... [et al.] ; [uredili Mojca Suban, Silva Kmetič]. - 2. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : Zavod RS za šolstvo, 2013

Način dostopa (URL): [http://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/Posodobitve pouka v osnovnošolskipraksi_matematika.pdf](http://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/Posodobitve_pouka_v_osnovnošolskipraksi_matematika.pdf)

ISBN 978-961-03-0181-3 (pdf)

1. Suban Ambrož, Mojca, 1971-

268455680

KAZALO

PREDGOVOR (<i>Mojca Suban, Silva Kmetič</i>)	11
PRIROČNIKU NA POT (<i>Mojca Suban</i>)	13
1 NOVOSTI V POSODOBLJENEM UČNEM NAČRTU	15
1.1 Novosti in posodobitve učnega načrta za matematiko (<i>Amalija Žakelj</i>)	17
1.1.1 Uvod	17
1.1.2 Novosti in posodobitve učnega načrta za matematiko	18
1.1.3 Kompetence	28
1.1.4 Sklep	29
1.2 Posebnosti razredne stopnje (<i>Alenka Lipovec</i>)	30
1.2.1 Načela pouka na razredni stopnji	30
1.2.2 Didaktična priporočila	34
1.3 Merjenje dolžine, mase in prostornine – razširitev didaktičnih priporočil (<i>Vesna Vršič</i>)	52
1.3.1 Razporejanje ciljev in vsebin pri načrtovanju vzgojno-izobraževalnega dela	52
1.3.2 Pristop k poučevanju vsebine Merjenje	57
1.4 Denarne enote – razširitev didaktičnih priporočil (<i>Vesna Vršič</i>)	63
1.4.1 Poznavanje denarnih enot: evro, cent	63
1.4.2 Branje in predstavitev denarnih vrednosti, zapisanih z enoimensko enoto in z decimalnim zapisom	64
1.4.3 Primerjanje in urejanje denarnih vrednosti	66
1.4.4 Zapisovanje denarnih vrednosti z decimalnim zapisom	68
1.4.5 Računanje z denarnimi vrednostmi	68
1.5 Deli celote – primer didaktične izpeljave v drugem razredu (<i>Polona Legvart</i>)	71
1.6 Proporcionalno sklepanje (<i>Alenka Lipovec</i>)	82
2 PROBLEMSKE NALOGE	85
2.1 Problemske naloge (<i>Amalija Žakelj</i>)	87
2.1.1 Uvod	87
2.1.2 Strategije reševanja problemov	89
2.1.3 Od modela do problema	93
2.1.4 Vrste problemov	95
2.1.5 Pomen taksonomij za načrtovanje in preverjanje ter ocenjevanje	102

2.2	Razvijanje problemskih znanj v različnih fazah pouka (<i>Mateja Sirnik</i>) ...	114
2.2.1	Uvod	114
2.2.2	Uvajanje novih pojmov z razvijanjem problemskih znanj	117
2.3	Primeri problemskih nalog	119
2.3.1	Človek, ne jezi se, 1. razred (<i>Andreja Perkovič</i>)	119
2.3.2	V trgovini z igračami, 2. razred (<i>Andreja Perkovič</i>)	125
2.3.3	Družinski izlet, 4. razred (<i>Damijana Čekada</i>)	130
2.3.4	Pustna povorka, 4. razred (<i>Metka Flisar</i>)	134
2.3.5	Rože za okenska korita, 5. razred (<i>Metka Flisar</i>)	141
2.3.6	Zanimiva trimestna števila, 6. razred (<i>Marija Magdič</i>)	149
2.3.7	Zanimiva trimestna števila, 7. razred (<i>Katja Kmetec</i>)	153
2.3.8	Igra s slamicami, 7. razred (<i>Katja Kmetec</i>)	158
2.3.9	Vsota zaporednih naravnih števil, 7., 9. razred (<i>Katja Kmetec</i>)	163
2.3.10	Kvadrati na geoplošči, 8. razred (<i>Katja Kmetec</i>)	169
2.3.11	Koza, 9. razred (<i>Marija Magdič</i>)	175
2.3.12	Vsota zaporednih naravnih števil, 9. razred (<i>Ana Kodelja</i>)	179
3	VZORCI	185
3.1	Vzorci (<i>Alenka Lipovec</i>)	187
3.1.1	Velike ideje	187
3.1.2	Ponavljajoči se vzorci	187
3.1.3	Rastoči vzorci	190
3.1.4	Iskanje relacij	191
3.2	Vzorci v raziskavi TIMSS (<i>Silva Kmetič</i>)	194
3.2.1	Vzorci v četrtem razredu	194
3.2.2	Vzorci v osmem razredu	199
3.3	Vzorci in jezik (<i>Silva Kmetič</i>)	204
3.4	Vzorci in vrednotenje (<i>Silva Kmetič</i>)	211
3.5	Pristop k vpeljevanju vzorcev in zaporedij v pouk v osmem razredu (<i>Jerneja Bone</i>)	219
3.5.1	Uvod	219
3.5.2	Primeri nalog pri različnih sklopih	222
3.5.3	Celostni pogled na vpeljevanje vzorcev v pouk	229
3.5.4	Ocenimo naloge z vzorci	230
3.5.5	Sklep	234

3.6	Primeri vzorcev	236
3.6.1	Obravnava vzorcev v osmem razredu (<i>Katja Kmetec</i>)	236
3.6.2	Vzorci in preiskovanja (<i>Silva Kmetič</i>)	246
3.6.3	Preizkušanje z ulomki (<i>Marija Magdič</i>)	252
3.6.4	Vzorci v fiziki (<i>Ana Kodolja</i>)	259
3.7	Različni načini reševanja nalog z vzorci (<i>Sonja Rajh</i>)	262
4	MATEMATIČNO MODELIRANJE V OSNOVNI ŠOLI	291
4.1	Matematično modeliranje v osnovni šoli (<i>Zlatan Magajna</i>)	293
4.1.1	Od besedilnih nalog do modeliranja	293
4.1.2	Matematično modeliranje	294
4.1.3	Modeliranje v osnovni šoli	299
4.1.4	Postopek modeliranja v osnovni šoli	299
4.1.5	Dejavnost modeliranja	302
4.2	Matematično modeliranje v geometriji (<i>Mojca Suban</i>)	305
4.3	Primeri matematičnega modeliranja	309
4.3.1	Tloris sobe (<i>Boštjan Repovž</i>)	309
4.3.2	Število čistilk (<i>Katja Kmetec</i>)	314
4.3.3	Površina človeškega telesa (<i>Katja Kmetec</i>)	320
4.3.4	Zbiranje papirja (<i>Boštjan Repovž</i>)	326
4.3.5	Najuspešnejša država na olimpijskih igrah (<i>Jože Senekovič</i>)	332
5	OCENJEVANJE	341
5.1	Preverjanje matematičnega znanja s pisnimi preizkusi (<i>Zlatan Magajna</i>)	343
5.1.1	Sestava pisnega preizkusa v šestem razredu (<i>Marija Magdič</i>)	352
5.1.2	Pisni preizkus za osmi razred (<i>Katja Kmetec</i>)	357
5.2	Naloge na različnih zahtevnostnih ravneh (<i>Jerneja Bone</i>)	362
5.2.1	Standardi znanja in cilji	362
5.2.2	Model stopnjevanja težavnosti nalog, ki preverjajo isti cilj	362
5.2.3	Področja spremljanja	365
5.2.4	Predstavitev priloge	368
5.2.5	Vključevanje nalog različnih težavnosti v vse faze pouka	369
5.3	Primeri nalog na različnih zahtevnostnih ravneh (<i>Zlatan Magajna, Katja Kmetec, Jerneja Bone</i>)	370

6	VREDNOTENJE IN SAMOVREDNOTENJE ZNANJA PRI MATEMATIKI	377
6.1	Spremljanje in samovrednotenje znanja učencev pri matematiki na razredni stopnji (<i>Vesna Vršič</i>)	379
6.1.1	Alternativni načini preverjanja in ocenjevanja	379
6.1.2	Namen procesa vrednotenja in samovrednotenja znanja v praksi	380
6.1.3	Delo učencev po postajah in samopreverjanje	381
6.1.4	Samovrednotenje	388
6.1.5	Sklep	389
6.2	Vrednotenje in samovrednotenje znanja pri matematiki (<i>Mojca Suban</i>)	391
6.2.1	Uvod	391
6.2.2	Kaj pokaže TIMMS 2011?	391
6.2.3	Samovrednotenje	392
6.2.4	Samoregulacija in samovrednotenje s psihološkega vidika	394
6.2.5	Sklep	395
6.3	Primeri preverjanja s samovrednotenjem	397
6.3.1	Naravna števila do milijona, 5. razred (<i>Metka Flisar</i>)	397
6.3.2	Trikotnik, štirikotnik, večkotnik – sprotno preverjanje s samovrednotenjem, 5. razred (<i>Metka Flisar</i>)	401
6.3.3	Seštevanje in odštevanje racionalnih števil, 8. razred (<i>Jože Senekovič</i>)	405

KAZALO ZGOŠČENKE

1 PROBLEMSKE NALOGE

Človek, ne jezi se, 1. razred (*Andreja Perkovič*)

Učni list: Človek, ne jezi se! (.pdf; .docx)

V trgovini z igračami, 2. razred (*Andreja Perkovič*)

Delovni list 1: Cenik igrač (.pdf; .docx)

Delovni list 2: Cenik igrač (.pdf; .docx)

Delovni list 3: V trgovini z igračami (.pdf; .docx)

Delovni list 4: V trgovini z igračami (.pdf; .docx)

Delovni list 5: Katere igrače lahko kupi Nejc? (.pdf; .docx)

Delovni list 6: Katere igrače lahko kupi Nejc? (.pdf; .docx)

Družinski izlet, 4. razred (*Damijana Čekada*)

Delovni list 1: Družinski izlet (.pdf; .docx)

Delovni list 2: Družinski izlet (.pdf; .docx)

Delovni list 3: Družinski izlet (.pdf; .docx)

Delovni list 4: Družinski izlet (.pdf; .docx)

Rešitve delovnih listov (.pdf; .docx)

Zanimiva trimestna števila, 6. razred (*Marija Magdič*)

Učni list: Čarobno število (.pdf; .docx)

Zanimiva trimestna števila, 7. razred (*Katja Kmetec*)

Učni list 1: Čarovniški trik (.pdf; .docx)

Dodatne naloge: Skrivnosti devetice (.pdf; .docx)

Dodatne naloge 2: Nekaj čarovniških trikov z uporabo lastnosti devetice (.pdf; .docx)

Igra s slamicami, 7. razred (*Katja Kmetec*)

Priloga 1: Igra s slamicami (.pdf; .docx)

Kvadrati na geoplošči, 8. razred (*Katja Kmetec*)

Učni list 1: Problemi s kvadrati (.pdf; .docx)

2 VZORCI

Obraznava vzorcev v osmem razredu (*Katja Kmetec*)

Priloga 1: Trikotnik Sierpińskega (.pdf; .docx)

Priloga 2: Kochova snežinka (.pdf; .docx)

Priloga 3: Dodatek k prilogi 2 (.pdf)

Priloga 4: Rešitve učnega lista (.pdf; .docx)

Preizkušanje z ulomki (*Marija Magdič*)

Učni list: Preizkušanje z ulomki (.pdf; .docx)

Različne naloge z vzorci (*Mojca Suban*)

Učni list: Različne naloge z vzorci (.pdf; .docx)

Rešitve učnega lista: Različne naloge z vzorci (.pdf; .docx)

Razišči vzorce različnih zaporedij (*Mojca Suban*)

Učni list: Razišči vzorce različnih zaporedij (.pdf; .docx)

Nalogi z vzorci (*Ana Kodolja*)

Učni list: Nalogi z vzorci (.pdf; .docx)

3 MATEMATIČNO MODELIRANJE V OSNOVNI ŠOLI

Matematično modeliranje v geometriji (*Mojca Suban*)

Predloga v Geogebra (.ggb)

Slika posode (.jpg)

Število čistilk (*Katja Kmetec*)

Učni list: Število čistilk (.pdf; .docx)

4 OCENJEVANJE

Sestava pisnega preizkusa v šestem razredu (*Marija Magdič*)

Mrežni diagram (.pdf)

Preizkus znanja o decimalnih številih (.pdf; .docx)

Točkovnik (.pdf)

Pisni preizkus za osmi razred (*Katja Kmetec*)

Pisni preizkus znanja: Racionalna števila (.pdf; .docx)

Poročilo o mrežnem preizkusu znanja iz matematike – mrežni diagram (.pdf)

Povzetek mrežnega diagrama (.pdf)

Točkovnik (.pdf)

Primeri nalog na različnih zahtevnostih ravneh (*Zlatan Magajna, Katja Kmetec, Jerneja Bone*)

Priloga 2: Sklop Računske operacije z ulomki (s primeri nalog) (.pdf; .docx)

Priloga 3: Sklop Računske operacije in njihove lastnosti (s primeri nalog) (.pdf; .docx)

Priloga 4: Sklop Izrazi (s primeri nalog) (.pdf; .docx)

Priloga 5: Sklop Enačbe in neenačbe (s primeri nalog) (.pdf; .docx)

5 VREDNOTENJE IN SAMOVREDNOTENJE ZNANJA PRI MATEMATIKI

Spremljanje in samovrednotenje znanja učencev pri matematiki na razredni stopnji (*Vesna Vršič*)

Učni list 1: Merjenje dolžin (.pdf; .docx)

Učni list 2: Merjenje mase (.pdf; .docx)

Učni list 3: Merjenje tekočin (.pdf; .docx)

List za samovrednotenje (.pdf; .docx)

Naravna števila do milijona, 5. razred (*Metka Flisar*)

Priloga 1: Predstavitev učnih listov A, B in C (.pdf)

Priloga 2: Učni list A (.pdf; .docx)

Priloga 3: Učni list B (.pdf; .docx)

Priloga 4: Učni list C (.pdf; .docx)

Priloga 5: Obrazec za samoocenjevanje (.pdf; .docx)

Priloga 6: Rešitve učnih listov (.pdf; .docx)

Trikotnik, štirikotnik, večkotnik, 5. razred (*Metka Flisar*)

Priloga 1: Predstavitev učnih listov A in B (.pdf)

Priloga 2: Učni list A (.pdf; .docx)

Priloga 3: Učni list B (.pdf; .docx)

Priloga 4: Obrazec za samoocenjevanje (.pdf; .docx)

Priloga 5: Rešitve učnih listov (.pdf; .docx)

Seštevanje in odštevanje racionalnih števil, 8. razred
(*Jože Senekovič*)

Priloga 1: Delovni listi z nalogami (.pdf; .docx)

Priloga 2: Rešitve delovnih listov z nalogami (.pdf; .docx)

Legenda:



Dovoljeno kopiranje in reproduciranje gradiv za potrebe pouka.



Gradivo je dostopno na priloženi zgoščenki.

Predgovor

Mag. Mojca Suban, Silva Kmetič

Priročnik je nastal v okviru projekta Posodobitev kurikularnega procesa na osnovnih šolah in gimnazijah, v sklopu Posodobitev pouka na osnovnih šolah in gimnazijah in dejavnosti Posodabljanje pouka na osnovnih šolah na Zavodu RS za šolstvo. Je rezultat skupnega dela članov *Predmetne razvojne skupine za matematiko* v osnovni šoli in mentorskih učiteljev. Namenjen je strokovni podpori učiteljem razrednega pouka in predmetnim učiteljem matematike pri uvajanju novosti iz učnega načrta za matematiko v prakso.

Priročnik je zasnovan kot prepletanje teorije in prakse, upoštevajoč, da je teorija brez prakse mrtva, praksa brez teorije pa slepa (Kant). Tako je mogoče prebirati in spoznavati teoretična izhodišča posameznih ključnih novosti iz učnega načrta, ta pa so podprta in oplemenitena z ugotovitvami in refleksijami mentorskih učiteljev po izvedbi v razredu.

Učitelji so bili za uvajanje novosti iz učnega načrta deležni (pre)malo formalnega izobraževanja, zato je namen tega priročnika tudi v tem, da nadomesti nekatere zamujene priložnosti. Kamenček, ki ga bo k procesu posodobitve pouka matematike zares prispeval, pa bo svojo prostornino pokazal šele čez nekaj časa, ko bomo imeli priložnost za evalvacijo prehojene poti.

Priročniku na pot

Mag. Mojca Suban

Pri snovanju in oblikovanju koncepta priročnika sta nas vodili dve osnovni izhodišči:

- pripraviti gradivo, ki bo uporabno in koristno za poučevanje matematike po celotni osnovnošolski vertikali, tako za učitelje razrednega pouka kot za učitelje matematike. Tako ni mišljeno, da bi učitelj prebiral zgolj tisti del, ki se neposredno veže na razred, v katerem trenutno poučuje. Zaželeno je branje priročnika kot celote, ki kot tak oriše celovito sliko posodobitev pouka matematike;
- vključiti teoretične prispevke in primere iz prakse ter jih preplesti tako, da bodo drug drugega vzajemno podpirali in osmišljali. Veliko primerov in zgledov se da najti že v teoretičnih delih priročnika, posebno vrednost pa predstavljajo prispevki iz prakse. Ti so zasnovani tako, da niso zgolj zamišljeni in nepreizkušeni scenariji, ampak so izvedeni v razredu. Refleksije po izvedbah so dragoceni in koristni zapisi, ki bodo morda kakšnemu učitelju prihranili nekaj dela in časa. Omeniti je treba, da je poročanje o izvedbah zelo iskreno in nepotvorjeno. Avtorji tako zapišejo, kaj jim je dobro uspelo, pa tudi česa jim ni uspelo realizirati, čemu se je bolje izogniti, in kaj bi v naslednji izvedbi izboljšali.

Ogrodje priročnika poleg uvodnega poglavja o novostih predstavlja pet vsebinskih stebrov: problemske naloge, vzorce, matematično modeliranje, ocenjevanje ter vrednotenje in samovrednotenje znanja.

Uvodno poglavje v prvem prispevku prinaša celovito sliko novosti in posodobitev učnega načrta. Predstavljena sta koncept in struktura učnega načrta s ključnimi vsebinskimi in didaktičnimi poudarki za njegovo razumevanje. V nadaljevanju tega poglavja se posvetimo posebnostim razredne stopnje z didaktičnimi priporočili. Podrobneje so didaktična priporočila razdelana za merjenje dolžine, mase in prostornine, ki navadno učencem povzročajo precej zadreg, ter denarne enote. Nadaljujemo s primerom iz prakse, primerom didaktične izpeljave o delih celote v drugem razredu. Poglavje končuje prispevek o proporcionalnem sklepanju, ki je bogat z nalogami, ki jih je mogoče rešiti z znanjem na razredni stopnji.

Uvod v problemske naloge opozarja na pomen problemskih znanj, prinaša nabor problemskih nalog, povzame taksonomije in poudari njihov pomen za načrtovanje in preverjanje ter ocenjevanje znanja. Temu sledi razmislek o razvijanju problemskih znanj v različnih fazah pouka, ki se osredotoča na sklop o geometrijskih pojmi (krog, krožnica, krožni izsek, krožni lok) pri temi o geometriji in merjenju. V nadaljevanju nanizamo primere problemskih nalog iz prakse po celotni vertikali. Vsi prispevki iz prakse so opremljeni z opisom gradiva, ki v preglednici prinaša osnovne informacije o predstavljeni temi: avtorja, šolo, učno temo, učni sklop, razred, potreben čas za izpeljavo, učne cilje in standarde, medpredmetne povezave, oblike in metode dela, didaktične pripomočke, učno in informacijsko tehnologijo, potrebno predznanje, dejavnosti učencev, faze učnega procesa, prilagoditve za učence s posebnimi potrebami, dodatna opažanja. Ponekod je morda katera od postavk izpuščena po presoji avtorja. Ključni element v preglednici je refleksija (z vidika učitelja, učenca), ki je po potrebi v prispevku še razširjena.

Poglavje o vzorcih predstavlja bogato zbirko primerov, razdelanih in podkrepljenih s teoretičnimi izhodišči. Med drugim je posebej obravnavan vidik jezika in vrednotenja ter pristop k

vpeljevanju vzorcev in zaporedij v pouk v osmem razredu. Učiteljem je na voljo kar nekaj učnih listov (z rešitvami), ki so na zgoščenki, ki je priloga tega priročnika.

Tudi pri matematičnem modeliranju je zasnova podobna: teoretičnemu uvodu sledijo preizkušeni primeri iz prakse, ki so velikokrat ilustrirani s primeri izdelkov učencev. Izdelki učencev so v splošnem pogosta sestavina prispevkov kot zgovorna dokazila izvedenih dejavnosti.

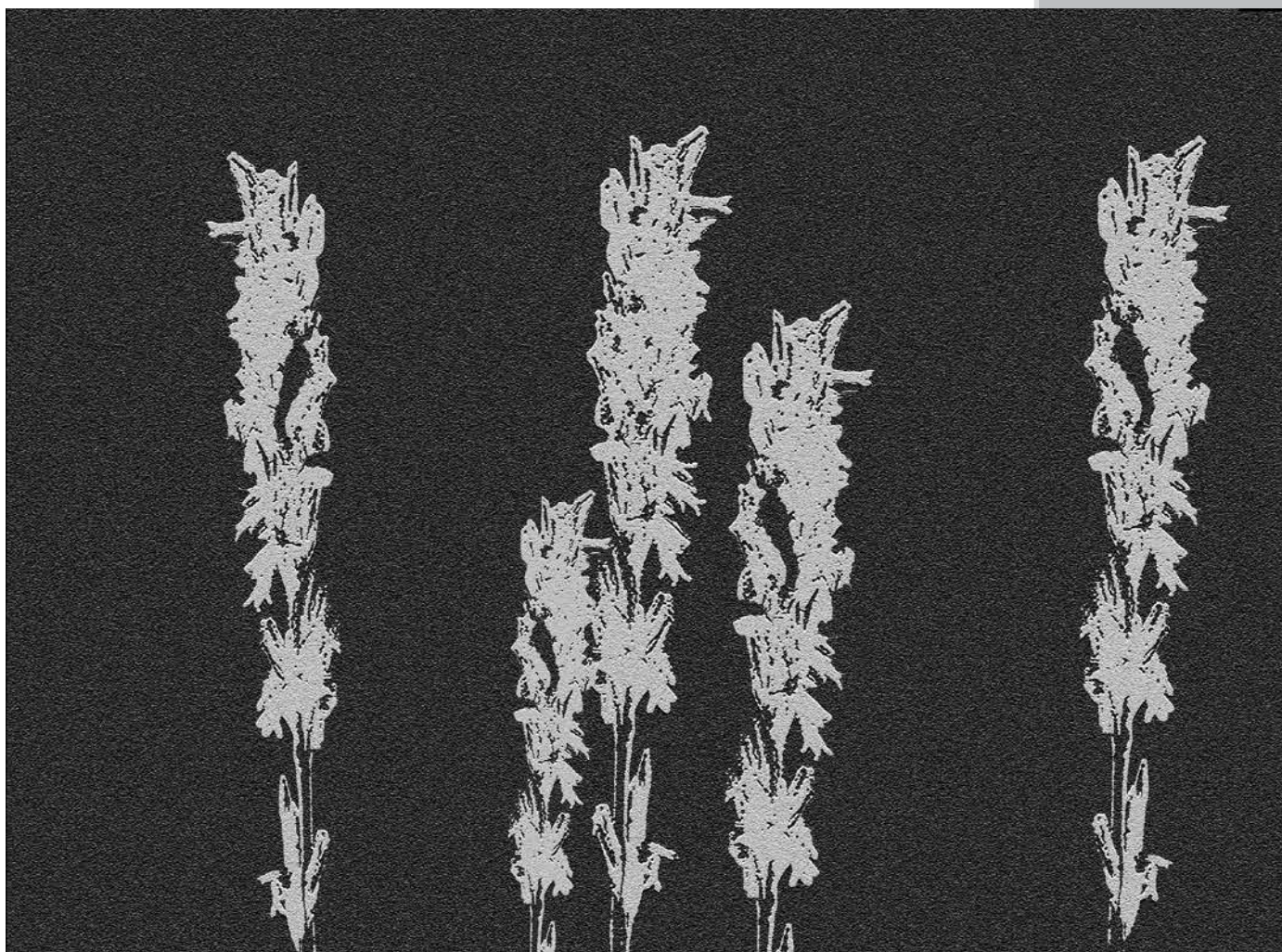
Ocenjevanje je v priročniku omejeno na ocenjevanje s pisnimi preizkusi. V prvem prispevku je podrobno razdelan in predstavljen postopek izdelave pisnega preizkusa, temu pa sledita dva primera pisnih preizkusov v šestem in osmem razredu. Pri pripravi nalog na različnih zahtevnostnih ravneh bo v pomoč obširen nabor nalog za več vsebinskih sklopov.

Končujemo s poglavjem o vrednotenju in samovrednotenju znanja pri matematiki. O tem procesu spregovorita dva teoretična prispevka, temu pa sledijo primeri iz petega in osmega razreda.

Gotovo bi bilo treba podrobneje spregovoriti tudi o drugih temah, npr. o razvijanju bralne pismenosti, učinkoviti in smiselni uporabi informacijsko-komunikacijske tehnologije ali drugih oblikah vrednotenja znanja, vendar bi bilo vsega za en priročnik preveč. Iskali bomo še druge možnosti in priložnosti, da se jim posvetimo in jih osvetlimo.

Upamo, da bo predstavljeno gradivo v pomoč, podporo in izziv vsem učiteljem, ki so pred nalogo, da novosti in posodobitve vnesejo v šolsko prakso.

Novosti v
posodobljenem
učnem načrtu



1.1 Novosti in posodobitve učnega načrta za matematiko

dr. Amalija Žakelj, Zavod RS za šolstvo

1.1.1 Uvod

Učni načrt za matematiko iz leta 1998 je bil posodobljen leta 2008 kot nadgradnja prenove iz leta 1998, na podlagi predhodnih analiz in v skladu z načeli in cilji posodabljanja (Smernice, 2007): posodobiti cilje in vsebine ter didaktične pristope glede na razvoj znanosti; povečati fleksibilnost, odprtost in izbirnost na ravni predmetov in tudi širše; premik od vsebinskega načrtovanja k učno-ciljnemu in procesnorazvojnemu načrtovanju, učenju in poučevanju; uskladiti cilje in vsebine znotraj predmetov in med predmeti po celotni vertikali od osnovne šole do gimnazije; vključiti cilje za razvoj metakognitivnih sposobnosti, kritičnega in ustvarjalnega mišljenja, vseživljenjskega znanja in spretnosti; povečati odgovornost in samoregulacijo šole in učitelja.

Leta 2011 so bile narejene redakcijske dopolnitve posodobljenega učnega načrta iz leta 2008: pričakovane dosežke/rezultate so zamenjali standardi znanja, operativni cilji so zapisani kot *obvezni* in *izbirni*, in ne kot splošna in posebna znanja, medpredmetne povezave so bile vključene v didaktična priporočila.

Namen poučevanja matematike

Matematika je s številnimi izobraževalno-informativnimi, funkcionalno-formativnimi in vzgojnimi nalogami eden izmed temeljnih predmetov v osnovni šoli (Učni načrt, Matematika 2011). Pouk matematike je namenjen graditvi pojmov in povezav, spoznavanju ter učenju postopkov, ki posamezniku omogočajo vključitev v sistem (matematičnih) idej in posledično vključitev v kulturo, v kateri živimo. Osnovnošolski pouk matematike obravnava temeljne in za vsakogar pomembne matematične pojme, in to na načine, ki so usklajeni z učenčevim kognitivnim razvojem, s sposobnostmi, z osebnostnimi značilnostmi in njegovim življenjskim okoljem (npr. narava kot vir za matematično ustvarjanje in raziskovanje). Pri pouku matematike spodbujamo različne oblike mišljenja, ustvarjalnost, formalna znanja in spretnosti ter učencem omogočamo, da spoznajo praktično uporabnost in smiselnost učenja matematike (prav tam, str. 4).

Splošni cilji pouka matematike

S splošnimi cilji sta natančneje opredeljena namen učenja in poučevanja matematike. Učenci/učenke se pri pouku matematike učijo abstraktno-logičnega mišljenja, geometrijskih predstav, povezovanja znanja znotraj matematike in širše; spoznavajo uporabnost matematike v vsakdanjem življenju (*učijo se prepoznavati vprašanja, na katera matematika lahko ponudi odgovor; postavljati vprašanja, ki izhajajo iz življenjskih situacij ali pa so vezana na raziskovanje matematičnih problemov*); spoznavajo pomen matematike kot univerzalnega jezika in orodja; učijo se izražati v matematičnem jeziku, ustno, pisno ali v drugih izraznih oblikah; matematiko spoznavajo kot proces, razvijajo kreativnost in ustvarjalnost ter zaupanje v lastne matematične sposobnosti; spoznavajo in uporabljajo različne informacijsko-komunikacijske tehnologije (IKT) kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov.

Novosti in posodobitve

Posodobljeni učni načrt za matematiko za osnovno šolo (2008) prinaša kakovostne didaktične in vsebinske posodobitve pouka matematike. Glavne posodobitvene novosti so: aktualizacija vsebin in didaktičnih pristopov ter njihova vertikalna graduacija; odprtost in izbirnost učnega načrta na ravni obveznih in izbirnih ciljev in vsebin; medpredmetno povezovanje kot pot do kompleksnih znanj; matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami; uporaba informacijsko-komunikacijske tehnologije (IKT); matematična in druge kompetence idr. Novosti in posodobitve bi lahko združili v nekaj ključnih področjih:

- Posodobitev obstoječih ciljev in vsebin ter premiki ciljev in vsebin po vertikali.
- Obvezni in izbirni cilji: opredelitev obveznih in izbirnih ciljev.
- Vzorci: sistematično, po celotni vertikali so dodani vzorci kot didaktični pristop za vpeljavo in razumevanje algebrskih struktur.
- Razvoj bralne pismenosti: sistematično, po vsej vertikali so zapisani cilji za razvoj bralne pismenosti.
- V vseh razredih oz. v vseh treh vzgojno-izobraževalnih obdobjih (VIO) je v okviru Drugih vsebin dodan tretji sklop Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami. Cilji in vsebine preostalih dveh sklopov Logike in jezika ter Obdelave podatkov so dopolnjeni in enakomerno razporejeni po celotni vertikali.
- Razdelek Medpredmetne povezave prinaša vrsto konkretnih predlogov dejavnosti za uresničevanje ciljev medpredmetnega povezovanja.
- Matematična in druge kompetence: skozi cilje in vsebine so vključene kompetence (Poročilo Evropskega parlamenta in Sveta Evropske unije z dne 18. 12. 2006, Uradni list EU, št. 394/10).
- Informacijsko-komunikacijska tehnologija (IKT) je v pouk matematike vključena kot sredstvo za razvoj matematičnih pojmov ali kot učni pripomoček in tudi kot komunikacijsko sredstvo.

1.1.2 Novosti in posodobitve učnega načrta za matematiko

Posodobitev ciljev in vsebin

Razvoj številskih predstav v prvem obdobju temelji na praktičnih dejavnostih. V prvem razredu se obravnavata seštevanje in odštevanje v množici naravnih števil do 20, vključno s številom 0, vendar prehod čez desetico obravnavamo ob konkretnih pripomočkih s štetjem. Računske operacije do 100 so v drugem razredu nadgradnja znanja iz prvega razreda: seštevati in odštevati v množici naravnih števil do 100 (prehod: s pomočjo didaktičnih pripomočkov oziroma ponazoril). V (konkretni) matematični situaciji uporabijo seštevanje in odštevanje kot nasprotni operaciji. V tretjem razredu učenci usvojijo seštevanje in odštevanje do 1000 s pisnim algoritmom, kar učencem olajša računanje. S tem se učitelj lahko posveti znanjem višjih taksonomskih stopenj.

V drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju razvijajo številске predstave in spoznavajo odnose med števili v množici naravnih in racionalnih števil ter uporabljajo računske zakone.

V tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju usvojijo številske predstave in računske operacije v množici realnih števil, spoznajo odnose med številiškimi množicami, usvojijo osnove linearne funkcije, formalno (z uporabo pravil) rešujejo linearne enačbe, uporabljajo odstotni (procentni) račun, premo in obratno sorazmerje v problemskih situacijah, usvojijo temeljno znanje o algebrskih izrazih.

Žepno računalno začnemo uporabljati po usvojitvi osnovnih računskih operacij pri računanju v množici celih števil. Učenci naj do konca tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja usvojijo računske operacije in vrstni red izvajanja računskih operacij v množici racionalnih števil. Pri obravnavi lahko uporabljamo različne pristope. Vsekakor pa je pomembno, da se izvajanje računskih operacij do smiselne meje tudi avtomatizira.

Za povezovanje znanja in potreb pri fiziki in kemiji je vpeljana potenca z negativnim eksponentom a^{-n} , $n \in \mathbb{N}$ (poznajo zapis $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$). Z obravnavo pojmov identične in ekvivalentne enačbe omogočamo dovolj zgođen pristop k sistematičnemu reševanju linearnih enačb z eno neznanko.

Z vpeljavo denarne enote evro je postalo nujno potrebno, da učenci dovolj zgodaj usvojijo ravnanje z nacionalno valuto. Hkrati z uporabo denarnih enot razvijamo odnos do različnih zapisov denarnih vrednosti. Brati in razumeti pomen denarnih vrednosti se naučijo v prvem VIO. Na ta način je omogočen transfer znanja na branje decimalnih zapisov drugih količin. Razumevanje delov celote nadgradijo z enostavnimi zapisi z ulomki.

Otroci s praktičnimi izkušnjami doživljajo tudi prostor. Tako razvijajo občutek za velikost prostora in potrebo po merjenju prostora. V drugem razredu učenci ocenjujejo in merijo dolžino, maso in prostornino z nestandardnimi in standardnimi enotami.

Sistematično, skozi vsa VIO, se učijo znanj o obdelavi podatkov. V prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju se učijo iskanja potrebnih podatkov iz preglednic in prikazov ter sami predstavljajo podatke v preglednicah in s prikazi, v drugem obdobju uporabljajo orodja za zbiranje in predstavitev podatkov, v tretjem obdobju znanje o uporabi orodij za obdelavo podatkov še nadgradijo, razvijajo kritičen odnos do njihove uporabe, uporabljajo merila za sredino in razpršenost, na primerih spoznajo statistično verjetnost.

Izbirni cilji in vsebine

Obvezni cilji in vsebine so opredeljeni kot znanja, potrebna za splošno izobrazbo in so namenjena vsem učencem, učitelj jih mora obvezno obravnavati. *Izbirni cilji in vsebine* opredeljujejo dodatna ali poglobljena znanja, ki jih učitelj obravnava glede na zmožnosti in interese učencev.

V nadaljevanju navajamo izbirne cilje v posameznih razredih. Izbirne cilje učitelj izbere glede na interese učencev in glede na njegovo strokovno presojo, v sodelovanju z učenci. V prvem VIO takih ciljev in vsebin ni, priporoča pa se premišljena izbira didaktičnih pristopov in prilaganje zahtevnosti obravnave.

Četrty razred

- zapisujejo in berejo naravna števila, večja od 10 000;
- na modelih in na sliki prepoznajo ekvivalentne zapise delov celote (npr. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.)

Peti razred

- na modelih in na sliki prepoznajo dele celote, ki so večji od celote, in jih zapišejo v matematični obliki;
- (npr. ena torta in pol: $1\frac{1}{2}$; 2 jabolki in četrt: $2\frac{1}{4}$);
- s pomočjo modelov in slike seštevajo in odštevajo dele celote;
- oblikujejo vzorce s premiki in vrteži;
- zapisujejo in berejo števila, večja od milijona;
- prepoznajo življenjske situacije, kjer količine izrazimo z negativnimi merskimi števili (odčitati temperaturo na termometru in jo zapisati, npr. -6°C).

Šesti razred

- s pomočjo modelov (ne računsko) in slike seštevajo in odštevajo dele celote;
- oblikujejo vzorce s premiki, vrteži in z zrcaljenjem;
- grafično (koti le v stopinjah) in računsko določijo vsoto in razliko kotov;
- *narišejo krožnici v različnih medsebojnih legah;
- *krožnici v različnih medsebojnih legah povežejo in opišejo s središčno razdaljo;
- prepoznajo življenjske situacije, kjer količine izrazimo z negativnimi (decimalnimi) merskimi števili (npr. negativno stanje na bančnem računu).

Sedmi razred:

- poznajo in uporabljajo znamenite točke trikotnika pri načrtovalnih nalogah;
- poznajo in uporabljajo težišče, težiščnico, polmer včrtanega in očrtanega kroga trikotnika pri načrtovanju trikotnika;
- uporabijo pravila za deljivost s 4, z 8 in z 10^n , n je naravno število;
- prepoznajo življenjske situacije, kjer količine, zapisane z negativnim decimalnim zapisom, zapišejo z negativnim ulomkom.

Osmi razred:

- izračunajo dolžino krožnega loka in ploščino krožnega izseka z uporabo obrazcev;
- usvojijo pojem osnega preseka stožca in rešijo s tem povezane naloge;
- opišejo kroglo;
- rešijo naloge, povezane s površino in prostornino krogle;
- spoznajo valj in stožec kot vrtenini;

- delno korenijo;
- racionalizirajo imenovalec ulomka.

Deveti razred:

- izpeljejo pravilo za računanje kvadrata dvočlenika;
- razstavijo izraz na faktorje;
- razširijo, krajšajo algebrske ulomke;
- množijo in delijo algebrske ulomke;
- seštevajo in odštevajo algebrske ulomke z enočlenikom v imenovalcu;
- rešujejo algebrske enačbe;
- zapišejo ustrezna funkcijska zapisa: $f(x) = kx$ in $f(x) = \frac{k}{x}$;
- zapišejo ustrezne funkcijske predpise s premim in obratnim sorazmerjem;
- rešijo preproste razcepne enačbe;
- rešijo linearno enačbo s parametri in obravnavajo rešitev glede na dane zahteve;
- rešijo sistem linearnih enačb.

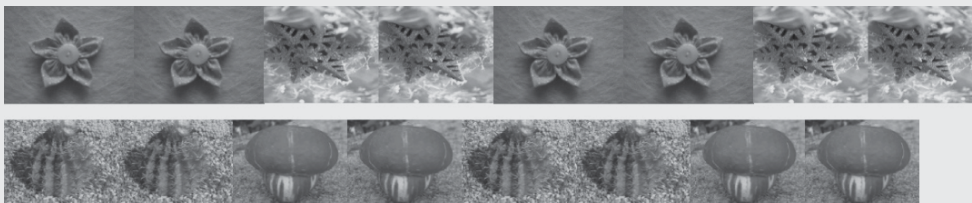
Vzorci

Sistematično, po celotni vertikali so dodani vzorci kot didaktični pristop za vpeljavo in razumevanje algebrskih struktur. Vzorci vpeljujejo z oblikovanjem in s prepoznavanjem pravil v vzorcih (npr.: geometrijski, slikovni, glasovni vzorci) in z oblikovanjem številskih zaporedij (prepoznavanje in oblikovanje pravil v številskih zaporedjih). Učenci s samostojnim oblikovanjem različnih vzorcev razvijajo ustvarjalnost; z opazovanjem, ugotavljanjem pravilnosti, zakonitosti se učijo posploševanja in zapisovanja algebrskih izrazov.

Primeri

Vzorci se pojavljajo v matematiki pa tudi v vsakdanjem življenju.

1. Učenci spoznajo, da se isti vzorec lahko pojavi v *številnih* različnih oblikah. Npr.:



2. Spoznajo, da je vzorec  z enakim pravilom kot glasovni vzorec ko-ko-dak-ko-ko-dak.

S tem postavljajo temelje ugotovitvi, da imajo lahko zelo različne situacije enake matematične lastnosti. Ugotovitev, da lahko prej omenjena vzorca opišemo v obliki »aabaab«, je za učence prvi uvod v algebro.

Vzorke oblikujejo tudi v sklopu Transformacije, in sicer z vrteži in z zrcaljenjem. V osmem in devetem razredu ne predvidevamo novih ciljev v sklopu Transformacij. Znanja tega vsebinskega sklopa nadgrajujemo z uporabo pri obravnavi vzorcev, geometrijskih likov in teles.

Razvoj bralne pismenosti

V vseh treh razredih poudarjeno razvijamo tehnike branja in pojasnjevanje prebranega. V vseh VIO se skozi cilje in vsebine prepletajo cilji za razvoj bralne pismenosti: učenci razvijajo natančno in pravilno izražanje; bralne strategije; razvijajo bralne sposobnosti: bralno razumevanje, odnos do branja, zanimanje za branje. Ob uporabi učbenika in obravnavi besedilnih nalog razvijajo bralno pismenost in se izpopolnjujejo v rabi že pridobljenih bralnih strategij, ki jim omogočajo razumevanje matematičnega besedila. Branje z razumevanjem, samostojno oblikovanje vprašanj in ciljev raziskovanja, izpisovanje bistvenih trditev in podatkov, razprave o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi, prevajanje besedilnih nalog v različne sheme (enačbe, diagrame, formule, algebrske izraze, geometrijske konstrukcije itd.) ter podobni preiskovalni pristopi omogočajo učencem uspešnejše reševanje besedilnih nalog. Matematična pravila in definicije naj uporabljajo na besedni in simbolni ravni. Če je le mogoče in smiselno, branje besedila ali reševanje problema dopolnimo z dejavnostjo, ki navaja učence na razlago in razumevanje prebranega. Učenci naj utemeljijo postopke dela, analizirajo rešitev, se ustno in pisno izražajo, narišejo skico, pripravijo model (papir, vrvico idr.). Rešujejo naj take probleme, ki imajo vnaprej predvidene rešitve (zaprti problemi), ali probleme, ki omogočajo različne rešitve (odprti problemi).

Druge vsebine

V vseh razredih oz. v vseh VIO se pojavljajo sklopi: Logika in jezik, Obdelava podatkov, Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami. Sklopa Logika in jezik in Obdelava podatkov sta bila že v učnem načrtu iz leta 1998, sklop Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami je novost v posodobljenem učnem načrtu. Cilji in vsebine prvih dveh sklopov so glede na učni načrt iz leta 1998 dopolnjeni in enakomerno razporejeni po celotni vertikali, sklop Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami je v učni načrt vključen na novo. Pri uresničevanju ciljev sklopov dejavnosti izbiramo tako, da učenci znanje med seboj povezujejo in dopolnjujejo. Npr. pri reševanju problemov z življenjskimi situacijami problem zastavimo tako, da učenci razvijajo tako bralne sposobnosti, kot se učijo tehnik dela s podatki.

Globalni cilji vseh treh sklopov po VIO so:

Učenci v prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju: razvijajo natančno in pravilno izražanje; se učijo iskanja potrebnih podatkov iz preglednic in prikazov ter sami predstavljajo podatke v preglednicah in s prikazi; razvijajo problemsko občutljivost oziroma zaznavo problema v matematičnih okoliščinah in vsakdanjem življenju; v povezavi s slovenščino razvijajo bralne sposobnosti; preiskujejo kombinatorične situacije in jih grafično predstavijo; preiskujejo slikovne, številske in geometrijske vzorce.

Učenci v drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju: uporabljajo orodja za zbiranje in predstavitev podatkov; razvijajo občutljivost za zaznavo problema v matematičnih in drugih kontekstih; spoznavajo, razvijajo in uporabljajo različne strategije pri reševanju problemov (sistematično reševanje, metoda poskušanja ipd.); razvijajo bralne strategije; razvijajo bralne sposobnosti: bralno razumevanje, odnos do branja, zanimanje za branje; razpravljajo o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi; raziskujejo kombinatorične situacije ter razvijajo različne metode reševanja kombinatoričnih problemov (metoda poskušanja); razvijajo ustvarjalnost ob reševanju besedilnih nalog z več rešitvami in pri iskanju ter uporabi različnih poti do rešitev; preiskujejo vzorce in razvijajo matematično mišljenje.

Učenci v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju: uporabljajo orodja za obdelavo podatkov in razvijajo kritičen odnos do njihove uporabe; uporabljajo merila za sredino in razpršenost; na primerih spoznajo statistično verjetnost; rešujejo kombinatorične probleme, povezane z življenjskimi situacijami; razvijajo bralne sposobnosti: bralno razumevanje, odnos do branja, zanimanje za branje; razvijajo bralne strategije: prelet, vprašanja, branje, ponovni pregled, poročanje; rešujejo odprte in zaprte probleme: berejo besedilo, oblikujejo vprašanja, analizirajo podatke, matematično zapišejo postopek reševanja, grafično predstavijo podatke, kritično vrednotijo rešitev, oblikujejo odgovor; modelirajo, preiskujejo vzorce in razvijajo matematično mišljenje: prostorsko predstavljivost in abstraktno mišljenje; razvijajo ustvarjalnost in samoiniciativnost; povezujejo znanje različnih predmetnih področij.

Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami

Cilje in vsebine sklopa Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijam uresničujemo v vseh obdobjih šolanja in v vseh vsebinskih sklopih, zato večino teh ciljev ne uresničujemo v posebej izbranih urah, ampak sočasno z razvijanjem drugih znanj (npr. delo z vzorci pri številih in geometriji).

Matematične probleme lahko v pouk vnašamo z različnimi nameni: so priložnost za utrjevanje osnovnih znanj (pojmov, konceptov, uporabe algoritmov), za povezovanje snovi z življenjskimi situacijami (osmišljanje), učenje strategij pri reševanju problemov, učenje problemskih znanj in spretnosti, ki jih potrebujemo pri reševanju matematičnih problemov v novih situacijah, kot sta pridobivanje izkušenj z različnimi pristopi pri reševanju problemov ter tudi priložnost za uporabo splošnih strategij pri reševanju specifičnih problemov.

Z reševanjem *zaprth matematičnih problemov* ugotavljamo, ali učenec razume osnovne matematične pojme in koncepte, hkrati pa jih utrjuje in ponavlja ter uporablja naučeno strategijo reševanja.

Cilji reševanja *odprth problemov* so, da učenec samostojno razmišlja v novih situacijah, na ravni, ki jo zmore in razume. Za reševanje mora učenec znati izbrati in izpeljati primerno strategijo, kar pomeni, da potrebuje veliko izkušenj in nasvetov. Od učenca zahteva sposobnost postavitve izhodišč in ciljev, uporabo preprostih orodij za strukturiranje ter iskanje pravilnosti in zakonitosti v pregledno strukturirani množici.

Učenci lahko rešijo problem na *različne načine*: s poskušanjem (na konkretni, simbolni ravni), z opazovanjem in ugibanjem (potrebna je utemeljitev rezultata), s premislekom (logičnim sklepanjem, miselnimi procesi), z matematičnimi izpeljavami (računski postopki). Uporaba različnih načinov reševanja odraža različno raven in vrsto doseženega znanja.

V prvem VIO obravnavamo matematične probleme in probleme z življenjskimi situacijami, v drugem in tretjem VIO dodamo zaporedja in kombinatorične probleme, v tretjem triletju pa tudi modeliranje. Učenci modelirajo abstraktne (življenjske) situacije ali procese (oblikujejo algebrski izraz, formulo, enačbo, prikaz itd., ki prikazuje dano situacijo), interpretirajo matematične modele, ugotavljajo veljavnost modela in razmišljajo o modelu in njegovih rezultatih.

Primeri

Npr.: v petem razredu učenci spoznajo tudi negativna cela števila. Negativnih celih števil ne vpeljujemo prek številске množice celih števil ($\mathbb{Z}$), ampak s konkretnimi življenjskimi situacijami (temperatura je lahko negativna ipd.). Učenci prek izkušenj spoznavajo, da za opisovanje življenjskih pojavov uporabljamo tudi negativna cela števila (odčitavajo globino vode glede na morsko gladino, negativno stanje na osebнем računu ipd.). Negativna števila nadgradimo v šestem razredu (temperatura, dolg, nadmorska višina ipd.). Tudi v osmem razredu negativna števila vpeljemo prek življenjskih situacij, v nadaljevanju razširimo množico števil z negativnimi števili in vpeljemo računske operacije z njimi.

V okviru matematičnih dejavnosti ali problemskih situacij lahko obravnavamo npr. pravila za deljivost s števili 4, 8, 25 ipd.

Tudi pretvarjanja v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju ne predvidevamo kot samostojne dejavnosti, temveč uporabimo pretvarjanje v povezavi z drugimi vsebinami v različnih matematičnih in geometrijskih nalogah ter pri reševanju problemskih situacij iz vsakdanjega življenja skozi celotno vzgojno-izobraževalno obdobje.

V sedmem razredu opazujejo medsebojno odvisnost na življenjskih primerih. Odnos opišejo z besedami, z zapisom v preglednici ali z grafičnim prikazom. Ponudimo primere zveznih (npr. naraščanje vode) in diskretnih spremenljivk (npr. plačilo za jajca). V osmem razredu ob konkretnih primerih vpeljemo pojma preme in obratne sorazmernosti. Priporočamo zapis podatkov v preglednico.

Če strnemo, cilje sklopa o matematičnih problemih uresničujemo v vseh obdobjih šolanja: uporaba enot, risanje skic, izdelovanje modelov pri geometriji, analiza besedilnih nalog, povezovanje znanj ravninske in prostorske geometrije, posploševanje idr. so znanja, ki jih gradimo v celotni devetletni osnovni šoli.

Obdelava podatkov

Cilji in vsebine sklopa *obdelava podatkov* so dopolnjeni in enakomerno razporejeni v vseh VIO.

Vzporedno z učenjem vsebin o obdelavi podatkov učenci razvijajo količinsko razumevanje in sklepanje, učijo se uporabe aritmetike pri reševanju problemov; pridobivajo sposobnost ukvarjanja z raznolikostjo in negotovostjo; razvijajo kritični odnos do interpretacije rezultatov, učijo se utemeljevanja idr. Smiselno je, da se pri delu s podatki vsebine navezujejo na matematične vsebine. Tehnike dela s podatki so pomemben del problemskih znanj (urejeni podatki lahko omogočijo uvid v rešitev problema). Delo s podatki je zelo naravna vez med poukom matematike in drugimi predmeti oz. izvenšolskimi izkušnjami (funkcionalna pismenost, reše-

vanje realističnih problemov). Dejavnosti, povezane z delom s podatki, so lahko prva izkušnja z verjetnostjo.

V nižjih razredih je obdelava podatkov učinkovit način razvijanja količinskega razumevanja in sklepanja ter uporabe aritmetike pri reševanju problemov. Pri podatkih učenci spoznajo različne načine zbiranja, urejanja in predstavitev podatkov na primerih iz vsakdanjega življenja.

V drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju učenci sistematično razvijajo tehnike zbiranja in zapisovanja podatkov. Glede na dane okoliščine pojasnijo izbrane načine urejanja podatkov (podatke razvrščajo po velikosti ali razporejajo podatke glede na izbrane kriterije: npr. po spolu, barvi ipd.). Urejene podatke predstavijo s prikazom s stolpci in vrsticami, tortnim prikazom in v preglednicah. Prikazovanje podatkov s tortnim prikazom povežemo z obravnavo delov celote (polovice, četrtine ipd.).

V šestem razredu pri obdelavi podatkov predvidevamo uporabo računalniških preglednic. Učenci zberejo in uredijo podatke ter jih vnesejo v primerno računalniško preglednico. Ob tem spoznavajo delovanje in uporabnost računalniških preglednic: npr. s spreminjanjem podatkov v preglednicah se spreminjajo prikazi. Obdelavo podatkov z računalniškimi preglednicami povežemo tudi z reševanjem problemov in raziskavami. Dejavnosti, če je le mogoče, izvajamo v računalniški učilnici. Za učence bo vsebina nazornejša, razumljivejša in zagotovo bolj smiselna, če bodo zbirali podatke iz svojega okolja.

Pri obdelavi podatkov izbiramo tudi kompleksne dejavnosti, ki vključujejo branje, zbiranje, urejanje, prikazovanje in uporabo podatkov. Pri prikazovanju podatkov spodbujamo utemeljevanje izbire prikaza za prikazovanje podatkov. Dejavnosti izbiramo iz vsakdanjih situacij (preglednice, prikazi v časopisih, podatki na svetovnem spletu ipd.). Uporaba računalniških preglednic naj postane potreba in običajno orodje urejanja in prikazovanja podatkov, s katerimi lahko simuliramo različne situacije (npr. kaj se zgodi, če posamezni podatki pomembno odstopajo ali jih spreminjamo). V devetem razredu učenci že sestavijo vprašalnik z različnimi tipi vprašanj (povezava s slovenščino), zbrane podatke pa uredijo, prikažejo in interpretirajo (npr. o interesnih dejavnostih, zdravju, skrbi za okolje idr.). Obravnavamo tako zvezne spremenljivke (npr. enakomerno polnjenje posode z vodo: spreminjanje količine vode v posodi glede na čas) kot tudi diskretne spremenljivke (štetje prometa: število avtomobilov glede na različne znamke avtomobilov) ter odnose med njimi prikažemo z ustreznimi grafi.

V tretjem VIO obravnavamo merila za sredino in razpršenost. Aritmetično sredino prvič obravnavamo v sedmem razredu s poudarkom na razumevanju, in ne zgolj kot postopek za njen izračun. Z različnimi dejavnostmi oziroma primeri učenci spoznavajo pomen povprečne vrednosti, ki vodi do razumevanja pojma povprečna vrednost. Modus, mediano, škatlo z brki, medčetrtnski razmik obravnavamo pa v devetem razredu. Učence navajamo, da kritično primerjajo sredine.

Primeri nalog

Cilji: Razumeti aritmetično sredino

Primer 1: Peter je beležil zamude avtobusov. Za prvih pet dni v tednu so bile zamude naslednje: 2 min, 2 min, 6 min, 7 min, 10 min.

1. Izračunajte aritmetično sredino zamud avtobusa v petih dneh.

2. Kako bi se spremenila aritmetična sredina zamud, če bi vsaki vrednosti posamezne zamude prišteli 5 min?
3. Kolikšna bi bila vsota vseh vrednosti zamud, če bi vsako vrednost zamude nadomestili z aritmetično sredino?
4. Od vsakega podatka odštejte aritmetično sredino. Kolikšna je vsota teh vrednosti?

Primer 2: Učenci v 7. A, 7. B in 7. C so pisali pisno nalogo iz matematike. Povprečna ocena učencev iz 4. A je 3,4, povprečna ocena v 4. B je 3,2, v 4. C pa 2,9. Ali lahko glede na dane podatke izračunaš povprečno oceno učencev vseh treh razredov? Odgovor utemelji.

Primer 3: V računalniškem krožku je 10 učencev, katerih povprečna starost je 12 let. Kaj lahko iz tega sklepamo?

- a) Da je največ otrok v skupini starih 12 let.
- b) Da so (vsi) otroci stari približno 12 let.
- c) Da naj bi bili otroci v skupini stari 12 let.
- d) Da je prav toliko otrok starejših od 12 let, kolikor jih je mlajših.
- e) Da je vsota starosti vseh otrok v skupini 120 let.

Utemelji izbiro.

V devetem razredu vpeljemo tudi mediano. Ob konkretno izbranih podatkih, ki jih lahko razvrstimo po velikosti, prikažemo način določanja mediane in njen pomen, tudi v povezavi z aritmetično sredino. Z uporabo računalniških preglednic spreminjamo podatke in opazujemo, kako se spreminjata aritmetična sredina in mediana. Ob konkretnih primerih, ki jih lahko povežemo z matematičnimi problemi ali s problemi iz življenjskih situacij, učenci računajo merila za sredino in razpršenost: aritmetično vrednost, mediano, modus in medčetrtnski razmik.

Mediana

Mediano niza n podatkov določimo takole: Podatke uredimo po velikosti. Izračunamo število $\frac{n+1}{2}$, ki pove, kateri podatek urejenega niza po vrsti je mediana. Če število $\frac{n+1}{2}$ ni celo, vzamemo za mediano povprečje „sosednjih“ podatkov v urejenem nizu.

Primer: Zapišite mediano zamud vlaka v enem tednu: 2 min, 6 min, 7 min, 10 min, 2 min, 2 min, 7 min.

Rešitev:

$$\frac{N+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

2, 2, 2, 6, 7, 7, 10

Me = 6 min

Primer: Zapišite mediano zamud vlaka: 2 min, 8 min, 9 min, 10 min, 2 min, 2 min, 9 min, 4 min.

Rešitev:

$$\frac{N+1}{2} = \frac{8+1}{2} = 4,5$$

2, 2, 2, 4, 8, 9, 9, 10

$$Me = \frac{4+8}{2} = 6 \text{ min}$$

Me = 6 min

Mediana ni občutljiva na izstopajoče podatke. Mediana je po velikosti osrednja vrednost niza podatkov. Mediano določamo le za vrstne in številske podatke.

Modus ali gostiščnica je vrednost, ki v nizu podatkov najpogosteje nastopa. Modus lahko določimo za opisne, vrstne in številske podatke. Med podatki je lahko tudi več modusov (tiste vrednosti, ki se enako mnogokrat pojavljajo največkrat) Modus uporabljamo predvsem pri opisnih podatkih.

Preglednica 1: Merila za osredinjenost podatkov

	MODUS	MEDIANA	ARIT. SREDINA
Vrsta podatkov	opisni vrstni številčni	vrstni, številčni	številčni
Opredelitev	Podatek, ki se najpogosteje pojavlja.	Sredinski podatek v nizu podatkov, razvrščeni po velikosti.	Enakomerno razdeljena skupna vrednost vseh podatkov.
Izračun	Iz frekvenc nastopajočih podatkov.	Podatke uredimo po velikosti in določimo osrednjega.	Vsoto vrednosti delimo s številom vnosov.
Kdaj jo uporabimo?	Če obstaja prevladujoč podatek, pretežno za opisne podatke.	Pri vrstnih podatkih (kadar so izstopajoči podatki).	Pri številskih podatkih (kadar ni izstopajočih podatkov).

Medpredmetno povezovanje – pot do kompleksnih znanj in pričakovanih rezultatov

Medpredmetno povezovanje je didaktični pristop, kjer učitelj oz. tim učiteljev poskuša določeno vsebino/problem podati in obravnavati čim bolj celostno. S tem je mogoče učenje in poučevanje učinkoviteje usmeriti v življenjske situacije, reševanje problemov, omogočiti boljši razvoj predstav, izboljšati uporabnost in transfer med disciplinarnimi znanji.

Zmožnost prenosljivosti znanja oblikuje samozavestnejšo osebnost, ki se lahko spoprijema z različnimi izzivi, hkrati pa zmožnost povezovanja različnih znanj in spretnosti prispeva k večji kulturni in etični zavesti posameznika (Učni načrt za matematiko, 2011).

Učenci/učenke se pri reševanju medpredmetnih in interdisciplinarnih problemov učijo: obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv; prepoznati matematični kontekst v realističnih situacijah; razvijati generične veščine in spretnosti idr. Primeri dejavnosti medpredmetnih povezav so lahko: načrt in organizacija šolskega izleta, taborjenja, šole v naravi; branje jedilnega lista in izračun cene; branje voznega reda in izračun časa potovanja idr. Še več primerov je tudi v učnem načrtu na strani 77 do 79.

1.1.3 Kompetence

Učni načrt za matematiko (2011) vključuje skozi cilje in vsebine tudi vseh osem kompetenc (Poročilo Evropskega parlamenta in Sveta Evropske unije z dne 18. 12. 2006, Uradni list EU, št. 394/10). Pomembni dejavniki kompetenc so kritično in ustvarjalno mišljenje, dajanje pobud, reševanje problemov, ocena tveganj, sprejemanje odločitev, konstruktivno obvladovanje čustev. Najbolj je poudarjena matematična kompetenca, ki vključuje matematično mišljenje (logično mišljenje in prostorsko predstavo), matematično pismenost in poudarja vlogo, ki jo ima matematika v vsakdanjem življenju. Vključuje temeljno poznavanje števil, merskih enot in struktur, odnosov in povezav, osnovnih postopkov, matematičnih simbolov in predstavitev v matematičnem jeziku, razumevanje matematičnih pojmov in zavedanje vprašanj, na katera lahko matematika ponudi odgovor. Učenci se pri pouku matematike naučijo predvsem osnovnih znanj, spretnosti in odnosov, ki pa jih pri nadaljnjem izobraževanju seveda še nadgradijo in poglobijo (Učni načrt, Matematika 2011: 5). S primernimi *dejavnostmi* poskrbimo, da so v postopek reševanja vključeni razmišljanje, sklepanje, izpeljevanje zaključkov. Predlogi dejavnosti za razvoj matematične in drugih kompetenc so v učnem načrtu za matematiko na strani od 74 do 75.

Informacijsko-komunikacijska tehnologija (IKT)

Informacijsko-komunikacijska tehnologija (IKT) je lahko sredstvo za razvoj matematičnih pojmov, sredstvo za ustvarjanje, simuliranje in modeliranje realnih ali učnih situacij, lahko je učni pripomoček ali komunikacijsko sredstvo.

V današnjem svetu se uporaba tehnologije zahteva in pričakuje pri nadaljnjem študiju, v vseh poklicnih dejavnostih, na vseh delovnih mestih in je tudi sestavni del vsakdanjega življenja. Pouk matematike naj učence usposobi za uporabo tehnologije predvsem pri srečevanju z matematičnimi problemi, ob tem pa se posredno usposablja tudi za uporabo tehnologije v vsakdanjem življenju. Informacijsko-komunikacijska tehnologija omogoča in podpira različne pristope k poučevanju in učenju, npr. raziskovanje in reševanje matematičnih ter avtentičnih problemov. Tehnologija omogoča hitro povratno informacijo, ki je nepristranska in neosebna. To lahko opogumlja učence, da sami predvidevajo in razvijajo svoje ideje, jih testirajo in spreminjajo ter popravljajo oziroma izboljšujejo. Tehnologija lahko pomaga učencem premostiti primanjkljaje v znanju, učne težave ali specifične težave na področju grafomotorike ter ponuja dodatne možnosti učenja v ustreznem spoznavnem stilu posameznika. Učni načrt pri nekatereh vsebinah predvideva uporabo tehnologije, pri drugih pa je odločitev prepuščena učitelju (Učni načrt za matematiko, 2011).

1.1.4 Sklep

Triletno postopno uvajanje posodobljenih učnih načrtov za osnovno šolo se je začelo v šolskem letu 2011/2012. Prvo leto so se uvajali predmeti, ki se poučujejo po vsej vertikali osnovne šole: v prvi, četrti in sedmi razred (npr. slovenščina, matematika itn.); prvi tuji jezik v četrti in sedmi razred; geografija in zgodovina v šesti in sedmi razred; drugi predmeti v tisti razrede, v katerih se po veljavnem predmetniku prvič pojavijo, npr. spoznavanje okolja v prvi razred, naravoslovje in tehnika in družba v četrti razred, gospodinjstvo v peti razred itn. S tem je bila zagotovljena postopnost uvajanja učnih načrtov, kar je bilo tudi v skladu s predlogi učiteljev. Lahko pričakujemo, da se bodo v šolskem letu 2013/14 vsi obvezni predmeti v vseh razredih devetletke poučevali po posodobljenih učnih načrtih.

Glede na posodobitve vsebin pri matematiki in tudi pri slovenščini v prvem in deloma v drugem VIO, ki so pomenile premike v hitrejšem opismenjevanju pri matematiki in slovenščini, je bila postopnost uvajanja nujna, saj bi prehitra (frontalna) vpeljava v vse razrede lahko pomenila zmedo in tudi odpor. V tretjem VIO je bilo pri matematiki vsebinskih premikov manj, vendar je kljub temu pomembno, da prehod poteka postopno. Vzporedno z uvajanjem sprememb je treba zagotoviti izobraževanje učiteljev, kakovostna gradiva (učbenike ...), ki podpirajo posodobitve. Naj sklenemo s spoznanji in izkušnjami, ki smo jih pridobili tudi ob posodabljanju učnih načrtov:

Uvajanje sprememb je lahko uspešno le, če poteka skupaj z ravnatelji in učitelji ob upoštevanju odzivov učencev. Za uspešno uvajanje novosti morajo načrtovalci kurikula razvijati in postavljati konceptualne rešitve razvoja v sodelovanju s strokovnimi delavci šol. Vodstvo šole mora pritegniti kolektiv k vpeljevanju sprememb. Šolski razvojni timi spodbujajo razvoj, vodenje in timsko sodelovanje na šoli. Preko njih steče refleksija o nameravani spremembi, izbira in priprava ustreznih gradiv, preizkušanje novosti v praksi.

Literatura in viri

- 1 Poročilo Evropskega parlamenta in Sveta Evropske unije z dne 18. 12. 2006, Uradni list EU, št. 394/10.
- 2 Smernice, načela in cilji posodabljanja učnih načrtov (2007). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 3 Žakelj, A., Prinčič Röhler, A., Perat, Z., Lipovec, A., Vršič, V., Repovž, B., Senekovič, J., Bregar Umek, Z. (2011). Učni načrt, Program osnovna šola, Matematika. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo. ISBN 978-961-234-965-3. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (15. 3. 2013).

1.2 Posebnosti razredne stopnje

Dr. Alenka Lipovec, Pedagoška fakulteta Maribor

1.2.1 Načela pouka na razredni stopnji

Temeljni cilj je razvijanje računske pismenosti, opredeljene kot skupek znanj, spretnosti in odnosov, potrebnih za uspešno reševanje matematičnih problemov, ki se pojavljajo v različnih življenjskih situacijah.

Pri pouku sledimo naslednjim načelom: načelom enakosti, učenja, poučevanja, virov, preverjanja in tehnologije. Z načelom enakosti omogočimo, da VSI otroci verjamejo, da so sposobni osmisлити matematiko. Seveda morajo biti najprej učitelji prepričani, da so VSI otroci sposobni osmisлити matematiko. Pri načelu učenja smo posebej pozorni na to, da morajo VSAK DAN otroci začutiti, da je matematika smiselna. Matematiko se morajo učiti z razumevanjem in z dejavno gradnjo novega znanja na podlagi predhodnega znanja in izkušenj. S tem povezano je načelo poučevanja, ki govori o tem, da učitelji morajo nehati poučevati le z razlago in začeti dovoljevati otrokom lastne dejavnosti. Učinkovito poučevanje zahteva razumevanje otroškega trenutnega in potrebnega znanja ter spodbujanje in podpiranje učinkovitega učenja le-tega. Temeljni vir ni učbenik, ampak je učni načrt. Učni načrt je več kot zbirka ciljev, učitelju pomaga tudi pri določanju, katera matematika je pomembna in kako se spiralno razvijajo pojmi. Načelo preverjanje podpira učenje pomembne matematike in podaja učitelju in učencu pomembne informacije o napredku. Načelo tehnologije pa poudarja, da je tehnologija bistvenega pomena pri učenju in poučevanju matematike ter da vpliva na način poučevanja in spodbuja učenčevo učenje.

Pri pouku razvijamo tako konceptualno znanje (tj. logične relacije, ki obstajajo v mišljenju kot del omrežja idej) kot proceduralno znanje, ki vključuje poznavanje pravil in postopkov, ki jih uporabljamo za izvedbo rutinskih matematičnih postopkov in potrebni simbolizem. Posebej pozorni smo, da se pojmi povezujejo med seboj, kajti le tako dosežemo razumevanje. Znotraj tega se zavedamo, da učenci iznajdejo svoje znanje in sami razvijajo razumevanje in da je zato ideje nemogoče posredovati pasivnim učencem.

1.2.1.1 Razvojne posebnosti in njihov vpliv na načrtovanje pouka

Na razredni stopnji se posebej zavedamo tega, da sta znanje in razumevanje vsakega učenca drugačni. Poskušamo doseči refleksivno razmišljanje, ki je daleč najpomembnejši element učinkovitega učenja. Učinkovito poučevanje je zato dejavnost, osredotočena na učenca. Upoštevamo Piagetove in van Hielejeve razvojne stopnje, Brunerjeve reprezentacije in pomembnost matematičnega razgovora, kot je utemeljeval Vigotski.

1.2.1.2 Razvojne stopnje

Učenci na razredni stopnji so po Piagetu na predoperacijski, konkretno operacijski ali formalno operacijski stopnji razvoja. Na predoperacijski stopnji razmišljanja so učenci s srednjimi sposobnostmi nekje do 6. leta, tisti z nižjimi sposobnostmi pa do 9. leta. Za to stopnjo je značilno, da otrok sicer razmišlja na nelogičen, ireverzibilen način, a inteligenco že izraža z uporabo simbolov. Učenec je sicer sposoben uporabljati miselne reprezentacije objektov, toda opera-

cije lahko izvaja le nad fizičnimi objekti. Prehod na konkretno operacijsko stopnjo razmišljanja zaznamuje razvoj konzervacij količin. Običajno se najprej okrog 7. leta razvijeta konzervaciji števila in dolžine. Večina učencev razredne stopnje je torej večino časa na tej stopnji. Za stopnjo konkretnih operacij je značilno, da se pri učencih razvija operacionalno razmišljanje (miselna dejavnost, ki je reverzibilna) in so zato sposobni izvajati miselne operacije nad reprezentacijami konkretnih objektov. V drugem VIO učenci z visokimi sposobnostmi lahko preidejo na stopnjo popolnoma formalnega razmišljanja, kar pomeni, da ne potrebujejo več konkretnih miselnih opor pri razmišljanju.

Teorijo razvoja geometrijskega mišljenja in konceptov sta razvila postavila nizozemska avtorja Dina van Hiele-Geldof in Pierre van Hiele. Njuna začetna teorija predpostavlja, da posameznikov razvoj v geometriji poteka po diskretnem hierarhičnem zaporedju stopenj. Te stopnje so v različnih virih različno oštevilčene, začenši z 0 ali z 1. Na tem mestu navajamo izvirno karakterizacijo začetnih stopenj: stopnja 0 – oblike so presojane glede na njihovo pojavnost; stopnja 1 – oblike so nosilci svojih lastnosti; stopnja 2 – lastnosti so logično urejene; stopnja 3 – geometrija je razumljena kot sistem aksiomov. V njunih poznejši delih je mogoče zaslediti tudi višje stopnje, ki pa za začetno izobraževanje na področju geometrije nimajo večjega pomena. Geometrijsko mišljenje obstaja že pred stopnjo 0, ko gre za še nezanesljivo prepoznavanje oblik. Na tej stopnji je posameznik pri prepoznavanju pozoren le na nekatere lastnosti oblike. Tako so na tej stopnji na primer vse zaprte in zaokrožene oblike prepoznane kot krog. Ne glede na število stopenj, so pomembne njune ugotovitve, da gre za naravno zaporedje stopenj, ki je neodvisno od načinov poučevanja, čeprav je res, da vsi načini ne omogočajo doseganja nekaterih višjih stopenj in da ne gre za biološko pogojenost doseganja posamezne stopnje. Objekt manipulacije naslednje stopnje postane tisto, kar je bilo v predhodni stopnji rezultat opazovanj oziroma razmišljanja. Če so rezultat stopnje 0 razredi oblik, kot na primer krogi, to postane objekt raziskovanja na stopnji 1, kjer gre za iskanje lastnosti objektov posameznega razreda. Ta povezanost med stopnjami onemogoča preskakovanje stopenj. Doseganje stopenj ni pogojeno s starostjo, ampak s številom geometrijskih izkušenj. Kljub temu lahko v grobem rečemo, da se učenci na razredni stopnji počasi prehajajo z 0-te stopnje na prvo stopnjo.

Značilne dejavnosti 0-te stopnje so klasifikacija zbirk geometrijskih oblik, sestavljanje in razstavljanje oblik. Izvajamo različne klasifikacijske dejavnosti, kjer je pomembno, da so zbirke velike, da nepomembni vidiki ne postanejo pomembni. Zbirka likov torej že na razredni stopnji vključuje topokotne trikotnike, konkavne štirikotnike, krivočrtne like in podobno, čeprav likov ne poimenujemo. Podobno pri telesih v zbirko vključimo različne piramide, prizme, elipsoide, seveda brez poimenovanja. Klasifikacija lahko poteka glede na dano lastnost (npr. poiščite vse štirikotnike) ali pa morajo učenci sami poiskati lastnost, po kateri razvrščajo (npr. klasifikacija po dimenzijah). Iz zbirke lahko učenec izbere dve obliki in opiše podobnost med njima. Sošolci iščejo vse preostale oblike, ki so podobne izbrani obliki, toda vsi po enakem pravilu. Če učenec npr. reče »tale je podoben, ker je na eni strani raven in na drugi strani kriv«, morajo drugi iskati po tem pravilu. Izvajamo tudi različne dejavnosti sestavljanja in razstavljanja oblik, kot je npr. klasičen tangram ali preprosta analogija le-tega, kjer učenci prerežejo pravokotnik po diagonalni in preiskujejo, kakšne oblike je mogoče sestaviti iz dobljenih trikotnikov. V to skupino sodijo tudi dejavnosti tlakovanja, kjer so zelo uporabne ploščice za vzorčke.

1.2.1.3 Reprezentacije

Pogosto ni vprašljiva učenčeva zrelost ali predznanje, ampak reprezentacija matematične ideje, ki ne sme biti ne prelahka in ne pretežka. Raznovrstne reprezentacije matematičnih idej

(situacije iz materialnega sveta, konkretne manipulatorje, slike, govorni jezik, zapisane simbole ...) je Jerome Bruner razdelil v tri skupine: enaktivno, ikonično in simbolno reprezentacijo. Enaktivna reprezentacija je reprezentacija preteklega dogodka z namišljenimi ali dejanskimi motoričnimi odzivi. V šoli jo običajno uporabljamo pri delu s konkretnimi materiali in pozneje s kontekstualiziranimi besedilnimi nalogami. Ikonična reprezentacija omogoča povzemanje dogodkov s selektivno organizacijo in naknadno transformacijo dražljajev/podob. V razredu je zaznavna pri slikovnih ponazoritvah. Simbolična reprezentacija se nanaša na reprezentacijo (izpeljanih pojmov) v (umetnem) simbolnem svetu. Zelo grobo rečeno, enaktivna reprezentacija ustreza konkretni ravni, ikonična slikovnemu in simbolična simbolnemu, pri čemer je treba poudariti, da morajo znotraj reprezentacije delovati učenci, in ne učitelj. Konkretno to pomeni, da znotraj konkretne/enaktivne reprezentacije dejavnosti s konkretnim materialom izvajajo učenci. Opazovanje demonstracije dejavnosti in naknadno ponavljanje prikazane dejavnosti ni sprejemljiv način poučevanja. Pri ikonični reprezentaciji podobno vsaj pri temeljnih pojmihi pričakujemo risbe, ki jih ponazarjajo, od učencev. Ni torej dovolj, da učenci slikovne ponazoritve le opazujejo, bili naj bi jih sposobni tudi samostojno producirati. Matematiko lahko intelektualno pošteno učimo z vsako izmed treh reprezentacij. Resnično razumevanje dosežemo, ko lahko fluentno prehajamo med vsemi tipi reprezentacij. Potenco npr. razumemo šele, ko znamo razen simbolnega zapisa učinkovito podati tudi življenjsko situacijo ali risbo, ki prikazuje potenco.

1.2.1.4 Matematični jezik

Strukturiranje učenčevih matematičnih kognitivnih struktur lahko analiziramo tudi s komunikacijo pri pouku. Matematični jezik s svojo posebnostjo lahko nesporazume med udeleženci matematične razprave povzroči že v nižjih razredih osnovne šole. Funkcionalna uporaba matematičnega jezika bi torej morala biti nujni sestavni del učne kulture v razredu. Piaget ne bi trdil, da lahko komunikacija spremeni razvojni potek. Nasprotno, trdil bi, da je doseganje neke razvojne stopnje predpogoj za to, da se oseba lahko jasno pisno izraža. Vigotski pa je trdil, da lahko ima pisno izražanje dejanski vpliv na razvoj. Ne želimo zmanjševati pomena Piagetove razvojne teorije za pouk matematike, ob naših prizadevanjih želimo le poudariti potrebnost zavedanja socialne narave pridobivanja znanja. Piagetova razvojna teorija po njihovem mnenju zahteva proceduralno učinkovitost pred metakognicijo in konceptualno mislijo. Matematična misel, izražena v pisni obliki, je torej odvisna od kognitivnega razvoja in ga kot taka ne more prehitevati ali celo spodbujati. Za Vigotskega sta pisno izražena in matematična misel podobni, saj obe potrebujejo refleksijo na prvotno nezavestno ali intuitivno misel. Matematično mišljenje se torej začne z zavestno refleksijo nad nezavednim ali spontanim konceptualnim znanjem. Pisno izražena matematična misel zato ni odvisna od proceduralnega znanja ali kognitivnega razvoja. Še več, pozitivno lahko vpliva na razvoj obojega. Kaže, da se raziskovalci dandanes strinjajo, da sta oba dejavnika medsebojno povezana in da npr. nov matematični koncept vzbudi novo besedo, v matematičnoučni situaciji pa je kot sredstvo komunikacije in tudi notranje reprezentacije, beseda nujno pomembna. Če učence večkrat ob koncu ure pozovemo, da v pisni obliki odgovorijo na vprašanje o bistvu naučenega, ali jih spodbujamo, da bolnemu sošolcu v pismu pojasnijo učno snov, pozitivno pripomoremo k njihovem matematičnemu razvoju.

Matematični jezik velikokrat govori v simbolih. Tisti, ki zares želijo komunicirati v matematiki, se ne morejo zanašati samo na čute, ampak morajo uporabiti intelektualne sposobnosti za ustvarjanje domene, znotraj katere so njihove poteze smiselne. Razlike med matematiko, gle-

dano virtualno, in matematiko, gledano realno, so seveda skoraj tako močne kot podobnosti. Za zgodnji razvoj matematičnih konceptov je običajno značilna realna osredotočenost, iz katere počasi nastaja virtualna. Realna osredotočenost lahko učitelja zavede, da pozabi na nujno potrebnost prehoda v virtualno/abstraktno razpravo. Učitelj mora oceniti, kdaj je posamičen učenec sposoben preiti v simbolni svet.

1.2.1.5 Ponazorila

Ponazorila imajo zelo raznoliko poimenovanje: imenujemo jih konkretni materiali, didaktični pripomočki, modeli manipulatorji ... Na razredni stopnji uporabljamo veliko ponazoril, v nadaljevanju pa bomo opisali predvsem linkkocke, Dienesove kocke, Cuisenairove paličice in ploščice za vzorčke.

Linkkocke

Linkkocke so kocke, ki jih lahko spnemo na vseh ploskvah, kar nam v nasprotju z drugimi kockami omogoča gradnjo raznovrstnih teles. Linkkocke morajo biti dovolj velike (v prvem razredu si želimo takšnih, da jih učenci lahko nataknejo na prstke), predvsem pa jih moramo imeti dovolj.

Dienesove kocke

Imenujemo jih tudi kocke za ponazarjanje desetiških enot, ker ponazarjajo enice, desetice, stotice in tisočice. Uporabljamo jih pri izgradnji mestnovrednostnega koncepta in utemeljevanju računskih algoritmov.

Cuisenairove kocke

Te kocke najdemo običajno v kompletu, ki ga imenujemo trakovi za merjenje. Temeljijo na ideji, da je treba pojem števila razvijati skozi dejavnosti štetja in skozi dejavnosti primerjanja zveznih količin. V izvorniku gre za garnituro kvadrov z osnovno ploskvijo $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ in različno višino, v naših šolah pa jih najdemo v obliki plastičnih trakov različnih barv. Vsi kvadri določene višine imajo enako barvo: Tisti z višino 1 cm so beli, 2 cm so rdeči, 3 cm so svetlo zeleni, 4 cm so karminasto rdeči, 5 cm rumeni, 6 cm temnozeleni, 7 cm črni, 8 cm rjavi, 9 cm modri, 10 cm oranžni. S kvadri lahko igramo različne igre na že pripravljenih poljih, predvsem pa so namenjene odkrivanju, raziskovanju in oblikovanju konceptov. Otroke pripravlja za delo s števili in so jim pripomoček pri spoznavanju računskih operacij ter njihovih lastnosti komutativnosti, asociativnosti in distributivnosti. Uporabljamo jih lahko že zelo zgodaj. Od petega leta dalje pa lahko vsakemu kvadru pripišemo numerično vrednost, kar nam omogoča ponazarjanje računskih operacij in konkretiziranje računov z neznanim členom. Niso uporabne zgolj na področju aritmetike, ampak tudi na področju algebre, orientacije v prostoru, simetrije, prostornine. Barve igrajo posebno vlogo in niso izbrane naključno. Družini rdečih paličic pripadajo paličice dolžin 2 cm (rdeče), 4 cm (temnordeče) in 8 cm (rjave). Družini modrih paličic pripadajo paličice s 3 cm , 6 cm in 9 cm dolžine ter družini rumenih paličic pripadajo paličice 5 cm in 10 cm dolžine.

Ploščice za vzorčke

Gre za posebno zbirko ploščic, ki jo sestavljajo rumeni šestkotniki, rdeči trapezi, modri paralelogrami, zeleni trikotniki, bež paralelogrami in oranžni kvadrati. Ploščice so uporabne za spoznavanje lastnosti geometrijskih likov in oblikovanje vzorcev, vendar njihova moč leži v povezavi z ulomki. Razmerja med ploščicami so namreč takšna, da omogočajo raznolike sklepe. Trapez npr. predstavlja polovico šestkotnika, paralelogram pa njegovo tretjino. Ker vemo tudi, da potrebujemo dva trikotnika za en paralelogram in tri za en trapez, lahko s pomočjo teh ploščic utemeljimo seštevanje ulomkov.

1.2.2 Didaktična priporočila

1.2.2.1 Seštevanje in odštevanje s preходом na konkretni ravni

Učenci se na začetku šolanja učijo matematike najprej z izkustvom materialnega sveta, nato prek govornega jezika, ki generalizira to izkustvo, v naslednji fazi preko slike ter šele nazadnje na simbolni ravni. Operativni cilji sklopa Računske operacije so naravnani tako, da poudarjajo znanja na konkretni ravni in šele nato na grafični in simbolni ravni. Pri pouku naj bi učenci ob dejavnostih s konkretnim materialom (gumbi, frnikole, želodi, paličice, linkkocke ...) razvijali konceptualni sistem naravnih števil in usvajali matematične pojme. Učenci postopoma usvajajo ustne in nato še pisne računske algoritme, pri čemer se posebej spodbuja razvoj učenčevih lastnih strategij.

Pri računskih operacijah smo pozorni na to, da jih poučujemo tako, da se učenci zavedajo povezav med njimi. Seštevanje in odštevanje sta povezana, kajti seštevanje poimenuje celoto glede na dele, odštevanje pa poimenuje manjkajoči del. Množenje vključuje preštevanje skupin enakih kardinalnosti in določanje skupne količine skozi ponavljajoče se prištevanje. Tudi množenje in deljenje sta povezana. Deljenje poimenuje manjkajoči faktor, če sta znana zmnožek in drugi faktor. Odnosi med števili igrajo pomembno vlogo pri obvladovanju temeljnih računskih dejstev. Število 17 je npr. več kot 14, za dve manj kot 19, sestavljeno iz 13 in 4, pa tudi iz 2 in 15, je za 7 večje od 10. Pri iskanju vsote $8 + 6$ nam lahko pomagajo naslednji odnosi med števili: 8 je za dve oddaljeno od 10, 2 in 4 je enako 6, 10 in 4 enako 14. Števila so povezana med sabo na zelo različne načine.

Posodobljeni učni načrt premika konkretno raven koncepta računanja s prehodi leto niže. Če smo prej prehod do 20 v celoti obdelali v drugem razredu, se učenci zdaj že v prvem razredu srečajo s situacijami, ki jih modeliramo z računi, ki vsebujejo prehod čez desetico kot npr. $7 + 8$ ali $17 - 8$. V drugem razredu ostaja simbolna raven oz. avtomatizacija teh temeljnih računskih dejstev. Podobno velja za prehod v obsegu do 100, kjer se učenci s konkretnimi situacijami, ki jih opišemo z izrazi kot npr. $45 + 39$ ali $82 - 49$ srečujejo že v drugem razredu. S tem premikom se je povečala vloga konkretne situacije, v kateri učenci pridobivajo potrebne izkušnje za poznejše simbolno operiranje s števili.

Metodični koraki so v tej fazi razvoja računskih operacij taki:

- seštevanje in odštevanje v obsegu do 5,
- seštevanje in odštevanje v obsegu do 10,
- seštevanje in odštevanje v drugi desetici,
- konkretno razumevanje seštevanja in odštevanja s preходом do 20,

- razvoj strategij za seštevanje in odštevanje s preходом do 20,
- seštevanje in odštevanje brez prehoda v obsegu do 100,
- **konkretno razumevanje seštevanja in odštevanja s preходом do 100,**
- razvoj strategij za seštevanje in odštevanje s preходом do 100.

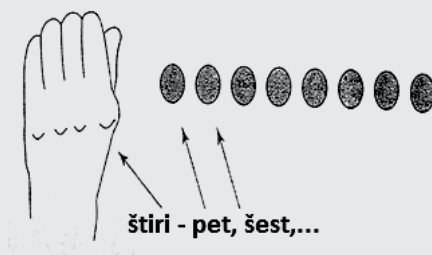
Posvetili se bomo samo odebeljenima korakoma, ker sta v Učnem načrtu (2011) novost.

1.2.2.2 Konkretno razumevanje seštevanja in odštevanja s preходом do 20

Operativni cilj v prvem razredu se glasi: učenci seštevajo in odštevajo ob konkretnih pripomočkih v množici naravnih števil do 20. Ker je odštevanje nasprotna operacija od seštevanja je predvsem pomembno, da učenci dobro razumejo seštevanje, ker si bodo s tem znanjem lahko izdatno pomagali pri odštevanju. Cilj je realiziran, čeprav učenec do vsote oz. razlike pride s preštevanjem konkretnih materialov (gumbov, žetonov, jajc, paličic, kroglic ...). Učenci bodo najprej uporabljali štetje kot dejavnost, ki nam pove, koliko predmetov je v skupini. Zadnja beseda v sekvenci štetja določi kardinalnost preštene množice. Pri preštevanju vseh predmetov lahko pred učenca nastavimo dve skupini objektov in ga pozovemo, da situacijo opiše. Pripravimo lahko npr. dve srajčki in nanju nastavljamo gumbce. Na modro nastavimo npr. 6 gumbov in na rdečo 5. Verjetno učenec pove, da je na modri srajčki 6 gumbov, na rdeči pa 5. Z uporabo predznanja računanja v obsegu do 10 zna simbolno zapisati številski izraz $5 + 6$. Do vsote pride lahko s preštevanjem vseh gumbov po ena, tj. učenec šteje en gumb, dva gumba, trije gumbi, štirje gumbi ..., devet gumbov, deset gumbov, enajst gumbov. Pričakovati je, da bo učenec uporabil v tem trenutku katero izmed učinkovitejših metod preštevanja, ki jih je do zdaj razvil kot npr. štetje od večjega seštevanca naprej. V tem primeru bo torej štel sedem gumbov, osem gumbov, devet gumbov, deset gumbov, enajst gumbov. Strategijo štetja od danega števila gradimo že v obsegu do 10, zdaj jo z dejavnostmi le razširimo na večji obseg.

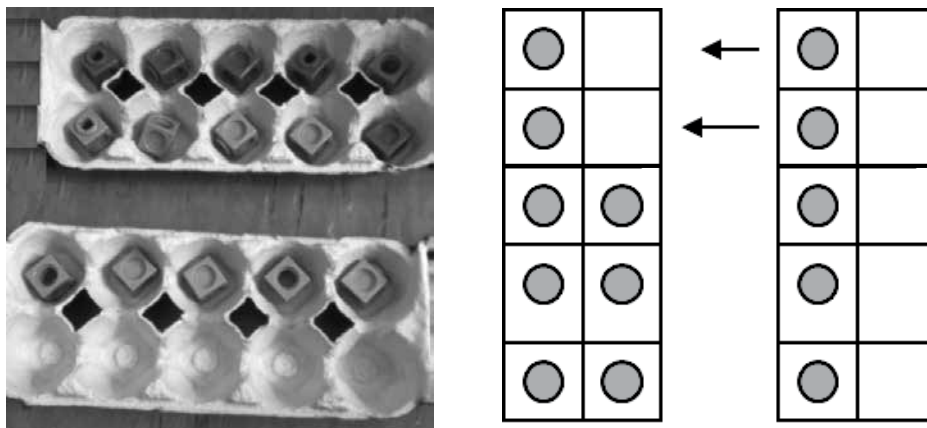
Dejavnost: **SKRIJ V ROKI**

Vsakemu otroku damo od 13 do 20 žetonov, ki naj jih razporedi predse od leve proti desni. Nato vržejo prilagojeno kocko (4, 5, 6, 7, 8 in 9 pik) in odvzamejo toliko žetonov, kot jih pokaže kocka. Te žetone skrijejo v dlan ali pokrijejo. Učitelj pokaže otrokovo roko in vpraša: »Koliko jih imaš tukaj?« (»Štiri.«) In potem štejemo naprej tako: »Štiri,« (pokažemo na roko), »pet, šest, sedem, osem, devet, deset, enajst, dvanajst... «



Slika 1: Štetje naprej. (vir: prirejeno po Van de Walle, 2004)

Že v prvem razredu poskušamo učencem omogočiti izkušnje, ki jih bodo potrebovali za učinkovitejšo strategijo seštevanja s prehodom, tj. dopolnjevanje do desetice. Pripomočki, ki jih uporabljamo v ta namen, lahko simulirajo vsakdanje življenje (kot npr. škatla za jajca) ali pa so posebej izdelani za razvijanje strategije, kot so 10-okvirji. Pri vseh pripomočkih izpostavljamo vprašanja, ki učence usmerjajo v strategijo dopolnjevanja do desetice.

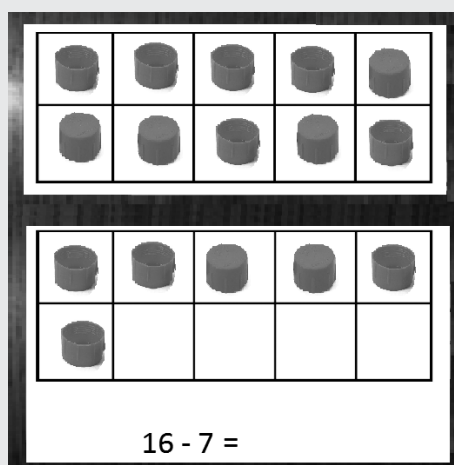


Slika 2: Seštevanje s prehodom. (vir: lasten)

Pri seštevanju je mogoča samo ena strategija tega tipa, pri odštevanju pa dve – druga je znana kot »odštevanje z dopolnjevanjem« in učinkovito poveže odštevanje s seštevanjem. Po prvi strategiji v mislih $15 - 6$ izračunamo tako, da najprej odštejemo 5, kar nas pripelje do 10, nato odštejemo še 1. Razliko $14 - 9$ pa lahko izračunamo tako, da začnemo pri 9 in nato dopolnjujemo do 10. Razmišljamo nekako takole: 9 in 1 je 10 ter še 4 zraven (do 14).

Dejavnost: **ODVZEMI**

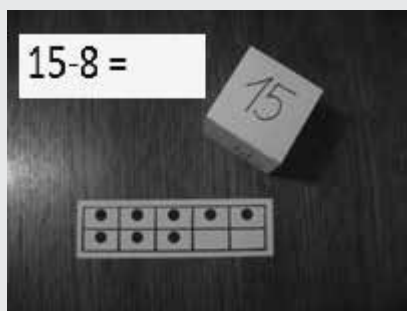
Pri tej dejavnosti potrebujemo dva 10-okvirja, ki ju narišemo na tablo, učenci pa jih imajo pred seboj. Potrebujemo tudi predmete (npr. zamaške), ki jih učenci polagajo v okvirja. Prvi okvir je s pikami povsem zapolnjen, drugi pa delno. Predstavili bomo dejavnost za primer $16 - 7 = 9$. Okvirja predstavljata število 16. Otrok želi izračunati, koliko je $16 - 7$. Najprej bo odvil 6 (tako bo prišel do 10) in nato še 1 ter prišel do rezultata, ki je 9. To strategijo v naših šolah poučujemo kot naravno nadaljevanje strategije dopolnjevanja do desetice, ki jo vpeljemo pri računanju s prehodom. Odštevanec torej razdružimo tako, da dosežemo delno razliko 10.



Slika 3: Odvzemanje s prehodom. (vir: lasten)

Dejavnost: **DODAJ**

Dejavnost je primerna, ko je zmanjševanec velik, npr. 8 ali 9. Na tablo narišimo 10-okvir in vanj vrišemo npr. 8 pik. Učenci naj v svoje 10-okvirje postavijo enako število predmetov. Nato vržemo prilagojeno kocko s števili 12, 14, 15, 16, 17. Recimo, da pade število 15. Z učenci razpravljamo, kako bi okvir dopolnili tako, da bi prikazali število 15. Poudarimo idejo »za dve več«, da najprej pridemo do 10 in nato nadaljujemo do 15. Učenci okvir dopolnijo z dvema predmetoma (pozneje lahko delamo z risanjem), nato začnejo polniti nov okvir, ki ga učitelj doda. Ko je zmanjševanec 9, poudarjamo idejo »za ena več«. Pozorni smo na to, da učenci vedno najprej dopolnijo prvi okvir.



Slika 4: Miselno dodajanje. (vir: lasten)

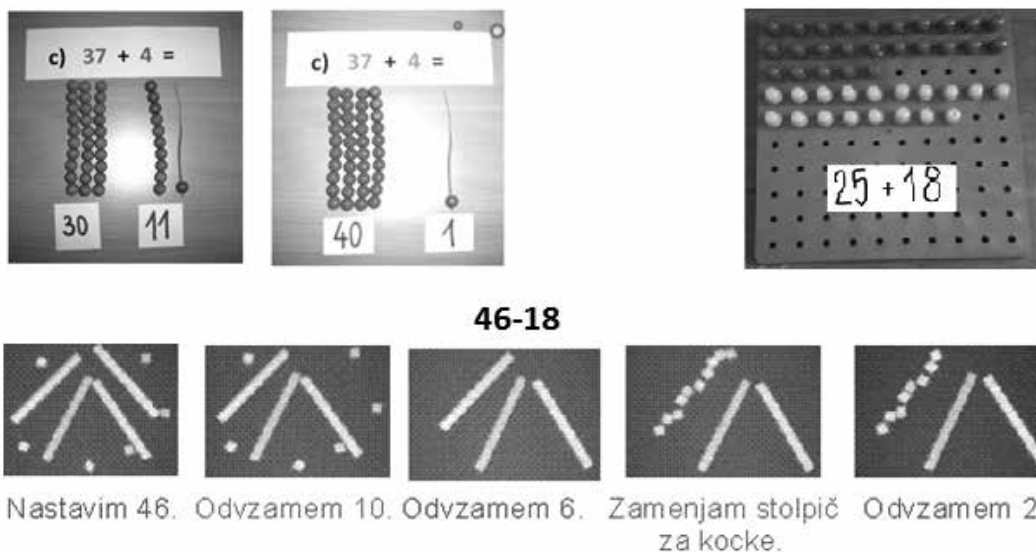
V drugem razredu ponovimo nekatere izmed konkretnih dejavnosti. Operativni cilj drugega razreda: učenci seštevajo in odštevajo v množici naravnih števil do 20 vključno s številom 0, dosegamo tako, da konkretno dejavnost najprej nadgradimo s sliko (kjer pa nujno poudarimo desetico) in simbolnim zapisom. Način dela ostaja torej enak, kot je bil do zdaj v drugem razredu.

V drugem razredu izvajamo dejavnosti seštevanja s prehodom do 100 na konkretni ravni z različnimi pripomočki, ki ponazarjajo desetice. Metodичni koraki ostajajo enaki. Seštevanje

desetic (npr. $20 + 30$). Odštevanje desetic (npr. $70 - 30$). Prištevanje enic k deseticam (npr. $30 + 3$). Prištevanje enic k dvomestnim številom brez prehoda (npr. $34 + 5$). Odštevanje do desetiškega števila (npr. $67 - 7$). Seštevanje do desetiškega števila (npr. $63 + 7$). Prištevanje desetic k dvomestnim številom (npr. $55 + 40$). Seštevanje dvomestnih števil brez prehoda (npr. $42 + 35$). Odštevanje dvomestnih števil brez prehoda (npr. $67 - 32$). Prištevanje enic s prehodom (npr. $34 + 7$). Seštevanje dvomestnih števil s prehodom (npr. $25 + 8$). Odštevanje enic od desetiških števil (npr. $45 - 3$). Odštevanje enic s prehodom (npr. $37 - 9$). Odštevanje dvomestnih števil s prehodom (npr. $46 - 18$). Korake, ki so označeni kot koraki s prehodom, izvajamo samo na konkretnem nivoju, tj. od učencev pričakujemo pridobivanje vsote oz. razlike le z uporabo konkretnih ponazoril.

Najprej izvajamo torej dejavnosti, kjer prištevamo/odštevamo enice s prehodom (k čemur sodi tudi prištevanje do desetiškega števila). Na sliki lahko opazujemo uporabo raznobarnih steklenih biserov, kjer nanizamo najprej 37 rdečih (tri skupine po deset in še 7), dodati je treba 4 modre, kar storimo tako, da najprej dopolnimo zadnji niz, pri čemer porabimo 3 steklene bisere za nastanek štirih desetic oz. števila 40, preostala kroglica učencem pove, da je vsota enaka 41. Sledi seštevanje dvomestnih števil s prehodom, ki je ponazorjeno na plošči s čepki. Na plošči nastavimo 25 rdečih in 18 rumenih čepkov. Ker nas zanima skupno število, dopolnimo zadnjo vrstico rdečih čepkov tako, da ji dodamo 5 rumenih čepkov. Vsoto preberemo tako, da štejemo po vrsticah: deset, dvajset, trideset, štirideset...štirideset in tri je 43.

Pri odštevanju s prehodom slika ponazarja kar odštevanje dvomestnih števil, kajti zadnji koraki predstavljajo korak odštevanja enic s prehodom. Tokrat uporabimo Dienesove kocke. V splošnem uporabljamo tiste pripomočke, ki so nam na voljo, pazimo le, da ponazarjajo strukturo desetic in enic in omogočajo manipuliranje s števili do 100. Škatle za jajca npr. niso več primeren pripomoček, ker jih učenec potrebuje preveč, da bi jih lahko zložil predse. Nastavimo torej 46, in sicer uporabimo 4 desetice in 6 enic. Ker želimo odšteti 18, najprej odvezamemo 1 desetico, nato pa ugotovimo, da nam z nadaljnjim odštevanjem ne bo uspelo, če ne bomo desetice zamenjali za 10 enic. Ko to storimo, sta na mizi 2 desetici in 16 enic, od česar lahko odvezamemo 8 enic. Ostaneta 2 desetici in 8 enic oz. 28.



Slika 5: Odštevanje v obsegu do 100. (vir: Alenka Lipovec, Vesna Vrščič)

V tretjem razredu učencem po predstavitvi problema, ki vključuje seštevanje oz. odštevanje s prehodom do 100, najprej omogočimo, da predstavijo lastne strategije. Morda bodo zapisali kaj podobnega, kot lahko opazujemo na spodnji sliki.

The image shows four different handwritten strategies for solving arithmetic problems:

- Strategy 1 (Left):** A vertical addition of 46 and 38. 46 + 38 = 70, then 70 + 14 = 84.
- Strategy 2 (Middle-Left):** A diagram showing 46 + 38. An arrow points from 6 to 8, and another from 4 to 4. Below it, 44 + 40 = 84.
- Strategy 3 (Middle-Right):** A sequence of steps: 46 + 38, then 46 + 40 → 86, then 86 - 2 → 84.
- Strategy 4 (Right):** A sequence of steps: 46 + 38 → 76 + 8 → 84. Below 8, it is split into 4 and 4.

Slika 6: Strategije seštevanja. (vir: lasten)

Seštevanje in odštevanje do 100 pozneje izvajamo skozi običajno prehajanje nivojev, pri čemer poudarjamo dopolnjevanje desetice.

Preden uvedemo pisni algoritem za seštevanje in odštevanje, moramo biti povsem prepričani, da imajo učenci usvojena temeljna dejstva, tj. poštevanje in seštevanje in odštevanje do 100. Tehnologija spreminja pomembnost algoritmov, nekateri postajajo bolj, nekateri manj pomembni. Za dano nalogo vključujejo pisni algoritmi tri tipe procesov: miselne, papir in svinčnik, uporaba tehnologije. Zavedati se je treba, da bodo učenci algoritme vedno preoblikovali po svoje, ne glede na to, katere algoritme učitelji mislijo, da učijo in da morajo učenci za uporabo algoritma imeti razvita orodja in sposobnost uporabe le-teh (poštevanje, ocenjevanje). Pisne algoritme učimo po enakem postopku, kot smo jih do zdaj učili v četrtem razredu. Pazimo, da ne računamo z dvomestnimi števili in da najprej zahtevamo oceno rezultata.

Najprej pisno seštevamo in odštevamo brez prehoda. Sledijo računi z enim prehodom (čez desetico ali stotico) npr. $165 + 726$ ali $634 + 542$. Prenos je treba utemeljiti, preden ga verbaliziramo, in ga tudi vidno zapisovati ter poudarjeno verbalizirati. Ne pozabimo na naloge, kjer je prenos več kot 1 (pri seštevanju treh seštevancev je prenos 0, 1 ali 2). Pri odštevanju najprej uporabljamo direktno odštevanje tj. odštevanje navzdol, čim prej pa poskušamo z odštevanjem z dopolnjevanjem (npr. 3 in koliko je 2). Osnova pisnega algoritma, ki ga izvajamo v Sloveniji, je konstantnost razlike oz. to, da lahko zmanjševancu in odštevancu prištejemo ali odštejemo isto število, pa se razlika ne spremeni. V primeru algoritma pravilo uporabimo, ko prištejemo 10 enic in hkrati 1 desetico. Kljub popolnoma drugačni konceptualni osnovi kot pri seštevanju je žal tradicionalno vpeljano, da govorimo 1 naprej, čeprav pri odštevanju pravzaprav nič ne »gre naprej«.

1.2.2.3 Racionalna števila

Del celote nastane, ko celoto razdelimo na enake dele. Celota oz. enota je lahko objekt ali zbirka stvari. Bolj abstraktno: celota je 1. Deli celote imajo posebna imena, ki povedo, koliko delov je potrebnih za nastanek enote. Npr. potrebujemo tri tretjine za celoto. Če iz celote naredimo več delov, so ti manjši. Npr. osmine so manjše od petin (če je celota podana). Imenovalec ulomka pove, na koliko enakih delov je bila razdeljena enota. Zato igra imenovalec

vlogo delitelja. Imenovallec tudi poimenuje del celote. Števec ulomka prešteje ali pove, koliko delov (tistega tipa, ki ga določi imenovallec) proučujemo. Torej je števec večkratnik danega dela celote. Dva ekvivalentna ulomka predstavljata dva načina opisa enake količine z uporabo različnih delov celote. Če npr. v ulomku $\frac{6}{8}$ gledamo osmine paroma, nam vsak par osmin predstavlja četrtno in dobimo $\frac{3}{4}$.

Dele celote obravnavamo samo na konkretni in slikovni ravni. »Računanje« z deli celote je v petem razredu le na konkretni in slikovni ravni. V petem razredu je predlagano seštevanje in odštevanje enakih delov celote, pri čemer smo posebej pozorni na ekvivalentne zapise delov celote (npr. od $\frac{3}{4}$ pice smo pojedli $\frac{1}{4}$, ostali sta nam $\frac{2}{4}$ oz. $\frac{1}{2}$ pice.). Šele v šestem razredu začnemo s seštevanjem in odštevanjem poljubnih delov celote.

Primer

Imamo 3 enake kozarce z enako prostornino in enako obliko. Prvi kozarec napolnimo do $\frac{1}{2}$, drugega pa do $\frac{1}{4}$. Tekočino iz obeh kozarcev zlijemo v tretjega. Kako visoko sega tekočina v tretjem kozarcu?

Na dele celote lahko gledamo z vidika treh različnih, a med seboj tesno povezanih modalitet: geometrijske, merljive in aritmetične. Geometrijsko modaliteto predstavljajo območja oz. geometrijski modeli. To so tortni modeli, pravokotni modeli, geoplošča, risbe na mreži, ploščice za vzorčke, zlaganje papirja, risbe na pikčastem papirju ... Merljivo modaliteto predstavljajo trakovi oz. merljivi modeli. To so: Cuisenairove paličice, številska premica, risbe delov daljice, preloženi trakovi papirja. Merljiva modaliteta predstavlja most med geometrijskim in aritmetičnim vidikom. Trakove lahko prelagamo, lahko pa dolžino dela traku tudi izračunamo. Aritmetično modaliteto predstavljajo števne množice.

Pri racionalnih številih sledimo naslednjim metodičnim korakom:

- Načelo pravične delitve.
- Štetje delov celote.
- Od celote k delom.
- Več delov celote.
- Od delov k celoti.
- Primerjamo.

Načelo pravične delitve (polovica, četrtna, tretjina)

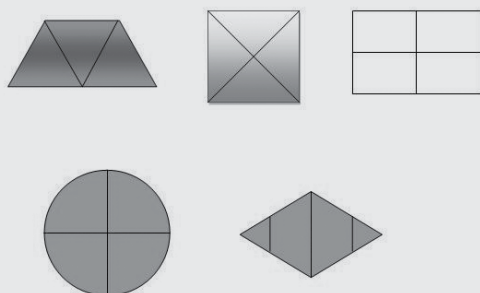
V drugem razredu najprej dele celote poimenujemo brez simbolnih zapisov. Poudarjamo, da dobijo deli celote »ime« (tj. polovice, tretjine ipd.) le, če gre za t. i. »pravično delitev«. Najprej na konkretnih modelih oblikujemo polovice, nato četrtnine in šele nazadnje tretjine. Uporabljati začnemo primere iz vsakdanjega življenja, ki jih bomo pozneje lahko ponazarjali z vsemi tremi modeli. Začnemo z območji oz. geometrijskimi modeli. Izbiramo primere iz njihovih izkušenj, ki jih bomo pozneje lahko ponazarjali z območji, kot so npr. torta, pica, list papirja ... Jabolka, bomboni oz. drugi nepravilni predmeti so manj primerni, ker jih v nadaljevanju težje prikažemo

na ikonični ravni. Polovice lahko navežemo na simetrijo in jo opazujemo pri likih z vsaj eno simetralo, npr. metuljčku, srčku, smreki ... Za četrtnine potrebujemo like z vsaj dvema simetralama, npr. papirnat krožnik, pravokotni piškoti, zvezda s sodo mnogo kraki ... Poudarjamo načelo pravične delitve. V vsakem primeru posebej poudarimo, da dobi del celote ime le, če je bila celota razdeljena na dele enake velikosti (ne pa tudi nujno enake oblike). Nadaljujemo z merljivimi modeli, tj. različnimi trakovi, vrvicami ipd. Učenci jih najprej razpolavljajo, nato poiščejo četrtnino. Dele celote poiščejo s prepogibanjem. Nazadnje oblikujemo še polovico in četrtnino števnih množic. V aritmetičnih modelih se povezujemo z deljenjem na konkretni ravni. Otroci poiščejo, koliko frnikol tvori polovico vrečke s sodo mnogo frnikolami ali koliko sličic dobi vsak izmed 4 prijateljev, ki si pravično delijo 12 sličic. Vključujemo primere partitivnega deljenja (deljenje »med«) in kvocientnega deljenja (deljenje »po«). Primeri, na katerih oblikujemo tretjine, so težji. Otrokom ponudimo najprej like, ki so očitno deljivi na tri enake dele, kot so npr. zvezde s 3, 6, 9 kraki, enakostranični šestkotnik ... Znova nadaljujemo z vrvicami, ki jih konkretno razdeljujemo na tretjine, in zaključimo z iskanjem tretjine števnih množic (npr. koliko triperesnih deteljc ima 15 listkov). Vzporedno pri vseh modelih poudarjamo načelo pravične delitve in utrjujemo poimenovanje na verbalni ravni.

Učitelj naj sam presodi, ali bo vsakega izmed delov celote (polovica, četrtnina oz. tretjina) vpelejal skozi konkretno in slikovno ponazoritev posamič ali pa bo vse tri dele celote najprej prikazoval enaktivno (konkretno dejavnostno) in šele nato ikonično (postopna shematizacija). Na slikovni ravni učenci npr. obkrožijo slike, ki prikazujejo četrtnine, pri čemer smo posebno pozorni na problematične primere, tj. like, ki sicer so razdeljeni na štiri dele, vendar ti deli niso četrtnine.

Dejavnost: **POPRAVI**

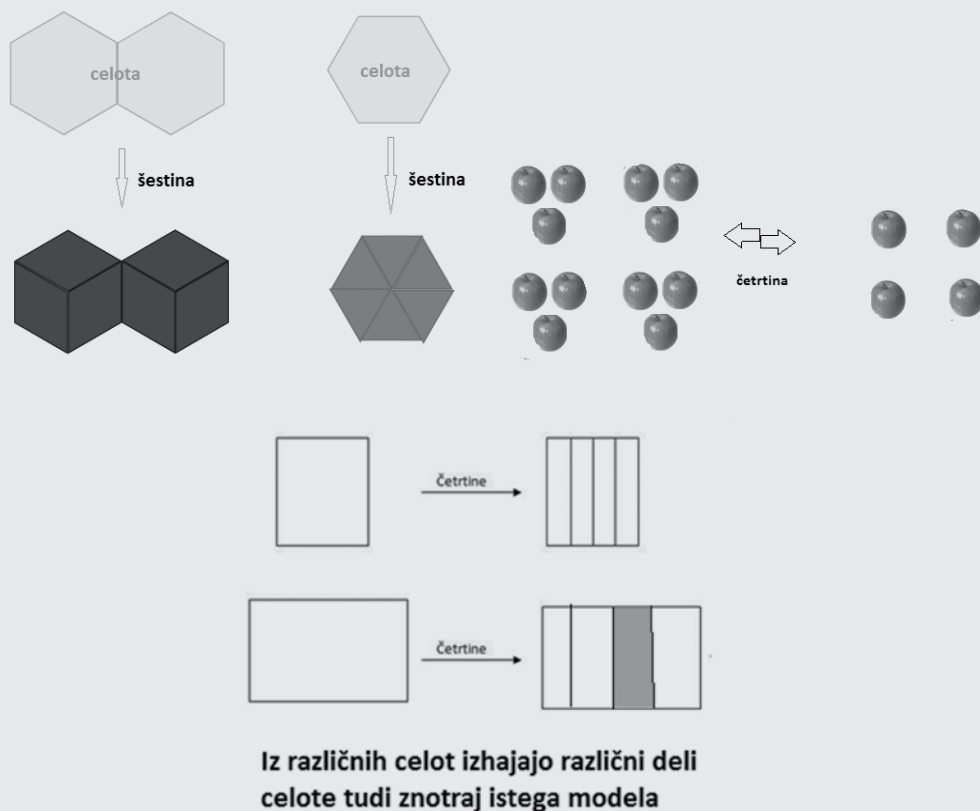
Učencem pokažite ustrezne in neustrezne primere razdeljenih celot. Uporabite lahko konkreten material ali slikovne ponazoritve. Slika prikazuje celote, ki so razdeljene na dele. Tam, kjer so deli enako veliki, dobimo dele celot, sicer ostanejo deli nepoimenovani. Trapez je torej razdeljen na tretjine, kvadrat, pravokotnik in krog so razdeljeni na četrtnine, paralelogram je sicer razdeljen na štiri dele, ki pa niso enako veliki. Učenci morajo prepoznati, da tokrat ne gre za četrtnine in v naslednjem koraku paralelogram pravilno razdeliti. Možnih rešitev je več, zato morajo vsako izmed rešitev učenci utemeljiti. Učenci lahko paralelogram razdelijo na četrtnine z vzporednimi črtami ali pa s pomočjo diagonal, mogoče pa so tudi druge rešitve.



Slika 7: Deli celote. (vir: lasten)

Dejavnost: **RAZLIČNE CELOTE**

Učenci morajo s pomočjo danih modelov poiskati različne dele celot (četrtnine, petine, osmine ...). Na modelih ne sme biti zapisan ulomek. Dejavnost je še posebej zanimiva, ko so v enakih modelih upodobljene različne celote. Tako se prikazan del celote ne prepozna zaradi različnih barv ali posebnih oblik, ampak zaradi razmerja do celote. Pazite, saj učenci velikokrat zamenjujejo števec in imenovalec.



Slike 8–10: Celota. (vir: lasten)

Štetje delov celote

Ob podobnih konkretnih dejavnostih kot v drugem razredu je v tretjem razredu bistvena vpeljava simbolizma. Ulomki, ki jih zapisujemo v tretjem razredu, imajo v števcu 1. Imenovali jih bomo enotski ulomki. V tretjem razredu se o mejimo na »preproste ulomke«, kot so npr. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$. Opomba: Čeprav je zapis $\frac{2}{8}$ matematično ekvivalenten zapisu $\frac{1}{4}$, ga v tretjem razredu ne bomo obravnavali. Vpeljemo dejavnost »štetja delov celote«, pri čemer s simbolom zapisujemo samo en del celote.

Začnemo z nalogami razpolavljanja (polovica, četrtnina, osmina) nadaljujemo z nalogami tretjinjenja (tretjina, šestina).

Naloge razpolavljanja: Dva otroka si delita 5 čokolad. Štirje otroci si delijo 10 čokolad. Štirje otroci si delijo 2 čokoladi. Štirje otroci si delijo 5 čokolad. Osem otrok si deli 4 čokolade. Štirje otroci si delijo 3 čokolade.

Naloge tretjinjenja: Šest otrok si deli 4 pice. Trije otroci si delijo 4 pice. Trije otroci si delijo 5 pic. Šest otrok si deli 7 pic.

Vsako izmed nalog naj otroci poskušajo rešiti na različne načine. S tem dobimo bogat nabor izhodiščnih problemov.

Primer:

Trije otroci si delijo štiri pice. Lahko delimo tako, da najprej razdelimo cele pice in nato zadnjo pico razrežemo na tretjine. En otrok torej dobi eno pico in še eno tretjino. Lahko pa delimo tako, da vse pice razrežemo na tretjine in vsak otrok dobi štiri tretjine pice. V petem razredu je lahko primerjava teh dveh rešitev osnova za vpeljavo mešanih ulomkov.

V tretjem razredu vpeljemo simbolni zapis. K razumevanju simbolnega zapisa prispeva dejavnost štetje delov celote. Otrokom pokažemo več delov celote (npr. 9 kosov pice, ki predstavljajo osmino pice) in skupaj z njimi štejemo ter se sprašujemo, ali imamo več, manj ali enako, kot je celota. Nato zapišemo s simbolom enotski ulomek, ki predstavlja del celote, v našem primeru $\frac{1}{8}$. Brez simbolnega zapisa nato štejemo »ena osmina, dve osmini, tri osmine, štiri osmine, pet osmin, šest osmin, sedem osmin, osem osmin, devet osmin«. Ko dele celote preštejemo, se pogovorimo o tem, ali gre za več, manj ali enako, kot je celota. S sestavljanjem delov otroci ugotovijo, da imamo »eno celo pico« in še eno osmino. Simbolnega zapisa v tem primeru ne vpeljujemo, rezerviran je za peti razred.

Ko opisujemo ulomek, naj učenci ob več primerih povedo, kaj pomeni imenovalec. Ker je v tretjem razredu števec vedno 1, se posebej posvetimo pomenu imenovalca in še vedno poudarjamo načelo pravične delitve. Besed števec in imenovalec v tretjem razredu običajno ne uporabljamo, ampak jih nadomeščamo z izrazi »število spodaj oz. število, ki nam pove, na koliko enakih delov je razdeljena celota«, in »število zgoraj oz. število, ki nam pove, koliko delov celote opazujemo«.

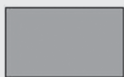
Od celote k delom

V tretjem razredu torej ob dani celoti in ulomku iščemo del celote, in sicer znotraj vseh treh modelov. Pri geometrijskem modelu je torej dana celota, npr. narisana je pravokotnik, vemo tudi, da mu je treba poiskati $\frac{1}{4}$. Podobno je v merljivem modelu podana vrstica, ki ji npr. moramo določiti $\frac{1}{6}$. Šestino določimo najprej konkretno, nato pa lahko merljivi model povežemo z aritmetičnim tako, da podamo dolžino vrvice npr. 6 dm.

Poleg tega v tretjem razredu ob dani celoti in delu zapisujemo ulomek v vseh treh modelih. Geometrijske naloge te vrste običajno zahtevajo zapis ulomka ob različnih zasenčenih likih. V merljivem modelu, ki ga v tretjem razredu običajno povežemo z aritmetičnim preko poštevanka, je podana dolžina daljice npr. v življenjski situaciji ceste, podana je tudi dolžina dela celote, ki ga opazujemo, učenec mora zapisati ulomke. Primer: Zgraditi moramo 5 km ceste. Zgradili smo že 1 km. Opiši z ulomkom, koliko ceste je že zgrajene.

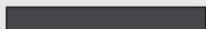
Dejavnost: **POIŠČI DEL CELOTE**

Učenci ob različnih modelih iščejo dele celote. Besedni zapis in enotski deli celote sodijo v tretji razred, simbolni zapis in več delov celote pa v četrti razred.

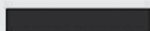


Pravokotnik predstavlja celoto, poišči eno četrtno.

Prevokotnik predstavlja celoto, poišči dve tretjini.



Rjava paličica predstavlja celoto. Poišči eno četrtno.



Temno zelena paličica predstavlja celoto. Poišči dve tretjini.



Deset pik predstavlja celoto. Poišči eno polovico.

Deset pik predstavlja celoto. Poišči dve petini.

Slika 11: Iskanje celote v različnih modalitetah. (prirejeno po Van de Walle, 2004)

Več delov celote

Ob nalogah razpolavljanja in nalogah tretjinjenja v četrtem razredu simbolno zapisujemo tudi ulomke, ki imajo v števcu števila večja od 1. Čeprav je vsebina ekvivalentnih ulomkov označena kot izbirna, se bo verjetno naravno pojavila ob teh dejavnostih. Učitelj naj presodi, ali jo bo obravnaval. Še vedno je ena izmed temeljnih dejavnosti štetje delov celote, vendar tokrat verbalne opise tudi simbolno zapisujemo.

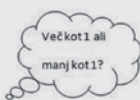
Dejavnost: **VEČ, MANJ ALI ENAKO KOT CELOTA**

Za izvajanje te dejavnosti potrebujete modele, ki so lahko narisani ali pa plastični.

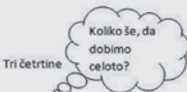
Pri tej dejavnosti učencem prikažite nekaj primerov modelov. Pri vsakem primeru povejte učencem, kateri del je prikazan, in skupaj preštejte (ena četrtna, dve četrtini, tri četrtine, štiri četrtine, pet četrtin). Nato vprašajte, ali imamo pet četrtin, ali je to več kot ena celota, manj kot ena celota ali enako kot ena celota. Naloga torej zahteva, da se učenci odločijo, ali model predstavlja več kot eno celoto. Učenci morajo odgovor utemeljiti z narisano risbo ali s številkami. Prav tako lahko povejo, koliko še manjka do ene celote.



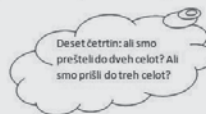
Pet četrtin

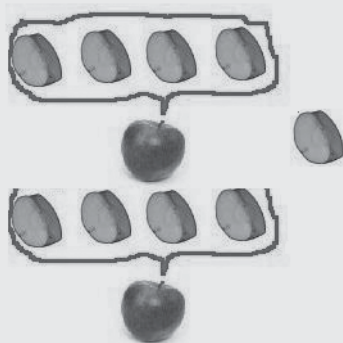


Tri četrtine



Deset četrtin





Slike 12–14: Več kot celota. (prirejeno po Van de Walle, 2004)

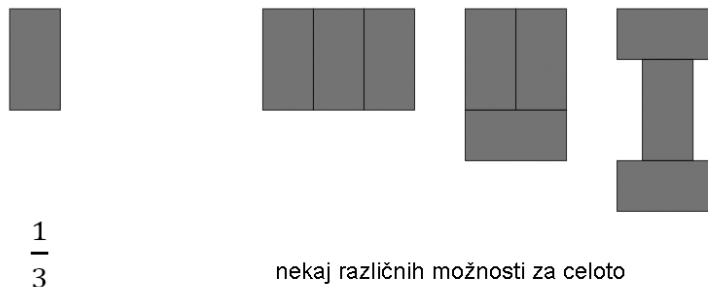
Od delov k celoti

V četrtem razredu so trije cilji namenjeni razumevanju zapisa $\frac{a}{a'}$ od $b = c$. V zapisu obstajajo tri možnosti za neznanko. Neznani je lahko ulomek $\frac{a}{a'}$, neznana je lahko celota b , neznani je lahko del celote c .

- Če je neznanka ulomek $\frac{a}{a'}$, znani pa sta vrednosti za celoto b in del celote c , dosegamo cilj: Učenci zapišejo dele celote z ulomkom (npr. $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$...).
- Če je neznanka celota b , znan pa je ulomek $\frac{a}{a'}$, in del celote c , dosegamo cilj: Učenci določijo vrednost celote, če je znan njen del (npr. $\frac{1}{3}$ od ____ = 5),
- Če je neznanka del celote c , znan pa je ulomek $\frac{a}{a'}$ in vrednost celote b , dosegamo cilj: Učenci izračunajo vrednost enega dela celote, če je znana celota (npr. $\frac{1}{3}$ od 18 = ____).

Vsak izmed navedenih primerov nastopa vsaj v dveh težavnostnih stopnjah – če je ulomek enotski oz. če je ulomek večkratnik enotskega ulomka. Cilja B in C bomo v četrtem razredu obdržali na ravni enotskih ulomkov, v petem razredu pa dvignili na večkratnike enotskih ulomkov. Znanje cilja A za primer enotskih ulomkov so učenci že pridobili v tretjem razredu. Dodatno je treba cilje dosegati v treh različnih modalitetah geometrijski (G), merljivi (M) in aritmetični (A). Obstaja torej devet različnih tipov dejavnosti, ki se jim v petem razredu pridruži še devet tipov za neenotski ulomek. Oglejmo si primer naloge za četrti razred, ki zasleduje cilj B v geometrijski (G) za enotski ulomek.

V geometrijskem modelu je torej npr. dan pravokotnik, za katerega vemo, da predstavlja $\frac{1}{3}$ neznanega lika. Možnih je več rešitev, kot je prikazano tudi na sliki. Rešitve primerjamo in se pogovarjamo o tem, ali so vse ustrezne.

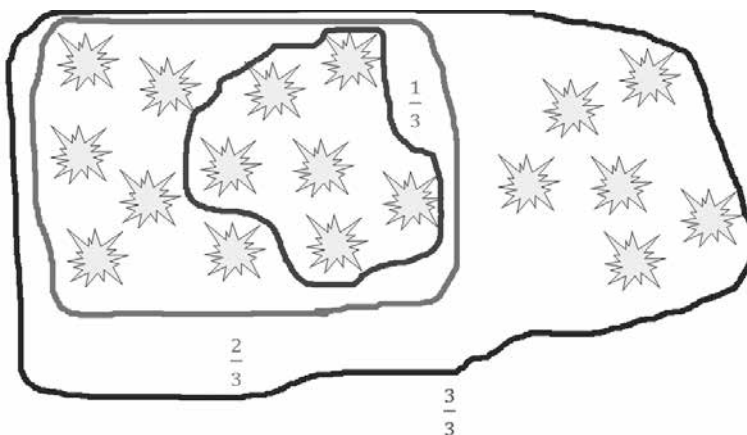


Slika 15: Iskanje celote. (vir: lasten)

V četrtem razredu izvajamo naslednje dejavnosti znotraj vseh treh modelov: dana je celota in ulomek, koliko je del celote, dan je del in ulomek, poišči celoto, in dana je celota in del, poišči ulomek.

V petem razredu cilj B nadgradimo z nalogami, kjer je ulomek večkratnik enotskega ulomka. Naloga postane bistveno težja. Oglejmo si jo na primeru aritmetične modalitete. Primer: Mojca je na travniku nabrala 12 rumenih cvetov, kar je bilo $\frac{2}{3}$ vseh cvetov na travniku. Koliko cvetov je na travniku?

Delamo z modeli ali s slikami. Najprej ugotovimo, da je ena tretjina polovica dveh tretjin oz. $12 \text{ cvetov} : 2 = 6 \text{ cvetov}$. Razmislimo, da je vseh cvetov na travniku tri tretjine (v tem delu se nam obrestujejo dejavnosti štetja delov celote). Če imamo dve tretjini, moramo torej dodati še eno tretjino. Vseh cvetov je torej 18.



Slika 16: Celota v aritmetičnem primeru. (vir: lasten)

Zelo pomembno je, da vsako tako nalogo rešujemo z modelom, torej s sklepanjem, brez vpeljevanja simbolike, kot je npr. $\frac{2}{3}$ od ____ = 12 oz. različnih »receptov«, kako poiskati neznano število v tem primeru.

Dejavnost: **DAN JE DEL IN ULOMEK, POIŠČI CELOTO.**

Učenci imajo podan del v različnih modalitetah in ulomke, ki prikazuje razmerje med podanim delom in celoto. Poiskati morajo celoto. Možnih rešitev je več. Enotski ulomki sodijo v četrti razred, ulomki z števcem večjim od 1 pa v peti razred.



Pravokotnik ponazarja eno tretjino. Nariši obliko, ki bi lahko bila celota.

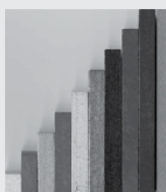


Pravokotnik predstavlja tri četrtine celote. Nariši pravokotnik, ki bi lahko bil celota.



Če vijolična paličica predstavlja eno tretjino, katera paličica je predstavljala celoto?

Če temnozeleni paličica predstavlja dve tretjini, katera paličica je predstavljala celoto?



(Vijoličasta paličica je četrta v vrsti, temnozeleni pa šesta.)



Če štiri bomboni predstavljajo polovico, koliko bombonov predstavlja celoto?



Če 12 bombonov predstavlja tri četrtine, koliko bombonov predstavlja celoto?

Slike 17–19: Iskanje celote pri ulomkih s števcem, večjim od 1. (prirejeno po Van de Walle, 2004)

Primerjamo

Ključna ideja pri ulomkih je, da ulomek ne pove ničesar o velikosti celotnega ali velikosti posameznega dela. Ulomek nam pove samo, kaj je razmerje med delom in celoto. Zato je potrebno učence postaviti pred naslednjo dilemo: Marku je na voljo tretjina pice ali polovica pice. Zelo je lačen in pica ima rad, odloči se za polovico pice. Njegova prijateljica Jana dobi tretjino pice, vendar konča z večjim kosom. Kako je to mogoče? Učenci bodo iz izkušenj vedeli, da je bila Janina pica večja od Markove. Primerjave, s katerimi koli modelom se lahko izvede torej le, če sta oba ulomka del iste celote.

Dodatno v četrtem razredu začnemo ulomke primerjati. Običajno v četrtem razredu naredimo primerjanje ulomkov z enakimi imenovalci in različnimi števci (npr. $\frac{1}{3}$ in $\frac{2}{3}$) ter z enakimi števci, a različnimi imenovalci (najprej primerjamo $\frac{1}{3}$ z $\frac{1}{4}$, nato tudi $\frac{2}{3}$ z $\frac{2}{5}$).

Prvi primer je učencem lahko razumljiv, saj gre za nadgradnjo primerjanja naravnih števil tudi z drugim primerom ni večjih težav, kajti do zdaj naj bi učenci že doumeli, da večji imenovalec pomeni manjše dele. Oglejmo si ga natančneje na vseh treh modalitetah.

Če sta imenovalca enaka, primerjamo samo števca. S tem primerom učenci nimajo večjih težav, ker upošteva pravila, ki so jih že vajeni pri množenju naravnih števil. Če je torej vprašanje:

kateri ulomek je večji $\frac{2}{9}$ ali $\frac{4}{9}$, bodo učenci verjetno odgovor poznali. Kljub temu je nujno, da odgovor poiščemo z uporabo vseh treh modalitet, tj. skozi geometrijski, merljivi in aritmetični model. Le tako bomo zagotovili, da učenci na problem gledajo kot na primerjavo dveh ulomkov, ne pa na primerjavo poljubnega nabora števil.

Primerjava na merljivem modelu je preprosta, ker velikost nakazuje tudi dolžina. Pokažimo to pri primerjanju $\frac{3}{8}$ in $\frac{5}{8}$. Nalogo najprej postavimo v kontekst merjenja. Lahko bi npr. vpraševali po tem, kdo ima daljšo pentljo: Mojca, ki je od modrega traku odrezala $\frac{3}{8}$, ali Tinka, ki je od rdečega traku enake dolžine odrezala $\frac{5}{8}$ za svojo pentljo. Ker sta trakova enako dolga, učenci iz slike hitro razberejo relacijo $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$ in ugotovijo, da ima daljši trak Tinka. Pri geometrijskem modelu uporabimo običajno kontekst tort ali pic. Nalogo znova zastavimo v življenjskem kontekstu. Sprašujemo se torej, kdo je pojedel več pice. Dva fanta sta šla na pico, oba sta naročila pico enake velikosti. Ob koncu sta oba ugotovila, da bosta morala nekaj pustiti na krožniku. Kdo je pojedel več: Matej, ki je pojedel $\frac{13}{16}$, ali Andrej, ki je pojedel $\frac{15}{16}$? Uporabimo krožni model pice. Učenci bodo znova brez večjih težav ugotovili, da je več pojedel Matej. Pri aritmetičnem modelu moramo biti pozorni na to, da računamo vedno od iste celote. Če bi namreč računali $\frac{a}{b}$ od c in $\frac{x}{y}$ od w , pri čemer bi bili števili c in w različni, ne bi mogli o primerjavi ulomkov $\frac{a}{b}$ in $\frac{x}{y}$ reči ničesar. Na konkretnem primeru bi torej poskušali primerjati $\frac{3}{5}$ od 10 in $\frac{2}{5}$ od 15. Ker sta celoti različni (15 in 10), dobimo popolnoma napačen rezultat. Kot vemo, je $\frac{3}{5}$ od 10 = 6 in $\frac{2}{5}$ od 15 = 6, kar bi pomenilo, da bi bilo $\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, kar seveda ni res. Zašli smo v protislovje. Pri vseh aritmetičnih modelih torej pozornost učencev usmerjamo v izbiro ustrezne celote. Znova delamo v kontekstualnih situacijah. Če je mama spekla 48 krofov in jih je $\frac{5}{12}$ odprodala teti Minki, $\frac{7}{12}$ pa jih je podarila sosedu Mojci, se lahko vprašamo, kdo ima več krofov, Minka ali Mojca?

Pazimo na življenjskost. Število spečenih krofov mora biti smiselno, paziti je treba tudi, da jih ne odda več, kot jih je spekla. Učencem pomagamo s slikovno ponazoritvijo, pri čemer pazimo, da je iz slike mogoče ali skozi stolpce ali skozi vrstice obkrožiti ustrezne deleže. Število krofov lahko tudi izračunamo. Minka je kupila $\frac{5}{12}$ od 48 krofov. Najprej izračunamo $\frac{1}{12}$ od 48 = 48 : 12 = 4, nato ugotovimo, da je $\frac{5}{12}$ od 48 petkrat več oz. $5 \cdot 4 = 20$.

Analogno delamo pri primerjavi ulomkov, kjer se ulomka razlikujeta v imenovalcu, števec pa je enak.

V petem razredu pa primerjamo ulomke na podlagi dveh strategij: upoštevaj celoto in upoštevaj polovico. V prvem primeru učenci opazujejo, koliko »manjka do celote«, npr. $\frac{7}{8}$ in $\frac{8}{9}$

razložimo (ob slikovnem materialu seveda): »V prvem primeru manjka do celote osmina, v drugem primeru pa devetina. Ker je osmina večja od devetine, je $\frac{7}{8}$ manj kot $\frac{8}{9}$. Primerjanje s polovico je učinkovito takrat, ko primerjamo ulomka, pri katerih je eden manjši od $\frac{1}{2}$ (npr. $\frac{3}{7}$), drugi pa večji od $\frac{1}{2}$ (npr. $\frac{5}{9}$). Ob slikovnem materialu učence napotimo na opazovanje odnosa med ulomkom in eno polovico, kar mu pomaga pri sklepu. Na razredni stopnji nikakor ne vpeljujemo križnega množenja ali razširjanja na skupni imenovalec, ker sta oba postopka preveč abstraktna.

Namesto neposrednega poučevanja različnih možnih metod za primerjavo ulomkov izberite par, ki bo verjetno sprožil želeno strategijo primerjave. V enem dnevu lahko imate, na primer, dva para z enakimi imenovalci in enega z enakimi števci. Naslednji dan lahko, na primer, izberete par ulomkov, v katerem je vsak del točno en del od celote. Poskusite zgraditi strategije v nekaj dneh.

1.2.2.4 Kot

Čeprav se otroci z besedo kot srečujejo v vsakdanjem življenju, pa ji ne pripisujejo enakega pomena, kot ga nosi matematični pojem. V pojmu kota lahko ločimo tri vidike kota: kot je del ravnine, kot je velikost rotacije, ki je potrebna za zasuk enega kraka na drugega, in kot je 'razlika' med dvema smerema. Osredotočimo se le na prvi vidik. Četrtošolci pojem kot običajno zaznavajo kot vrh, tj. točko kot vogal v sobi ali točko, na kateri stoji nogometaš, ko izvaja kot. Bolje zaznavajo ostre kote, topih in izbočenih pa ne, zato se bomo v nadaljevanju osredotočili na ostri kot. Pri primerjavi velikosti kotov se opirajo na lastna pojmovanja in velikost kota največkrat zaznavajo skozi dolžino krakov. Kot večjega torej zaznajo kot, ki ima narisane daljše krake.

Kote vpeljujemo skozi dva metodična koraka:

- seznanjenost in
- podobnost oz. primerjanje.

Seznanjenost

Učence moramo najprej seznaniti z različnimi situacijami kotov. Vsak učenec zase mora torej raziskovati različne situacije kotov, da se seznani z njimi. Prvi matematični stik s področjem koti učenci dobijo v četrtem razredu. Ko usvojijo prepoznavanje vzporednic ter sečnic, med katere kot poseben primer spadajo tudi pravokotnice, je naslednja učne enota iz geometrije opazovanje in primerjanje lege dveh premic. Poznajo že odnos pravokotnosti v pravokotniku in kvadratu, ki ga uporabimo kot izhodišče. Operativni cilj četrtega razreda: učenci opazujejo odnos med sosednjima stranicama v večkotniku (pridobivanje izkušenj za poznejše vpeljevanje kotov), uresničujemo skozi nadgradnjo zaznave kota kot vrha. Učenci opazujejo zdaj tudi krake (stranice). Čeprav se v začetku osredotočimo predvsem na krake, iščemo tiste primere iz vsakdanjega življenja, ki kot »dobro« opišejo. Začenjamo torej s primeri, kjer je mogoče zaznati tudi del ravnine, ki ga kraka omejujeta. Izbiramo lahko med pahljačo, svetlobnim snopom in vidnim kotom (npr. pogled skozi okno), vrhovi gora, pročelji streh hiš ... Izdelamo lahko tudi didaktični pripomoček, ki je podoben pahljači in ga sestavlja palici, ki sta gibljivo speti v eni točki, vmes pa je vpeta elastična tkanina, ali pa uporabimo kar pahljače različnih velikosti, da usmerjamo pozornost v neodvisnost velikosti od dolžine prikazanih krakov. Pozneje namenimo pozornost krakom v življenjskih situacijah kot npr. položaj rok pri plezanju, plesanju ipd.,

razprte škarje, smuči, položaj med kazalcema na uri. S pomočjo prej izdelanega pripomočka ponazarjamo kot tako, da pripomoček polagamo na slikovni material.

Podobnost oziroma primerjanje

Poučevanje kotov mora biti osredotočeno na prepoznavanje podobnosti med koti, ki se pojavljajo v danih situacijah. Tu poznamo neposredno in posredno ujemanje. Obe ujemanji potekata s pomočjo prej opisanega pripomočka. V učilnici bodo uporabne tudi slamice, ki jih prelomimo in z njimi na fotografijah ponazarjamo kote, pri čemer smo posebej pozorni na to, da učence usmerjamo v zaznavanje ploskve med kraki kot sestavnega dela kota. Pri neposrednem ujemanju, na primer, razpremo pahljačo za približno 45 kotnih stopinj. Poznavanje stopinj na tej stopnji za učence še ne pride v poštev. Vsakemu učencu damo slamico z navodilom, naj jo prepogne pod takšnim kotom, kot se mu zdi, da je razprta pahljača. Pri posrednem ujemanju učenci zopet uporabijo slamico. Tokrat jo uporabijo, da preverijo, ali sta kota v dveh danih situacijah enaka. To storijo tako, da postavijo samico v prvi kot, jo oblikujejo po njem, nato pa prenesejo k drugemu, tako ugotovijo, ali se kota ujemata oziroma ali sta enaka. Neposredno primerjanje bo verjetno dejavnost četrtega razreda, posredno primerjanje pa dejavnost petega razreda. V petem razredu bomo namreč kote tudi primerjali v okviru učnega cilja: učenci opazujejo in primerjajo kote v večkotniku. Če smo spretni, lahko s sestavljanjem dveh teleskopskih anten (mogoči sta podaljševanje in skrajševanje) izdelamo pripomoček, ki se bo uporabljal za prikaz kotov s kraki različnih dolžin. Ta lastnost nam bo v veliko pomoč pri utemeljevanju enake velikosti kotov z različno dolgimi kraki. Čeprav najdemo v petem razredu tudi cilj: učenci opazujejo in primerjajo kote, ki nastanejo pri sekanju premic, to ne pomeni, da učence seznanjamo s pojmi sovršni kot oz. sokot. Ta cilj nakazuje le primerjanje velikosti kotov oz. zaznavanje skladnih kotov.

Na razredni stopnji se izogibamo formalni vpeljavi kota, tj. besednim definicijam ali nepotrebnim poimenovanjem. Izhajamo izključno iz življenjskih situacij in opazovanja le-teh. Učenci namreč šele šestem razredu na nekoliko bolj formalen način spoznajo in usvojijo pojem kot in njegovo simboliko. Tretji metodični korak, imenovan poglobljanje, je rezerviran za šesti razred in vsebuje dejavnosti, s pomočjo katerih učenci prehajajo iz konkretnega v abstraktno znanje o kotih. Pri tem načelu učenci s pomočjo modelov narišejo kote, pravih velikosti in orientacije, definirajo različne vrste kotov, torej ostri, topi ter pravi kot in nazadnje podajo svojo lastno razlago pojma kot.

Literatura in viri

- 1 Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). *Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. Journal for Research in Mathematics Education* 17(1), 31–48.
- 2 Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectories approach*. New York: Routledge.
- 3 Labinowicz, E. (1989). *Izvirni Piaget: mišljenje – učenje – poučevanje*. Ljubljana: Državna založba Slovenije.
- 4 Lukežič, S. (2008). *Didaktična sredstva pri poučevanju in učenju matematike na razredni stopnji. Diplomsko delo*. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.

- 5 *Mason, J. (2004). Fundamental Constructs in Mathematical Education. London: RoutledgePalmer.*
- 6 *NCTM (1999). Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12. Virginija: 7 NCTM.*
- 7 *Skemp, R. R. (1987). The Psychology of Learning Mathematics. New Jersey: LEA.*
- 8 *Skemp, R. R. (1991). Mathematics in the Primary School. London: Rutledge.*
- 9 *Van de Walle, J. (2004). Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally. NY: Pearson.*
- 10 *Van Hiele, P. M. (1984). Summary of Pierre van Hiele's dissertation entitled: The problem of insight in connection with school children's insight into the subject-matter of geometry. V: Fuys, D., Geddes, D., Tischeler, R. (ur.). English translation of selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. Brooklyn: City University of New York, Brooklyn College.*

1.3 Merjenje dolžine, mase in prostornine – razširitev didaktičnih priporočil

Vesna Vršič, Zavod RS za šolstvo

1.3.1 Razporejanje ciljev in vsebin pri načrtovanju vzgojno-izobraževalnega dela

Na začetku šolanja uresničujemo cilje sklopa Merjenje ob izvajanju praktičnih dejavnosti. Izhodišče za delo v razredu so učne situacije, ki so vzete iz neposrednega okolja učencev ali njihovih interesnih področij. Priporočamo, da se uresničevanje ciljev tega sklopa pri matematiki povezuje s cilji drugih predmetnih področij, npr. s spoznavanjem okolja in športne vzgoje v prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju ali naravoslovja in tehnike, družbe ter športne vzgoje v drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju. Že na letni ravni pa bi morali učitelji večjo pozornost nameniti razporejanju in povezovanju ciljev ter vsebin različnih sklopov iz učnega načrta matematike v smiselno zaključeno celoto – didaktični oziroma učni sklop. V didaktičnih priporočilih v učnem načrtu za matematiko (2011: 20, 41) je navedeno, da imajo cilji in vsebine sklopa Logika in jezik in Matematični problemi in problemi iz vsakdanjega življenja pomembno mesto v vseh matematičnih vsebinah. Z vsebinami sklopov pod temo Druge vsebine naj bi učitelji spodbujali učenčev kognitivni razvoj, navajali učence na pravilno in natančno matematično izražanje, razvijali različne strategije pri reševanju problemov, prepoznavali in upoštevali pravila (v vzorcih) in delali s podatki. Tako lahko povežemo tudi cilje iz sklopa Logika in jezik, Prikazi in Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami s cilji in vsebinami sklopa Merjenje.

V preglednicah na naslednjih straneh predstavljamo primer povezovanja ciljev in vsebin sklopa Merjenje s cilji in vsebinami sklopa Logika in jezik, Prikazi ter Matematični problemi in problemi iz vsakdanjega življenja za drugi in četrti razred. Znotraj posameznega vsebinskega sklopa iz učnega načrta (Merjenje, Logika in jezik, Prikazi, Matematični problemi in problemi iz vsakdanjega življenja) so zajeti tako globalni cilji teme (Geometrija in merjenje, Druge vsebine) kot operativni cilji posameznega sklopa. Cilji v učnem sklopu za drugi in četrti razred so zapisani identično kot v učnem načrtu, vsebine pa so že nekoliko razdelane. K ciljem in vsebinam učnega sklopa so dodani še minimalni standardi znanja in standardi znanja prvega ali drugega vzgojno-izobraževalnega obdobja.

Preglednica 1: Povezovanje ciljev in vsebin na primeru sklopa Merjenje za drugi razred

MERJENJE IN MERSKE ENOTE ZA DOLŽINO, MASO TER PROSTORNINO				
SKLOP	Operativni cilji	Vsebina	Minimalni standard znanja	Standard znanja 1. VIO
MERJENJE	Učenci: - spoznavajo pomen uporabe standardnih enot in usvojijo osnovne merske enote*; - ocenijo, primerjajo in merijo dolžino, maso in prostornino z nestandardnimi (relativnimi in konstantnimi) in s standardnimi enotami; - zapišejo meritev z merskim številom in enoto; - poznajo in uporabljajo merilne instrumente (ravnilce, tehtnica, menzura ipd.) za merjenje količin; - seštejejo in odštevajo količine enakih enot;	Ocenjevanje in merjenje dolžine Merska enota za dolžino: m, cm Ocenjevanje in merjenje mase Merska enota za maso: kg Ocenjevanje in merjenje prostornine Merska enota za prostornino: ℓ		- uporablja merilne instrumente, - oceni in meri količine, meritve izrazi z merskim številom in z ustrezno mersko enoto, - pozna matematično terminologijo;
LOGIKA IN JEZIK	- razvijajo natančno in pravilno izražanje*; - pravilno uporabljajo izraze večji, manjši, daljši, krajši, težji, lažji, višji, nižji ipd., - odkrivajo in ubesedijo kriterij, po katerem so bili elementi urejeni, - razporejajo predmete glede na največ dve lastnosti, - odkrijejo in ubesedijo lastnost, po kateri so bili predmeti razporejeni, - prikažejo in berejo razporeditev predmetov z različnimi prikazi (Euler-Vennov prikaz ...);	Urejanje predmetov po dolžini, masi, prostornini Množice Predstavitev množic Puščni prikaz Relacije	razporedi predmete,	razporedi elemente po več lastnostih in razporeditev prikaže s preglednico ter prikazom;

MERJENJE IN MERSKE ENOTE ZA DOLŽINO, MASO TER PROSTORNINO				
SKLOP	Operativni cilji	Vsebina	Minimalni standard znanja	Standard znanja 1. VIO
PRIKAZI	- se učijo iskanja potrebnih podatkov iz preglednic in prikazov ter sami predstavljajo podatke v preglednicah in s prikazi*; - predstavijo podatke s prikazom s stolpci oziroma vrsticami; - preberejo prikaz s stolpci oziroma vrsticami;	Prikazi (prikaz s stolpci oziroma vrsticami)	predstavi podatke s prikazom,	- bere podatke iz preglednic in prikazov, - predstavi zbrane podatke;
MATEMATIČNI PROBLEMI IN PROBLEMI ŽIVLJENJSKIH SITUACIJ	- razvijajo problemsko občutljivost oziroma zaznavo problema v matematičnih okoliščinah in vsakdanjem življenju*; - v povezavi s slovenščino razvijajobralne sposobnosti*; - predstavijo problemsko situacijo z različnimi didaktičnimi ponazorili, s konkretnimi in slikovnimi materiali, - rešijo (besedilne) probleme (npr. s preveč podatki, s premalo podatki, z več rešitvami, iz logike ipd.), - problem analizirajo, ga sistematično rešijo in pri tem uporabljajo različne strategije reševanja.	Problemi iz vsakdanjega življenja		reši besedilne naloge iz vsakdanjega življenja.

* globalni cilji teme Geometrija in merjenje ter Druge vsebine

Preglednica 2: Povezovanje ciljev in vsebin na primeru sklopa Merjenje za četrti razred

SKLOP	MERJENJE IN MERSKE ENOTE ZA DOLŽINO, MASO, ČAS TER PROSTORNINO			Standard znanja 2. VIO
	Operativni cilji	Vsebina	Minimalni standard znanja	
MERJENJE	Učenci: - spoznavajo in pretvarjajo dolžinske enote, enote za maso, votle mere, časovne enote*, - računajo z merskimi količinami*, - razvijajo natančnost*, - ocenijo in merijo količine (dolžino, maso, prostornino, čas) s standardnimi enotami, - usvojijo pojem merska enota in mersko število, - ob praktičnem merjenju izbirajo primerne merilne instrumente in meritve izrazijo z ustreznimi merskimi enotami, - spoznajo standardne dolžinske merske enote (mm, km), merske enote za maso (g, t), votle mere (hl), merske enote za čas (s), - pretvarjajo (le med dvema sosednjima enotama) večimenske količine v enoimenske in obratno, - primerjajo in urejajo količine ter računajo z njimi;	Dolžinske enote (mm, cm, dm, m, km) Enote za maso (g, dag, kg, t) Votle mere (dl, l, hl) Časovne enote (s, min, h, dan, teden, mesec, leto) Računanje s količinami	- ocenijo, meri in meritve izrazi s smiselno mersko enoto, - primerja (istoimenske, enoimenske) količine in računa z njimi;	- ocenijo rezultat pred merjenjem, - pravilno uporablja merilne instrumente, - meri, zapiše, pretvarja in računa z merskimi količinami, - pozna in uporablja matematično terminologijo;
POVEZANOST KOLIČIN	- izpolnijo preglednice, - sklepajo iz enote na množino in obratno;	Pregledniciranje Sklepanje iz enote na množino in obratno		

MERJENJE IN MERSKE ENOTE ZA DOLŽINO, MASO, ČAS TER PROSTORNINO				
SKLOP	Operativni cilji	Vsebina	Minimalni standard znanja	Standard znanja 2. VIO
LOG- KA IN JEZIK	• uporabljajo pojma množica in podmnožica, • grafično prikažejo odnos množice in podmnožice;	Predstavitve množic Puščni prikaz		
OBDELAVA PODATKOV	• uporabljajo orodja za zbiranje in predstavitve podatkov*, • spoznajo in uporabljajo različne tehnike štetja, • beležijo štetje v preglednice, • prikažejo podatke s tortnim prikazom ter prikazom s stolpci in vrsticami, • preberejo in primerjajo deleže na tortnem prikazu, • rešijo problem, ki zahteva zbiranje in urejanje podatkov, njihovo predstavitve ter branje in interpretacijo;	Predstavitve podatkov v preglednicah Prikaz s stolpci in vrsticami Tortni prikaz Preiskava		• zbere, uredi in prikaže podatke v preglednici in s prikazi ter analizira podatke in rezultate (preiskava);
MATEMATIČNI PROBLEMI IN PROBLEMI Z ŽIVLJENJSKIMI SITUACIJAMI	• razvijajo občutljivost za zaznavo problema v matematičnih in drugih kontekstih*, • spoznavajo, razvijajo in uporabljajo različne strategije pri reševanju problemov (sistematično reševanje, metoda poskušanja ipd.)*, • razvijajobralne strategije*, • razvijajobralne sposobnosti:bralno razumevanje, odnos do branja, interes za branje*, • razpravljajo o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi, • berejo z razumevanjem (samostojno oblikujejo vprašanja, razpravljajo o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi, izpišejo bistvene podatke oziroma odnose med podatki itd.), • postavljajo raziskovalna/problemska vprašanja, • rešijo probleme in pri tem uporabljajo različne strategije.	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami (odprti, zaprti)	• reši (strukturirani) matematični problem in problem iz vsakdanjega življenja, • pri reševanju (besedilnih) problemov uporablja različnebralne strategije ter kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih, • opiše problemsko situacijo z matematičnim jezikom.	• reši matematične probleme in probleme iz vsakdanjega življenja, • pri reševanju (besedilnih) problemov uporablja različnebralne strategije ter kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih, • opiše problemsko situacijo z matematičnim jezikom.

* globalni cilji teme Geometrija in merjenje ter Druge vsebine

1.3.2 Pristop k poučevanju vsebine Merjenje

Učence vpeljujemo v zakonitosti merjenja postopoma po didaktičnih korakih: primerjanje količin, merjenje z relativno enoto, merjenje s konstantno nestandardno enoto in merjenje s standardno enoto. V prvem razredu se učenci srečajo s pojmi dolžina, masa in prostornina ob konkretnih dejavnostih, ko opazujejo predmete v svojem okolju, jih opisujejo (dolg, kratek, težak, lahek, večji, manjši ...), primerjajo (dva predmeta med seboj ali več predmetov) in spoznavajo odnose, npr. daljši kot, lažji kot, večji kot ... in urejajo predmete glede na izbrano lastnost. Zelo pomembno je, da učence ob dejavnostih navajamo na natančno rabo izrazov npr. krajši, daljši, najkrajši, najdaljši, težji, lažji Svoje odločitve primerjanja in urejanja lahko utemeljujejo s prekrivanjem (polaganjem) predmetov. Postopku primerjanja sledi merjenje z relativnimi in konstantnimi nestandardnimi enotami, kjer se učenci vpeljujejo v izražanje merjenih količin z merskim številom in enoto. Pri vpeljevanju relativnih merskih enot uporabimo otrokove dele telesa npr. stopalo, dlan, korak, pedenj ... ali predmete iz okolja npr. kamenčke, različne posodice ... Učence pred samim postopkom merjenja navajamo na podajanje ocene o merjeni količini, npr. koliko stopal meri dolžina omare v učilnici. Dobljene meritve zapisujejo z merskim številom in enoto (lahko tudi že v preglednice), jih berejo, analizirajo in ob vodenem razgovoru pridejo do ugotovitve, da smo dobili pri merjenju iste dolžine različna merska števila samo zaradi tega, ker so stopala (copati) učencev tudi različno dolgi. Situacija pripelje do vpeljave konstantne nestandardne enote, ki bo omogočila, da pri postopku merjenja dobimo enaka merska števila. Za opredelitev konstantnih nestandardnih enot lahko uporabimo različne (šolske) predmete: za opredelitev dolžine npr. dolžino svinčnika, zvezka, radirke, domine, palice, trakov, za opredelitev prostornine prostornino jogurtovega lončka, kozarca, za opredelitev mase npr. maso vijaka, matice, kocke ... Pri postopku merjenja dolžine najprej polagajo predmete oz. konstantne nestandardne enote drugo ob drugo (domino za domino), pozneje pa tudi tako, da merijo le z eno enoto (domino) in označujejo njen konec. Učence navajamo, da ob praktičnih dejavnostih zapisujejo podatke (meritve) in jih pregledno predstavijo v te namene pripravljene preglednice. Dobljene rezultate meritev lahko predstavimo tudi z različnimi prikazi, ki jih potem interpretirajo. Novonastala situacija nam ponuja možnost, da učenci začutijo potrebo po vpeljavi standardnih merskih enot (npr. Ali bi nam znal mizar izdelati enako omaro, kot jo imamo v učilnici, če bi mu posredovali meritve merjene z domino?). Učenci v drugem razredu spoznajo standardne merske enote za dolžino (meter, centimeter), za maso (kilogram) in prostornino (liter). Učenci tako najprej spoznajo osnovne merske enote, nato pa jih ob konkretnih dejavnostih pripeljemo do spoznanja, da nam te standardne enote ne omogočajo izvajanja natančnih meritev, zato vpeljemo manjše in večje merske enote. V drugem razredu učenci tako spoznajo manjšo standardno mersko enoto za dolžino centimeter; navajamo jih na natančno rabo merilca (ravnice). Z leti šolanja postopoma širimo poznavanje merskih enot za merjenje dolžine, mase in prostornine, kjer se pridružuje v tretjem razredu še merjenje časa, v petem razredu pa merjenje ploščine. Pri pouku organiziramo dejavnosti, ki bodo učencem omogočale pridobivanje izkušenj z merjenjem različnih količin ob uporabi različnih merilnih instrumentov, izražanje meritev z merskim številom in mersko enoto (npr. z enoimensko 25 cm ali mnogoimensko 2 dm 5 cm), primerjanje količin, računanje s količinami (npr. z istoimenskimi enotami, npr. $2\text{ m} + 14\text{ m} =$), pretvarjanje enot in reševanje problemov. Učenje z razumevanjem je tesno povezano z razvojno stopnjo otrokovega mišljenja, odvisno je od spodbud mišljenja ter od pristopov k učenju in poučevanju (po Žakelj, 2011; Vigotsky, 1983).

1.3.2.1 Primeri dejavnosti pri poučevanju vsebine Masa v drugem razredu

Učenci izkušnje s postopkom merjenja mase pridobivajo s težkanjem predmetov (npr. žogica za tenis, žogica za balinanje), z opazovanjem pojava guganja s prevesno gugalnico in primerjanja mase predmetov ob razjasnitvi pojma ravnovesje (npr. je težji od, je lažji kot). Pri merjenju mase z relativno mersko enoto (masa kamenčkov), konstantno nestandardno mersko enoto (masa matice za vijake) in osnovne standardne merske enote (masa kilogramske uteži) uporabljamo na začetku šolanja prevesno tehniko.



Slika 1: Merjenje mase z relativno nestandardno mersko enoto. (vir: lasten)



Slika 2: Merjenje s standardno mersko enoto in ravnovesje. (vir: lasten)



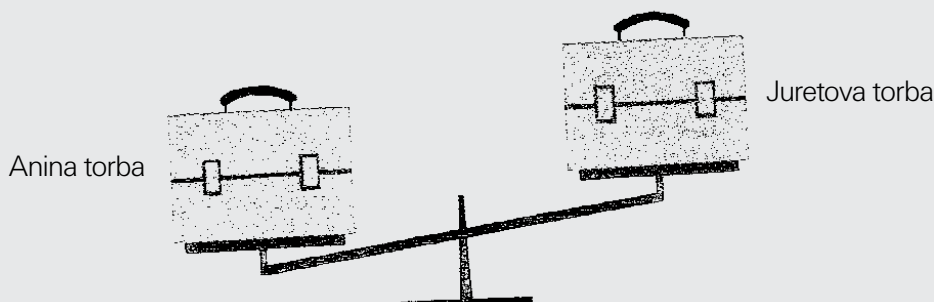
Slika 3: Izdelki, ki so lažji od 1 kg, in izdelki, ki so težji od 1 kg. (vir: lasten)

Učenci si ob takem delu ustvarjajo predstave o merskih količinah, znajo glede na situacijo ustrezno uporabiti merilni instrument in meritev izraziti z ustrezno mersko enoto, znajo pridobiti podatke iz življenjskih situacij, jih predstaviti, primerjati, urejati itd. Pred pridobivanjem podatkov iz konkretnih življenjskih situacij pa naj učenci najprej ocenijo količino.

Učenci v drugem razredu vpeljujemo tudi v reševanje matematičnih situacij, ki so vezane na konkretno raven in vzete iz neposrednega okolja učencev.

Primer

- a) Učenci v razredu ugotavljajo, kdo ima težjo šolsko torbo. Svoja napovedovanja utemeljujejo tako, da maso torbic težkajo, nato maso posamezne torbice ocenijo in na koncu tudi stehtajo.
Pogovorimo se, kdo je natančneje ocenil.
- b) Situacijo dveh torbic predstavijo s sliko.



- c) Kdo ima lažjo in kdo težjo torbo?
- Zakaj tako misliš?
 - V kakšnem položaju bi bila tehtnica, če bi bili obe torbi enako težki?

1.3.2.2 Aktivnosti pred pretvarjanjem merskih enot ob konkretnih dejavnostih v četrtem razredu

Prehiter prehod zgolj na pretvarjanje merskih enot in izvajanje algoritmov z merskimi količinami učencem ne pomaga razviti predstav, pridobiti izkušenj z merjenjem in uporabiti različnih merskih instrumentov.

Primeri dejavnosti

- a) Učenci berejo količino živila na embalaži izdelkov in jo zapišejo v preglednico.
- b) Živilo stehtajo s previsno tehtnico, pri kateri uporabljajo različne uteži (tudi prirejene dag). V preglednico narišejo uteži, ki so jih uporabljali pri tehtanju posameznega živila, in jih opremijo z vrednostjo (npr. 20 dag, 2 dag ...). Maso živila izrazijo z merskimi enotami, ki so jih uporabili pri tehtanju.



Slika 4: Risanje uteži z zapisom njihovih vrednosti. (vir: lasten)



Slika 5: Zapis vrednosti uporabljenih uteži pri tehtanju. (vir: lasten)

- c) Učenci prepisujejo količine meritev in količine zapisane na embalaži na liste papirja in analizirajo zapise.

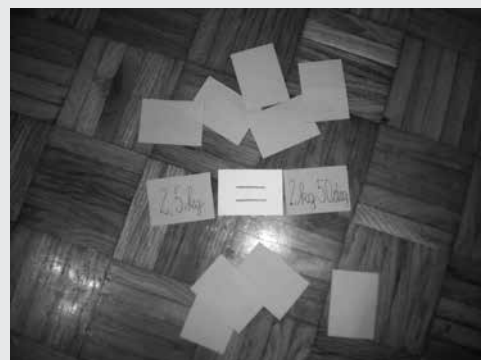


Slika 6: Zapis količin z enoimensko in mnogoimensko enoto. (vir: lasten)

- d) Primerjanje zapisa količin.



Slika 7: Primerjanje mnogoimenskih količin. (vir: lasten)



Slika 8: Primerjanje količin zapisanih z decimalno vejico in mnogoimenskih količin. (vir: lasten)

Iz dejavnosti na konkretni ravni postopoma preidemo na reševanje nalog s pomočjo slikovnih reprezentacij in pozneje na reševanje nalog z matematičnimi simboli.

Primer naloge s slikovno reprezentacijo

a)



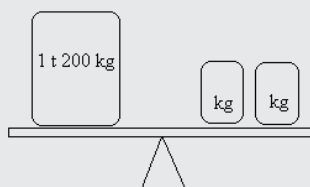
$$24 \text{ dag} = \text{---} \text{ g} + \text{---} \text{ g} + \text{---} \text{ g}$$

b)



$$260 \text{ g} = \text{---} \text{ dag} + \text{---} \text{ dag}$$

c)



$$1 \text{ t } 200 \text{ kg} = \text{---} \text{ kg} + \text{---} \text{ kg}$$

Učenci v tem učnem sklopu uresničujejo tudi cilje sklopa Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami, v četrtem in petem razredu pa tudi cilje sklopa Povezanost količin.

Primer problemske naloge

Šest kilogramov moke smo presipali v štiri enako velike vrečke. Imamo še tri kilograme moke, ki jih želimo presipati v enako velike vrečke kot prej. Koliko takih vrečk bomo rabili za tri kilograme moke?

Reševanje:

Odgovor: _____

Razvoj miselnih predstav ter razumevanje matematičnih pojmov in dejstev sta pri razumevanju matematike bistvenega pomena za konstrukcijo znanja. Razumeti pojme pomeni imeti široko paleto predstav, sposobnost prehajanja med reprezentacijami (npr. reprezentacijo števila s konkretnim materialom učenec prevede (spremeni) v slikovno reprezentacijo in/ali reprezentacijo z matematičnimi simboli). Razumeti pojme pomeni tudi sposobnost navajanja primerov in nasprotnih primerov (npr. pojem praštevila učenec podkrepi s primeri praštevil). Čim večjo prožnost prehajanja med reprezentacijami doseže učenec, globlje je njegovo razumevanje (Žakelj, 2011).

Literatura in viri

- 1 Žakelj, A. (2011). *Procesnopedagogični pristop pri poučevanju matematične vsebine merjenje v osnovni šoli*. *Revija za elementarno izobraževanje*, let. 4, št. 3, str. 35–51. Maribor: Pedagoška fakulteta. Dostopno na: http://www.pef.um.si/content/Zalozba/2011_04_st_3_revija.pdf (24. 11. 2012).
- 2 Žakelj, A., Prinčič Röhler, A., Perat, Z., Lipovec, A., Vršič, V., Repovž, B., Senekovič, J.,regar Umek, Z. (2011). *Učni načrt, Program osnovna šola, Matematika*. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo. ISBN 978-961-234-965-3. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (5. 2. 2013).
- 3 Guranje, V., Ferbar, J., Čepič, M., Bagotinšek Gostinčar, A., Razpet, N., Šteblaj, M., *Fotografije učil in opisi nekaterih naravoslovnih postopkov ter poskusov za predšolsko vzgojo in razredni pouk od 1. do 3. razreda devetletne osnovne šole (prvo triletnje) – zgodnje naravoslovje*. Dostopno na: http://www.pef.uni-lj.si/gorani/Zacetno_naravoslovje.html (7. 2. 2013).

1.4 Denarne enote – razširitev didaktičnih priporočil

Vesna Vršič, Zavod RS za šolstvo

Pri uvajanju vsebine o denarnih enotah izhajamo iz življenjskih izkušenj učencev in njihovega predznanja. Z izkustvenim učenjem želimo, da bi si učenci na podlagi lastnih izkušenj izgrajevali znanje in jih tako pripeljali do razumevanja in uporabe pridobljenega znanja. Bistveno vlogo pri takem načinu učenja igra osebna izkušnja, zlasti če si jo je učenec pridobil ob lastni miselni dejavnosti in je pridobljeno znanje povezal z obstoječim znanjem. Pri vzgojno-izobraževalnem procesu naj bi izhajali iz učne situacije, ki izhaja iz realnega sveta in je učencem znana. Pri reševanju nalog naj učenci uporabljajo konkretne in didaktične materiale (modeli denarja), postopki reševanja pa naj vključujejo različne spoznavne postopke (opazovanje, poimenovanje, opisovanje, primerjanje, urejanje, merjenje). Učenci pri obravnavi vsebine pridobijo matematične in druge pojme, kot so: denarne enote, evro, cent, bankovec, kovanec, denarne vrednosti ter spoznajo simbole: EUR, €, ¢...

Pri vzgojno-izobraževalnem procesu od drugega do petega razreda učenci:

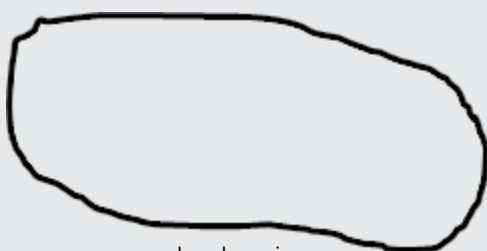
- spoznajo denarni enoti (evro, cent) in njihove vrednosti,
- berejo vrednosti, zapisane z enoimensko enoto in v decimalnem zapisu,
- primerjajo in urejajo denarne vrednosti, zapisane z enoimensko enoto in v decimalnem zapisu,
- računajo z denarnimi vrednostmi (enoimensko enoto, v decimalnem zapisu),
- rešujejo matematične probleme z denarnimi enotami.

1.4.1 Poznavanje denarnih enot: evro, cent

Predvidevamo, da se je večina učencev drugega razreda v vsakdanjem življenju že srečala z denarjem in tako usvojila pojma evro in cent. Pri pouku učenci spoznajo, da se denar razlikuje po obliki, velikosti, barvi, materialu, natisnjeni sliki in vrednosti. Učenci znajo ločiti bankovce in kovance, razbrati njihove vrednosti in jih urediti po različnih kriterijih (vrednosti).

Primer dejavnosti: Razporejanje denarja

a) Razporedi modele denarja na bankovce in kovance.



bankovci



kovanci

- b) Razporedi modele denarja v skupino, katerih vrednost je manjša od 1 €, in v skupino, katerih vrednost je večja od 1 €.



Vrednost manjša od 1 €



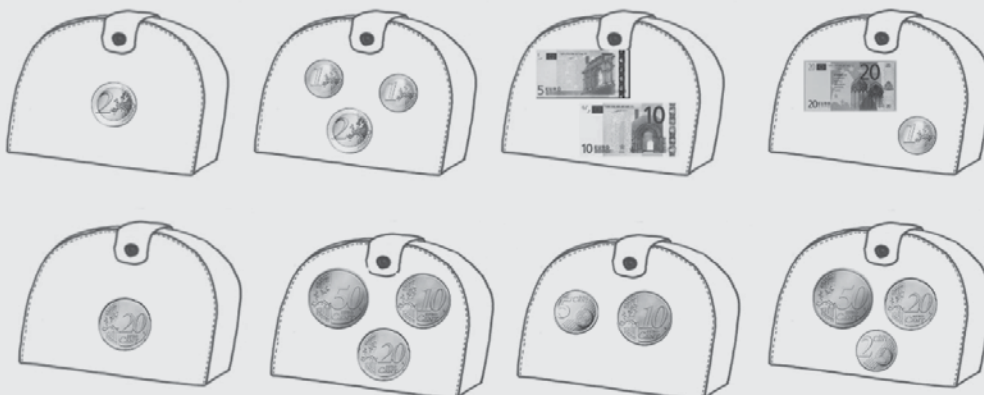
Vrednost večja od 1 €

1.4.2 Branje in predstavitev denarnih vrednosti, zapisanih z enoimensko enoto in z decimalnim zapisom

V drugem razredu učenci pogosto še ne ločijo med številom bankovcem in kovancev ter njihovo vrednostjo, zato je treba pri pouku načrtovati več dejavnosti za razvoj pojma denarna vrednost. Pri tem lahko načrtujemo tudi različne igre vlog (npr. trgovina, tržnica, papirnica, banka ...). V tretjem razredu učenci berejo tudi denarne vrednosti, ki so zapisane v decimalnem zapisu. Pri tem vzamemo učno situacijo iz vsakdanjega življenja in učence uvajamo v branje cen izdelkov (npr. 1,39 € beremo 1 evro 39 centov), cene izdelkov tudi primerjajo med seboj in jih urejajo po različnih kriterijih. Učenci cene izdelkov prikažejo tudi z modeli denarja. Od učencev ne zahtevamo, da znajo razložiti, kaj pomeni vejica v zapisu cene. Da si bodo učenci lažje predstavljali zapisane denarne vrednosti, priporočamo, da si pri tem pomagamo z didaktičnim materialom oziroma modeli denarja.

Primer dejavnosti: Branje denarnih vrednosti, zapisanih z enoimensko enoto in v decimalnem zapisu

- a) Koliko denarja je v posamezni denarnici?



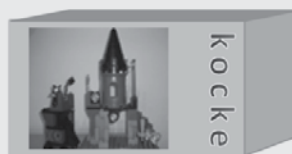
b) Koliko stane posamezni paket lego kock?



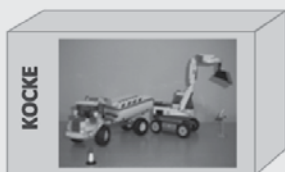
24,99 €



29,20 €



33,32 €



37,90 €



23,90 €



14,99 €

Slika 1: Lego kocke. (vir: lasten)

Branje vrednosti denarja stopnjujemo po težavnosti. Pri tem naj si učenci pomagajo z modeli denarja in skušajo povedati, kaj lahko kupimo v trgovini za tolikšno vrednost.

c) Preberi zapis denarnih vrednosti.

4,20 €	10,10 €	2,55 €	3,09 €	5,05 €	7,01 €
0,50 €	0,15 €	0,99 €	0,05 €	0,02 €	0,01 €

V drugem ali tretjem razredu s pomočjo modelov denarja rešujemo tudi naloge z več rešitvami.

d) S katerimi bankovci in kovanci bi lahko plačal točen znesek?



Komplet voščilnic
8,00 €



Okenska nalepka
2,26 €

Primer iz prakse

Učenci so brali zapisano ceno – denarno vrednost – posameznih artiklov iz reklamnih materialov. Pri branju so bili pozorni na zapis cene z decimalnim zapisom, ločevanje evrov in centov.



Slika 2: Učenci 4. b razreda, OŠ Tišina.
(vir: Metka Flisar)

Refleksija učiteljice

Delo s konkretnim materialom je učence zelo motiviralo, prav tako dejavnost, ki se je nanašala na vsakdanjo situacijo. Večina učencev je brala ceno tako, kot jo slišijo v vsakdanjem življenju, in sicer 2 cela 50 evrov ali 2 evra 50. Ob primeru cene čokolade, ki stane 2,50 evra (€) smo razjasnili pojem »cela« in se dogovorili, da bomo denarno vrednost v decimalnem zapisu prebrali 2 evra 50 centov.

(učiteljica Metka Flisar, OŠ Tišina)

1.4.3 Primerjanje in urejanje denarnih vrednosti

Za dejavnostjo branja izvajamo dejavnosti primerjanja in urejanja, s katerimi želimo razviti predstave o količinah (številskih, merskih). Pri tem lahko izhajamo iz matematične situacije (v drugem razredu) ali realne situacije (od tretjega razreda naprej). Tudi pri tej dejavnosti naj si mlajši učenci pomagajo z modeli denarja.

Primer dejavnosti: Primerjanje in urejanje denarnih vrednosti, zapisanih z enoimensko enoto in v decimalnem zapisu

a) Kdo ima več evrov?

 TINE	 URŠKA
 MOJCA	 MARKO

b) Uredi cene avtomobilčkov. Začni z avtomobilčkom, ki je najcenejši.



16,49 €



29,90 €



24,90 €



25,99 €



22,99 €

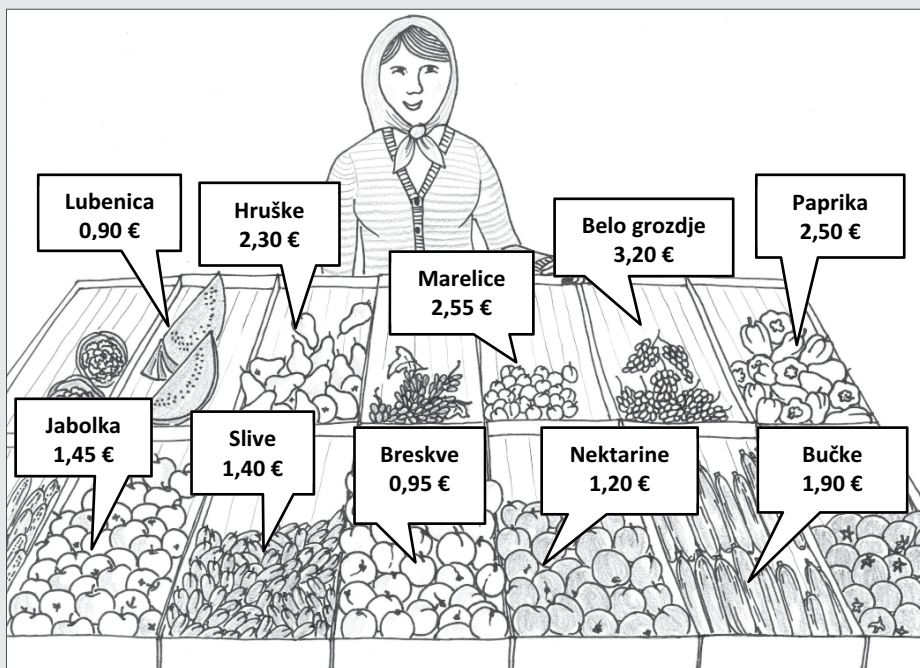


13,99 €

Slika 3: Avtomobilčki (vir: lasten)

Že pri mlajših učencih lahko vpeljujemo primere matematičnih situacij, ob katerih bodo učenci sami zastavljali vprašanja, iskali različne poti reševanja in pravilne rešitve.

Branjevka je na tržnici prodajala različno sadje in zelenjavo. Ob izdelkih je imela navedeno ceno posameznega sadja in zelenjave za 1 kg.



Slika 4: Branjevka. (vir: lasten)

Vprašanja:

Reševanje:

1.4.4 Zapisovanje denarnih vrednosti z decimalnim zapisom

V četrtem razredu naj bi učenci samostojno zapisovali denarne vrednosti z decimalnim zapisom (npr. ob nareku 3 evre 35 centov učenci zapišejo 3,35 €). Učence navajamo na pravilen zapis merskega števila in ustrezne merske enote. Pri zapisu lahko uporabljamo vse veljavne simbolne zapise denarnih vrednosti (npr. evro – EUR, €, cent – ¢).

Primer iz prakse

Dejavnost:

Učenci prejmejo določeno količino denarja (modele denarja), ki ga morajo prešteti in zapisati z decimalnim zapisom.



Refleksija učiteljice

Učenci ob zapisu predstavljenega primera **a** niso imeli težav z zapisom, težave so se pojavile pri zapisu denarne vrednosti 2,05 EUR, saj jih je večina zapisala 2,5 EUR.

(učiteljica Metka Flisar, OŠ Tišina)

1.4.5 Računanje z denarnimi vrednostmi

V tretjem razredu učenci računajo z enoimenskimi merskimi enotami, kar pomeni, da seštevajo in odštevajo vrednosti, izražene z evri (npr. $10 \text{ EUR} + 5 \text{ EUR} = \underline{\hspace{1cm}}$, $12 \text{ €} - 6 \text{ €} = \underline{\hspace{1cm}}$). Učenci se navajajo, da se rezultat izrazi z merskim številom in mersko enoto. V četrtem razredu učenci računajo z denarnimi vrednostmi, ki so zapisane z decimalnim zapisom, tako da lahko ločeno računajo z evri in ločeno s centi, nato rezultat ponovno zapišejo z decimalnim zapisom.

Zgled

$$12,39 \text{ €} + 40,55 \text{ €} =$$

$$12 \text{ evrov} + 40 \text{ evrov} = 52 \text{ evrov}$$

$$39 \text{ centov} + 55 \text{ centov} = 94 \text{ centov}$$

$$12,39 \text{ €} + 40,55 \text{ €} = 52,94 \text{ €}$$

$$36,99 \text{ €} - 25,65 \text{ €} =$$

$$36 \text{ evrov} - 25 \text{ evrov} = 11 \text{ evrov}$$

$$99 \text{ centov} - 65 \text{ centov} = 34 \text{ centov}$$

$$36,99 \text{ €} - 25,65 \text{ €} = 11,34 \text{ €}$$

Učence v četrtem razredu postopoma vodimo do računanja z denarnimi vrednostmi tudi z zamenjavo v višjo denarno enoto. Iz izkušenj že vedo, da je 100 centov enako 1 evru. Najprej rešujejo primere dopolnjevanja do desetičnih števil. Učitelj zastavlja take primere, da učenci lahko računajo s premislekom.

Primer

$$22 \text{ €} + \square = 50 \text{ €}$$

$$39,20 \text{ €} + \square = 40 \text{ €}$$

$$15,75 \text{ €} + \square = 20 \text{ €}$$

$$40,60 \text{ €} + \square = 50 \text{ €}$$

$$35,05 \text{ €} + \square = 40 \text{ €}$$

$$47 \text{ €} - \square = 40 \text{ €}$$

$$50,60 \text{ €} - \square = 50 \text{ €}$$

$$63,24 \text{ €} - \square = 60 \text{ €}$$

$$20,10 \text{ €} - \square = 10 \text{ €}$$

$$37,08 \text{ €} - \square = 30 \text{ €}$$

V petem razredu učenci računajo s pretvarjanjem evrov v cente in obratno. Pri računanju zahtevamo, da končni rezultat predstavijo v decimalnem zapisu.

Zgled

$$5,90 \text{ €} + 9,69 \text{ €} =$$

$$5,00 \text{ €} - 3,47 \text{ €} =$$

$$5,12 \text{ €} - 1,76 \text{ €} =$$

Računanje z zaokroženimi cenami:

$$6 \text{ €} + 10 \text{ €} = 16 \text{ €}$$

Računanje z zaokroženimi cenami:

$$5 \text{ €} - 3 \text{ €} = 2 \text{ €}$$

Računanje z zaokroženimi cenami:

$$5 \text{ €} - 2 \text{ €} = 3 \text{ €}$$

Postopek računanja:

5 evrov + 90 centov +
9 evrov + 69 centov =
14 evrov + 159 centov =
15 evrov 59 centov

Postopek računanja:

5 evrov - 3 evre -
47 centov = 2 evra - 47
centov = 200 centov -
47 centov = 1 evro
53 centov

Postopek računanja:

5 evrov 12 centov -
1 evro - 76 centov =
4 evre 12 centov -
76 centov = 3 evre
36 centov

Izračun:

$$5,90 \text{ €} + 9,69 \text{ €} = 15,69 \text{ €}$$

Izračun:

$$5,00 \text{ €} - 3,47 \text{ €} = 1,53 \text{ €}$$

Izračun:

$$5,12 \text{ €} - 1,76 \text{ €} = 3,36 \text{ €}$$

Pri tem želimo opozoriti, da učencem ni treba vsega postopka zapisovati, lahko računajo tudi na pamet in zapišejo le rezultat.

Vsebino denarne enote povežemo tudi s cilji sklopa Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami, v četrtem in petem. razredu pa tudi s cilji sklopa Povezanost količin.

Primer

- a) Peter in Luka si morata razdeliti 140 €. Peter dobi 20 € manj kot Luka. Koliko evrov dobi vsak?

Reševanje:

Odgovor: _____

- b) V trgovini stane zavoј s 60 dag jagod 2,15 €, na tržnici pa zavoј za 1 kg jagod 3,50 €. Koliko bi plačali za 3 kg jagod, kupljenih v trgovini, in koliko za 3 kg jagod, kupljenih na tržnici ?

Reševanje:

Odgovor: _____

Pri pouku si prizadevamo, da bi bil pristop pri učenju in izvajanju računskih postopkov s količinami povezan z življenjskimi situacijami in osmišljen. Dejavnosti postopoma stopnjujemo glede na razvojno stopnjo učencev in jih prilagajamo njihovim zmožnostim.

Literatura in viri

- 1 Cene sadja in zelenjave. Spletni portal potrošnik.info. Dostopno na: <http://potrošnik.info/products/324/jabolka-idared> (28. 1. 2013).
- 2 Žakelj, A., et al. (2011). Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika (elektronski vir). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (28. 1. 2013).

Viri slik:

- 1 Denar bankovci. Dostopno na: <http://www.delo.si/gospodarstvo/makromonitor/preseren-vreden-kot-spanski-kralj.html> (5. 2. 2013).
- 2 Denar kovanci. Dostopno na: <http://www.evro.si/o-evru/skupna-stran-evrskih-kovancev/index.html> (5. 2. 2013).

1.5 Deli celote – primer didaktične izpeljave v drugem razredu

Polona Legvart, OŠ bratov Polančičev, Maribor

Avtor	Polona Legvart
Šola	OŠ bratov Polančičev, Maribor
Učna tema	Deli celote (polovica, tretjina, četrtnina)
Učni sklop	Racionalna števila
Razred	2.
Potreben čas za izpeljavo	5 učnih ur
Učni cilji (splošni)	Učenci/učenke: • razvijajo matematično mišljenje, • spoznavajo uporabnost matematike v vsakdanjem življenju, • razvijajo uporabo različnih matematičnih postopkov, • spoznavajo matematiko kot proces in se učijo ustvarjalnosti in natančnosti, • spoznavajo pomen matematike kot univerzalnega jezika, • razvijajo zaupanje v lastne sposobnosti;
(vsebinski, procesni)	• prepoznajo, opišejo in poimenujejo polovico, četrtno in tretjino na konkretnih primerih (čokolada, torta ...), • predstavijo problemsko situacijo z različnimi didaktičnimi ponazorili, s konkretnimi slikovnimi materiali, • rešujejo (besedilne) probleme, • razvijajo natančno in pravilno izražanje.
Standardi	Učenec/učenka: • prepozna dele celote, jih poimenuje in zapiše, • reši problem iz vsakdanjega življenja.
Medpredmetna povezava	• <i>spoznavanje okolja</i>: tematski sklop snovi, skupnost, postopki; • <i>likovna vzgoja</i>: prostorske predstave.
Metode dela	pogovor, razlaga, demonstracija, metoda praktičnega dela
Oblike dela	frontalna, individualna
Dejavnosti	reševanje problemskih nalog, poročanje, razvrščanje, primerjanje, prirejanje, pojasnjevanje, praktično delo
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	slike, sestavljanke, učni listi, i-tabla
Potrebno predznanje	razumevanje pojmov: celota, del, enako, različno
Faze učnega procesa	vse faze učnega procesa
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Učenci so bili zelo motivirani, zlasti zato, ker so videli uporabno vrednost v vsakodnevni problemskih situacijah.
Opombe, dodatna opazanja, posebnosti	Učni sklop je pripravljen s problemskim pristopom, kar je predstavljalo izziv tako za učence kot za učitelja.
Domače delo	Bili so pozorni, kako uporabno je to znanje v vsakodnevni življenju in o tem poročali.

Pregled predznanja

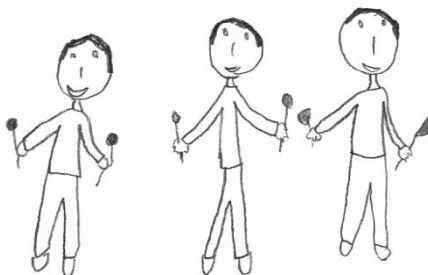
V vsakdanjem življenju so otroci pogosto v situacijah, kjer si stvari, predmete delijo med prijatelji, brati, sestrami ali sošolci. Pogovor z njimi nam pokaže, da se te izkušnje pri njihovem matematičnem razmišljanju odslikavajo drugače, kot morda pričakujemo.

V vsakdanjem jeziku najpogosteje uporabljajo pojem »polovica« oz. »pol«, kot npr. »opravili smo že pol poti« ali »polovica učencev je pospravila zvezke.« Strategija »deljenja na polovice« ocenjujejo kot uspešno in uporabno. Raba pojmov »tretjina« oz. »četrtna« pa je zelo redka in najmlajšim šolarjem dela težave.

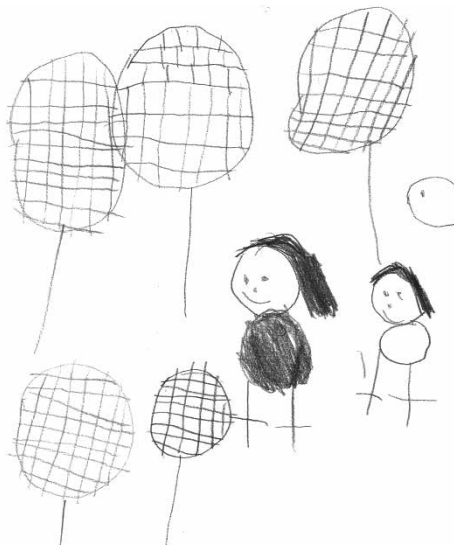
Pravilnost predstav in rabe jezika je tesno povezana s konkretnimi predstavami in izkušnjami. Prepoznamo lahko nekatere zmore v predstavah učencev, ki pa so hkrati dobro izhodišče za načrtovanje učnega dela:

- delitev med prijatelji ni nujno na enake deleže,
- prevladuje predstava o delitvi na polovico (kot dejanje prijaznosti samo po sebi, kar pa ne pomeni tudi sicer pravilne rešitve problema),
- »četrtna« predstavlja več kot »polovico«, saj je 2 manj kot 4,

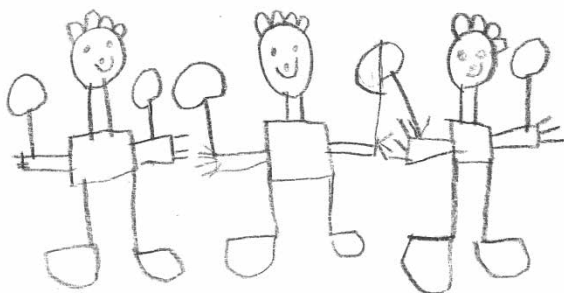
Na problemsko vprašanje, kako si lahko trije otroci podelijo pet lizik na enake dele, so prvošolci ponujali naslednje rešitve:



Slika 1: Peta lizika gre na pol in tako ima vsak nekaj v rokah. (avtor izdelka: učenec 1. razreda)



Slika 2: Otrok ve, da bo treba 5 lizik razdeliti na več enakih delov in jih bo tako lažje razdeliti med 3 otroke. (avtor izdelka: učenec 1. razreda)



Slika 3: Izhodišče so enako velike lizike, ki jih otrok deli »pošteno« tako, da se na videz ohrani njihova velikost. (avtor izdelka: učenec 1. razreda)

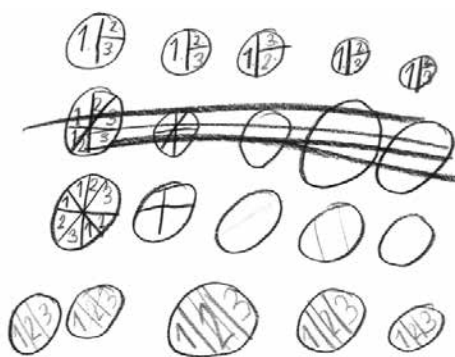
DA BI VSAK DOBIV¹
IN SI BI RAZDELILI TISTI²
KAKO TAKO, DA BI SIDA NA POL,
TAKO DA BI BLO PRVIČNO.

Slika 4: Otrok začne z delitvijo po ena, pri ostalih si pomaga z deljenjem na pol. (avtor izdelka: učenec 1. razreda)

SPRIJATELJI SO POJEDLI VSAK
ENC. ZA DRUGE SO POSTILI
DVE LIZALKI.

Slika 5: Najlažje je razdeliti po eno liziko, ostali pa pustiti za druge. (avtor izdelka: učenec 1. razreda)

Drugošolcem smo k enaki vsebini problema dodali še obliko lizike (okroglo ali kvadratno) in izkazalo se je, da pogosteje niso znali ponuditi rešitve. Več dodatnih težav so imeli z delitvijo okroglih lizik.

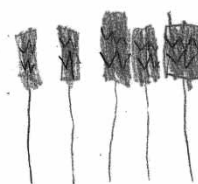


Vsako lizalko daš na
tri dele. Vsak dobi 5 delov.

Slika 6: Miselna (r)evolucija od polovic k tretjinam. (avtorja izdelkov: učenca 2. razreda)

če razdelim 6 delov bo
vsak dobil 2 dela + še
7 liziko
□ □ □ □ □ □
1 2 3 4 5 6

Slika 7: Razhajanje med besedilom in sliko. (avtor izdelka: učenec 2. razreda)

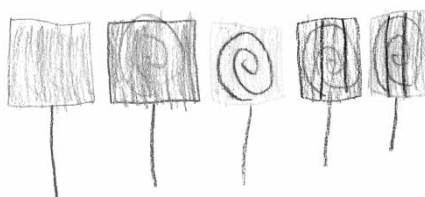


Vsako liziko lizi 3. krat prelomil
Vsaka dobi 5 kosov

Slika 8: Učenec se preprosto odlepi od polovic in reši problem. (avtor izdelka: učenec 2. razreda)

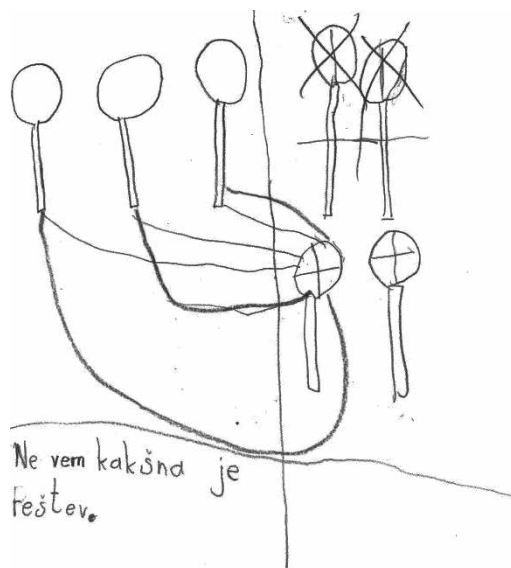


Slika 9: Otrok uporablja sebi razumljiv matematični jezik. (avtor izdelka: učenec 2. razreda)



VSAK NAJ DOBI ENO. DVE PA
RAZDELIŠ NA TRI DELE.

Slika 10: Preprosta in nazorna predstavitev. (avtor izdelka: učenec 2. razreda)



Slika 11: Podobno razmišljanje kot pri sliki 4, pri čemer učenec vztraja pri polovicah in se mu zato ne izide. (avtor izdelka: učenec 2. razreda)

Ugotovimo lahko, da se učenci v vsakodnevnih življenjskih situacijah srečujejo s tovrstnimi problemi, zato jih ne smemo spregledati pri pouku. Ob načrtovanih matematičnih dejavnostih se učenci soočajo s svojimi predstavami in razvijajo mišljenje (matematične koncepte) in strategije reševanja.

Mlajši učenci so uspešnejši pri nalogah, kadar gre za rezultat, ki je večji od 1, kot npr.: 3 učenci si želijo razdeliti 8 bombonov na enake dele. Koliko bombonov lahko dobi vsak?

Težave nastopijo, ko je rezultat manjši od 1, kot npr.: 4 učenci si želijo razdeliti 3 potičke na enake dele. Koliko potičke lahko dobi vsak?

Že samo izkušensko učenje pomembno vpliva na predstave učencev. Sklop o racionalnih številih, torej tematski sklop Deli celote, se s prenova učnega načrta uvaja v drugi razred osnovne šole.

Didaktična priprava na pouk

Uvodna motivacija

Učencem sem ponudila »skrivnostno škatlo«, v kateri so slike različnih aplikatov. Njihova posebnost je bila, da predstavljajo del celote izbranih predmetov. Ko so si učenci naključno sliko dobro ogledali, sem jih spodbudila, naj razmislijo:

- kako je videti celota (kaj je predmet), katere del so naključno izbrali iz škatle in
- kolikšni delež celote predstavlja njihov del (majhen ali velik).

Na izbranih primerih so učenci s pogovorom pojasnjevali svoja razmišljanja. Pogovor sem z izbranimi vprašanji najprej usmerjala sama.

Kaj prepoznaš na sliki?

Če si ugotovil, da imaš na sliki le del nekega predmeta, ali si znaš predstavljati, kako je ta predmet videti v celoti? Opiši ga (obliko, barvo, posebnosti ...).

Koliko takšnih delov bi potreboval, da bi sestavil celoto?

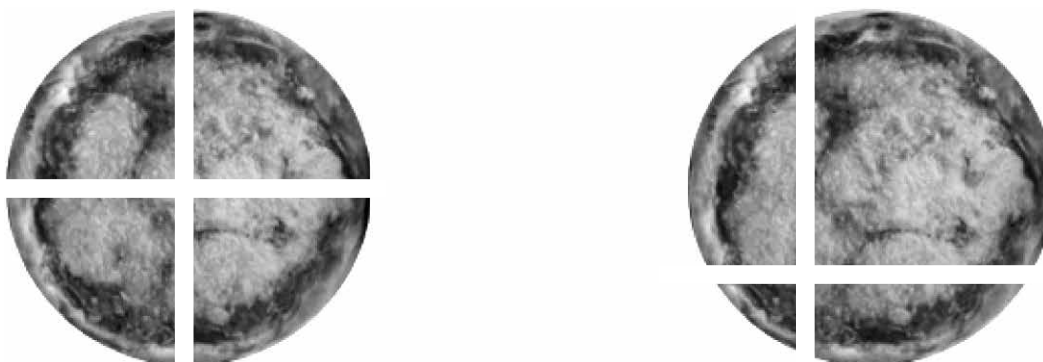
Njihove ugotovitve smo sprva takoj preverili s pomočjo istih aplikativ in naredili sprotne evalvacije. Učenci so pojasnili, kaj jim je pomagalo prepoznati celoto, katere del so imeli v rokah (oblika, barva, velikost ...). Ugotovili pa so tudi, da je bilo težje natančno prepoznati, kako velik delež celote (pice, torte ...) imajo.

Obravnava

V nadaljevanju so opisane izbrane učne dejavnosti, ki smo jih umestili v načrtovane učne ure tematskega sklopa Deli celote. Načrtovali smo pet učnih ur, pri čemer smo imeli v mislih potreben čas za usvajanje in utrjevanje znanja, kar pri tem pomeni dovolj časa za izkustveno učenje pri mlajših učencih.

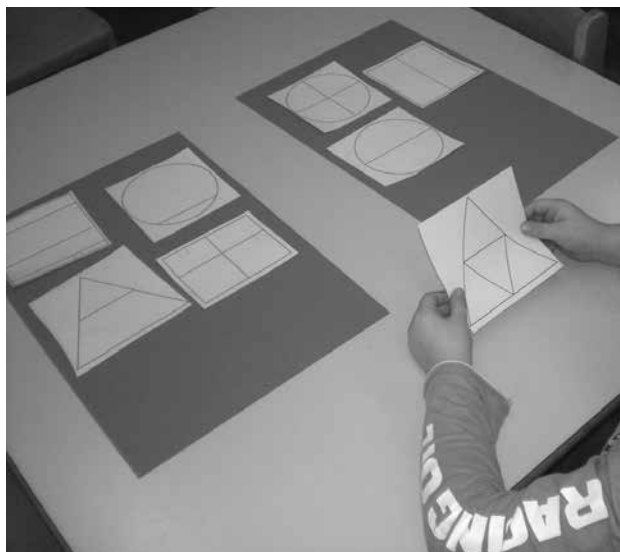
Deljenje na enake dele

Na primeru smo ugotovili, da je celota razdeljena na enake dele. Ugotovili smo tudi, da ponekod deleži niso enaki. Nekateri niso enakih oblik ali enake velikosti. V tem primeru nismo smeli govoriti o pravični delitvi na enake dele.



Slika 12: Deljenje na enake in neenake dele. (vir: lasten)

Učenci so na primerih ugotavljali, ali so liki deljeni na enake oz. neenake dele, jih razvrščali in pojasnjevali svoje ugotovitve.



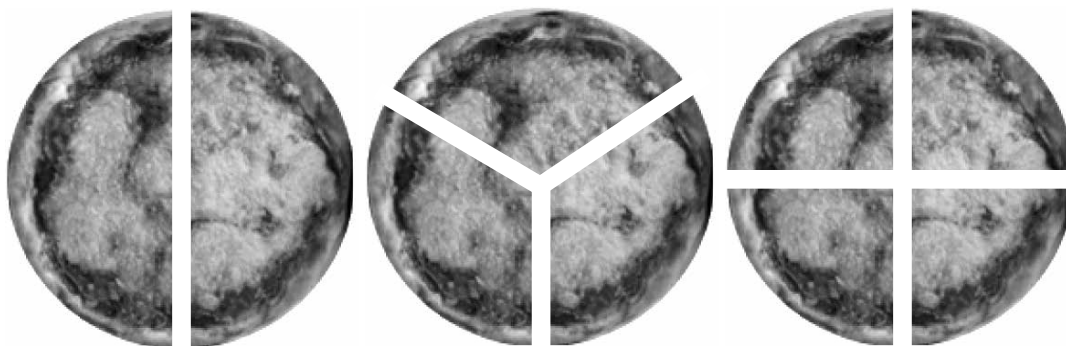
Slika 13: Razvrščanje. (vir: lasten)

Dogovorili smo se, da nas bodo v prihodnje zanimali predvsem predmeti in stvari, ki so deljeni na enake dele.

Znanje smo še enkrat utrdili na primerih s sličicami, med katerimi so izločili tiste, ki niso deljeni na enake dele.

Polovica, tretjina, četrtna

Igro s slikami (glej uvodno motivacijo) smo ponovili še enkrat. Tokrat smo imeli tri slike, na katerih so enako velike pice, deljene na tri različne načine (na polovico, tretjine in četrtnine).



Slika 14: Deljenje pice na enake dele. (vir: lasten)

Vsako sliko so učenci opisali in prešteli število delov pri vsaki pici.

Ugotovili smo:

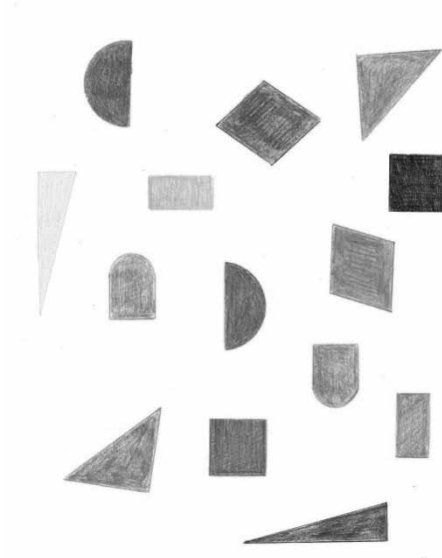
- Pica, razdeljena na polovico, ima dva dela. Ena polovica pomeni en del pice, razdeljene na dva enaka dela.

- Pica, razdeljena na tretjine, ima tri dele. Ena tretjina pice pomeni en del pice, razdeljene na tri enake dele.
- Pica, razdeljena na četrtnine, ima štiri dele. Ena četrtnina pice je en del pice, razdeljene na štiri enake dele.

Sledile so dejavnosti, ki znanje o delitvi na polovico, tretjino in četrtnino utrjujejo. Uporabili smo »sestavljenske«, kjer dele sestavljajo v celote, kot npr.:

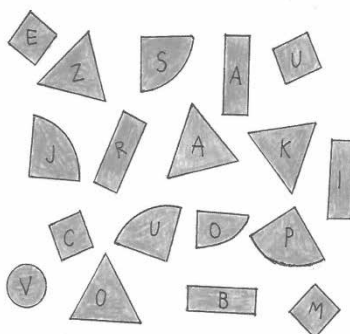
- Sestavi polovice likov v celote. Kaj spada skupaj?
- Četrtnine likov so označene s črkami. Katere besede nastanejo iz črk, ki sestavljajo celoto likov?

Sestavi polovico likov v celote. Kaj spada skupaj?

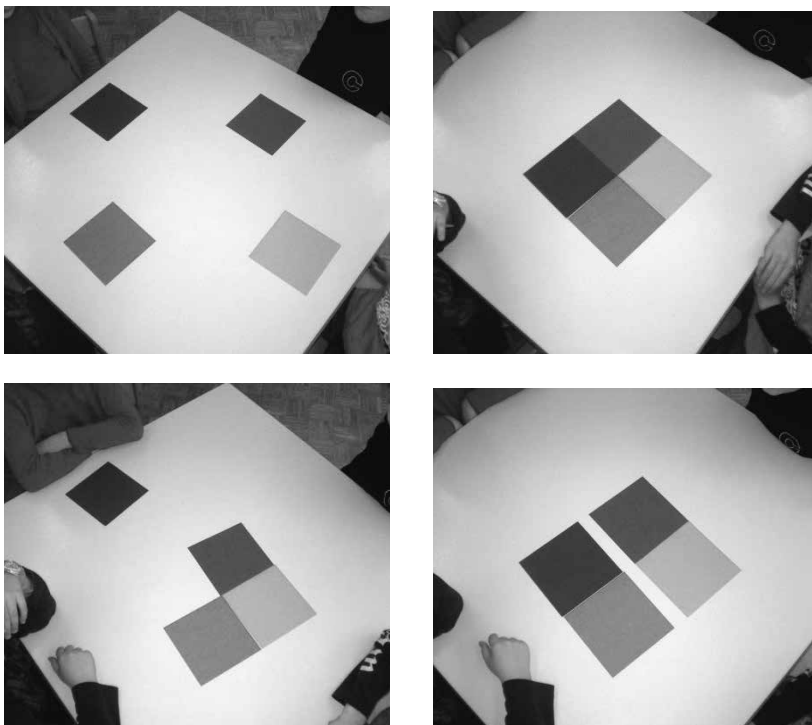


Slika 15: Sestavljanje polovic v celote likov. (avtor: učenec 2. razreda)

Četrtnine likov so označene s črkami. Katere besede nastanejo iz črk, ki sestavljajo celoto likov?



Sliki 16: Sestavljanje četrtnin v celote. (avtor: učenec 2. razreda)



Slike 17–20: Sodelovalno izkustveno učenje z nepogrešljivim matematičnim pogovorom, ki ga usmerja učitelj. (vir: lasten)

Zadnji del učne ure smo posvetili miselnim orehom (diferenciacija), kot npr:

- V razredu je 24 učencev. Polovica je deklic. Koliko deklic je v razredu?
- Lara, Eva, Jure in Tine so pojedli vsak polovico žemlje. Koliko žemelj so si razdelili?
- Učiteljica je olupila pomaranče in vsako razdelila na tri dele. Koliko pomaranč je olupila, če je na krožniku 12 kosov pomaranč?

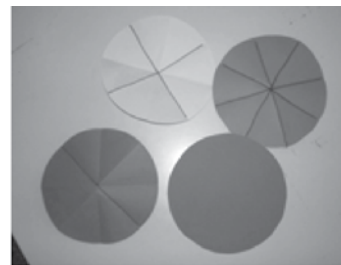
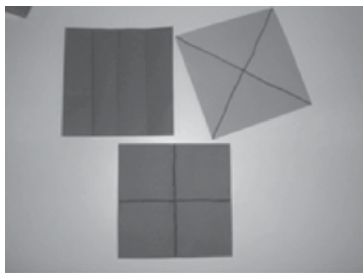
Učenci so lahko izbirali med različno zahtevnimi nalogami, pri čemer so si (praviloma) pomagali tudi s konkretnimi predstavami (sličicami ali celo predmeti). Naloge so reševali v paru s sošolcem, zato da bi se o načinu (strategiji) reševanja med seboj pogovarjala. Pri predstavitvi rešitev pred razredom je pogovor usmerjala učiteljica in tako preverila tudi matematične koncepte, ki so jih učenci uporabili pri reševanju. Izkazalo se je, da je nekaterim učencem najtežje poiskati povezavo med načinom deljenja (na polovici, tretjine ali četrtnine) in številom ljudi, ki pri tem sodeluje. Nekateri se sprva zatečejo k uporabi deljenja na pol ali tretjino z metodo poskusov.

Delimo na polovici, tretjine, četrtnine

Pripravili smo tri matematične delavnice (Delimo na polovici. Delimo na tretjine. Delimo na četrtnine.) in izbrali dejavnosti, kjer bodo učence pridobivali izkušnje z deljenjem celote na dele. Na vsaki delavnici so bile pripravljene naloge, pri katerih so učenci dele celote določili:

- s polaganjem (prirejanjem) delov na celoto,
- določanje delov celote s prepogibanjem,

- označevanje delov celote z risanjem,
- določanje delov celote z razvrščanjem.



Slike 21–25: Od celote k delom celote s prepogibanjem papirja različnih oblik. (vir: lasten)

Namen je bil pridobivati izkušnje z delitvijo celote na enake dele, ne glede na njeno obliko. Za najmlajše učence je delo s konkretnim materialom pomembna osnova za razvijanje poznejših, abstraktnjših matematičnih konceptov in procesov mišljenja. Zato sta bili tej dejavnosti namenjeni dve šolski (blok) uri.

Pri teh dejavnostih smo sprva uporabili tehniko gubanja papirja, kar so učenci sicer poznali, so pa nekateri pri tem imeli manjše težave in so potrebovali spodbudo in začetno pomoč.

Za nekatere učence je bilo odkritje, da lahko uporabijo različne možnosti pri delitvi kvadrata na četrtnine. Z zanimanjem so raziskovali prepogibanje papirja in povezanost med polovico, četrtnino in osmino, oziroma, tretjino in šestino. Veliko napora pa je pri nekaterih učencih zahtevalo že samo deljenje na enake dele.

Problemski izziv iz vsakdanjega življenja

To je možno le, če pice niso bile enako velike.

Miha in Gašper sta šla v picerijo in si privoščila vsak svojo pico. Ena je bila narezana na polovico in druga na tretjine. Pridružil se jima je še zelo lačen Jaka. Fanta sta mu ponudila, da si lahko izbere en kos katere koli pice. Ker je bil lačen, se je odločil za polovico. Vendar bi se Jaka tokrat bolj najedel, če bi izbral tretjino. Kako je to mogoče?

Slika 26: Učenec rešuje problem s konkretnimi predstavami. (avtor izdelka: učenec 2. razreda)

Opisan problemski izziv smo učencem ponudili ob koncu učne obravnave sklopa. Z njim smo želeli povzeti dosedanja učna spoznanja in spodbuditi matematično mišljenje, ki presega reševanje problemske situacije z »znano strategijo« oziroma predvidenim vzorcem reševanja. Pričakovali smo, da sprva problema ne bodo razumeli vsi učenci. Smo pa z njim v razredu spodbudili matematični pogovor, kjer so učenci iskali in pojasnjevali svoja razmišljanja. Na sliki predstavljena rešitev je bila pri nekaterih učencih sprejeta z odzivom »aja«, ki mu je sledila vrsta primerov iz njihovega vsakdanjega življenja.

Skozi vse šolsko leto so med problemskimi nalogami tudi naloge, povezane z deljenjem celote.

Sklep in evalvacija

Učenci so bili med poukom zelo motivirani. Učenje ob konkretnih materialih in z aktivnimi oblikami učnega dela so učenje postavile v vsakodnevno okolje in mu dodale tako pomembno uporabno vrednost. Če deljenje na četrtnine praviloma ni povzročalo velikih težav, je deljenje na tretjine pomenilo veliko preizkušnjo, tudi v natančnosti. Reševanje matematičnih problemov pa je od učencev zahtevalo spretnost povezovanja problemske situacije z matematičnim konceptom mišljenja in strategijami reševanja.

Vedeti še ne pomeni tudi znati. Šele v kontekstu konkretnega problema in ob ustrezni rabi (matematičnega) jezika lahko pride do razumevanja. In za to smo si vzeli potreben čas.

Literatura in viri

- 1 *Empson, S. B., Levi L. (2011). Extending Childrens Mathematics. Fractions and Decimals. Portsmouth, NH: Heinemann.*
- 2 *Van de Wale J. A., Karp K. S. Bay-Williams J. M. (2010). Elementary & middle school mathematics. New York: Pearson Education.*
- 3 *Žakelj, A., Prinčič Röhler, A., Perat, Z. Lipovec, A., Vršič, V. Repovž, B., Senekovič, J., Bregar Umek, Z. (2011). Učni načrt, Program osnovna šola, Matematika. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo. ISBN 978-961-234-965-3. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (5. 2. 2013).*

1.6 Proporcionalno sklepanje

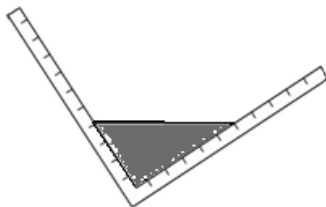
Dr. Alenka Lipovec, Pedagoška fakulteta Maribor

Matematika je veda o strukturah in relacijah, tudi o relacijah med relacijami. Sorazmerja (z drugo besedo proporci) so primer relacije med relacijama. Primarna relacija se nanaša na odnos med števili v ulomku, sekundarna pa na odnos med ulomki samimi. Ker pomeni »sposobnost proporcionalnega sklepanja mejnik v kognitivnem razvoju učencev« (Cramer in Post, 1993: 404), NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 1989) ugotavlja, da »je proporcionalno sklepanje tako zelo pomembno, da je za skrben razvoj tega pojma pri učencih opravičljivo kakršno koli časovno ali drugo prizadevanje«, in predlaga, da se proporcionalno sklepanje neformalno začne uvajati na zgodnji stopnji osnovne šole. V slovenskem Učnem načrtu za matematiko (1998) najdemo premo in obratno sorazmerje kot sklop v osmem razredu, v nižjih razredih pa cilj četrtega razreda, ki se glasi »sklepati iz enote na množino in obratno« in specialno didaktično priporočilo »Pri sklepanju lahko obravnavamo tudi preproste primere podvajanja in razpolavljanja (življenjski primeri).« (Učni načrt, 1998: 28). Kaže torej, da sledimo priporočilom, čeprav v poenostavljeni obliki.

Hoyes, Noss in Pozzi (2001) so ugotavljali, da je nujno, da učenci samostojno iščejo rešitve proporcionalnih problemov, kot je npr. *Ali se bolj splača kupiti 12 vstopnic za 15 € ali 20 vstopnic za 23 €*. Nesmiselno je torej vpeljevanje »križnega množenja«, od učencev vedno zahtevamo pojasnitev sklepanja (kolikokrat več, kolikokrat manj).

Namen prispevka je predstaviti nekatere bolj ali manj zanimive naloge, vezane na zgodnji razvoj proporcionalnega sklepanja. Omejili se bomo zato na naloge, ki so večinoma rešljive z znanjem matematike razredne stopnje osnovne šole.

Za začetni razvoj proporcionalnega razmišljanja so primerne naloge, ki izzovejo kognitivni konflikt z napačno aditivno rešitvijo, npr. *V banko A vložim 1 €, v banko B pa 2 €. Čez leto dni banka A izplača 11 €, banka B pa 12 €. V katero banko se bolj splača vlagati?* (Van de Walle, 2004). Preprosto pregledniciranje prikaže prednosti banke A in učence sili k razmisleku o (verjetno) prevladujočem aditivnem mišljenju, s pomočjo katerega so (vsaj nekateri) odgovorili, da sta obe banki enako ugodni, ker dodata po 10 €. Seveda je lahko naloga z istim ciljem tudi takšna, da zahteva nekoliko več matematičnega znanja, kot je npr. naloga s posodo, ki ima v prerezu obliko pravokotnega trikotnika. *Trikotnik ima na stranicah izrisano merilo. Posodo postavimo tako, da gladina tekočine dosega 4 enote na levi in 6 enot na desni kateti. Predvidi, do kod bo segala gladina na levi strani, ko posodo nagnemo toliko na desno, da tekočina doseže oznako 8 enot.*



Slika 1: Trikotna posoda. (Vir: lasten)

Učenci (tudi odrasli ljudje) običajno intuitivno odgovorijo, da bo gladina dosegla 2 enoti. Naloga je matematično rešljiva, ko učenci že poznajo obrazce za ploščino trikotnika. Pravilen odgovor je 3 enote, kar pokaže tudi poskus.

Za učence je lahko zanimivo tudi zastopanje različnih stališč, kot ga zahteva naslednja naloga:

V mestu A je število prebivalcev v zadnjih desetih letih zraslo s 5000 na 8000, v mestu B pa s 6000 na 9000. Ben trdi, da se je število prebivalcev obeh mest povečevalo enako. Jan trdi, da se je število prebivalcev mesta A povečevalo bolj. Uporabi matematiko in zapiši, kako bi lahko Ben in Jan utemeljila svoja odgovora.

Včasih pa lahko pri ponotranjenju razlike med aditivnim in multiplikativnim razmišljanjem pomagajo tudi zelo izkustvene naloge, kot je npr. *Metka in Helena tečeta po atletski stezi enako hitro. Metka je začela teči prva. Ko je pretekla 9 krogov, je Helena pretekla 3 kroge. Koliko krogov bo pretekla Helena, ko bo Metka pretekla 15 krogov.* (Cramer, 1993 v De Bock in dr., 2007). Pri nalogi s prebivalci sta obe rešitvi: »Število prebivalcev se je povečalo za enako mnogo, tj. 3000« in »Število prebivalcev mesta A se je povečevalo bolj, ker se je povečalo za več kot pol, pri čemer se je v mestu B povečalo samo za pol« smiselni, kajti vprašanje ne določa dovolj natančno pomena besed »povečalo bolj«. Pri drugi nalogi je smiselna le aditivna rešitev »Helena bo pretekla 9 krogov«.

Ko imajo učenci dovolj izkušenj in razlikujejo situacije, kje je primerno aditivno in kje multiplikativno razmišljanje, nadaljujemo s proporcionalnimi problemi. Proporcionalne naloge v grobem razvrstimo na:

1. Probleme manjkajoče vrednosti, pri katerih imamo tri podane vrednosti v izrazu $a : b = c : d$ in četrto vrednost iščemo.
Kmet Janez potrebuje približno 4 dni, da izkoplje jarek okrog kvadratnega pašnika s stranico 100 m. Koliko časa bi potreboval za kvadraten pašnik s stranico 300 m?
2. Primerjalni problem, kjer primerjamo vrednosti dveh ulomkov $a : b$ in $c : d$.
Gregor naredi sok tako, da 3 pomaranče stisne v 6 litrov vode. Maja stisne 7 pomaranč v 9 litrov vode. Čigav sok ima bolj pomarančni okus?
3. Transformacijske probleme, kjer je treba spremeniti eno izmed vrednosti a , b , c , d tako, da dosežemo zahtevan odnos med razmerji (enakost, večje ali manjše).
Franjo kuha kavo tako, da na ročko vode zakuha 3 žlice kave. Alenka kuha kavo tako, da na ročko vode zakuha 5 žlic kave. Koliko vode je treba doliti v kavo, ki jo je skuhal Franjo, da bo všečna Alenki?

V nadaljevanju vzemimo situacijo cen in na njej ponazorimo razvoj od koncepta množenja oz. deljenja do koncepta razmerij. *V trgovini stane 1 žemljica 20 centov.* V prvem koraku, ki je izvedljiv že v tretjem razredu, preprosto vadimo množenje oz. deljenje in pregledniciramo cene za večje število žemljic. Na podlagi preglednice lahko ugotavljamo povezanost količin – deset žemljic stane desetkrat več kot ena žemljica; 15 žemljic stane trikrat toliko kot 5 žemljic, 10 žemljic je desetkrat cenejših kot 100 žemljic. Učenci lahko prevzemajo različne vloge od mame, ki nakupuje za družino, do vodje šolske kuhinje, ki pripravlja malice za celotno šolo. Ob tem sklepajo – ker je 20 žemljic štirikrat več kot pet žemljic, bo tudi cena štirikrat večja. Seveda sklepamo z manjše množine na večjo in tudi obratno, kot je npr. potrebno pri nalogi *Štiri litrske steklenice soka stanejo 8 €. Koliko stane ena litrska steklenica soka?*

Pri učencih najprej spodbujamo preprosto sklepanje brez prehoda na enoto npr. znotraj prehoda na večjo množino: *Marina je kupila 6 knjig in plačala 4 €. Elena je kupila 24 knjig. Koliko je plačala Elena?* Elena je kupila štirikrat več knjig in bo plačala štirikrat več. Znotraj

prehoda na manjšo množino je sklepanje podobno: *Na tržnici stane 9 jabolk 90 centov. Rad bi kupil 3 jabolka. Koliko moraš plačati?* Kupil bom trikrat manj jabolk, zato bom plačal trikrat manj.

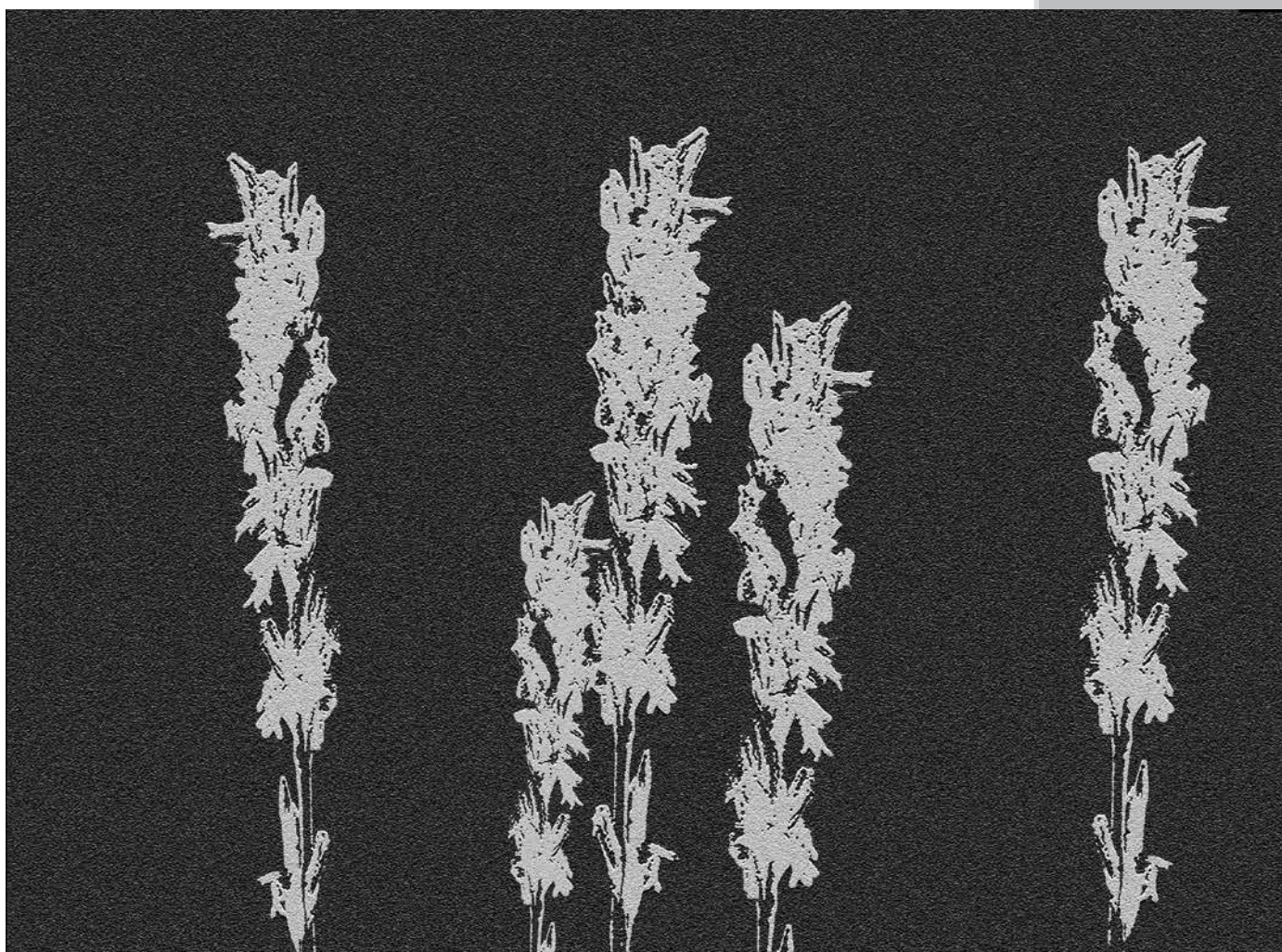
V višjih razredih naloge lahko vključujejo namig, ki spodbuja strategijo prehoda na enoto kot npr. naloga *V sadno solato za 40 oseb dodamo 5 žličk limoninega soka. Za koliko oseb bo zadoščala 1 žlička limoninega soka? Kaj pa 3, 6 ali 10 žličk limoninega soka?* Ko vmesno vprašanje izpustimo, npr. *Gregor je potreboval 15 plastenk barve, da je pobarval 18 stolov. Koliko stolov je pobarval, ko je porabil 25 plastenk?*, učenci običajno samostojno predlagajo ali prehod na enoto ali skalarno metodo. Skalarna metoda ima lahko različne oblike, kot je prikazano v nadaljevanju na primeru sklepanj dveh učencev četrtega razreda mariborske osnovne šole. Tine je svoj rezultat razložil takole: *Če potrebujem 15 plastenk za 18 stolov, bom potreboval 30 plastenk za 36 stolov, 45 za 54, 60 za 72 in 75 za 90. Lahko bi tudi nadaljeval na ta način, ampak vem, da je 3 krat 25 enako 75, zato bom zdaj delil. Če delim 75 plastenk s 3, torej dobim 25 plastenk za 90 deljeno s 3 stolov, to je za 30 stolov.* Aljaževa strategija je bila drugačna. Dejal je takole: *Potrebujem 15 plastenk za 18 stolov. Ko opazujem števili 15 in 25, ugotovim, da moram najprej izračunati, koliko stolov lahko pobarvam s 5 plastenkami. To je 6 stolov, ker je 5 trikrat manj od 15. Ker je 25 petkrat več od 5, lahko izračunam, da lahko s 25 plastenkami pobarvam 30 stolov.*

Razmerja lahko pojasnijo tudi številne življenjske dileme. Odkar sem zašla v »zrela leta«, se večkrat sprašujem, zakaj mine leto zdaj tako hitro, ko sem bila mlajša, pa je eno leto trajalo mnogo dlje. Za odgovor ni potrebna teorija relativnosti časa, ampak le preprosta razmerja. »Moje« leto dni je 2,4 % mojega življenja, leto dni moje mlajše kolegice pa je 3,7 % njenega življenja, zato je jasno, da njeno leto traja »dlje«. Proporcionalnost je dober vir realističnih nalog, ki vedno znova izzovejo večno dilemo vključevanja realističnih nalog in izkušenj učencev v pouk. Učitelj se morda izogne najbolj tipičnim pastem, kot je npr. naloga *Peter preteče 100 m v 17 sekundah. Koliko časa potrebuje za 1 km?*, gotovo pa se popolnoma ne more izogniti pastem, ki jih daje kontekstualizacija.

Literatura in viri

- 1 De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The Illusion of Linearity. From Analysis to Improvement*. New York: Springer.
- 2 Cramer, K., in Post, T. (1993). *Connecting Research to teaching proportional reasoning. Mathematics Teacher*, 86, 404–407.
- 3 National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- 4 Učni načrt za matematiko. Program osnovnošolskega izobraževanja. Matematika (1998). Predmetna kurikularna komisija za matematiko. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.
- 5 Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. New York: Pearson.

Problemske naloge



2.1 Problemske naloge

Dr. Amalija Žakelj, Zavod RS za šolstvo

2.1.1 Uvod

Namen poučevanja matematike ni le prenašanje matematičnih vednosti, temveč tudi to, da bi učenci matematiko odkrivali, mislili, gradili. Naučiti se matematiko pomeni delati matematiko tako, da rešujemo in raziskujemo probleme. Značilnost matematičnega mišljenja je namreč v dejavnostih reševanja problemov. V resnici se učenci učijo matematike, ko stopajo po poti razvoja človeškega mišljenja (Cotič, 1998). Različni matematični koncepti in teorije so se pogosto razvili v situacijah, ko je bilo treba rešiti problem, dotedanja sredstva za reševanje pa niso več zadoščala. Na enak način naj učenci različne pojme in vedenja usvojijo z lastnim razmislekom. Učitelj naj nikoli ne nadomesti učenčevega razmišljanja (angažmaja), sicer izniči formativno plat matematičnega izobraževanja.

Iz namena poučevanja matematike izhajajo cilji pouka matematike, ki so: naučiti učence abstraktno-logičnega mišljenja, geometrijskih predstav, povezovanja znanja znotraj matematike in tudi širše, naučiti učence uporabe matematike v vsakdanjem življenju, ustvarjalnosti, prepoznavanja in razumevanja problemskih situacij ter reševanja problemov.

Pri reševanju problemov pridobimo uvid v osmišljanje matematičnih vsebin, reflektiramo matematična znanja, se učimo procesnih znanj. Reševanje problemskih nalog ustvarja tudi podlago za nadaljnje učenje in usvajanje novih znanj, saj reševanje problemskih nalog od učencev zahteva, da se spoprimejo s problemi tako, da razumejo posredovane informacije, prepoznavajo bistvene lastnosti in odnose v določeni situaciji, sestavijo ali uporabijo enega ali več lastnih prikazov, odgovarjajo na vprašanja, ki sledijo, in na koncu ovrednotijo in pojasnjujejo rezultate, da bi dodatno osvetlili razumevanje situacije (Žakelj, 2010).

Dejavniki uspešnega reševanja problemskih nalog

Čeprav je seveda uspešno reševanje problemov odvisno od posameznika, njegovih sposobnosti, strategij, ki jih obvlada, prejšnjega znanja, motiviranosti, izpostavimo nekatere dejavnike, ki vplivajo na uspešnost reševanja problemov.

- **Branje besedilnih nalog z razumevanjem**

Bralna pismenost (Repež M., Straus M., 2005: 7), opredeljena v raziskavi PISA 2000, ni samo sposobnost branja, ki jo pridobimo v otroštvu, temveč se obravnava kot nenehno rastoč repertoar znanj, sposobnosti in strategij, ki jih pridobivamo vse življenje v različnih življenjskih situacijah in v interakciji z drugimi. Naloge s področja bralne pismenosti ne merijo tega, ali so 15-letniki »tehnično« sposobni nekaj prebrati. Pojem bralna pismenost se navezuje na sposobnost uporabe prebranega besedila v kontekstu različnih situacij, s katerimi se srečujejo 15-letniki tako znotraj kot zunaj šole, ter na njihovo razumevanje in razmišljanje o prebranem.

Za razvoj bralne pismenosti bi morali skrbeti vsi predmeti, tudi matematika. Pri načrtovanju pouka poleg matematičnih ciljev in vsebin načrtujemo tudi dejavnosti za razvoj bralne pismenosti. Če je le mogoče in smiselno, branje besedila ali reševanje problema dopolnimo z

dejavnostjo, ki navaja učence na razlago in razumevanje prebranega. Učenci naj utemeljijo postopke dela, analizirajo rešitev, se ustno in pisno izražajo: opredelijo in razčlenijo življenjsko problemsko situacijo na posamezne korake in oblikujejo problemska vprašanja; analizirajo in obnovijo problem s svojimi besedami ter utemeljijo rešitev; berejo z razumevanjem (samostojno oblikujejo vprašanja, razpravljajo o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi, izpišejo bistvene podatke oziroma odnose med podatki) idr.

Branje besedilnih matematičnih nalog za učenje učencem lahko postane razumljivejše in prijaznejše:

- če jim ponudimo za začetek preproste besedilne naloge, z malo podatki in z vsebino, ki jo bodo presodili kot zanimivo, smiselno in povezano z njihovimi življenjskimi interesi;
- če vzpostavimo varno vzdušje v razredu, tako da ni veliko priložnosti za tveganje slabe ocene, če učenci vedo in čutijo, da bodo njihove zamisli in ideje sprejete, če imajo možnost za doživljanje uspeha;
- če imajo možnost izražanja v fleksibilno sestavljenih manjših skupinah (razredne diskusije, ure sodelovanja učenja, reševanje problemov, simulacije, igra vlog, bralne in pisne delavnice z različnim tempom reševanja nalog ...) (Pečjak, Gradišar, 2002).

Za učenje branja z razumevanjem so lahko učinkoviti tudi odprti problemi, pri katerih se mora reševalec poglobiti v besedilo in samostojno oblikovati vprašanje. Besedilo mora prebrati pazljivo, ga analizirati, o njem razmisliti in glede na situacijo oblikovati vprašanje. Pri standardnih besedilnih nalogah učenci pogosto na slepo povežejo podatke, ki so podani, uporabijo pa postopek, ki so se ga prej učili.

- ***Razumevanje osnovnih matematičnih pojmov in obvladovanje proceduralnega znanja***

Pri uvajanju novih matematičnih pojmov gradimo na predznanju učencev in njihovih izkušnjah, pojme uvajamo postopoma, pozorni smo na napačne pojmovne predstave, spodbujamo procese, ki nastopajo pri matematičnem sklepanju.

Razumeti pojme pomeni imeti široko paleto reprezentacij posameznega pojma (konkretno, grafično, simbolno in abstraktno) ter sposobnost fleksibilnega prehajanja med različnimi reprezentacijami. Reševanje problemov je povezano prav s sposobnostjo fleksibilnega prehajanja med reperezentacijami. Npr. na sliki – slikovna reprezentacija – prepoznati podatke, jih analizirati in rešiti problem na simbolni ravni.

Za uspešno reševanje problemov je potrebna tudi določena količina avtomatiziranega znanja. Sweller (1989) trdi, da ima učenec, ki pri reševanju problema uporablja neavtomatizirana pravila, premalo kognitivne zmogljivosti za reševanje in razumevanje problema samega. Zato so poleg razumevanja pojmov pri matematiki pomembna tudi do neke mere avtomatizirana proceduralna znanja.

Na uspešnost reševanja problemov vpliva tudi sposobnost za priklic dejstev iz spomina. Zentall (1990) je v svojih raziskavah ugotovil, da je od sposobnosti za priklic matematičnih dejstev iz spomina odvisno, kako uspešno rešujemo matematične probleme. Pomembno je tudi, da kratkoročnega spomina ne obremenjujemo z računanjem, saj ga lahko tako uporabimo za to, da usmerimo pozornost na sam problem.

- **Strategije reševanja problemov**

Za reševanje problemov učenec potrebuje znanje, ki mora biti urejeno, dostopno priklicu, vsebovati mora pomembne pojme, zakonitosti, zveze med njimi. Tudi strategije in izkušnje sorodnih problemov so del znanja (npr. proceduralnega). Strategij reševanja problemov se učimo ob izbranih vsebinah, z metodami učenja in poučevanja, ki vključujejo različne dejavnosti, kot so npr. izkustveno učenje, dialog, reševanje odprtih problemov. Prav tako lahko z oblikami dela (sodelovanje v paru, skupini, sodelovalno učenje ...) spodbujamo interakcijo različnih mnenj, verbalizacijo idej in rešitev idr.

Reševanje problemov temelji na matematičnem sklepanju: dedukciji, indukciji, transformaciji, intuiciji, analogiji idr.

2.1.2 Strategije reševanja problemov

2.1.2.1 Deduktivni pristop

Sposobnost deduktivnega sklepanja izhaja iz sposobnosti abstraktnega mišljenja. Pri deduktivnem sklepanju izhajamo iz znanih predpostavk in na podlagi znanih dejstev sklepamo. Deduktivno sklepanje je proces postavljanja ugotovitev na podlagi znanih dejstev. Če vemo, da je vsota notranjih kotov trikotnika 180° , potem je vsota notranjih kotov opazovanega trikotnika zagotovo 180° . Učenci, ki zmorejo abstraktno misliti, lahko najprej poiščejo teorijo, princip, pravilo, rešujejo probleme deduktivno. Vendar večina učencev v osnovni šoli še zelo težko prehaja od splošnega h konkretnemu. Usvajanja novih znanj kot tudi reševanja problemov, kjer je to smiselno in mogoče, se večina učencev v osnovni šoli uspešneje uči in rešuje po induktivni poti.

2.1.2.2 Izkustveno učenje in induktivni pristop

Realistični pristop izhaja iz predpostavke od prakse k teoriji (Korthagen, 1999, Freudenthal, 1991), tradicionalni pristop pa od teorije k praksi. Pri tem pristopu se zmanjša prepad med teorijo in prakso oz. ga sam proces izobraževanja ne ustvarja, kot je to značilno za tradicionalistični pristop. Proces učenja/poučevanja se začne s situacijskim znanjem in se razvije v interakcijo učenca s problemsko situacijo in konkretna učna situacija ostane referenčna točka učnega procesa.

Izkustveno učenje vključuje: opazovanje (reflektiranje znanj), dejavnost, ki vključuje katero koli dejavnost: npr. predstavitev pojmov z modeli, diagrami, iskanje primerov in protiprimerov, eksperimentiranje idr.

Induktivni pristop nas privede do ugotovitev z zbiranjem, merjenjem, opazovanjem podatkov. Na podlagi števila podatkov, ki jih primerno obdelamo, dobimo osnovo za oblikovanje predpostavk. Predpostavke lahko vodijo do poglobljenih raziskav, ki predpostavke potrdijo ali ovržejo. Npr.: ob opazovanju zaporedja 2, 4, 8, 16, 32 ... sklepamo, da bo šesti člen 64 in lahko tudi na splošni člen: 2^n . Čeprav vemo, da predpostavka drži, je z opazovanjem nismo dokazali. Podobno z merjenjem kota med diagonalama kvadrata ugotovimo, da se diagonali kvadrata sekata pravokotno. Prepričani smo, da trditev drži, vendar kljub velikemu številu ponovitev

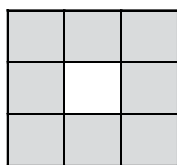
merjenj pri različnih kvadratih trditve še nismo dokazali. Dokazali bi jo lahko na drug način in tako trditev potrdili.

Oglejmo si primer TLAKOVANJE DVORIŠČA. Reševanje izziva razvija in preverja sposobnosti geometrijskih predstav.

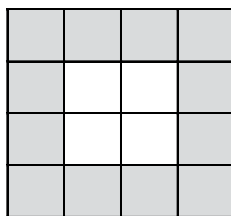
TLAKOVANJE DVORIŠČA

S polaganjem kvadratnih plošč dimenzije $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ želimo tlakovati dvorišče dolžine m metrov ($m \geq 3$) in širine n metrov ($n \geq 3$). Dvorišče bo z vseh štirih strani tlakovano s pasom temnosivih plošč dimenzije $1\text{ m} \times 1\text{ m}$, notranjost dvorišča pa s svetlo sivimi ploščami dimenzije $1\text{ m} \times 1\text{ m}$, kot kaže spodnja slika.

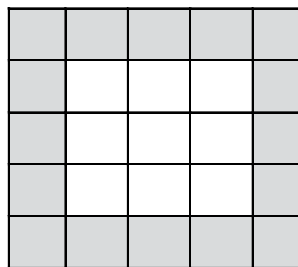
- Najmanj koliko temno sivih plošč dimenzije $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ potrebujemo, da bomo na opisan način tlakovali 12 m metrov dolgo in 10 m metrov široko dvorišče?
- Najmanj koliko temno sivih plošč dimenzije $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ potrebujemo, da bomo na opisan način tlakovali m metrov dolgo in n metrov široko dvorišče?



1. dvorišče



2. dvorišče



3. dvorišče

Slika 1: Tlakovanje dvorišča.

Reševanje

Pri deduktivnem pristopu bi nalogo najprej rešili na splošni ravni, nato pa bi dobljeno formulo uporabili za analiziranje posameznih primerov. Pri induktivnem pristopu je pristop ravno obraten. Najprej problem rešimo na konkretni ravni, pri izbranih dimenzijah dvorišča, nato sledi posplošitev. V drugi fazi rešimo problem na splošni ravni. Ker pridobimo nekaj izkušenj, sta pot in razmislek do posplošitve lažja.

Preglednica 1: Število plošč

dimenzije dvorišča (v metrih)		število vseh plošč	minimalno število svetlosivih plošč	minimalno število temnosivih plošč
širina dvorišča m	dolžina dvorišča n			
3	3	9	1	$9 - 1 = 8$
4	4	16	4	$16 - (4 - 2) \cdot (4 - 2) = 12$
5	5	25	9	$25 - (5 - 2) \cdot (5 - 2) = 16$
3	4	2	2	$12 - (3 - 2) \cdot (4 - 2) = 10$
3	5	15	3	$15 - (3 - 2) \cdot (5 - 2) = 12$
4	5	20	6	$20 - (4 - 2) \cdot (5 - 2) = 4$
...	...	...	...	...
10	12	12	80	$120 - (10 - 2) \cdot (12 - 2) = 40$
m	n		$(m - 2) \cdot (n - 2)$	$m \cdot n - (m - 2) \cdot (n - 2) = 2m + 2n - 4$

Rešitev

- Za tlakovanje obrobe 12 m metrov dolgega in 10 metrov širokega dvorišča potrebujemo 40 sivih plošč dimenzije 1 m x 1 m.
- Posplošitev lahko naredimo na podlagi opazovanja zaporedja. Za tlakovanje obrobe dvorišča dolžine m metrov ($m \geq 3$) in širine n metrov ($n \geq 3$) potrebujemo $2m + 2n - 4$ temno sivih plošč dimenzije 1 m x 1 m.

Utemeljevanje

Postavljenim ugotovitvam sledi predstavitev rešitev in utemeljevanje. Čeprav učenci v osnovni šoli še niso vedno kos strogim matematičnim dokazom, ki bi potrdili ali ovrgli predpostavke, pa je pomembno, da spoznajo pomen utemeljevanja. Če ne gre drugače, je utemeljevanje lahko vsaj opisno, učenci rešitev opišejo, jo podkrepijo ali ovržejo s primeri oz. nasprotnimi primeri.

V danem primeru lahko utemeljevanje sledi tudi iz razmisleka o dimenzijah dvorišča. Npr.: Minimalno število temnosivih plošč dobimo tako, da od števila plošč, ki bi jih potrebovali za tlakovanje celotnega dvorišča, odštejemo število plošč, ki bi jih potrebovali za tlakovanje svetlosivega pravokotnika v notranjosti dvorišča, katerega dimenziji sta po dolžini in širini za dve enoti krajši od dolžine in širine celotnega dvorišča. Za razumevanja dobljenih rešitev se pogovorimo o veljavnosti predpostavk.

2.1.2.3 Transformacija

Problem lahko zastavimo tako, da ga rešijo tako učenci v osnovni kot tudi v srednji šoli, vendar pa so pristopi reševanja in utemeljevanje rešitev zaradi različnega znanja različni. Primer Turnir, ki ga navajamo, je za osnovnošolca lahko (realistični) problem, za dijaka v srednji šoli pa zgolj rutinska naloga iz kombinatorike.

TURNIR

Na turnirju v namiznem tenisu igra 10 igralcev: Anka, Bojan, Cene, Duška, Edi, Franja, Goran, Hana, Iva, Jana. Koliko parov lahko sestavimo, če vsak igra z vsakim. Kaj pa, če problem posplošimo na n igralcev?

Reševanje

Dejavnosti učenca: Učenec se problema loti s premislekom. Reševanje predstavi v spodnji preglednici.

Preglednica 2: Pari igralcev na turnirju

	število igralcev					
	3	4	5	6	7	n
igralci	ABC	ABCD	ABCDE	ABCDEF	ABCDEFG	
pri	A, AC, BC	AB, AC AD, BC, BD, CD	AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE			
št. parov	3	6	10	15	21	
	$\frac{3 \cdot 2}{2}$	$\frac{4 \cdot 3}{2}$	$\frac{5 \cdot 4}{2}$	$\frac{6 \cdot 5}{2}$	$\frac{7 \cdot 6}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$

(Legenda: A - Anka, B - Bojan, C - Cene, D - Duška, E - Edi, F - Franja, G - Goran, H - Hana, I - Iva, J - Jana)

Rešitev

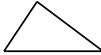
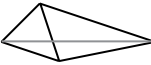
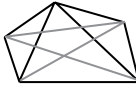
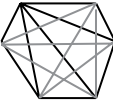
Urejeni podatki v preglednici so osnova za oblikovanje predpostavke, ki temelji na induktivnem razmisleku. (Pri oblikovanju domneve je lahko v oporo razmislek: Vsak igra z vsakim, par AB je isti par kot par BA. Pri 10 igralcih torej lahko sestavimo $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ parov. Pri n igralcih lahko sestavimo $\frac{n(n-1)}{2}$ parov.)

Utemeljevanje

Za utemeljitev rešitev lahko problem Turnir pretvorimo v geometrijski problem o vsoti števila stranic in števila diagonal v konveksnem n -kotniku:

»Vzemimo poljuben n -kotnik. Določi vsoto števila stranic in števila diagonal v konveksnem n -kotniku.«

Preglednica 3: Stranice in diagonale v n -kotniku.

št. stranic	3	4	5	6	...	n
						
št. stranic + število diagonal	$3 + 0 = 3$	$4 + \frac{4 \cdot (4-3)}{2} = 6$	$5 + \frac{5 \cdot (5-3)}{2} = 10$	$6 + \frac{6 \cdot (6-3)}{2} = 15$		$n + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Rešitev

- Število diagonal: Upoštevamo, da iz vsakega oglišča lahko potegnemo $(n - 3)$ diagonal, diagonalna AE je ista kot diagonalna EA in ugotovimo, da je vseh diagonal v konveksnem n -kotniku: $\frac{n(n-3)}{2}$.
- Število stranic konveksnega n -kotnika je n .
- Vsota števila stranic in števila diagonal v konveksnem n -kotniku je: $n + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Didaktični vidik problema Turnir

- Učenje procesnih znanj: sistematično beleženje in opazovanje zaporedja.
- Posploševanje, ki sledi na podlagi primerov.
- Utemeljevanje s pomočjo pretvorbe kombinatoričnega problema v geometrijski problem.

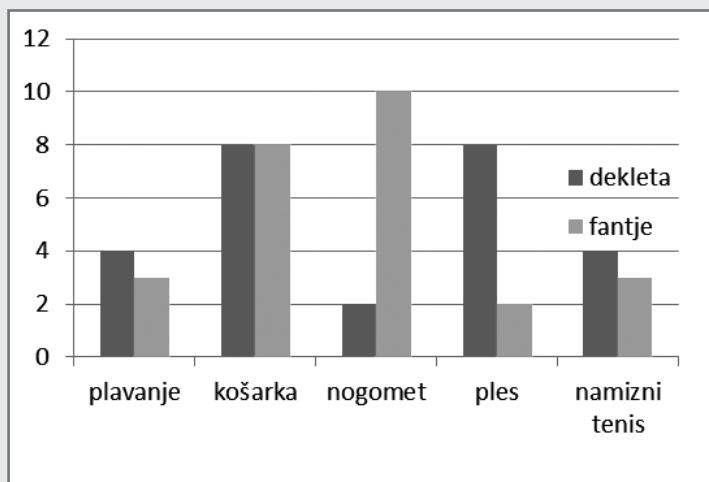
2.1.3 Od modela do problema

Reševanje problemov je lahko tudi oblikovanje problemov, in sicer tako, da izhajamo iz modela, dane enačbe, sistema, diagrama idr. Model prepoznamo in oblikujemo vprašanje oz. nalogo tako, da bi bil dani model lahko rešitev naloge ali pot do rešitve. Poglejmo si primere na naslednjih straneh. Izhodišče predstavljajo račun seštevanja, enačba, sistem enačb, stolpčni in tortni diagram.

1. Oblikuj besedilne naloge, katerih pot do rešitve so dani matematični modeli.

Od modela do problema	
IZHODIŠČE	REŠEVANJE
Zapiši besedilno nalogo, ki bi jo rešil s pomočjo računa: $264 + 367 = 631$	Jan je imel 264 znamk, njegov stric mu jih je dal še 367. Koliko znamk ima Jan?
Zapiši besedilno nalogo, ki bi jo rešil s pomočjo enačbe: $12 + x = 20$	Če nekemu številu prišteješ 12, dobiš 20. Poišči iskano število.
Zapiši besedilno nalogo, ki bi jo rešil s pomočjo sistema enačb: $\begin{aligned} x + y &= 24 \\ x - y &= 6 \end{aligned}$	Poišči števili, katerih vsota je 24, njuna razlika pa 6.

2. Spodnji diagram prikazuje podatke o športnih dejavnostih učencev. Zapiši besedilno nalogo in oblikuj vprašanje tako, da bo dani diagram rešitev naloge.



Reševanje

1. možnost (oblikovanje odprtega problema)

Razišči, s katerimi športi se ukvarjajo tvoji sošolci, in to prikaži s primernim diagramom.

2. možnost

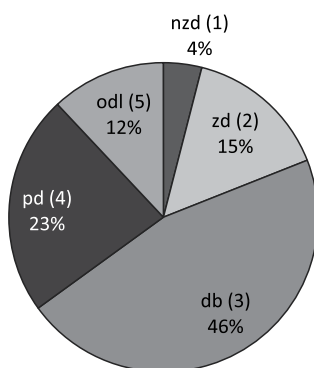
Na šoli Sladki Vrh je v devetem razredu 26 deklet in 26 fantov. Štiri dekleta trenirajo plavanje, prav toliko deklet trenira namizni tenis, dvakrat več kot plavanje jih trenira košarko, dvakrat manj kot plavanje pa jih trenira nogomet.

Pri fantih je situacija taka: košarko trenira osem fantov, nogomet trenira deset fantov, ples dva, preostali fantje trenirajo namizni tenis. Prikaži podatke o številu fantov in deklet, ki trenirajo posamezne športe s stolpčnim diagramom.

Primerjaj besedilo tvoje naloge z besedilom naloge sošolca.

3. Spodnji diagram prikazuje odstotne deleže posameznih ocen učencev na preizkusu. Zapiši besedilno nalogo in oblikuj vprašanje tako, da bo dani diagram rešitev naloge.

Ocene na preizkusu znanja učencev 9. b razreda



Reševanje

1. možnost (oblikovanje odprtega problema)

Razišči uspešnost učencev 9. b razreda na preizkusu iz matematike.

2. možnost

V razredu je 25 učencev. Na preizkusu iz matematike so učenci 9. b razreda dosegli naslednje ocene: 1 učenec je pisal preizkus nezadostno, 4 zadostno, 11 dobro, 6 prav dobro, 3 učenci odlično. Prikaži razmerje med deleži učencev, ki so na preizkusu dosegli posamezno oceno.

Predstavitev naloge in razgovor

Primerjaj besedilo tvoje naloge z besedilom naloge sošolca. Kaj lahko poveš o številu učencev v razredu? Ali je s podanim diagramom število učencev v razredu enolično določeno?

2.1.4 Vrste problemov

Ali nalogo/izziv označimo kot problemsko nalogo, je odvisno od številnih dejavnikov: izkušenj reševalcev s podobnimi nalogami, od starosti in predznanja, od konteksta idr. Za učenca, ki ne pozna formule za obseg kvadrata, je izračunati dolžino traku, s katerim bomo oblepili kvadratno mizo, problem, za učenca v devetem razredu pa je to lahka rutinska naloga. Vedno

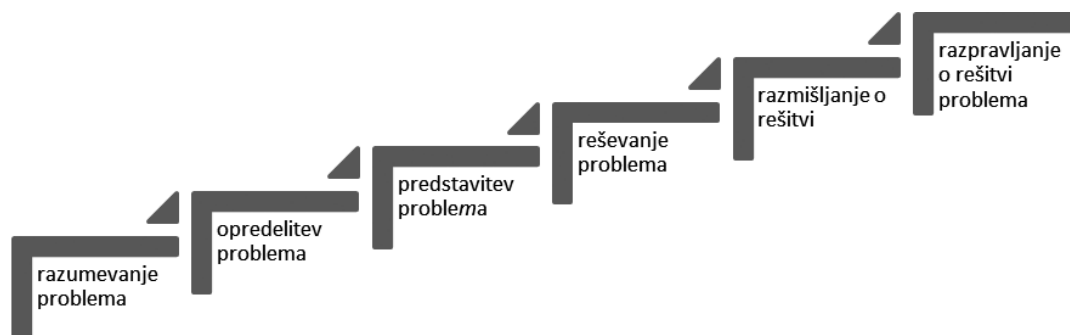
je problem naloga, v kateri učenci ne poznajo poti do rešitve vnaprej in morajo samostojno izbrati in načrtovati strategijo reševanja.

Naloga, pri kateri učenec pozna pot reševanja, ne razvija oziroma preverja problemskih znanj. Tako nalogo v didaktiki matematike imenujemo problem – vajo oziroma rutinski problem (Cotič, 1999), ki ga lahko rešimo ali z vstavitvijo posebnih podatkov v prej rešen splošni problem ali pa tako, da brez sence izvirnosti po stopnjah ponavljamo kak že močno obrabljen vzorec. Učencu ni treba nič drugega kot malo pazljivosti in potrpljenja pri delu po receptu. Nima pa nobene priložnosti, da bi uporabil svojo lastno presojo ali svoje inventivne sposobnosti.

Sposobnost reševanja problemskih nalog je definirana kot zmožnost posameznika, da se s pomočjo spoznavnih procesov spoprime z resničnimi situacijami, v katerih pot do rešitve ni takoj očitna in v katerih področja vsebine ali področja učnega načrta, ki jih lahko uporabijo, ne spadajo v samo en predmet: v matematiko, naravoslovje ali branje (Repež in Drobnič Vidic, 2004).

Značilnosti problemskih nalog:

- Problemske naloge niso rešljive z uporabo nekaj določenih procesov, ki se jih je učenec naučil in jih je vadal v šoli.
- Vsebinsko problemske naloge niso omejene samo na eno (matematično) vsebino, pogosto pa tudi ne samo na en predmet.
- Problemske naloge, ki izhajajo iz življenjskih situacij, predstavljajo kontekste, ki se lahko pojavijo v učenčevem življenju.



Slika 2: Proces reševanja problemskih nalog.

Reševanje problemov zahteva analitično, kvantitativno in analogno razmišljanje ter sposobnosti kombinatoričnega razmišljanja. Tako mora reševalec povezati več različnih spoznavnih procesov, da bi rešil problem.

- Pri razumevanju problemske situacije mora npr. ločiti med dejstvi in mnenji. (Primer: Ana je v časopisu prebrala novico: Zgodila se je nesreča, v kateri so bili vsi udeleženci nesreče lažje ranjeni. Vse udeležence nesreče so odpeljali v bolnišnico na preventivni pregled. Ana ve, da je bila Mojca tisti dan v bolnišnici na pregledu. Ali lahko Ana sklepa, da je bila Mojca udeležena v nesreči? Tega, na podlagi znanih dejstev ne more sklepati, lahko pa je to njeno mnenje ali domneva.)

- Pri oblikovanju rešitve mora znati prepoznati odnos med spremenljivkami. (Primer: V trgovini Kolesar zadnji model kolesa prodajo 5 % ceneje. Ob nakupu kolesa bo cena odvisna od prvotne cene, popusta in tega, koliko je še koles na zalogi.).
- Pri izbiri strategije pretehtati vzrok in posledico. Te dejavnosti pogosto zahtevajo analitično, kvantitativno in analogno razmišljanje ter sposobnosti kombinatoričnega razmišljanja. Tako mora učenec povezati več različnih spoznavnih procesov, da bi rešil problem.

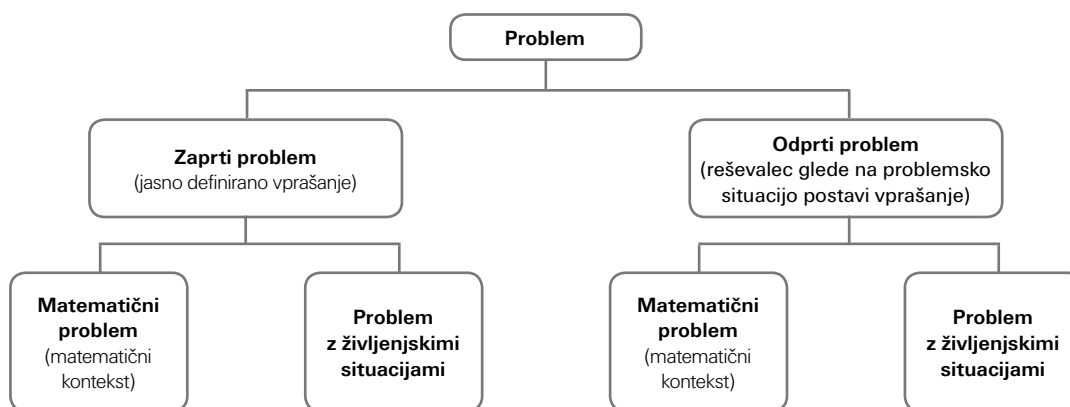
Vrste problemov

Sklop Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami vključuje različne probleme glede na vsebino in tip problema.

Probleme lahko delimo glede na cilje raziskovanja, kontekst, v katerega je problem postavljen, zahtevnost idr. Glede na cilje raziskovanja lahko probleme delimo na zaprte in odprte probleme.

- *Zaprte problemi* imajo jasno postavljeno vprašanje in cilj raziskovanja. Rešitve so pričakovane vnaprej.
- *Odprti problemi* so problemi, pri katerih vprašanje ni enoznačno definirano, temveč ga raziskovalec oblikuje glede na dano problemsko situacijo.

Problem je lahko postavljen v različne kontekste oz. situacije (izobraževalno okolje, znanstveno okolje, družbeno okolje, osebno, javno idr.). V nadaljevanju se bomo posvetili problemom, ki so postavljeni ali v matematični kontekst (torej v znanstveno okolje) ali pa izhajajo iz življenjskih situacij.



Slika 3: Vrste problemskih nalog.

2.1.4.1 Odprti problemi

Pri odprtih problemih je problemska situacija postavljena kot izziv, pri katerem vprašanja niso jasno postavljena. Problem je treba razumeti, »videti« in glede na dano situacijo zastaviti smiselno vprašanje oz. cilj raziskovanja. Sam vsebinski cilj izziva ni natanko določen, zato je postavljanje ciljev del naloge. Učenci s postavljenim vprašanjem tako določijo tudi globino in širino obravnave problema ter pristop pri reševanju.

Tako npr. izziv zastavimo kot povabilo k razmisleku:

- »Kako bi primerjal vrednosti?« in ne »Izračunaj razmerje med njimi.«
- »Razmisli, v kateri banki je ugodneje varčevati.« in ne »Izračunaj obresti, ki jih varčevalcem ponujajo posamezne banke.«

Težišče tovrstnih problemov je: problem videti, razumeti, samostojno postaviti vprašanje. Temu sledi izvajanje bolj ali manj zahtevnih matematičnih postopkov, vendar pa izvajanje postopkov ni edini cilj oz. ne najpomembnejši cilj pri tovrstnih problemih. Tovrstne dejavnosti učence spodbujajo k različnim predstavitvam, ustvarjajo širše priložnosti za izgrajevanje pojmovnih predstav, kot bi jih imeli, če bi dani problem reševali npr. le na simbolni ravni: »Izračunaj ploščino pravokotnika pri danih podatkih.«

Pri reševanju in raziskovanju odprtih problemov spodbujamo, da učenci postavijo čim več vprašanj. Pogovorimo se, na katera vprašanja bomo zmogli in znali odgovoriti. Izberemo eno ali nekaj vprašanj, na katera bomo poiskali odgovore. Zgled odprtega problema je npr. izziv »Razišči štirikotnike s ploščino 48 cm^2 , katerih dolžine stranic v cm se izražajo z naravnimi števili.« Didaktična moč take naloge je predvsem v izgrajevanju matematičnih pojmov. Pri raziskovanju učenec pravokotnike predstavi na konkretni ravni (izdelovanje modelov), slikovni ravni (risanje slik), simbolni ravni (zapis ploščine) in na koncu na abstraktni ravni (Žakelj, 2010).

Faze reševanja odprtih problemov:

- uvid v problemsko situacijo – razumevanje problemske situacije (opredelitev problema, postavitev vprašanja),
- analiziranje problemske situacije,
- izbira strategije reševanja (pristop pri iskanju odgovora, načrtovanje dela),
- ugotavljanje lastnosti, pravilnosti oz. zakonitosti,
- reševanje in oblikovanje rešitev,
- utemeljevanje ugotovitev oz. rešitev,
- predstavitev rešitev in interpretiranje rešitev.

Učenci naj sami, če seveda zmorejo, oblikujejo bistvene ugotovitve, sicer jih nanje opozori učitelj. Učitelj jih usmerja, da znanje povezujejo, reflektirajo, ugotovitve utemeljijo. Rešitev lahko tudi opišejo, jo podkrepijo s primeri, dodatnimi primeri in nasprotnimi primeri.

Odprti problem (matematični kontekst)

Izziv: ŠTIRIKOTNIKI

Razišči štirikotnike s ploščino 48 cm^2 , katerih dolžine stranic v cm se izražajo z naravnimi števili.

Dejavnosti učencev

Razmislek o izzivu in postavitve vprašanja:

Razmislimo o dani problemski situaciji in izluščimo bistvo.

Dana sta dva pogoja: ploščina in lastnosti stranic pravokotnika. Npr.: pravokotnika s stranicama 6 cm in 8 cm ter 1 cm in 48 cm zadoščata pogojem naloge.

V zvezi z izzivom si postavimo eno ali več vprašanj.

- Koliko je takih pravokotnikov, ki zadoščajo pogojem izziva?
- Ali se s spreminjanjem dolžin stranic pravokotnika spreminjajo tudi obsegi pravokotnikov?

Načrt reševanja

Odločimo se o načinu preiskovanja dane situacije. Lahko se odločimo za induktivni pristop. Izkusveno učenje, induktivno učenje, opazovanje primerov, delo s konkretnim materialom, je zlasti primerno za učence, ki probleme rešujejo na podlagi celostnega vtisa (Žakelj, 2003). Ne glede na metode učenja in poučevanja si pri pouku prizadevamo za dejavno učenje, ki vodi do interakcije med konkretno in miselno dejavnostjo.

Analiziranje podatkov

Glede na dano situacijo podatke smiselno uredimo v preglednico, opazujemo vrednosti stranic in obsegov ter sklepamo.

Predstavitev in interpretacija ugotovitev ter predstavitev

Ugotovitve predstavimo, interpretiramo, opišemo z besedami in uporabo matematičnih pojmov. Na koncu razmislimo, ali smo odgovorili na postavljena vprašanja.

Odprti problem (problem z življenjsko situacijo)

Problemi naj bodo vezani na predznanje učencev, njihove izkušnje, izhajajo naj iz sposobnosti razmišljanja učencev, predstavljajo naj nove tipe vprašanj, ki niso omejeni na eno samo vsebinsko področje. Poleg tega naj bodo vzeti iz resničnega življenja, ki jih učenci lahko prepoznajo kot smiselne in uporabne. Reševanje matematičnih problemov spodbuja povezovanje različnih vsebin in znanj.

Primer: MEDENI PIŠKOTI

V trgovini Sladke sanje stanejo 4 kg medenih piškotov 8 €, v trgovini Piškotek pa 7 kg medenih piškotov stane 13,30 €. Pri nakupu medenih piškotov v trgovini Sladke sanje kupec za vsakih 10 plačanih kg medenih piškotov dobi 1 kg medenih piškotov brezplačno. Razmisli o pogojih za nakup v obeh trgovinah. Kaj se lahko smiselno vpraša? Zapiši vprašanje. Poišči odgovor na vprašanje, ki si ga sam zapisal/a.

Namig

Samo preiskovanje situacije odpira vprašanja:

- V kateri trgovini je ugodnejši nakup, če želimo kupiti čim več piškotov?
- V kateri trgovini je ugodnejši nakup, če imamo na voljo omejen znesek? Pri katerih zneskih denarja je nakup ugodnejši v eni ali drugi trgovini?

2.1.4.2 Zaprti problemi

Zaprti problemi imajo jasno postavljeno vprašanje in cilj raziskovanja. Rešitve so pričakovane vnaprej. Tudi zaprti problemi so lahko postavljeni v znanstveno, matematično okolje ali pa izhajajo iz življenjskih situacij.

Zaprti problemi (matematični kontekst)

Primer: TEKMOVANJE

Na tekmovanju iz atletike je bilo treba izvesti tri različne vaje na drogu. Vsaka vaja je bila sestavljena iz treh samostojnih zahtevnejših elementov. Na tekmovanju je vsak tekmovallec izvedel samo en element na podlagi žreba. Tadej v celoti obvlada drugo in tretjo vajo, ne pa prve. Kolikšna je verjetnost, da bo Tadej izžrebal element, ki ga obvlada?

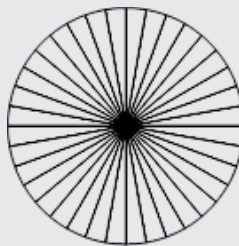
Vsebinsko področje: podatki in verjetnost

Primer: VRTAVKA (TIMSS 2007, MO7_11):

Cilji: uporabiti in povezovati pojme: razmerje, verjetnost, krožni diagram (raznovidna predstavitev pojma).

Na okroglo podlago na sliki je na sredini pritrjen kazalec. Podlaga ima tri barvna polja: oranžno, vijolično in zeleno. Rok zavrti kazalec 1000-krat. Spodnja preglednica prikazuje, kolikokrat se kazalec ustavi na vsakem barvnem delu. Glede na rezultate vrtenja, ki so zapisani v preglednici, ustrezno pobarvaj okroglo podlago.

barva	število
oranžna	500
vijolična	250
zelena	250



Vsebinsko področje: podatki in verjetnost

Zaprti problem (problem z življenjsko situacijo)

Primer: **POPUST**

Cilji: izvesti miselne računske operacije.

Ciril je šel v trgovino kupit jakno, ki po redni ceni stane 50 €, vendar je trenutno znižana za 20 %. V Sloveniji imajo 5-odstotni prodajni davek. Prodajalec je ceni jakne najprej dodal 5-odstotni davek, nato pa odštel 20 %. Ciril se s tem ni strinjal. Želel je, da prodajalec najprej zniža za 20 % in nato prišteje 5-odstotni davek.

Ali je v ceni kakšna razlika? Utemelji.

Primer: **NAJEM STANOVANJA** (PISA 2006, str. 89)

Cilji: sklepati na področju sorazmerja, povezano s praktičnim kontekstom v družbi, večplastno vprašanje izbirnega tipa zahteva razumevanje vključenih pojmov, prebrati in razumeti večplastne matematične predpostavke.

Ljudje, ki živijo v večstanovanjski hiši, so se odločili, da jo kupijo. Denar za plačilo bodo zbrali tako, da bo vsakdo prispeval vsoto, ki je sorazmerna z velikostjo njihovega stanovanja.

Trditev	Drži/ne drži
Oseba, ki živi v največjem stanovanju, bo za kvadratni meter svojega stanovanja plačala več kot oseba, ki živi v najmanjšem stanovanju.	Drži/ne drži
Če poznamo površini dveh stanovanj in ceno enega izmed njiju, lahko izračunamo ceno drugega.	Drži/ne drži
Če poznamo cene cele stavbe in vsoto, ki jo bodo plačali posamezniki, potem lahko izračunamo skupno površino vseh stanovanj.	Drži/ne drži
Če bi se skupna cena stavbe znižala za 10 odstotkov, bi vsak izmed lastnikov plačal 10 odstotkov manj.	Drži/ne drži

V stavbi so tri stanovanja. Največje stanovanje 1 meri 95 m², stanovanje 2 meri 85 m², stanovanje 3 meri 70 m². Prodajna cena stavbe je 300 000 EUR.

Koliko naj bi plačal lastnik stanovanja 2? Prikaži svoj izračun.

2.1.5 Pomen taksonomij za načrtovanje in preverjanje ter ocenjevanje

2.1.5.1 Taksonomije

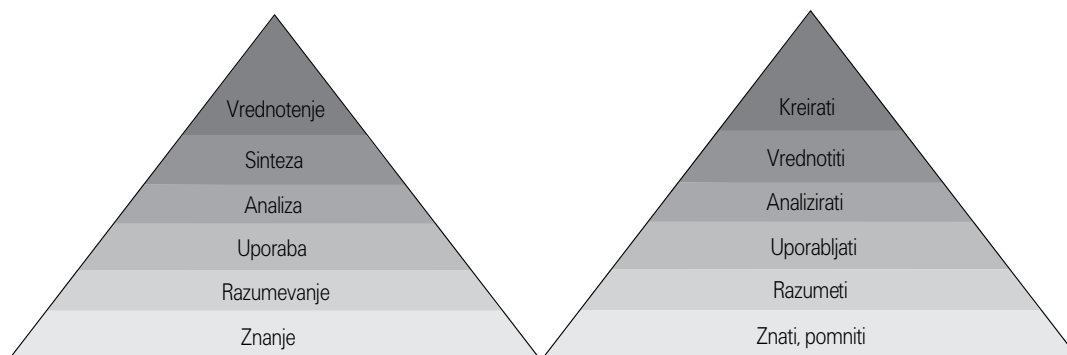
Cilji v učnem načrtu opredeljujejo, na kakšen način naj učenci gradijo/usvajajo/procesirajo znanje oz. vsebine, s pomočjo katerih procesov in veščin naj izkazujejo znanje. Dejavnosti za doseganje ciljev spodbujajo k lastni dejavnosti, omogočajo predstavljanje idej na različne načine, izražanje močnih področij in izboljševanje na šibkih.

Pri iskanju odgovora, na kakšnem znanju je težišče pri pouku in s tem tudi pri ocenjevanju, nam lahko pomagajo taksonomije učnih ciljev za spoznavno področje. Znanih je več taksonomij oz. klasifikacij kognitivnih znanj (Bloomova in Marzanova taksonomija, Gagnejeva, TIMSS-ova, Nissanova klasifikacija znanj idr.). Vse taksonomije ali klasifikacije predpostavljajo, da je struktura taksonomskih stopenj deloma hierarhična, predvsem pa se posamezne stopnje v posameznih nalogah prepletajo in jih včasih ni lahko enoznačno razmejevati in določevati. Taksonomije oz. klasifikacije so namenjene predvsem postavljanju ciljev. Učili naj bi celoto, pri preverjanju pa je treba paziti, da preverjamo in dosežemo vse taksonomske stopnje. Velikokrat velja, da naj bi naloga, ki meri znanje na višjih, kompleksnejših spoznavnih ravneh, načeloma vsebovala tudi zahteve z nižjih stopenj. Pri razvrščanju navadno tako nalogo uvrstimo na najvišjo stopnjo, ki jih doseže preverjanje.

Klasifikacije oz. taksonomije so sredstvo, s katerimi oblikujemo naloge tako, da z njimi razvijamo in preverjamo ter ocenjujemo različne vrste znanj v skladu z zastavljenimi učnimi cilji. Taksonomije se spreminjajo in posodablajo in prilagajajo potrebam raziskovanja. V zadnjem obdobju je bila npr. posodobljena Bloomova taksonomija. Tudi mednarodne raziskave, npr. TIMSS, PISA idr., prilagodijo taksonomije glede na potrebe in cilje raziskovanja. Tako matematične naloge v TIMSS-ovi raziskavi običajno preverjajo predvsem konceptualno znanje, matematične probleme, naloge pa so v glavnem usklajene z učnimi načrti sodelujočih držav. Mednarodna raziskava PISA z nalogami preverja predvsem matematično pismenost, reševanje problemov z življenjskimi situacijami, uporabna znanja, bralno pismenost idr.

2.1.5.2 Bloomova taksonomija

Bloomova taksonomija ima jasno stopnjevanje kognitivnih ravni znanja. V zadnjem obdobju je bila Bloomova taksonoma posodobljena (slika 4) in ne gre prezreti zadnje dodane stopnje, to je kreativnost. Vse taksonomije niso enako uporabne za vsa predmetna področja. Tako npr. pri matematiki uporabljamo prirejeno Gagnejevo klasifikacijo znanj.



Slika 4: Bloomova taksonomija (levo) in Bloomova taksonomija – dopolnjena (desno).

2.1.5.3 Gagnejeva klasifikacija znanja (Gagne, 1985)

Gagnejevo klasifikacijo znanj smo v slovenskem šolskem prostoru začeli uporabljati šele v zadnjih letih. Pri preverjanju matematičnega znanja jo uporabljajo tudi v večini evropskih držav. Prav tako sestavljavci nacionalnih preizkusov iz matematike pri nas in sestavljavci preizkusov v mednarodni primerjalni raziskavi TIMSS uporabljajo po Gagneju prirejeno klasifikacijo znanj.

- A Osnovno in konceptualno znanje
 - 1. osnovna znanja in vedenja (poznavanje)
 - 2. razumevanje pojmov in dejstev
- B Proceduralno znanje
 - 2. rutinska proceduralna znanja (izvajanje rutinskih postopkov)
 - 3. kompleksna proceduralna znanja (izvajanje kompleksnih postopkov)
- C Problemsko znanje
 - 4. reševanje in raziskovanje problemov
 - (strategije za reševanje problemov)
 - (aplikativna znanja – uporaba specifičnega znanja)

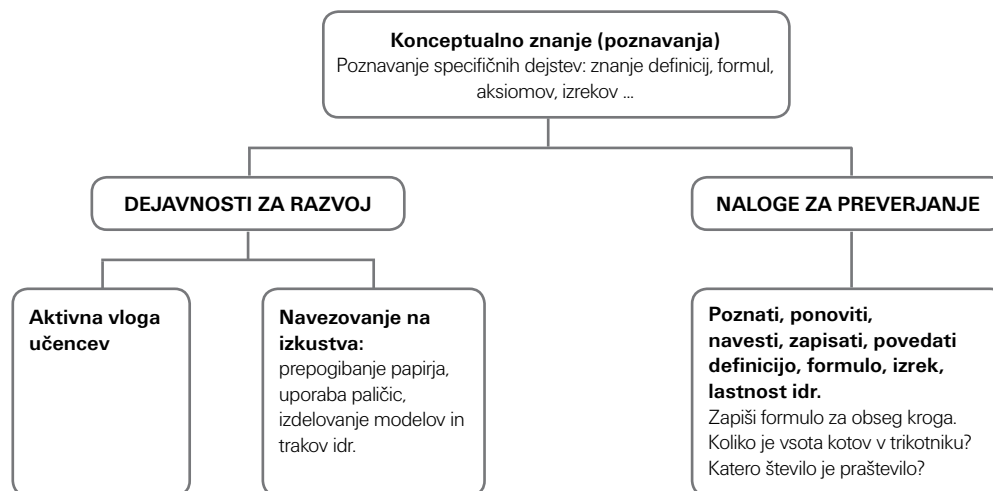
A Osnovno in konceptualno znanje

1. Osnovna znanja in vedenja (poznavanje)

Poznavanje osnovnega in konceptualnega znanja pomeni poznavanje specifičnih dejstev: znanje definicij, formul, aksiomov, izrekov idr.

Dejavnosti za učenje

Čeprav so naloge, ki preverjajo poznavanje predvsem naloge, ki preverjajo reprodukcijo, pa je za usvajanje znanja na ravni poznavanja prav tako potrebno aktivno učenje, izkustveni pristop.



Slika 5: Konceptualno znanje (poznavanja).

Pri razvrščanju nalog na taksonomsko stopnjo vplivajo stanje v razredu, poprejšnje do-gajanje v razredu, način obravnave vsebin z učenci, vrsta problemov, ki smo jih že reševali, predznanje, izkušnje učencev s posameznimi tipi nalog. Zato določevanje takso-nomskih stopenj praviloma ni povsem enoznačno. Kljub temu v nadaljevanju navajamo primere nalog, s katerimi želimo ilustrirati taksonomske ravni. Izhajali smo iz osnovnih značilnosti taksonomij in tega, da gre za osnovnošolsko raven. Prav iz tega razloga pri nekaterih navajamo tudi razred, saj naloga v npr. šestem razredu lahko pomeni pro-blem, v devetem pa razredu pa rutinsko nalogo.

Naloge za preverjanje

Naloge za preverjanje poznavanja so tipa: ponoviti, navesti, zapisati, povedati definicijo, formulo, izrek, lastnost idr.

Primer

Cilji: Poznati vsoto notranjih in zunanjih kotov trikotnika.

Dejavnosti za učenje:

- preiskovanje trikotnikov (»trganje« in sestavljanje kotov, merjenje, risanje in upoštevanje lastnosti (vzporednica, izmenični koti, skladni koti ...);
- samostojno ugotavljanje značilnosti, nadgradijo z učiteljevo razlago.

Naloge za preverjanje na ravni poznavanja:

- Koliko je vsota notranjih in koliko je vsota zunanjih kotov trikotnika? Zapiši vsoto.
- Nariši poljuben trikotnik in označi notranje in zunanje kote ter zapiši vsoto notranjih in vsoto zunanjih kotov trikotnika.

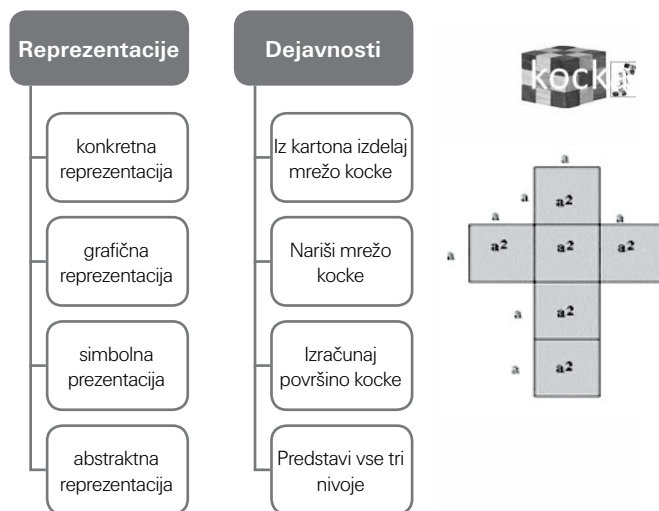
Taksonomska raven: poznavanje.

Naloge za preverjanje na ravni poznavanja:

- Zapiši formulo za obsega kroga.
- Zapiši z besedo 1280.
- Povej standardno enoto za merjenje dolžine.
- Koliko je vsota kotov v trikotniku?
- Katero število je praštevilo?

2. Razumevanje pojmov in dejstev

Razumevanje pojmov in dejstev pomeni sposobnost fleksibilnega prehajanja med različnimi reperezentacijami (konkretna, grafična, simbolna, abstraktna).



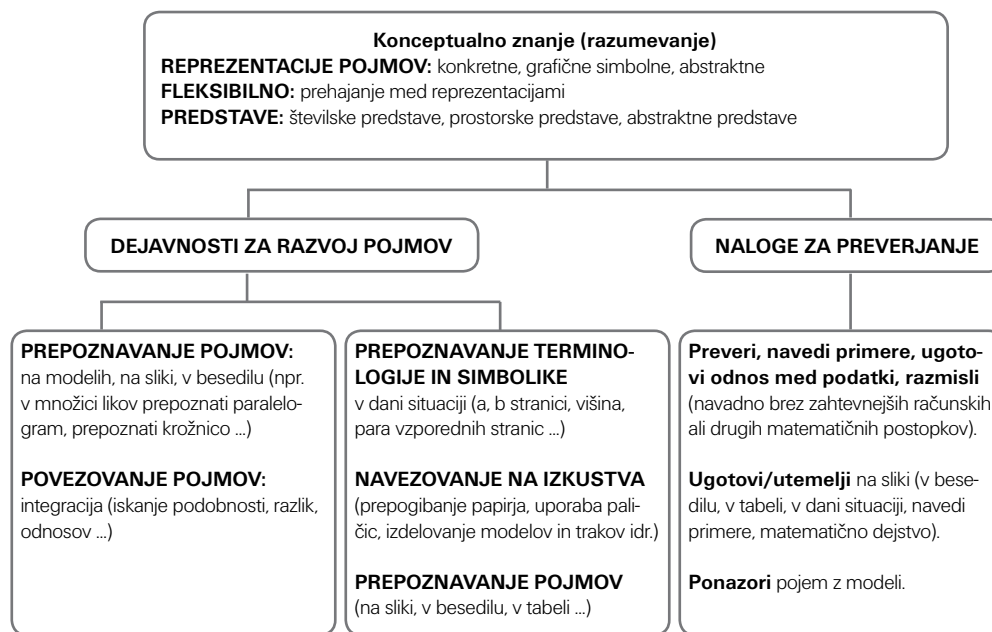
Slika 6: Fleksibilno prehajanje med reprezentacijami.

Dejavnosti za učenje

Pri učenju in poučevanju z razumevanjem gradimo na predznanju, pojme uvajamo postopoma, s primernimi učnimi situacijami predstavimo uvid v smiselnost učenja novih vsebin in poskrbimo za pravočasnost odkrivanja napačnih pojmovnih predstav.

Dejavnosti za razvoj pojmov:

- navezovanje na izkustva (prepogibanje papirja, uporaba paličic, izdelovanje modelov in trakov idr.);
- prepoznavanje pojmov (na sliki, v besedilu, v preglednici, dani situaciji);
- iskanje primerov in protiprimerov idr.;
- identifikacija in ustrezna uporaba načel in zakonitosti,
- poznavanje in uporaba dejstev in definicij;
- primerjanje, razlikovanje in povezovanje s sorodnimi pojmi.



Slika 7: Konceptualno znanje (razumevanje).

Razumevanje pojmov se nanaša na zmožnost, da pri razmišljanju uporabljamo pojme, njihove definicije, povezave med pojmi in različne predstavitve pojmov.

Naloge za preverjanje

Naloge, ki preverjajo razumevanje pojmov in dejstev, so tipa: preveri, navedi primere, ugotovi odnos med podatki, razmisli (navadno brez zahtevnejših računskih ali drugih matematičnih postopkov), ugotovi/utemelji matematično dejstvo, ponazori pojem z modeli idr.

Primeri nalog

1. cilj: Prepoznati del celote na sliki.

Naloga: Koliko malih kvadratkov bi morali še osenčiti na liku, da bi bilo osenčenih $\frac{3}{4}$ malih kvadratkov?

A 5

B 4

C 3

D 2

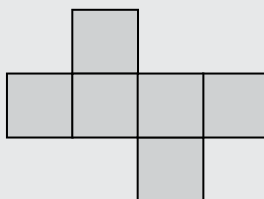
E 1

Reprezentacija: slikovna.

Taksonomska raven: razumevanje.

2. cilj: Na sliki prepoznati rob kocke in njegovo dolžino ter izračunati prostornino kocke.

Naloga: Slika predstavlja mrežo kocke, ki meri 6 cm². Izračunaj prostornino kocke.



Reprezentacija: slikovna, deloma simbolna.

Taksonomska raven: razumevanje.

3. cilj: Iz besedila prepoznati rob kocke in določiti prostornino kocke.

Naloga: Površina kocke meri 6 cm². Koliko meri prostornina?

Reprezentacija pojma: simbolna, abstraktna.

Taksonomska raven: razumevanje.

4. cilj: Rešiti preprosto enačbo s premislekom.

Naloga: reši enačbo s premislekom.

$$2x = 10x + 20 = 40$$

Reprezentacija: simbolna.

Taksonomska raven: razumevanje.

5. cilj: Deliti celoto na enake dele, prepoznati del celote na modelu; zapisati del celote z ulomkom.

Naloga: Kolikšen del ure je potekel med 1.10 in 1.30? Zapiši z ulomkom.

Reprezentacija: simbolna.

Taksonomska raven: razumevanje.

B Proceduralna znanja

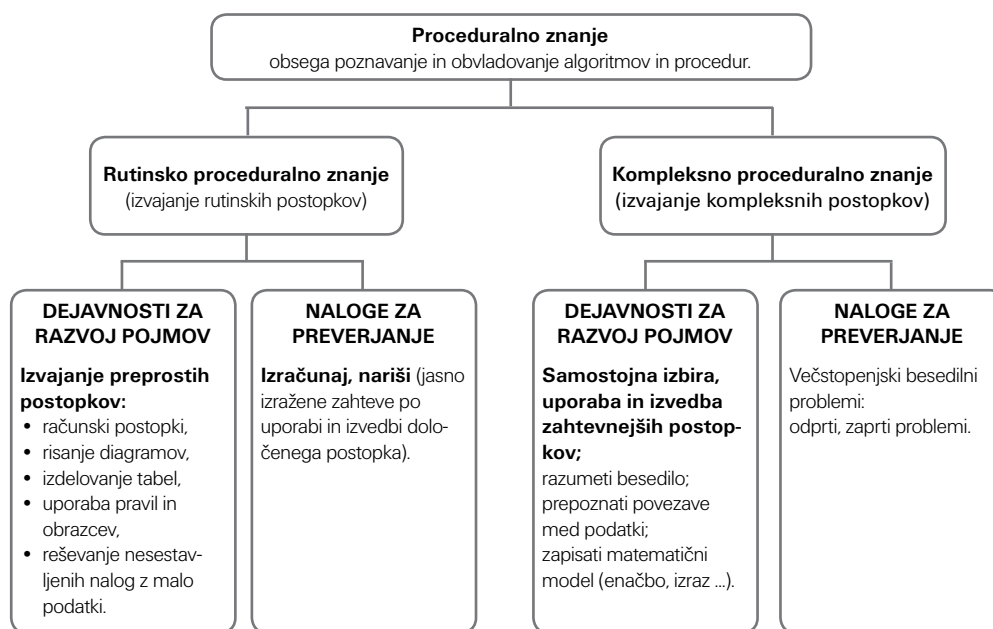
Proceduralna znanja delimo na:

- *rutinska proceduralna znanja* (izvajanje rutinskih postopkov),
- *kompleksna proceduralna znanja* (izvajanje kompleksnih postopkov).

Dejavnosti za učenje

Učenje proceduralnih znanj z razumevanjem temelji na razumevanju pojmov. Če se učenec npr. uči množenja decimalnih števil brez razumevanja pojma »decimalno število«, je od števila ponovitev postopka odvisno, kako dobro se bo naučil. Vendar je tako pridobljeno znanje običajno kratkotrajno in ga hitro pozabimo.

Idealno bi bilo, če bi se postopkov in različnih algoritmov učili takrat, ko so usvojeni temeljni pojmi, ki so za izvajanje procedur potrebni. To vedno ni povsem mogoče, lahko pa stalno preverjamo razumevanje pojmov in pravočasno odkrivamo nevtralgične točke. Npr. pogoj za risanje grafa premega sorazmerja z razumevanjem je razumevanje pojma premo sorazmerje.



Slika 8: Proceduralno znanje.

Proceduralno znanje se nanaša na zmožnost povezovanja (matematičnih) postopkov z danimi problemskimi situacijami in izvedbe postopkov pri obravnavi problemske situacije. Izraža se z:

- zmožnostjo izbire in pravilne uporabe postopkov,
- s preverjanjem in utemeljevanjem pravilnosti postopka na konkretnih primerih ali v splošnosti (npr. z algebrskimi simboli),

- učinkovito uporabo raznih številskih algoritmov, razbiranjem in izdelovanjem preglednic in diagramov, izvajanjem geometrijskih konstrukcij, zaokrožanjem števil pri računanju ipd.

Naloge, ki preverjajo rutinska proceduralna znanja (izvajanje rutinskih postopkov), preverjajo preproste postopke, računske postopke, risanje diagramov, izdelovanje preglednic, uporabo pravil in obrazcev, reševanje nesestavljenih nalog z malo podatki idr.

Naloge, ki preverjajo kompleksno proceduralno znanje, so večstopenjski besedilni problemi, ki preverjajo razumevanje besedila, prepoznavanje povezav med podatki, zapis matematičnega modela (enačbo, izraz ...).

Primeri nalog

1. cilj: Izvajati preproste računske postopke (izračunati številski oz. algebrski izraz, rešiti preprosto linearno enačbo).

Naloga:

Izračunaj: $2 \cdot (-3 \cdot 4 - 8) + 3 \cdot 6$

Reši enačbo: $2 \cdot x + 4 = 14$

Izračunaj $2 \cdot a - 8 \cdot b$, če je $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$.

Taksonomska raven: rutinsko proceduralno znanje.

2. cilj: Preveriti poznavanje in uporabo formule (uporaba obrazca).

Naloga: Dan je krog z obsegom 200 cm. Izračunaj velikosti središčnih kotov, ki pripadajo krožnim lokom z dolžinami 100 cm, 20 cm, 10 cm, 40 cm.

Taksonomska raven: rutinsko proceduralno znanje.

3. cilj: Izbrati postopek/formulo za prostornino kvadra, pretvarjati enote, povezovati votle in kubne mere. Rešiti večstopenjski besedilni problem.

Naloga: V akvariju oblike kvadra, ki je dolg 7 dm, širok 4 dm in visok 3 dm, je voda do višine 1 dm. Koliko vode je v akvariju? Koliko litrov vode moramo še doliti, da bo akvarij poln do višine 0,25 m?

Taksonomska raven: kompleksno proceduralno znanje.

4. cilj: Prepoznati odnose med podatki, zapisati matematični model (račun, enačbo) za rešitev problema.

Naloga: Avtomobil ima rezervoar za gorivo, v katerega lahko natočimo 45 l goriva. Avtomobil porabi 8,5 l goriva na vsakih prevoženih 100 km. 350 km dolgo potovanje smo začeli s polnim rezervoarjem. Koliko goriva je ostalo v rezervoarju ob koncu potovanja?

Taksonomska raven: kompleksno proceduralno znanje.

5. cilj: Izbrati postopek/formulo, prepoznati odnose med podatki, zapisati matematični model (račun, enačbo) za rešitev problema.

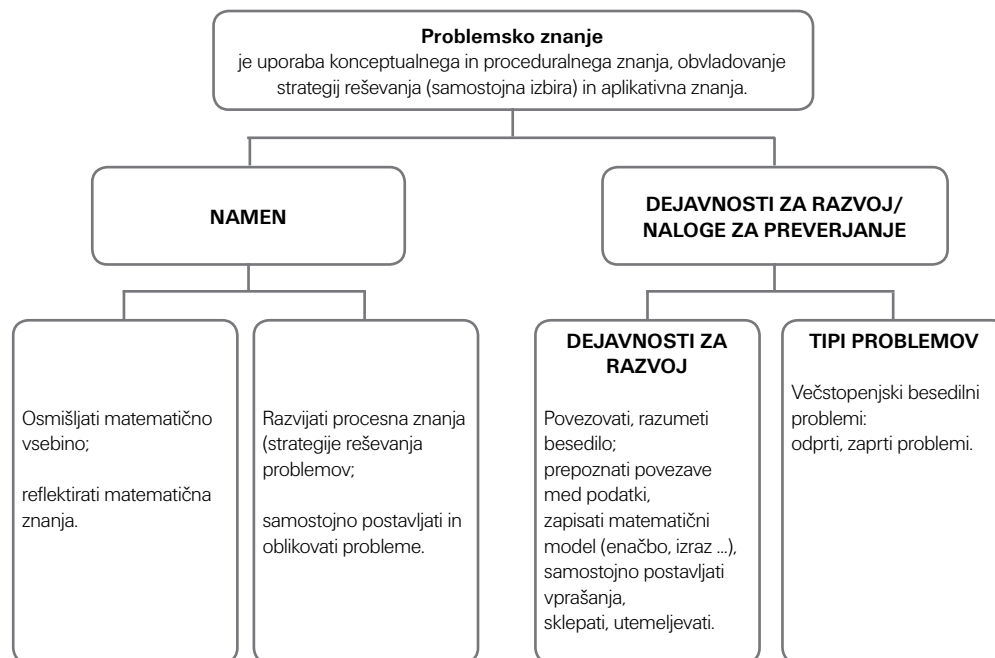
Naloga: Cisterno, ki drži 252 000 l, lahko izpraznijo iz dveh cevi. Iz prve cevi odteče 10 l vode v sekundi, iz druge pa 15 l v sekundi. Cisterno začnejo prazniti samo iz prve cevi. Čez koliko časa naj začnejo prazniti cisterno še iz druge cevi, da bo izpraznjena v 4 urah?

Taksonomska raven: kompleksno znanje.

C Problemsko znanje

Problemsko znanje pomeni uporabo konceptualnega in proceduralnega znanja in obvladovanje različnih strategij reševanja problemov. O reševanju oziroma raziskovanju problema govorimo takrat, ko:

- proces reševanja teče samostojno (če na primer uporabimo recept, formulo, znane postopke, je to problem – vaja oziroma rutinski problem),
- rešitev je nova za reševalca, ki zna potem uspešneje reševati nove probleme,
- pojavi se transfer znanja oziroma prenos metode reševanja, ki je tudi dokaz, da je problem rešljiv z miselno dejavnostjo.



Slika 9: Problemsko znanje.

Temeljni elementi problemskega znanja so:

- oblikovanje problema (prepoznavanje in formulacija problema, postavljanje smiselnih vprašanj),
- preverjanje podatkov (učenec se mora vprašati in nato analizirati, ali ima problem dovolj podatkov za rešitev, ima problem preveč podatkov za rešitev, si podatki nasprotujejo ...),
- strategije pri reševanju oziroma uporaba teh procesov (Frobisher, 1994):
 - komunikacijske (pojasnjevanje, govorjenje, strinjanje, spraševanje),
 - operacijske (zbiranje, urejanje, razvrščanje, spreminjanje),
 - miselne (razčiščevanje, analiziranje, razumevanje),
 - procese zapisovanja (risanje, pisanje, izdelovanje različnih diagramov ...),
 - uporaba znanja oziroma transfer znanja.

Dejavnosti za razvoj problemskega znanja

- prepoznavanje in formuliranje problemov,
- obravnava zadostnosti in konsistentnosti podatkov,
- razvijanje in uporaba modelov in ustreznih matematičnih orodij pri reševanju matematičnih problemov,
- izvajanje miselnih veščin (induktivno, deduktivno mišljenje, analogija, intuicija, transformacija ...),
- presojanje o smiselnosti rešitev idr.

Učenci naj imajo priložnost soočiti se z različnimi situacijami.

Primeri nalog

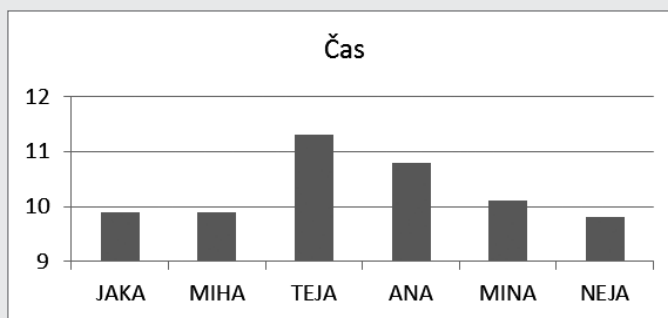
1. cilj: Razumejo in uporabljajo aritmetično sredino pri reševanju matematičnih problemov.

a) Primer preiskovanja

Maja dobiva mesečno žepnino, ki je odvisna od pomoči pri domačem gospodinjstvu. Povprečna njena žepnina za zadnjih pet mesecev je bila 40 €. Razišči in razmisli: Če je povprečna vrednost njenih petih žepnin 40 €, kolikšne so bile lahko njene posamezne mesečne žepnine? Predstavi vsaj pet različnih možnosti.

b) *Branje diagramov*

Diagram prikazuje čase učencev na 100 m. Izračunaj njihov povprečni čas.



c) *Besedilna naloga*

Majin povprečni čas za prvih pet tekov je bil 12,5 sekund. Šestič pa je progo pretekle v 13,1 sekundi. Kolikšen je bil njen povprečni čas šestih tekov?

d) *Reševanje nalog z razmislekom, brez računskih postopkov*

Prodajalec avtomobilov je v časopisu objavil oglas. »Stari in novi avtomobili na prodaj, različne cene, povprečna cena 9000 €.« Katera od navedenih trditev je glede na oglas zagotovo pravilna?

- A Vsi avtomobili stanejo med 8000 € in 10 000 €.
- B Polovica avtomobilov stane manj kot 9000 €, polovica avtomobilov pa stane več kot 9000 €.
- C Vsaj en avtomobil stane 9000 €.
- D Nekaj avtomobilov stane manj kot 9000 €.

2. cilj: Sklepati, povezati delne rezultate, deliti in množiti s potenco števila 10.

Naloga:

Janez in Katka sta morala deliti število s 100. Po pomoti je Janez število pomnožil s 100 in dobil rezultat 450. Katka je pravilno delila število s 100. Katero število je njen odgovor?

- A 0,0045
- B 0,045
- C 0,45
- D 4,5

Vsebinsko in didaktično problemske naloge osmišljajo matematično vsebino (funkcionalnost znanja), omogočajo reflektiranje matematičnih znanj, razvijajo procesna znanja oz. različne strategije pri reševanju problemov ter razvijajo samostojno postavljanje in oblikovanje problemov.

Literatura in viri

- 1 Cotič, M. (1998). *Uvajanje vsebin iz statistike in verjetnosti ter razširitev pojma matematičnega problema pri razrednem pouku matematike. Doktorsko delo. Ljubljana: Filozofska fakulteta.*

- 2 Cotič, M. (1999). *Reševanje matematičnih problemov na začetku šolanja*. Občni zbor DMFA Slov., let. 51, str. 35.
- 3 Frobisher, L. (1994). *Problems, Investigation and an Investigative Approach*. V: Orton, A., Wain, G. (ur): *Issues in Teaching mathematics*. London: Cassell Education.
- 4 Gagne, R. M. (1985). *The conditions of learning and theory of instruction*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- 5 Japelj, B.(ur.), Čuk, M. (ur.) (2008). *TIMSS 2007: Mednarodna raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja*. V: *Matematične naloge za višje razrede osnovne šole*. Ljubljana: Pedagoški inštitut.
- 6 Pečjak S., Gradišar A. (2002). *Bralne učne strategije*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 7 Repež, M. (ur.), Drobnič V. (ur.), Štraus, M. (ur.) (2008). *Izhodišča merjenja bralne pismenosti v raziskavi PISA 2006*. Ljubljana: Nacionalni center PISA, Pedagoški inštitut.
- 8 Repež, M., Štraus, M. (2005). *Izhodišča merjenja bralne pismenosti v raziskavi PISA 2000*. Ljubljana: Nacionalni center PISA, Pedagoški inštitut.
- 9 Repež, M., Drobnič Vidic, A. (2004). *Reševanje problemskih nalog v jutrišnjem svetu. Prva ocena sposobnosti medpredmetnega povezovanja znanja*. RAZISKA-VA PISA 2003. Dostopno na: http://www.pei.si/UserFilesUpload/file/raziskovalna_dejavnost/PISA/PISA2009/ (15. 3. 2013).
- 10 Sweller, J. (1989). *Cognitive technology: Some procedures for facilitating learning and problem-solving in mathematics and science*. *Journal of Educational Psychology*, 81.
- 11 Zentall, S. S. (1990). *Fact-retrieval automatization and math problem solving by learning disabled, attention-disorderd and normal adolescents*. *Journal of Educational Psychology*, 82.
- 12 Žakelj, A. (2010). *Raznovrstnost pristopov k učenju in poučevanju matematike*. V: Kmetič, S. (ur.), Simik, M. (ur.), Žakelj, A., *Posodobitve pouka v gimnazijski praksi – Matematika*, 1. izd. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, str. 15-77.
- 12 Žakelj, A. (2003). *Kako poučevati matematiko. Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

2.2 Razvijanje problemskih znanj v različnih fazah pouka

Mag. Mateja Sirnik, Zavod RS za šolstvo

2.2.1 Uvod

Zastavimo si vprašanje: »Kaj je matematično znanje? Kaj poučujemo in kaj se učijo učenci pri pouku matematike?« Trdimo lahko, da je od našega pojmovanja matematike odvisen naš način poučevanja in kakšnega pouka so deležni naši učenci. Vse prevečkrat se zgodi, da pri učencih ne pride do transfera in uporabe deklarativnega in proceduralnega znanja v novih šolskih in življenjskih situacijah. Zato se vse bolj poudarja, da naj bi učenci med izobraževanjem razvili tudi veščine in spretnosti oz. procesna znanja, ki so sicer tesno povezana z matematičnim znanjem, vendar nekoliko bolj splošna, prenosljiva tudi na druga področja. To so znanja, ki omogočajo uporabo specifičnih znanj (npr. matematičnih) v različnih življenjskih situacijah.

Po Marzanovi delitvi znanja delimo na vsebinska in procesna (povzeto po Rutar Ilc). Vsebinska znanja so predmetno specifična, procesna pa so vsem predmetom skupna. Procesna znanja po Marzanu delimo na:

- *Procesi kompleksnega mišljenja* (opazovanje, primerjanje, razvrščanje, abstrahiranje, sklepanje z indukcijo in dedukcijo, sklepanje po analogiji, utemeljevanje, posploševanje, analiziranje perspektiv, odločanje, preiskovanje, reševanje problemov, eksperimentalno raziskovanje, analiza napak ...).
- *Delo z viri* (zbiranje, analiza, interpretiranje, sinteza, presoja uporabnosti in vrednosti podatkov ...).
- *Predstavljanje idej* (jasnost izražanje, učinkovitost komuniciranja, ustvarjanje kakovostnih izdelkov ...).
- *Sodelovanje* (prizadevanje za skupne cilje, uporaba medosebnih veščin, prevzemanje različnih vlog v skupini ...).

Do podatkov, formul, definicij, izrekov naj bi prihajali z miselnimi procesi primerjanja, razvrščanja, preizkušanja, sklepanja z indukcijo, dedukcijo, analiziranja napak, ki naj bi jih organizirali okrog matematičnih konceptov. Vsebinska znanja naj bi povezovali s procesi v vseh fazah učnega procesa, pri usvajanju novih vsebin, razširitvi, uporabi kot pri preverjanju in posledično ocenjevanju znanja. Sočasno prepletanje vsebinskih in procesnih znanj nam zagotavlja vseživljenjsko znanje, uporabno v novih situacijah. Torej se z metodami učenja in poučevanja učimo različnih procesnih znanj, ki so pomembna za razvoj matematičnega znanja:

- opazovanje;
- primerjanje, razvrščanje, sistematično zapisovanje;
- predvidevanje (napovedovanje) in preverjanje;
- sklepanje z indukcijo in dedukcijo;
- sklepanje po analogiji;
- sklepanje z uporabo analize in sinteze;
- utemeljevanje, posploševanje;
- posebni primeri;

- preiskovanje, reševanje problemov;
- uporaba različnih strategij reševanja problemov;
- postavljanje vprašanj;
- kritičen odnos do rešitev;
- uporaba geometrijskega orodja in IKT;
- uporaba različnih virov.

V učnem načrtu za matematiko v osnovni šoli so pri učenju problemskih znanj posebej izpostavljena naslednja procesna znanja: spreminjanje podatkov naloge, izbira primerne orodja/tehnologije, sistematično zapisovanje, predvidevanje in preverjanje, načrtovanje dela, posebni primeri, posplošitev, razbitje problema na podprobleme, strategije poskušanja, predstavitev matematične obravnave, hipotetiziranje, protiprimeri, postavljanje ključnih raziskovalnih vprašanj, kritično razmišljanje o potrebnih in zadostnih podatkih, kritičen odnos do rešitev, kritičen odnos do interpretacije rezultatov, uporabljanje geometrijskega orodja.

Zora Rutar Ilc nas še opozarja, da se procesna znanja uporabljajo v treh različnih pomenih:

- ta znanja uporabljamo v procesu pridobivanja znanja, kot pomoč za izgrajevanje novih vsebinskih znanj (npr. opazovanje, primerjanje, razvrščanje, delo z viri ...);
- izkazovanje obvladovanja vsebinskih znanj z uporabo procesnih znanj (razumevanje nekega pojma podpremo z utemeljevanjem, reševanje različnih problemov ...);
- procesna znanja, ki so sama po sebi cilj: večšina eksperimentiranja, večšina dela z viri.

Torej učencem sama zmožnost uporabe različnih procesnih znanj omogoča dejavno sodelovanje pri odkrivanju, učenju in razumevanju novih matematičnih konceptov, pravil in zakonitosti ter povezovanju le-teh v pojmovne mreže in pri nadaljnjem reševanju problemov. Pri reševanju problemov prihaja do spontane uporabe in prepletanja različnih procesnih znanj, kar poimenujemo kot strategija reševanja problemov (Žakelj, 2003: 36).

Zdaj se vprašajmo: »*Kaj je problemsko znanje?*«. Po Gagnejevi klasifikaciji znanj gre za sposobnost uporabe konceptualnega in proceduralnega znanja v novih situacijah – v matematičnih in nematematičnih. Problemsko znanje torej povezuje uporabo strategij (nabor procesnih znanj) za reševanje problemov ter uporabo matematičnih vsebinskih znanj v matematičnih problemih in problemih z življenjskimi situacijami. Rečemo lahko, da so procesna znanja del problemskih znanj.

Poglejmo si na primeru načrtovanja vsebine geometrijskih pojmov: *krog*, *krožnica*, *krožni izsek*, *krožni lok* v osmem razredu, kako lahko procesna znanja razvijamo skupaj z vsebinskimi znanji v različnih fazah pouka.

V učnem načrtu za matematiko imamo tri teme: *Geometrija in merjenje*, *Aritmetika* in *Druge vsebine*. Večino ciljev in vsebin, zapisanih pri *Drugih vsebinah*, naj bi uresničevali znotraj preostalih tematskih sklopov. Zato že v fazi načrtovanja posameznega tematskega sklopa pri Geometriji in merjenju ter Aritmetiki pogledamo, katere cilje in vsebine iz *Drugih vsebin* bi bilo smiselno vključevati v sam učni proces.

Razred: 8.

Tema: GEOMETRIJA IN MERJENJE

Sklop: Geometrijski pojmi (krog, krožnica, krožni izsek, krožni lok)

Operativni cilji iz učnega načrta	Vsebine (št. ur)	Minimalni standardi	Standardi znanja (obravnavani cilji in vsebine vodijo k doseganju naslednjih standardov VIO)
Geometrija in merjenje Učenci/učenke: • razumejo pomen števila π, • izračunajo obseg in ploščino kroga z uporabo obrazcev;	Krog, krožnica	Učenec/učenka: • izračuna obseg in ploščino kroga, • uporablja skico pri reševanju geometrijskih nalog, • pozna in uporablja lastnosti premega sorazmerja, • uporablja žepno računalo za izračun vrednosti številskega izraza,	• pozna in uporablja pojme in postopke s pojmi ravninske geometrije, • uporablja geometrijsko orodje pri načrtovanju geometrijskih konstrukcij, • opiše in utemelji postopke geometrijske konstrukcije, • uporablja različne strategije merjenja, pretvarja merske enote v geometrijskih nalogah in nalogah iz vsakdanjega življenja, • uporablja in razvije učinkovitebralne strategije za nadaljnje učenje in izobraževanje, • v skladu z vsebinami osnovnošolske matematike razvije matematično in nematematično terminologijo, • življenjske situacije prikaže z modeli.
Druge vsebine • uporabljajo geometrijsko znanje za reševanje življenjskih problemov, • uporabljajo pretvarjanje merskih enot pri reševanju matematičnih problemov (odprtih in zaprtih) in problemov iz življenjskih situacij, • uporabljajo pretvarjanje merskih enot pri reševanju geometrijskih problemov, • rešijo indirektna besedilna naloge;	Krožni izsek, krožni lok, krožni kolobar Matematični in geometrijski problemi in problemi z življenjskimi situacijami	• reši matematični problem in problem z življenjsko situacijo.	
• opazujejo in prepoznajo pravilo v vzorcu in vzorec nadaljujejo, • modelirajo fizične objekte z geometrijskimi modeli, • berejo z razumevanjem.	Vzorci Modeliranje (geometrijski modeli)		

2.2.2 Uvajanje novih pojmov z razvijanjem problemskih znanj

Poglejmo si vključenost vsebinskih in procesnih znanj pri uvajanju novega pojma obseg kroga s problemskim pristopom.

Postavimo si raziskovalno vprašanje: *Kako bi izračunali obseg poljubnega kroga?*

Pričakovano predznanje učencev: razumevanje pojma obseg, obseg trikotnika, obseg enakostraničnega trikotnika, obseg štirikotnika, obseg kvadrata, obseg poljubnega večkotnika, obseg pravilnega večkotnika.

Vprašanja učencem:

- *S koliko podatki je določen enakostranični trikotnik, kvadrat, enakostranični petkotnik?*
- *Od česa je odvisen njegov obseg? Kakšna je ta odvisnost? Zapiši jo.*
- *S koliko podatki je določen pravokotnik, enakokraki trikotnik? Od česa je odvisen njegov obseg?*
- *S koliko podatki je določen krog? Napovej, od česa bo odvisen njegov obseg. Kakšna bo ta odvisnost? Kako bomo izračunali obseg kroga?*

Učenci poskušajo sami napovedati, da je odnos med obsegom in premerom premo sorazmeren, in zato v nadaljevanju z učenci v različnih dejavnostih merjenja opazujemo količnik o/d . Torej preden gremo opazovat količnike o/d , postavimo hipotezo $o = ___ \cdot d$ in v nadaljevanju iščemo koeficient premega sorazmerja.

Pregled vsebinskih in procesnih znanj, ki smo jih pri tem uporabljali:

Vsebinska znanja	Procesna znanja
• pojem obsega • geometrijski liki – trikotnik, štirikotnik ... večkotnik, krog • iracionalno število π	• postavljanje vprašanj • napovedovanje, postavljanje hipoteze • merjenje • zapisovanje podatkov • uporaba računalna

Torej ob uporabi različnih procesnih znanj iščemo pravila formule, odnose in zakonitosti v matematiki. Prav tako s problemskim pristopom spoznamo formulo za ploščino kroga, ploščino krožnega izseka, dolžino krožnega loka. Kot vsebina v učnem načrtu ni posebej naveden *krožni kolobar*, ker gre samo za preverjanje razumevanja pojma ploščina in se računanja ploščine krožnega kolobarja lotimo kot reševanje nove problemske situacije, v kateri lahko tudi izpeljemo formulo.

Reševanje matematičnih problemov in problemov z življenjskimi situacijami

Kot uporabo naučenega geometrijskega znanja pri reševanju življenjskih problemov si pogledmo naslednjo nalogo:

Koza je privezana na 6-metrsko vrv, ki je pritrjena na zunanji vogal hleva. Hlev je 5 m dolg in 4 m širok. Okoli hleva je trava.

- Kolikšna je površina travnika, na katerem se lahko pase koza?
- Zapiši izraz za izračun površine travnika.

Izvedbo pri pouku in njeno analizo opisuje učiteljica Marija Magdič v svojem prispevku z naslovom Koza.

Eden od ciljev pouka matematike je tudi, da učenci *modelirajo fizične objekte z geometrijskimi modeli*.

V okroglo jedilnico s premerom 2 m bomo položili parket. Lastnik mora izbrati vrsto parketa, dimenzijo parketa in dobavitelja. Pomagaj mu pri izbiri in izračunu, koliko parketa potrebuje. Pripravi mu tri različne predloge.

Vzorci so ravno tako vsebina, ki naj bi se obravnavala skozi različne matematične vsebine. Poglejmo si naslednji primer:

1. korak: Na velik papir narišite polkrog s premerom 1 m.
2. korak: V polkrog včrtajte dva polkroga s premerom 0,5 m.
3. korak: V vsak polkrog iz drugega koraka včrtajte polkrog s polovico manjšim premerom.

Postopek ponavljajte:

n -ti korak: V vsak polkrog iz prejšnjega koraka včrtajte polkrog s polovico manjšim premerom.

Učenci naj dejavnost izvedejo. Uporabljajo naj šestilo za tablo in šestilo za delo v zvezku.

- Kaj ugotovite?
- Koliko polkrogov narišemo v n -tem koraku?
- Kolikšen je obseg krogov v prvem, drugem, tretjem koraku?
- Kolikšen je obseg polkrogov narisanih na n -tem koraku?
- Interpretirajte veljavnost vaših ugotovitev zgoraj.
- Zapišite si še kakšno raziskovalno vprašanje in naj odgovorite.

Medpredmetno povezovanje: Matematika in zgodovina: Zgodovina števila π (delo z besedilom).

Tudi v okviru pouka matematike učenci razvijajo vse štiri sporazumevalne zmožnosti: slušno razumevanje, govorno sporočanje, bralno razumevanje in pisno sporočanje. Ob uporabi učbenika in reševanju besedilnih nalog razvijajo bralno pismenost, ravno tako pa lahko tudi v pouk matematike vključimo branje različnih besedil.

Od tega, kako pojmujeemo matematiko, je odvisno, kako jo poučujemo in kakšnega pouka so deležni naši učenci. Skozi konstruktivistični pogled na pouk matematike so učenci z lastno dejavnostjo vključeni v sam proces učenja novih vsebin in razvijanja matematičnega mišljenja.

Literatura in viri

- 1 Marentič Požarnik, B. (2000). *Psihologija učenja in pouka*. Ljubljana: DZS.
- 2 Rutar Ilc, Z. (2003). *Pristopi k poučevanju, preverjanju in ocenjevanju*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 3 Žakelj A., et al. (2011). *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika*. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport. Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (3. 11. 2012).
- 4 Žakelj, A. (2003). *Kako poučevati matematiko. Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 5 Žakelj, A., Bon Klanjšček, M., Jerman, M., Kmetič, S., Repolusk, S., Ruter, A. (2008). *Učni načrt. Matematika. Gimnazija*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/devetletka/predmeti_obvezni/Matematika_obvezni.pdf (3. 11. 2012).

2.3 Primeri problemskih nalog

2.3.1 Človek, ne jezi se!

Andreja Perkovič, Osnovna šola Gustava Šiliha, Laporje

Avtor	Andreja Perkovič
Šola	Osnovna šola Gustava Šiliha, Laporje
Učna tema	Naravna števila do 6
Učni sklop	Aritmetika in algebra, matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Razred	1.
Potreben čas za izpeljavo	60 minut
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • izražajo se natančno in pravilno v jeziku iz svojega vsakdana, • štejejo, zapišejo in berejo števila do 6, • ocenijo število predmetov v množici, • besedno in grafično rešujejo probleme, ki so predstavljeni na različnih ravneh: konkretni, grafični.
Standardi	Učenec/učenka: • šteje, bere, ureja in zapiše števila do 10.
Medpredmetna povezava	• <i>spoznavanje okolja – Jaz</i>: spoznajo ustrezna ravnanja pri doživljanju raznih čustev in jih uporabljajo v konkretnih situacijah.
Oblike in metode dela	• pogovor, • razlaga, • demonstracija, • praktična izvedba
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• igra človek, ne jezi se, • delovni list, • kocka – prilagojena
Potrebno predznanje	• poznavanje pravil igre človek, ne jezi se, • številske predstave do 6
Dejavnosti učencev	• igranje igre s kocko, • reševanje naloge, • poskušanje, ugibanje, risanje
Faze učnega procesa	• uvod z motivacijo, • priprava, • utrjevanje/reševanje problemske naloge
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Pri dejavnosti so sodelovali vsi učenci, vsak po svojih sposobnostih. Zelo radi se igrajo družabne igre, kar je bila še dodatna motivacija za utrjevanje znanja. Skupina učencev, ki presega znanje večine, je reševala problemsko zastavljeno nalogo. Zelo zavzeto so jo reševali, iskali nove in nove poti, z malo mojega usmerjanja tudi razmišljali o različnih možnih rešitvah.

Opombe, dodatna opažanja, posebnosti	Morda bi kateri od učencev razmišljal še kako drugače, če bi jih lahko pustila čisto samostojne. To pa ni bilo mogoče, ker nobeden od učencev še ne bere z razumevanjem.
Prilagoditve za učence z učnimi težavami*	Učenci z učnimi težavami so igrali igro s kocko, ki je imela največ pet pik. Pri večjem številu pik že niso bili več zanesljivi.

Opis poteka dejavnosti

Uvod z motivacijo

V razred sem prinesla darilo. Učenci so se zbrali v kotičku na blazini. Po jutranjem pozdravu in kratkem pogovoru sem izza hrbta vzela darilo. Izzvala sem jih, da razmišljajo, kaj sem jim prinesla. Darilo je potovalo od enega do drugega, vsak ga je potipal, potresel in poskušal ugotoviti, kaj se v njem skriva. Ker niso ugotovili, sem dala nekemu priložnost, da je darilo odvil (morda je bil med nami slavljenec, ali kdo, ki je še posebej priden, prizadeven, prijazen ...). Skupaj smo ugotovili, da je v darilu igra človek, ne jezi se.

Učenci so se darila zelo razveselili, igro dobro poznajo že iz vrtca, pa tudi pri podaljšanem bivanju in v jutranjem varstvu se jo večkrat igrajo.

Priprava

Večina učencev dobro pozna pravila igre, nekateri so povedali, da se igro doma igrajo malo drugače. Nekaj učencev, ki niso poznali vseh pravil, so o njih natančno poučili sošolci, ki so bili v isti skupini. Ponovili smo pravila igre. Vsak učenec, ki je znal ubesediti pravilo, ga je povedal, tako smo sestavili celotno navodilo za igranje igre. Natančno smo opredelili, kako začnemo, po katerih poljih se premikamo in kako.

Da smo preverili poznavanje številskih predstav, smo metali kocko in šteli pike, ob številu pik so dvignili kartonček z ustrezno številko.

Učence sem razdelila v štiri homogene skupine. Učenci sami že vedo, kako se posedejo v skupine, ko rečem, da je skupinsko delo. Če delamo v heterogenih skupinah, namreč vsake-mu povem, kam naj gre, v kateri skupini sodeluje oz. skupine določimo z žrebom. Dodala sem samo še navodilo, da mora imeti vsaka skupina toliko članov, kot je različnih barv figuric na polju.

Dve skupini sta se igrali igro človek, ne jezi se – pri tem so morali upoštevati vsa dogovorjena pravila.

Ena skupina, v kateri so učno manj sposobni učenci, je dobila posebno kocko, ki je imela največ pet pik. Najprej so samo metali kocko in prešteli pike, ko so dobro osvojili številске predstave in jih tudi vizualizirali, so se igrali igro, upoštevajoč vsa dogovorjena pravila. Igro so lahko začeli, ko so na kocki vrgli polje s srčkom. Isto polje je pomenilo tudi, da lahko še enkrat mečejo.



Slika 1: Kocka za utrjevanje številskih predstav do 5. (vir: lasten)

Skupina, v kateri so učno (matematično) sposobnejši učenci, je bila prepuščena sama svoji organizaciji dela. Najprej sem jih pustila brez vsakršnih navodil. Na mizi so imeli pripravljeno samo igro človek, ne jezi se. Opazovala sem njihov odziv in način organizacije v skupini. Kot sem predvidevala, je ena izmed deklic prevzela pobudo in usmerjala potek igre. Dovolila je samo, da vsak sam izbere barvo figuric, nato pa so morali po njenem navodilu skupaj ponoviti pravila. Ko se je igra že začela, je prišlo do nesporazuma, ker nekdo ni štel polja, ki je izhodiščno/začetno za figurico. Deklica je hitro ustavila prepir in postavila pravilo, da se vsa polja štejejo in igra se je mirno nadaljevala.



Slika 2: Igramo se človek, ne jezi se! (vir: lasten)

Reševanje problemske naloge

Ko je preteklo nekaj časa in sem ugotovila, da je skupina sposobnejših učencev že na polovici igre, sem jih prekinila in jim ponudila izziv. Predstavila sem jim nalogo, čisto na kratko in jim postavila tri vprašanja, ki jih nisem več ponovila. Vsak učenec je dobil delovni list, na katerem je bila slika igralnega polja in zapisana naloga z vprašanji.

Pustila sem jih, da so se sami lotili naloge, predlagala sem jim samo, da naj dela najprej vsak sam, če pa jim ne bo šlo, naj rešitve poiščejo skupaj.

Ko so začeli prinašati rešitve, sem jih samo še malo usmerjala, podrezala, ali so prepričani, da je rešitev pravilna, ali se spomnijo, kaj smo se pogovarjali o pravilih igre ...

Vsak učenec je prišel do mene in mi predstavil svoj način reševanja in rešitev. Želela sem tudi, da mi svoje reševanje razložijo in utemeljijo, zakaj so se odločili za tak način.

Evalvacija dela

Učenci so zavzeto iskali mogoče rešitve. Vsak se je reševanja naloge lotil po svoji poti.

Deklica je takoj začela prešteti krožce na sliki in za vsakih šest prešteti odprla prst v pesti na roki. Hitro je prišla do rešitve in takoj uganila, ko sem namignila, da se z rešitvijo ne strinjam, kje se je zmotila. Poiskala je nov način reševanja, vsakih šest krogcev je obkrožila. Povedala je, da se je zmotila, ker je pozabila na en met na začetku igre.



Slika 3: Bom poskusila z obkroževanjem. (vir: lasten)

Pri drugem sklopu vprašanj je rešitev poiskala na enak način, najprej s preštevanjem, nato pa še z obkroževanjem krogcev v drugi barvi.

Drugi učenci v tej skupini so nalogo reševali popolnoma enako kot deklica, katere primer sem opisala.

Vsi so znali svoje reševanje tudi dokaj spretno utemeljiti in razložiti. Razlika je ostala samo v tem, da je deklica edina ugotovila, da je pozabila šteti tudi začetni met za šest pik.

Ker je ta deklica res zelo sposobna na učnem področju, sem ji za nalogo v podaljšanem bivanju dala, igralno polje za igro človek, ne jezi se, ki jo imamo v razredu, in ji naročila, poskusi sestaviti svojo nalogo za sošolce. Pri sestavljanju naloge je bila, za prvošolko, zelo uspešna. Postavila je sicer podobna vprašanja, ki pa jih je uspešno prilagodila številu krogcev na novem igralnem polju. Predstavila mi je tudi rešitev svoje naloge.

Vprašanja: Kolikokrat mora Kaja vreči kocko na polje s petimi pikami, da pride v hišo z dvema figuricama? Ali pride Žan do svoje hiše, če 10-krat vrže kocko na polje s 6 pikami?

Nalogo, ki jo je sestavila deklica, sem ponudila v reševanje nekaterim učencem pri dodatnem pouku. Reševali so jo z velikim veseljem, še bolj pa je bila zadovoljna deklica sama, ki je bila njihova učiteljica in jih je pri reševanju usmerjala, jih opozarjala na napake, tako da je vsem uspelo pravilno rešiti nalogo.

Učenci obeh skupin, ki so se igrali igro človek, ne jezi se, so povedali, da je igra potekala pravično, da so vsi upoštevali pravila. Povedali so tudi, da sta imela dva učenca malo težav, ker nista povezala 6 pik s številom 6. Po nekaj metih in pomoči s strani sošolcev, težav nista več imela.

Skupina učno šibkejših učencev, ki jih je usmerjala druga učiteljica, je večino časa metala prilagojeno kocko, štela pike in njihovo število povezovala z nastavljanjem konkretnega materiala in pozneje še kartončka z ustrezno številko. Ob koncu so igrali igro vsak samo z eno figurico. Začeli pa so lahko, če so na kocki vrgli polje s srčkom. Štetje pik na kocki in krožcev na igralnem polju jim je šlo dobro, tako da sem sklepala, da so številske predstave že bolj utrjene.

Vsi učenci prvega razreda so z igro dobro utrdili številske predstave, prav tako pa je ključen dejavnik tudi vzgoja za potrpežljivost, sprejemanje poraza in navajanje na pošteno igro (»ferplej«). Učno sposobnejši učenci pa se tako navajajo na iskanje različnih poti, ki vodijo do rešitve in spoznavajo, da rešitev ni vedno samo ena.

Priloga



Učni list: Človek, ne jezi se!

2.3.2 V trgovini z igračami

Andreja Perkovič, Osnovna šola Gustava Šiliha, Laporje

Opis gradiva

Avtor	Andreja Perkovič
Šola	Osnovna šola Gustava Šiliha, Laporje
Učna tema	Naravna števila do 100, Geometrija in merjenje
Učni sklop	Aritmetika in algebra, merjenje, matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Razred	2.
Potreben čas za izpeljavo	60 minut
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • utrdijo spoznanja o merski enoti za denar (€, cent) in njuni vrednostih, • se navajajo na uporabo denarnih enot v vsakdanjem življenju, • se izražajo pravilno in natančno v jeziku iz svojega vsakdana, • besedno in grafično rešujejo probleme, ki so predstavljeni na različnih ravneh: konkretni, grafični, • spoznajo različne strategije reševanja problemov in jih uporabijo pri reševanju podobnih problemov, • štejejo, zapišejo in berejo števila do 100.
Standardi	Učenec/učenka: • pozna in bere denarne vrednosti, • uporablja naravna števila do 100 pri izražanju količin v vsakdanjem življenju, • sešteva in odšteva do 100.
Medpredmetna povezava	• <i>spoznavanje okolja – Skupnosti</i>: razumejo pomen denarja; • <i>slovenski jezik – Jezik</i>: razvijanje zmožnosti pogovarjanja; komunikacija v trgovini
Oblike in metode dela	• pogovor, • poslušanje, • razlaga, • demonstracija, • praktična izvedba, • reševanje problemov
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• modeli denarja; bankovci in kovanci, • delovni list, • igrače, • napisi za cene, • reklamni prospekti
Potrebno predznanje	• številske predstave do 100, • seštevajo in odštevajo v obsegu do 100, • poznavanje denarne enote in njene vrednosti

Dejavnosti učencev	• igranje igre vlog v trgovini, • iskanje vrednosti določene igrache po reklamnih prospektih in zapis le-te, • ugotavljanje zneska kupljenih igrach, • reševanje naloge, • poskušanje, ugibanje, risanje ...
Faze učnega procesa	• uvod z motivacijo, • priprava, • reševanje problemske naloge ali igra vlog z uporabo denarja.
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Nalogo sem zastavila tako, da smo iste cilje realizirali na različnih ravneh znanja, prilagojeno predznanju in sposobnostim učencev. Vsi učenci so bili skozi učni proces dejavni in vseskozi tudi motivirani za delo. Všeč jim je uporaba modelov denarja, s katerimi se premalokrat srečujejo. Radi imajo igro vlog, še posebej, če jo lahko vodijo sami. Učenci so na igriv način utrdili svoje znanje in urili veščine vseživljenjskega znanja.
Opombe, dodatna opazanja, posebnosti	Učenci so pri ravnanju z denarjem še nespretni. Nimajo pravih količinskih predstav. Največ težav so imeli pri cenah, ki so bile izražene v evrih in centih, zato sem učencem z nižjimi sposobnostmi delo prilagodila in so delali s cenami v evrih, brez decimalnega zapisa.
Prilagoditve za učence z učnimi težavami*	Učenci z učnimi težavami so delali samo na praktični ravni – igra vlog, s konkretnim denarjem in s cenami v evrih, brez centov. Učencem, ki so imeli težave pri reševanju problemske naloge, sem za pomoč ponudila preglednico, kjer je že bilo nastavljenih nekaj primerov možnih rešitev, ki so jih samo preverili, ali držijo. Če jim še vedno ni šlo, so lahko nalogo reševali z zapisom cen brez centov, brez decimalnega zapisa.

Opis poteka dejavnosti

Uvod z motivacijo

Med prihodom v razred sem že na hodniku ropotala s kovinsko posodo. Ropotala sem tako dolgo, dokler nisem pritegnila njihove pozornosti in so se umirili ter postali pozorni na moja dejanja. Vprašala sem jih, kaj mislijo, da je v moji posodi. Po nekaj neuspešnih poskusih, da je v posodici riž, frnikole, koruza ..., smo prišli do pravilnega odgovora. Spraševala sem naprej, kakšen denar. Takoj sem izvedela, da so to kovanci. Pogledali smo v posodo in se prepričali. Vsak je lahko pogledal samo za trenutek. Ponovno sem zaropotala. Zanimalo me je namreč še: Koliko kovancev imam v posodi? To pa se jim je zdela težava. Povedala sem, da temu rečemo tudi problem. Pogovorili smo se o pomenu besede problem in o tem, da poznamo tudi matematične probleme. Nekaj časa so ugibali o številu kovancev v posodici, potem sem jih vprašala, kako se lahko najlažje prepričamo o pravilnem odgovoru. Takoj so predlagali, da bi kovanice prešteli. To smo tudi storili in ugotovili, kdo je bil najbližje pravilni rešitvi.

Priprava

Znanje o denarju in njegovi vrednosti smo ponovili ob predstavitvi v PowerPointu in ob modelih denarja. Ponovili smo tako vrednosti bankovcev kot tudi kovancev, jih poimenovali evro in cent ter primerjali njihove vrednosti. Ob vsakem bankovcu so učenci položili toliko kovancev,

kot je njegova vrednost, prav tako so ob evrskih kovancih polagali kovance s centi in jih preštevali do 100.

Učenci so izkazali veliko znanja o denarju. Videlo se je, da jim je tema zanimiva. Z veseljem so se vključevali v pogovor in dejavnosti štetja denarja, ko smo primerjali vrednosti posameznih bankovcev in kovancev. Večina jih že ima izkušnje s plačevanjem v trgovini, vedo, da morajo vedno dobiti račun in ga odnesti s seboj domov. Pogovorili smo se tudi o pomenu računa in ga primerjali z računi, ki jih poznajo iz matematike.

Reševanje problemske naloge

Predstavila sem jim problem:

Nejc je praznoval rojstni dan. Babica in še nekateri sorodniki so mu podarili denar in mu naročili, naj si kupi nekaj, kar si sam želi. Nejc se je zato odločil, da bo mamo poprosil, da ga pelje v nakupovalni center, kjer je trgovina z igračami. Želel si je kupiti nekaj igrač. V trgovini se je najprej ustavil pri ceniku igrač. Ni se mogel odločiti, katere igrač naj izbere. Pomagajte mu.

Po predstavitvi problema smo se najprej malo pogovorili, ali tudi on dobijo za rojstni dan denar, kaj si kupijo, za kaj varčujejo denar ...?

Učenci so kar hitro ugotovili, da pravzaprav sploh nisem povedala, koliko denarja je imel Nejc s seboj, ko se je odpravil v trgovino. Vendar jim tega podatka nisem izdala. Razdelila sem jih v tri skupine. Skupine so bile homogene, oblikovane glede na predznanje in sposobnosti. Vsaka skupina je dobila svojo nalogo.

1. skupina: *Igra vlog v trgovini:* brskajo po reklamnih prospektih in iščejo cene za igračke, ki sem jih prinesla s seboj. Na kartončke zapišejo cene, ker so to učenci z nižjimi sposobnostmi, cene zapišejo brez centov. Nato učenci dobijo denar, ki ga lahko zapravijo. Vsak mora povedati, koliko denarja je dobil, vsi imajo enako vrednost, vendar različne bankovce in kovance, ki jih morajo sešteti, katere igračke bodo lahko kupili. Prodajalec je eden izmed učencev, ki ima dobro razvite številske predstave. Učenci morajo dobro preveriti, koliko denarja so dali prodajalcu in koliko jim ga je vrnil. Problemsko vprašanje: *Ali obstaja možnost, da kupijo toliko igrač, da zapravijo ves denar?*
2. skupina: *Problemska naloga:* poskusijo samostojno rešiti problemsko nalogo na več mogočih načinov. Učenci, ki imajo težave, dobijo za pomoč preglednico z vpisanimi nekaterimi rešitvami, ki jih preverijo in dodajo še kakšno svojo. Pomagajo si lahko z modeli denarja. Če učenci še vedno ne najdejo nobene svoje rešitve, jim ponudim nov cenik s cenami v evrih, brez centov. Poskusijo ponovno poiskati nekaj možnih rešitev. Edini pogoj je, da zapravijo ves denar. (*Priloge: Delovni listi 1, 3 in 5/Delovni listi 2, 4 in 6*)
3. skupina: *Problemska naloga:* nalogo poskusijo rešiti čim bolj samostojno. Ker so v skupini učenci z višjimi sposobnostmi na matematičnem področju, jim pomoč z modeli denarja ponudim, če to želijo in če vidim, da nimajo prave predstave. Če v nobenem poskusu ne najdejo možne kombinacije, jim ponudim novo možnost, da poiščejo rešitev, s katero bodo zapravili največ denarja. (*Priloge: Delovna lista 1 in 3*)

Evalvacija dela

Učenci so se reševanja problemske naloge lotili zelo resno in motivirano.

Prva skupina učencev je svoje delo opravila v kabinetu, saj bi drugače s svojo igro motili druge sošolce. V skupini so bili štirje kupci in prodajalec. Poiskali so cene igrac in jih izrezali iz prospektov ter prilepili in zapisali na karton. Nato se je začela igra vlog. Vsi štirje učenci so se znašli in pri enem nakupu kupili največ dve igrači (npr. medvedek 14 € in karte črni Peter 4 €), samo da so v trgovino še prišli. Prodajalec se je dobro znašel pri delu z denarjem. Bil je tudi strog, saj so morali kupci pred njim prešteti vrnjeni denar in glasno računati, ali je vrnjeni znesek pravilen. Po igri so učenci povedali, da jim je bilo tako delo všeč, da pa nobenemu med njimi ni uspelo kupiti igrač za točno določen znesek. Pogovarjali smo se in iskali možne kombinacije igrač, ki bi dale določen znesek, s skupnimi močmi smo našli eno rešitev. Ko so učenci na mize vrnili vse kupljene igrače, smo med njimi izbirali različne kombinacije in polagali na mizo potreben denar. Uspelo nam je najti naslednjo rešitev: medvedek 14 €, barvice 9 €, peresnica 13 € in karte črni Peter 4 €.

V drugi skupini so imeli učenci veliko težav. Čeprav so delali s konkretnim denarjem, se s centi niso znašli. Zato sem jim ponudila nov cenik, tokrat s cenami brez centov. Našli so nekaj rešitev, a s skupnimi močmi. Ko so delali posamezno, jim spet ni šlo, zato sem jim ponudila razpredelnico. Po dodatni pomoči so začeli razumeti sistem raziskovanja možnih rešitev in so bili uspešni. Povedali so, da jim s centi ni šlo, ker še niso navajeni števil do 100.

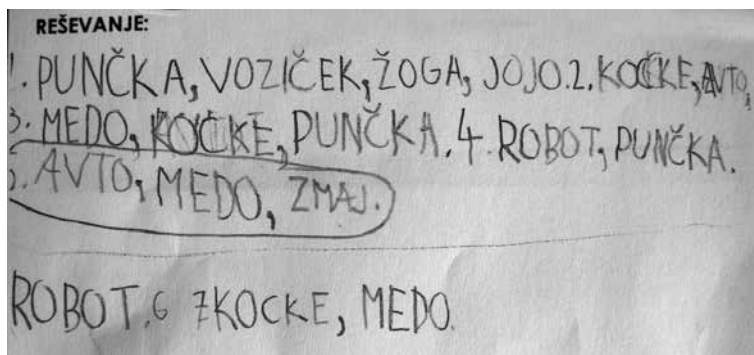
KATERE IGRAČE LAHKO KUPI NEJC?

				ZNESEK €
				40€
				40€
				40€
				40€
				40€
				40€

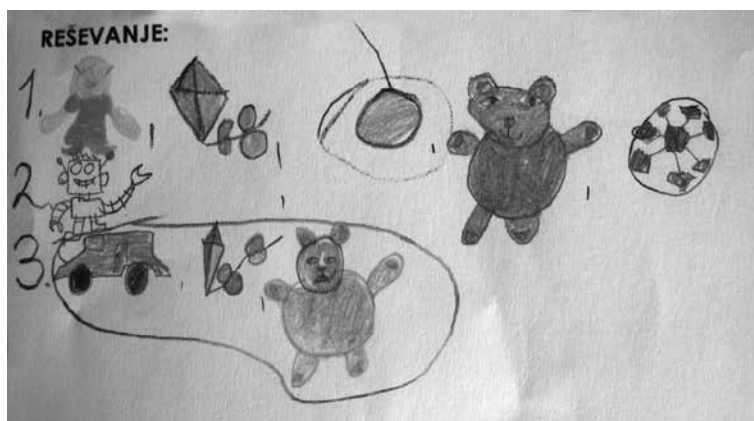
POIŠČI ŠE KAKŠNO DRUGO MOŽNOST. POMAGAJ SI Z DENARJEM.
Ne gre !!!

Slika 1: Primer reševanja naloge. (avtor izdelka: učenec 2. razreda, vir: lasten)

V tretji skupini so bili trije učenci. Zelo zagnano so se lotili razmišljanja o nalogi in možnih rešitvah. Dva izmed njih sta se reševanja lotila z zapisovanjem računov, ki sta jim nato dodala še ime igrače, eden pa si je risal in zapisoval račune. Učenci so imeli nekaj težav ravno pri centih, zato smo skupaj še enkrat ponovili, koliko centov ima en evro in kaj to pomeni. Nihče ni želel uporabiti modela denarja. Ugotavljali so, da ne obstaja nobena rešitev, ki bi dala točno določen znesek. Zato sem jim postavila vprašanji: *Kaj mora Nejc kupiti, da bo zapravil največ denarja? Koliko naj stane ena izmed igrač, ki jo je izbral, da bo zapravil natančno 40 evrov?* Ko so eni izmed igrač spremenili ceno, so našli vsak svojo rešitev. Eden izmed učencev je rešitev iskal s pomočjo modela denarja.



Slika 2: Primer rešene naloge z zapisovanjem. (avtor izdelka: učenec 2. razreda, vir: lasten)



Slika 3: Primer rešene naloge z risanjem. (avtor izdelka: učenec 2. razreda, vir: lasten)

Refleksija

Vsi učenci so po opravljenem delu povedali, da so v iskanju rešitev uživali. Člani tretje skupine so dodali, da je bila naloga zelo težka, saj niso navajeni, da obstajajo tudi naloge, ki nimajo rešitve, in je treba postaviti drugačno vprašanje ali pa v nalogi kaj spremeniti, da najdemo rešitev. Vsi pa so po pouku najbolj uživali v nadaljevanju igre vlog v trgovini.

Ura je bila dobro načrtovana in tudi izvedena. Realizirali smo zastavljene cilje. Verjetno bi učenci samostojno prišli še do kakšne rešitve, če bi imeli še več časa. Predlagam, da se vsi učenci najprej igrajo igro vlog v trgovini in praktično preizkusijo nakupovanje, nato pa nadaljujejo delo s problemsko zastavljeno nalogo.

Priloge



Delovni list 1: Cenik igrač

Delovni list 2: Cenik igrač

Delovni list 3: V trgovini z igračami

Delovni list 4: V trgovini z igračami

Delovni list 5: Katere igrače lahko kupi Nejc?

2.3.3 Družinski izlet

*Damijana Čekada, Osnovna šola Antona Žnideršiča,
Ilirska Bistrica*

Avtor	Damijana Čekada
Šola	Osnovna šola Antona Žnideršiča, Ilirska Bistrica
Učna tema	Druge vsebine/Aritmetika in algebra
Učni sklop	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Razred	4.
Potreben čas za izpeljavo	2 šolski uri
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • berejo z razumevanjem in rešijo problem, • samostojno oblikujejo vprašanja, razpravljajo o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi, izpišejo bistvene podatke ..., • poimenujejo člene posameznih računskih operacij, • uporabijo računsko operacijo pri reševanju besedilne naloge.
Standardi	Učenec/učenka: • reši matematični problem in problem iz vsakdanjega življenja, • pisno sešteva in odšteva v množici naravnih števil do 1000.
Medpredmetna povezava	• <i>glasbena vzgoja</i>: prepoznavanje glasbenih zvrsti, prepoznavanje glasbenikov; • <i>družba</i>: iskanje in orientacija na zemljevidu; • <i>športna vzgoja</i>: adrenalinski športi ...
Metode dela	• pogovor, • razlaga, • demonstracija
Oblike dela	• frontalna, • skupinska
Dejavnosti	• dopolnjevanje delovnega lista, • izpisovanje podatkov, • sodelovanje, • primerjanje, • ugotavljanje, • poročanje, • zapisovanje
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• delovni listi 1, 2, 3, 4
Potrebno predznanje	• pisno seštevanje v določenem obsegu

**Refleksija
(z vidika učitelja,
učenca)**

Učenci so dejavno sodelovali znotraj skupine in se dogovarjali. Za delo so bili motivirani, saj so bili podatki življenjski in realni. Postavljali so dodatna vprašanja, ki so v povezavi z vsakdanjim življenjem: Kje je ta adrenalinski park, so cene koncerta res tako visoke, kdo je omenjeni pevec, kaj vse se še dogaja v omenjenih krajih v decembrskem času.

Motivacija

Izpostavlila sem problem:

Kako naj zapolnim prosti čas v družini, da nam bo vsem lepo in prijetno?

Postopek vodenja skozi vrste problemskih nalog, zastavljanje vprašanj in sočasno nastajanje preglednične slike

Vodila in usmerjala sem razgovor z učenci tako, da so ugotovili, da probleme rešujemo, čeprav imajo ti preveč ali premalo podatkov. Spoznali in svetovali so mi različne poti reševanja problema. Ob tem so dodali, da probleme rešujemo na različne načine, tudi z iskanjem dodatnih informacij. Ugotovili so, da so problemi življenjski, vsakodnevni, in ne le matematični. Pomagala sem jim s postavljanjem vprašanj in podajanjem ustreznih primerov. Na tabli je nastajala preglednična slika.

Preglednično sliko so sooblikovali učenci. Sestavljale so jo na barvnih trakovih napisane povedi.

Preglednična slika

PROBLEM – moj prosti čas
PREMALO PODATKOV, INFORMACIJ, IDEJ
VEČ REŠITEV, MOŽNOSTI
RAZLIČNI NAČINI REŠEVANJA PROBLEMA
PREVEČ PODATKOV

Vsak naslednji zapis je nastal kot povzetek predhodnega vodenega in usmerjenega razgovora z učenci in je bil hkrati razlog za nadaljnje uspešno reševanje problemov. Učenci so tako samostojno ugotovili, da imamo lahko preveč, premalo ... podatkov za reševanje problemov in kako uspešno priti do rešitve problema. Ko je bila preglednična slika oblikovana, so ob njej ponovili strategije reševanja problemov in vrste problemskih nalog.

Glavni del ure

Učence sem razdelila v štiri skupine s štirimi člani. Znotraj skupin so bili učenci z različnimi sposobnostmi. Pri oblikovanju skupin sem bila pozorna na to, da je bil v vsaki skupini posameznik, ki je imel voditeljske sposobnosti, saj je bilo treba rešitve javno predstaviti. Prav tako sem bila pozorna, da je bila raven matematičnega znanja med skupinami približno enakovredno zastopana. Upoštevala sem tudi to, da so bili učenci, ki radi zastavljajo dodatna vprašanja, v različnih skupinah.

Predstavila sem besedilno nalogo o družini s podobnim problemom, kot smo ga obravnavali v začetku ure. Družino smo predstavili in poimenovali družinske člane. Vsaka skupina je dobila nalogo (delovni list), v kateri so bili podani predlogi, ki so jih pripravili otroci omenjene družine. Razložila sem jim potek dela v skupinah in način poročanja. (V skupini delajo vsi, zapisujejo v zvezek, se dogovarjajo, izberejo poročevalca ...)

Sledilo je skupinsko delo, ki sem ga po potrebi usmerjala. Sledilo je poročanje in razgovor ob nalogah. Naloge smo razčlenili in rezultate utemeljili.

Sklep

Učenci so predstavili delo in rezultate skupine. Ob tem so sodelovali vsi. Spremljali so poročanje in ugotavljali, kaj bi lahko ob nalogah še izračunali. Postavljali so številna zanimiva vprašanja.

1. naloga

Z reševanjem prve naloge učenci niso imeli težav in so cilj dosegli. Ugotovili so, da je to naloga s preveč podatki. Pisno so sešteli trimestna števila z dvema prehodoma ter postavljali dodatna vprašanja.

Ob nalogi so učenci znotraj skupine razlagali posameznikom, kaj pomenijo naslednji izrazi: *katalog izletov* – udomačen izraz je prospekt, *80 evrov na par* – za ta denar gresta na izlet dva, *odšteti* – koliko denarja bodo porabili za izlet.

Ugotovili so, da je bila to najdražja možnost in da bi z obiskom v Opatiji v družini prihranili kar nekaj denarja. Našteli so še vse možnosti, ki bi jih lahko izkoristili. Povedali so, da so morali biti pri branju zbrani, ker je bilo podatkov preveč in so si bili nekateri pojmi sorodni (stojnice, sejem). Ob predstavitvi so se pogovora udeležili tudi učenci preostalih skupin in povedali, da so nekateri njihovi starši že bili na praznovanju v Beogradu, nekateri pa hodijo na popoldanske izlete v Opatijo. Opozorili so na povečan promet v poletnem času, ko turisti potujejo skozi mesto na Hrvaško. Učenci so za vse omenjene kraje že slišali. V prihodnje bi lahko posamezne kraje in države poiskali na zemljevidu, primerjali njihovo razdaljo in ugotavljali, ali lahko ta vpliva na ceno.

2. naloga

Tudi pri reševanju druge naloge so učenci cilj dosegli. Ugotovili so, da je to naloga s premalo podatki, in znali so brati razpredelnico. Znotraj skupine so se pogovarjali in razlagali pojme: paintball, adrenalinski park, inštruktor, zavarovanje, komplet za samovarovanje.

Ob naštetih primerih jim ni bilo logično, zakaj je omejitev minimalna, in so vztrajali, da bi jim mogoče pa vseeno dovolili na gugalnico. Povedali so primere iz prakse: v dvigalu je lahko največ 8 oseb, masa kovčka za potovanje z letalom največ 20 kg ...

Ugotovili so, da se v danem primeru lahko udeležijo le lokostrelstva. Nastavili so račun množenja, vendar so imeli težave z rešitvijo, zato so ta račun preoblikovali v račun seštevanja in tako ob konkretnem primeru spoznali povezavo med množenjem in seštevanjem enakih seštevancev. Predstavila sem ji še primer množenja z razčlenitvijo dvomestnega števila in pozneje tudi

način pisnega množenja. Ko je skupina poročala, so posamezniki znotraj skupine predstavili načina množenja preostalim. Razmišljali so o tem, da so cene zelo visoke, da bi si tudi sami želeli v ta park, nekateri so opisali paintball.

3. naloga

Ob reševanju tretje naloge so učenci cilj dosegli. Ugotovili so, da je več možnih rešitev, znali so brati razpredelnico in seštevati s prehodom. Znotraj skupine so si razdelili delo. Vsak je izračunal, koliko denarja bi porabili za celotno družino, če bi se udeležili istega koncerta. Znotraj skupine in na predstavitvi so učenci predlagali, da bi se člani družine lahko udeležili različnih koncertov, saj imajo verjetno različni glasbeni okus. V prihodnje bi lahko pri glasbeni vzgoji predstavili posamezne glasbenike ... Ugotovili so, da nihče v razredu ni bil v Grosupljem, znali pa so poiskati druga mesta na zemljevidu in povedati nekaj njihovih značilnosti.

4. naloga

Cilj je bil dosežen tudi pri reševanju četrte naloge. Rešitve so prikazali na več načinov, znali so brati razpredelnico in seštevati s prehodom. V skupini so se učenci dopolnjevali in se učili različnih načinov množenja, tako da so si med seboj pomagali, saj so nekateri to znali. Kljub temu sem skupini pomagala.

Končno predstavitev je vsaka skupina izvedla tako, da je prebrala vsebino, preglednice pa smo projicirali na tablo. Tako so bili učenci ves čas pozorni in aktivni, sodelovali so s svojimi predlogi in se naučili, kako množiti dvomestno število.

Ob vsem tem so prišli do ugotovitve, da se sami srečujejo s podobnimi situacijami, ko se v družini odločajo o izletih. Predlagali so tudi, da bodo v prihodnje staršem sami podali predloge, kjer bodo prikazani finančni izdatki. Nekateri pa so povedali, da jim starši ne dajo možnosti izbire ali odločanja, saj bi bili družinski izdatki v tem primeru zelo visoki.

Literatura in viri

- 1 Žakelj, A., et al. (2011). *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/devetletka/predmeti_obvezni/Matematika_obvezni.pdf (15. 12. 2012).*

Priloge



Delovni listi 1, 2, 3, 4

Delovni listi z rešitvami

2.3.4 Pustna povorka

Metka Flisar, Osnovna šola Tišina

Avtor	Metka Flisar
Šola	Osnovna šola Tišina
Učna tema	Druge vsebine/Aritmetika in algebra
Učni sklop	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Vsebina	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Razred	4.
Potreben čas za izpeljavo	45 minut (ena šolska ura)
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • berejo z razumevanjem (samostojno oblikujejo vprašanja, razpravljajo o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi, izpišejo bistvene podatke oziroma odnose med podatki), • postavljajo raziskovalna oziroma problemska vprašanja, • rešijo probleme in pri tem uporabljajo različne strategije, • uporabijo računske operacije pri reševanju besedilnih nalog.
Standardi	<i>Standardi znanja</i> Učenec/učenka: • pri reševanju (besedilnih) problemov uporablja različnebralne strategije ter kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih, • opiše problemsko situacijo z matematičnim jezikom, • reši matematične probleme in probleme iz vsakdanjega življenja, • pozna in uporablja matematično terminologijo. <i>Minimalni standardi</i> Učenec/učenka: • reši (strukturirani) matematični problem in problem iz vsakdanjega življenja.
Oblike in metode dela	• frontalna, • individualna
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• delovni listi, • računalnik s predstavitevjo v Power Pointu
Potrebno predznanje	Učenec/učenka: • pozna lastnosti in odnose med naravnimi števili ter jih uporablja v danih situacijah, • zanesljivo uporablja računske operacije in računske zakone v množici naravnih števil s številom 0.

Dejavnosti učencev	• oblikovanje in postavljanje vprašanj, • reševanje naloge, • poročanje, • utemeljevanje
Faze učnega procesa	1. <i>Uvodni del:</i> motivacijski razgovor. 2. <i>Osrednji del:</i> predstavitev problemske situacije, oblikovanje problemskega vprašanja, reševanje problema, predstavitev rešitev, vrednotenje rezultatov. 3. <i>Zaključni del:</i> evalvacija dela.
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Skozi vse faze učnega procesa so bili učenci zelo dejavni in motivirani za delo. Sledili so navodilom učitelja in si prizadevali vsako zastavljeno nalogo čim boljše opraviti. Oblikovali in postavljali so smiselna vprašanja o vsebini problemske situacije, kar je bil dokaz, da so jo temeljito prebrali. Posamezni učenci so pri oblikovanju problemskega vprašanja in reševanju naloge pokazali višjo raven matematičnih znanj. Pozitiven je bil odziv učencev na možnost, da sami oblikujejo problemsko vprašanje in si sami izberejo problemsko vprašanje za reševanje. Posredno so se seznanili s strukturo problemskih nalog in namenom njihovega reševanja.
Opombe, dodatna opazanja, posebnosti	Učenci so se seznanili z eno izmed strategij reševanja problemskih nalog in nalog z življenjskimi situacijami. Učencem moramo ponuditi možnost, da spoznajo čim več strategij reševanja matematičnih nalog, da jih bodo znali in želeli reševati.

Uvod

Opisan primer izhaja iz učenčeve realne izkušnje, vezane na predpustni čas. Z njo se srečajo v obliki »pripovednega besedila« – problemske situacije, za katero sami zastavljajo vprašanja. Iz dane problemske situacije lahko oblikujejo več različnih vprašanj – gre za odprt problem. Za postavitev vprašanj je treba razumeti problem, šele nato je mogoče zastaviti smiselno vprašanje, poiskati strategije reševanja in utemeljiti rešitev.

PUSTNA POVORKA

Prostovoljno gasilsko društvo Tišina bo izvedlo pustno povorko po vaseh Tišina, Tropovci in Gradišče. Zbirali bodo prostovoljne denarne prispevke za nakup nove gasilne cisterne. Pustna povorka bo razdeljena v dve skupini. Prva skupina bo krenila s Tišine in bo obiskala vseh 149 domov na Tišini in polovico domov v vasi Gradišče. Druga skupina bo obiskala domove v Tropovcih, kjer sta dve hišni številki več kot na Tišini in 56 preostalih domov v vasi Gradišče.

Učni proces je bil izveden v četrtem razredu. Delo je potekalo delno v frontalni, delno v individualni obliki.

Izvedba v razredu

Uvodni del – motivacijski razgovor

V uvodnem delu je potekal razgovor o predpustnem času. Učenci so pripovedovali, kako se pripravljajo na pustovanje. Pripovedovali so o izkušnjah iz prejšnjih let, kako in v kaj so se našemili, kako pustujejo doma, v kraju. Omenili smo različne pustne prireditve, ki se v tem času odvijajo po Sloveniji in v domačem kraju.

V naših krajih je tradicija, da društva izvedejo povorke po vaseh. Tudi to leto bo podobno.

Prostovoljno gasilsko društvo Tišina bo pripravilo pustno povorko po vaseh Tišina, Tropovci in Gradišče. Pustne maske, ki bodo sestavljale povorko, bodo obiskale vse domove v teh treh vaseh in zaželele veselega in debelega pusta, toplo pomlad in dobro letino. Hkrati bodo zbirali prostovoljne denarne prispevke za nakup nove cisterne.

Osrednji del

Predstavitev problemske situacije

Problemsko situacijo sem posredovala preko projekcije na tablo in eden od učencev jo je glasno prebral.

Učenci so dobili nalogo, zapisano na delovnem listu.

Dala sem jim navodilo za individualno delo: *Besedilo (nalogo) tiho in pozorno preberi.*

Učenci so tiho, individualno brali »besedilo«, zapisano na delovnem listu.

Pustila sem jim dovolj časa, da se je lahko vsak učenec temeljito vživel v vsebino.

Razčlemba besedila – postavljanje vprašanj za preverjanje razumevanja

Učencem sem dala navodilo za izvedbo druge naloge: *Napiši vsaj tri vprašanja o prebranem besedilu, ki jih boš potem zastavil svojim sošolcem.*

Čas smo omejili na tri minute. Učenci so vprašanja zapisovali v svoj zvezek.

Drug drugemu so nato glasno postavljali vprašanja. Pozorni smo bili na smiselnost vprašanj in pravilnost odgovorov učencev, ki so na njih odgovarjali.

Učenec, ki je zastavil vprašanje, ga je hkrati zapisal na tablo.

Primer postavljenih vprašanj, ki so jih oblikovali učenci:

1. *Kaj bo izvedlo gasilsko društvo Tišina?*
2. *Katere vasi bodo obiskali?*
3. *Kam vse bodo šli?*
4. *V koliko skupin se bo povorka razdelila?*
5. *Za kaj bodo zbirali prispevke?*
5. *Koliko hiš bodo obiskali v Tropovcih?*
7. *Koliko domov bodo gasilci obiskali na Tišini?*
8. *Koliko hišnih števil ima vas Tropovci?*

Namen te faze je bil preveriti razumevanje prebranega. Iz zapisa vprašanj pa je razvidno, da so učenci postavili tudi vprašanja (primer 6. in 8. vprašanje), katerega odgovora ni mogoče

razbrati zgolj iz besedila. Na ta vprašanja so odgovorili, da tega podatka ne vemo in da ga moramo izračunati.

Razložili smo tudi razumevanje pojmov hišna številka, hiša in dom, saj so učenci v svojih vprašanjih uporabljali vse tri pojme. Povedala sem jim, da se podatki v problemski situaciji nanašajo na realne podatke o številu hišnih števil v posamezni vasi, da pa v eni hiši lahko živi več družin. Te imajo v tej hiši svoj dom, ne glede na to, ali imajo ločeno ali skupno gospodinjstvo.

Oblikovanje problemskega vprašanja

a) Postavljanje problemskih vprašanj

Učencem sem dala naslednje navodilo za individualno delo: *Kaj bi lahko izračunali? Kaj bi te kot matematika zanimalo?*

Učenci so vprašanja zapisali na listke. Vprašanja so postavili drug drugemu in nato listke z vprašanji pritrdili na tablo.

Primer matematičnih vprašanj, kot so jih oblikovali učenci:

Izračunal bi lahko:

1. *Koliko domov bodo skupaj obiskale pustne maske?*
2. *Koliko hiš je v vseh treh vaseh skupaj?*
3. *Koliko hišnih števil ima vas Tropovci?*
4. *Koliko je domov na Tišini, v Tropovcih in v Gradišču skupaj?*
5. *Koliko denarja je zbrala prva skupina, če so pri vsaki hiši dobili 7 evrov?*
6. *Koliko denarja bodo zbrali vsi skupaj, če pri vsaki hiši dobijo 10 evrov?*
7. *Koliko cistern bodo lahko kupili s tem denarjem, če dobijo 900.000 evrov?*

Ob predstavitvi vprašanj smo ugotovili, da nekatera vprašanja (1., 2. in 4.) sprašujejo po isti stvari, po istem podatku. Med seboj se razlikujejo le po strukturi oziroma obliki vprašanja. Kljub temu smo jih vse zapisali na tablo, saj so učenci s tem dobili potrditev, da so dobro opravili nalogo.

Posebej smo pokomentirali 7. vprašanje. Učenci so že ob postavitvi tega vprašanja povedali, da tega zneska nikakor ne morejo zbrati na pustni povorki, da je previsok in da je vprašanje nesmiselno. Ob tem se je pojavilo vprašanje, koliko stane gasilna cisterna. Koliko bi morali zbrati, če bi samo z zbranimi prispevki želeli kupiti cisterno?

Povedali smo, da žal tega podatka iz problemske situacije ne moremo razbrati in bi lahko o tem samo ugibali. Bi pa bilo zanimivo vedeti, saj bi potem lahko izračunali, koliko denarja morajo za nakup cisterne pridobiti od drugod.

b) Izbor problemskega vprašanja

Učence sem povabila, da sami še enkrat pozorno preberejo vsa vprašanja na listkih in s kljukico označijo tista, ki se jim zdijo najzanimivejša. Eden izmed učencev je na tablo izpisal tri vprašanja, ki so bila največkrat izbrana (obkljukana):

1. *Koliko hiš bosta obiskali obe skupini pustne povorke skupaj?*
2. *Koliko denarja bo zbralo gasilsko društvo na pustni povorki, če pri vsaki hiši dobijo 5 evrov?*
3. *Koliko denarja bo zbralo gasilsko društvo na pustni povorki, če pri vsaki hiši dobijo 10 evrov?*

Ob pregledu izbranih vprašanj sem učence vprašala, kaj jih je vodilo pri izbiri vprašanj, kateri kriterij so izbrali. Večina jih je povedala, da jim je bil edini kriterij znesek – denar, ki ga lahko gasilci zberejo. To bi verjetno zanimalo tudi gasilce same, saj zato organizirajo povorko.

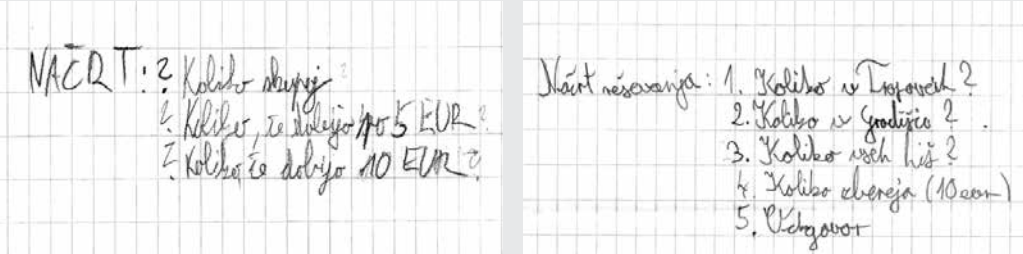
O višini predvidenega prostovoljnega prispevka so presojali glede na to, koliko sami dobijo, ko kot pustne maske obiskujejo hiše. Čeprav sta se drugo in tretje vprašanje razlikovali zgolj po višini zneska, nisem posegala in spreminjala njihove odločitve.

Učencem sem povedala, naj se sami odločijo, na katero od danih vprašanj bodo poiskali rešitev. Pričakuje se, da vsak posameznik najde rešitev na vsaj eno vprašanje.

c) *Individualni načrt reševanja*

Vsak posameznik si je izdelal načrt reševanja glede na problemsko vprašanje, ki si ga je izbral.

Primer dveh individualnih načrtov reševanja



Sliki 1 in 2: Načrt, predstavljen na sliki 1, je manj razčlenjen, vendar nakazuje pot reševanja, kot si ga je učenec zastavil sam. Drugi primer načrta je bolj razčlenjen in zajema vse korake, ki si jih je zadal učenec za reševanje naloge. Oba načrta vodita do rešitve naloge. Predstavljena načrta imata pravopisne in slovnične napake, vendar nas je pri predstavitvi zanimalo predvsem razmišljanje učencev o poti reševanja. (avtorja izdelkov: učenca 4. razreda)

Reševanje problema

Učenci so individualno reševali problemsko nalogo po načrtu, ki so ga predhodno predstavili učiteljici.

Med delom sem spremljala delo učencev in jim po potrebi svetovala.

Predstavitve rešitev

Vsi učenci so predstavili svojo problemsko nalogo – glede na izbor problemskega vprašanja.

Pet učencev je poiskalo rešitev na drugo in tretje vprašanje (učno boljši učenci), en učenec je odgovoril na prvo vprašanje (učenec s posebnimi učnimi težavami), preostali učenci so poiskali odgovor samo na tretje vprašanje.

Frontalno smo naredili primerjavo rešitev za prvo, drugo in tretje vprašanje.

Dva učenca sta pot reševanja z utemeljevanjem in opisovanjem postopkov predstavila ob tabli, drugi pa so primerjali njune poti in rešitve s svojimi. Ugotovili smo, da je poti reševanja lahko več.

Primeri reševanja učencev

Reševanje: $112 + 149 + 151 = 412$

$5\text{€} \cdot 412 = 2060\text{€}$

Og: Če vsaki hiši dajemo 5 EUR, bodo skupaj 2060 EUR.

Reševanje: $\frac{2060 \cdot 2}{4120}$

Og: Če bomo pri vsaki hiši dali 10 EUR, bodo skupaj 4120 EUR.

Slika 3: V primeru na sliki 3 je predstavljeno reševanje na drugo in tretje vprašanje. Učenec je določene podatke izračunal na pamet. Iz zapisa niso razvidni vsi postopki, ki jih je izvedel, da je prišel do končnega rezultata. Na to pomanjkljivost smo ga opozorili pri predstavitvi. (avtor izdelka: učenec 4. razreda)

Reševanje: $149 \cdot 2 = 151$

$\begin{array}{r} 56 \\ + 56 \\ \hline 112 \end{array}$

$\begin{array}{r} 149 \\ + 151 \\ \hline 300 \end{array}$

$412 \cdot 10\text{€} = 4120\text{€}$

Odgovor: Če pri vsaki hiši dajemo 10 EUR, skupaj 4120 evrov

Slika 4: Učenec je zapisal vse korake, ki jih je izvedel pri reševanju naloge. Postopke je znal dobro utemeljiti, tako da so poti reševanja lahko sledili tudi drugi učenci. (avtor izdelka: učenec 4. razreda)

Vrednotenje rezultatov

Vsi učenci, razen enega, so pravilno rešili in odgovorili na eno problemsko vprašanje.

Učenci z boljšim matematičnim znanjem so povedali, da je bilo samo reševanje lahko in da niso imeli nobenih težav. Eden izmed teh učencev je rezultat in pot reševanja pojasnil takole: »Če si izračunal, koliko bi gasilci zbrali, če pri vsaki hiši dobijo 10 evrov, zlahka odgovoriš na drugo vprašanje oziroma obratno; samo deliš ali pomnožiš z 2«. S tem je pokazal visoko stopnjo matematičnega mišljenja – sklepanja.

Drugi učenci so povedali, da so imeli največ težav pri računanju, koliko hiš naj bi katera izmed skupin obiskala. V veliko pomoč jim je bil načrt, ki so si ga oblikovali pred reševanjem.

Sklepni del

Ob koncu ure smo opravili evalvacijo dela.

Učenci so povedali, da jim je bil tak način reševanja matematične naloge všeč in da si želijo več podobnih nalog. Zanimivo jim je bilo predvsem to, da naloga ni imela vnaprej določenega vprašanja in da so ga lahko sami oblikovali. Pozitivno so se odzvali na možnost, da se sami odločijo, na katero vprašanje bodo iskali rešitev.

Refleksija učitelja

Učencem je bil predstavljen primer strategije reševanja, ob kateri so spoznavali potrebne korake za razvijanje lastne strategije reševanja matematičnih problemov in problemov z življenjskimi situacijami.

Predstavljena tematika izhodiščne situacije se je nanašala na predpustni čas in aktualni dogodek, ki se je pripravljala v našem kraju med obravnavo. Izberemo pa lahko kakršno koli drugo situacijo, ki bo učencem dovolj zanimiva, da jo bodo želeli rešiti, da bodo zaznali pomen reševanja matematičnih nalog, mi pa bomo lahko sledili zadanim učnim ciljem.

Glede na to, da so se učenci prvič srečali s takšnim pristopom reševanja, ocenjujem uro kot uspešno. Večina vprašanj o problemski situaciji je bilo smiselno oblikovanih in takih, da sem lahko razbrala raven razumevanja. Izstopalo je eno vprašanje, ki smo ga pokomentirali in ocenili kot manj primerno. Tudi problemska vprašanja so bila smiselno oblikovana, čeprav enoznačna. Na tej stopnji se je pojavilo vprašanje o ceni gasilne cisterne, ki mi je dalo vedeti, da bi lahko problemsko situacijo nadgradili s tem podatkom. Naloga bi bila tako še zanimivejša in učenci bi imeli možnost zastaviti več problemskih vprašanj.

Nalogo bom priredila in nadgradila s podatkom o ceni cisterne za obravnavo v prihodnje.

Literatura in viri

- 1 Vršič, V. (2011). *Pristopi k reševanju matematičnih problemov. Delovno gradivo. Neobjavljeno.*
- 2 Žakelj, A., et al. (2011). *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/devetletka/predmeti_obvezni/Matematika_obvezni.pdf (15. 12. 2012).*

2.3.5 Rože za okenska korita

Metka Flisar, Osnovna šola Tišina

Avtor	Metka Flisar
Šola	Osnovna šola Tišina
Učna tema	Aritmetika in algebra
Učni sklop	Računske operacije in njihove lastnosti Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Vsebina	Potenca
Razred	5.
Potreben čas za izpeljavo	Blok ura – 90 minut
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: - rešijo matematični problem in pri tem uporabljajo različne strategije, - opišejo in pojasnijo zapis s potenco, - zapišejo s potenco zmnožek (produkt) enakih faktorjev in obratno, - izračunajo vrednost potence naravnega števila.
Standardi	<i>Standardi znanja</i> Učenec/učenka: - reši matematične probleme in probleme iz vsakdanjega življenja, - pozna in uporablja matematično terminologijo, - zanesljivo uporablja računske operacije in računske zakone v množici naravnih števil s številom 0. <i>Minimalni standardi</i> Učenec/učenka: - reši matematični problem in problem iz vsakdanjega življenja.
Oblike in metode dela	- frontalna, - individualna
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	- delovni list, - Power Point
Potrebno predznanje	množenje v množici naravnih števil
Dejavnosti učencev	- reševanje naloge, - poročanje, - utemeljevanje

Faze učnega procesa	1. <i>Izhodišče:</i> Predstavitev problemske situacije Zaznava in oblikovanje problema 2. <i>Vpeljava:</i> Razčlenitev problema na korake Izvedba redukcije Načrt reševanja problema Navodilo za reševanje problema 3. <i>Reševanje problema – uresničevanje problemskega načrta</i> 4. <i>Oblikovanje odgovora in rešitev:</i> Poročanje o rezultatih dela Usvojitev pojma potenca 5. <i>Vrednotenje rezultatov postopkov:</i> Vrednotenje rezultatov Vrednotenje dela 6. <i>Transfer</i>
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Predstavljen primer prikazuje pristop k reševanju problemske naloge, ki je hkrati izhodišče za obravnavo nove učne snovi. Vzgojno-izobraževalni proces je bil načrtovan tako, da je učenec skozi vse faze miselno zelo dejaven in ciljno usmerjen v spoznavanje in razumevanje novega pojma <i>potenca</i>. Izhodiščna problemska naloga se nanaša na dogodek iz življenjskega okolja učencev in je zanje zato še zanimivejša. Uvajalni del v reševanje je načrtno daljši, saj želimo učence miselno aktivirati in učencem nalogo tako približati, da jo bodo želeli in tudi znali rešiti. Sam proces reševanja pa je uvajanje v razumevanje pojma potenca, ki ga v nadaljevanju pridobijo in usvojijo. Pristop se je izkazal kot zelo pozitiven, saj so vsi učenci usvojili pojem potenca in razen dveh učencev v celoti rešili problemsko nalogo.
Opombe, dodatna opazanja, posebnosti	Primer predstavlja smiselno povezovanje ciljev dveh vsebin iz učnega načrta za matematiko, in sicer: vsebine Potenca in Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami.

Uvod

Kot izhodišče načrtovanja nove učne snovi o potencah je bila zasnovana problemska naloga o vključevanju stanovalcev štirinadstropne stavbe v akcijo Olepšajmo svoj bivalni prostor.

Po uvodnem razgovoru o podobnih akcijah, ki potekajo v naših krajih, je bila učencem zastavljena naslednja problemska naloga:

Stanovalci štirinadstropne stavbe so se odločili za vključitev v akcijo z naslovom: Olepšajmo svoj bivalni prostor.

V vsakem nadstropju te stavbe so štiri stanovanja in vsako stanovanje ima štiri okna.

Na vsako okensko polico so postavili korito s štirimi rožami.

Za nakup rož so določili predsednico hišnega sveta, ki pa je imela velike težave z računanjem, koliko rož mora kupiti. Kupila je 280 rož. Kako uspešna je bila predsednica hišnega sveta pri računanju?



vir: lasten

Namen reševanja problemske naloge kot izhodišča za usvajanje novih matematičnih spoznanj je, da učenci z lastno miselno dejavnostjo spoznajo strategijo reševanja in jo nato uporabijo v novi situaciji. Ob danem problemu, vzetem iz realnega življenja in konkretne situacije, spoznajo pomen poznavanja in razumevanja odnosov med danimi podatki.

Učni proces je bil izveden v petem razredu. Delo je potekalo v frontalni obliki, nalogo pa so učenci reševali individualno.

Vzgojno-izobraževalni proces je bil načrtovan po prirejenih fazah in etapah problemskega pristopa avtoric Mire Cencič in Majde Cencič (2002).

Izvedba v razredu

1. faza: Izhodišče

Predstavitev problemske situacije

V uvodnem delu smo izhajali iz izkušenj učencev. Učenci so pripovedovali o različnih akcijah, ki potekajo v naših krajih: Naj kmetija; Najlepši vrt ... in pomenu akcij za kraj in krajane.

Zaznava in oblikovanje problema

Učitelj glasno prebere nalogo ob projekciji zapisa naloge na tablo.

Učenci dobijo nalogo zapisano na delovnem listu. Individualno jo tiho preberejo.

2. faza: Vpeljava

Razčlemba problema na korake

- Učenci najprej s svojimi besedami obnovijo oziroma ubesedijo nalogo.
- Sledi analiza – razčlemba besedila.
Učitelj postavlja vnaprej pripravljena vprašanja, ki preverjajo razumevanje prebranega besedila.
Učenci odgovarjajo na dana vprašanja, razberejo določene podatke iz besedila naloge ter zaznajo odnose med danimi podatki.
 - Kaj so se odločili stanovalci štirinadstropne stavbe?*
 - Ste tudi vi že slišali kdaj za tako akcijo?*
 - Ste kot družina sodelovali v njej?*

- Kaj vse ste postorili okrog hiše?
- Kaj menite o podobnih akcijah?
- Koliko nadstropij ima stanovanjska zgradba?
- Koliko stanovanj je v enem nadstropju?
- Koliko oken ima eno stanovanje?
- Koliko rož posadijo v eno korito?
- Kdo je kupil rože?
- Koliko rož je predsednica hišnega sveta kupila?

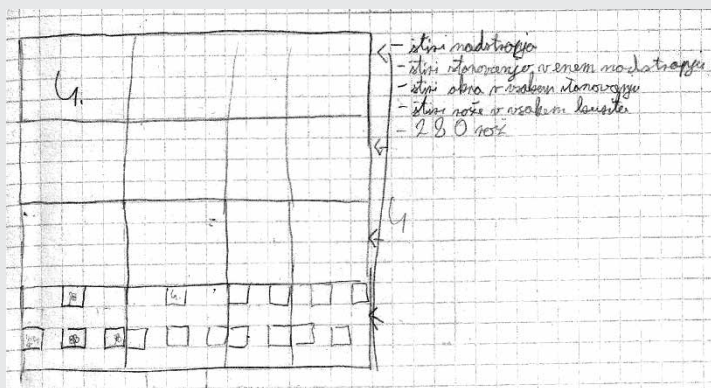
Izvedba redukcije

Učencem sem dala navodilo, da v zvezek narišejo skico stavbe z rožami na oknih, o kateri govori naloga. Preden so se lotili risanja, smo izpostavili ključne podatke, potrebne za čim natančnejšo skico:

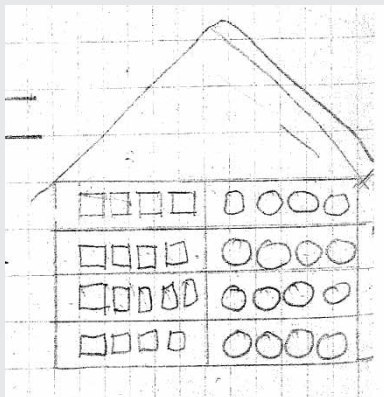
- štiri nadstropja
- štiri stanovanja
- štiri okna
- štiri rože

Učenci so drug drugemu predstavili svoje skice, jih pokomentirali ter izmenjali mnenja, kako natančno so upoštevali vse dane podatke iz naloge.

Primer dveh skic učencev



Slika 1: Prvo skico je narisal učenec z dobrim matematičnim znanjem. Predstavlja štirinadstropno stavbo v tlorisu. Učenec je ponazoril število stanovanj in število oken samo v prvem nadstropju. Podatke za preostala nadstropja je nakazal s številom 4, kar je komentiral – štirikrat enako kot v prvem nadstropju. Ob strani si je zapisal potrebne podatke za načrtovanje in reševanje – redukcijo podatkov. Ob skici je znal dobro predstaviti in utemeljiti vse podatke iz naloge. (avtor izdelka: učenec 5. razreda)



Slika 2: Druga skica je predstavljena zato, ker smo se ob njej z učenci pogovarjali o pomenu in namenu risanja skic pri matematiki. Učenec, ki jo je narisal, je sicer znal obnoviti podatke iz naloge ter odnose med njimi, vendar ni znal tega narisati. Takšna skica nas lahko pri reševanju zavede ali pa ne zadosti svojemu namenu. (avtor izdelka: učenec 5. razreda)

Načrt reševanja problema

Učence sem spodbudila, da razmišljajo, kako bi prišli do rešitve oziroma do odgovora na zastavljeno vprašanje. Učenci so najprej individualno oblikovali načrt reševanja v svoj zvezek. Drug drugemu so nato predstavili pot reševanja in posamezni korak tudi utemeljili.

Eden izmed učencev je sproti na tablo zapisoval potrebne korake (ključne neznane podatke), za rešitev naloge. Tako je nastal načrt reševanja naloge:

- število stanovanj
- število oken
- število potrebnih rož za zasaditev vseh korit
- primerjava števila potrebnih in nakupljenih rož
- zapis odgovora

Navodilo za reševanje problema

Preden so se učenci individualno lotili reševanja naloge, sem jim posredovala natančna navodila za delo:

1. *Problemsko nalogo še enkrat pozorno preberi.*
2. *Preglej izpisane podatke.*
3. *Nalogo rešuj po načrtu ali skici, ki si jo narisal.*
4. *Če naletiš na težavo, dvigni roko. Prišla bom do tebe in ti svetovala.*
5. *Ko boš izračunal, koliko je vseh oken na stavbi, preveri pravilnost rešitve pri učiteljici.*
6. *Preveri, ali si dobil odgovor na zastavljeno vprašanje.*

Navodilo je bilo projicirano na tablo in je bilo med reševanjem vidno vsem učencem.

Reševanje problema – uresničevanje problemskega načrta

Reševanje problema

Učenci so individualno reševali nalogo. Čas reševanja smo omejili na največ 15 minut.

Takoj po danih navodilih za delo je bilo zaznati pozitivno delovno ozračje, saj se je večina učencev takoj poglobila v reševanje. V razredu je vladala delovna tišina, ki je nakazovala veliko stopnjo dejavnega miselnega dela.

Dva učenca (učenca s posebnimi učnimi težavami) sem pri delu sistematično vodila in ju usmerjala, da sta prišla do delnega rezultata – števila vseh potrebnih rož za zasaditev.

Sprotno preverjanje

Ko so učenci dobili delni rezultat – število oken na stavbi, so prišli do učiteljeve mize, kjer smo skupaj preverili pravilnost rezultata. Učenci so dobili potrditev, da so na pravi poti do pravilne končne rešitve oziroma do ugotovitve, da so se pri določenem postopku zmotili.

Oblikovanje odgovora in rešitev

Poročanje o rezultatih dela

Vsi učenci so predstavili svojo pot reševanja in delni oziroma končni rezultat. Več kot polovica učencev je nalogo pravilno rešila v celoti. Trije učenci so naredili napako pri množenju, zato je bil končni rezultat napačen, vendar so izbrali pravi postopek reševanja. Dva učenca (voden s pomočjo učitelja) sta prišla le do delnega rezultata – do števila potrebnih rož za okenska korita.

1. primer reševanja učenca

$$4 \cdot 4 = 16 \text{ stanovanj}$$

$$16 \cdot 4 = 64 \text{ oken}$$

$$64 \cdot 4 = 256 \text{ rož}$$

$$280 - 256 = 14$$

Slika 3: Prvi primer reševanja naloge. (avtor izdelka: učenec 5. razreda)

Odgovor: Predsednica hišnega sveta je kupila 14 rož preveč.

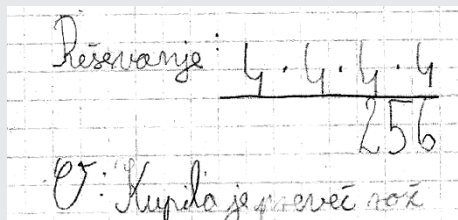
Opomba: Učenec nepravilno uporablja znak enakosti, ker na desni strani nastopajo enote, na levi pa ne.

2. primer reševanja učenca

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

256

Odgovor: Kupila je preveč rož.



Slika 4: Drugi primer reševanja naloge. (avtor izdelka: učenec 5. razreda)

Usvajanje nove učne snovi

- a) Postavljam vprašanja (izhodišče za vodeno učenje so rešitve učencev):
- Katero računsko operacijo ste uporabili pri računanju števila stanovanj?
 - Katero operacijo pri računanju števila oken?
 - Katero pri računanju števila potrebnih rož?
 - Kolikokrat ste izvedli operacijo množenja?

Številski izraz množenja enakih faktorjev zapišemo na tablo.

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$$

Kateri faktor se v številskem izrazu ponavlja?

Kolikokrat?

Kolikšna je vrednost (zmnožek)?

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$$

- b) Učencem povem, da množenje enakih faktorjev lahko zapišemo v krajši obliki

$$4^4$$

in da tak zapis imenujemo POTENCA.

Zapis preberemo: štiri na štiri.

Vrednost potence $4^4 = 256$.

- c) Poimenovanje, zapisovanje in pomen pojmov:
- Učenci na podlagi novih spoznanj sami razložijo pomen osnove in eksponenta potence.

Vrednotenje rezultatov postopkov

Vrednotenje rezultatov

Opravili smo primerjavo med potjo reševanja naloge, ki so jo izbrali učenci, in jo primerjali s predstavljenim zapisom številskega izraza v obliki potence.

Ugotovili smo, da se razlikuje v zapisu številskega izraza. Pri individualnem reševanju naloge so vsak številski izraz posebej zapisali, saj zapisa v obliki potence doslej niso poznali.

Končni odgovor na vprašanje ni bil težak, saj so izračunali samo razliko med kupljenimi rožami in potrebnim številom rož.

Vrednotenje dela

Učenci so povedali, da z reševanjem problemske naloge niso imeli posebnih težav. Pri reševanju jim je bila v veliko pomoč skica ali načrt, ki smo ga imeli zapisanega na tabli. Pomoč jim je bil predvsem zato, da pri računanju niso izpustili kašnega pomembnega podatka.

Potence, kot oblike zapisa enakih faktorjev, doslej niso poznali.

V obravnavanem primeru sta osnova in eksponent enaka, vendar se je v uvodnih primerih temu bolje izogniti. Učenci tega dejstva niso izpostavili, niti omenili, bolj so bili usmerjeni v pomen posameznega pojma.

Dobro razumevanje pojmov so potrdili pri reševanju nalog v fazi transferja.

Transfer

Frontalno smo naredili naloge, vezane na novo učno snov, in tako utrdili nove pojme.

1. Reši nalogo.
V petnadstropni stavbi je pet stanovanj. V vsakem stanovanju domuje petčlanska družina. Vsak član družine ima vsaj eno prevozno sredstvo.
Koliko stanovalcev živi v stavbi?
2. Zapiši zmnožek enakih faktorjev s potenco.
 $2 \cdot 2 \cdot 2 =$
 $4 \cdot 4 \cdot 4 =$
 $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 =$
 $9 \cdot 9 \cdot 9 =$
 $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$
3. Zapiši potence kot zmnožek enakih faktorjev.
 3^4 , 6^2 , 7^3 , 2^6 , 5^4
4. Izračunaj vrednost potence 3^5 .

Literatura in viri

- 1 Cencič, M., Cencič M. (2002). *Priročnik za spoznavno usmerjen pouk*. Ljubljana: Mladinska knjiga.
- 2 Vršič, V. (2011). *Pristopi k reševanju matematičnih problemov*. Delovno gradivo. Neobjavljeno.
- 3 Žakelj, A., et al. (2011). *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika*. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/devetletka/predmeti_obvezni/Matematika_obvezni.pdf (15. 12. 2012).

2.3.6 Zanimiva trimestna števila, 6. razred

Marija Magdič, Osnovna šola Turnišče

Avtor	Marija Magdič
Šola	Osnovna šola Turnišče
Učna tema	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Učni sklop	Naravna števila
Razred	6.
Potreben čas za izpeljavo	1 šolska ura
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • berejo z razumevanjem, • razčlenijo problemsko situacijo in postavljajo raziskovalna vprašanja, • uporabljajo različne oblike predstavljanja problemske situacije, • rešijo besedilno nalogo.
Standardi	Učenec/učenka: • reši matematične probleme, • pri reševanju problemov uporablja različne bralne strategije, • opiše problemsko situacijo z matematičnim jezikom, • pozna in uporablja matematično terminologijo.
Oblike in metode dela	• individualna in skupinska oblika dela
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• učni list
Potrebno predznanje	• seštevanje in odštevanje trimestnih števil, • postavljanje raziskovalnih vprašanj, • razširjanje danega problema
Dejavnosti učencev	• reševanje problema, • postavljanje raziskovalnih vprašanj, • razširjanje problema
Faze učnega procesa	• reševanje problema, • analiza reševanja in preverjanje ugotovitev
Opombe, dodatna opažanja, posebnosti	Uro sem z učenci šestega razreda izvedla pri dodatnem pouku.
Domače delo	Zapiši povzetek današnje dejavnosti v nekaj povedih. Raziskovalno nalogo današnje ure zastavi tudi svojemu sošolcu.

Potek učne ure

Uvod

V uvodnem motivacijskem delu ure so učenci pozorno poslušali in sledili mojim navodilom:

Izberi si število (ker so računali na pamet, sem jim svetovala, da si izberejo enomestno število).

Pomnoži ga s 3.

Prištej mu 5.

Odštej 2.

Deli s 3.

Katero število si dobil?

Vsak učenec mi je moral povedati izračunano število, jaz pa sem mu povedala, katero število si je izbral.

Napovedala sem jim, da se bomo v tej uri ukvarjali s podobnim primerom, in jim razdelila učni list z nalogo.

Reševanje problema

Vsak učenec je nalogo na listu reševal samostojno. Med delom sem spremljala dogajanje v razredu.

Dokaj hitro so ugotovili, da dobijo na koncu vedno samo dva rezultata: 198 ali pa 1089.

Nad tem so bili presenečeni, nekateri so začeli razmišljati kar na glas in si zastavljati vprašanja.

Da bi lahko izmenjali svoja razmišljanja, dobili sami še kakšno idejo za vprašanja in preverjali ter razpravljali o ugotovitvah, so delo nadaljevali v manjših skupinah po trije. Ker pa so bili pri svojem razmišljanju precej glasni, so za nekatera vprašanja iskali odgovore kar vsi.

Zastavili so si naslednja vprašanja:

1. *Kdaj dobimo rezultat 198 in kdaj 1089?*

Eden izmed učencev je zelo hitro ugotovil, da 198 dobimo v primeru, če sta prva in zadnja številka števila zaporedni števili. Razvila se je diskusija, ali to res drži. Vsak je to preveril na svojem listu pri številah, ki so jih izbrali. Ugotovitev so potrdili.

2. *Ali številka, ki je na sredini vpliva na rezultat?*

Po krajšem razmisleku so ugotovili, da ne vpliva. Prosila sem jih, naj to utemeljijo. Povedali so, da je vedno zadnja številka drugega števila manjša od prve, torej gre za odštevanje s prehodom. Ker pa sta srednji številki enaki, je druga številka razlike vedno 9.

3. *Ali ugotovljeno drži, če je zadnja številka izbranega števila 0?*

Z nekaj primeri so potrdili, da se končna vsota ne spremeni, da sta to števili 198 ali 1089.

4. *Kaj pa če sta prva in zadnja številka enaki?*

Na izbranih številih so preverili, da je v tem primeru že razlika enaka nič, zato tudi končna vsota.

Razmišljali so, kaj bi še lahko opazovali. Ker vprašanja, ki bi se navezovalo na končno vsoto, niso več našli, so predlagali, da bi lahko podrobneje pogledali razliko, ki so jo morali izračunati najprej.

5. *Kakšna je razlika pri izbranih številih?*

Razlika je lahko 99 ali pa je srednja številka vedno 9.

Eden izmed učencev je pri sošolcu opazil, da je dobil enako razliko, čeprav sta si izbrala različna števila. Porajalo se je naslednje vprašanje:

6. *Pri katerih številih je razlika enaka?*

Po primerjanju izračunov so najprej opazili, da če se prva in zadnja številka razlikujeta za 5, je razlika vedno 495. To je bil povod, da so se vprašali:

7. *Kolikšna je razlika, če se prva in zadnja številka razlikujeta za 1, 2, 3, 4, 6, 7 ali 8?*

Za odgovor na to vprašanje smo potrebovali podatke za več števil, kot si jih je izbral en učenec, zato smo nadaljevali skupaj.

Pripravili smo si preglednico, v katero smo najprej vpisali po velikosti urejene razlike. Pri vsaki razliki smo zapisali nekaj števil, ki so si jih izbrali učenci. To jim je bilo v pomoč pri ugotovitvi, da je vsaka naslednja razlika za 99 večja od prejšnje, in so vse razlike večkratniki števila 99.

Analiza reševanja in preverjanje ugotovitev

Ob koncu smo v razgovoru povzeli, kaj smo opazovali in do katerih ugotovitev smo prišli. Našo ugotovitev smo preverili še na izbranem številu.

Refleksija

Učenci so bili pri sami uri zelo motivirani za delo, tako da sem uživala ob opazovanju dogajanja v razredu. Težav z razumevanjem niso imeli, delo je potekalo tekoče, nekaj napak so naredili v začetku pri samih izračunih, pozneje pa so bili bolj natančni.

S podobnim problemom se učenci prej še niso srečali. Ravno zaradi tega pred izvedbo nisem pričakovala, da jih bo problem tako pritegnil. Zanimivo jih je bilo opazovati, kako so bili začuden ob rezultatih, ki so jih dobili v začetku reševanja, in navdušeni ob tem, ko so si zastavili vprašanje ter vnemo, s katero so iskali odgovor nanj.

Ocenjujem, da je delo v skupinah pozitivno vplivalo na učinkovitost dela. Opazne so bile razlike med učenci v postavljanju vprašanj. Nekaterim so se ideje, kaj bi še lahko opazovali, kar porajale, preostali, ki se niso spomnili vprašanj, pa so z navdušenjem iskali odgovore na zastavljena vprašanja sošolcev.

Ura, ki smo jo namenili reševanju, je bila skorajda prekratka, cilji so bili doseženi, učenci pa so izrazili željo po še kakšnem izzivu za reševanje.

Literatura in viri

- 1 Nabor problemskih nalog. Interno gradivo PRS. (10. 1. 2013)
- 2 Žakelj, A., et al. (2011). Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/devetletka/predmeti_obvezni/Matematika_obvezni.pdf (1. 12. 2011).
- 3 www.zrss.si/projektiess/skladisce/...za.../didaktični_žakelj.doc (18. 5. 2012).

Priloga



Učni list 1: Čarobno število

2.3.7 Zanimiva trimestna števila, 7. razred

Katja Kmetec, Osnovna šola Brinje, Grosuplje

Avtor	Katja Kmetec
Šola	Osnovna šola Brinje, Grosuplje
Učna tema	Naravna števila
Učni sklop	Deljivost naravnih števil z 9, reševanje problemov
Razred	7.
Potreben čas za izpeljavo	2 šolski uri
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • rešijo probleme, • razčlenijo problemsko situacijo, • raziskujejo.
Standardi	Učenec/učenka: • opiše problemsko situacijo z enačbo, • uporablja matematiko pri reševanju problemov.
Oblike in metode dela	• delo v dvojicah
Potrebno predznanje	• seštevanje, odštevanje trimestrnih števil
Dejavnosti učencev	• izvedba matematičnega trika (matematičnih trikov), • reševanje problema, • preiskovanje, • utemeljevanje
Faze učnega procesa	1. Uvod 2. Reševanje problemske naloge 3. Delitev problema na manjše probleme 4. Preiskovanje 5. Povezovanje najdenih rešitev 6. Uporaba najdenih rešitev
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Naloga se je izkazala kot precej težka – predvsem za učno šibkejše učence. Ti so imeli težave pri ugotavljanju vzrokov, zakaj dobimo vsakokrat isto število. To jih niti ni zanimalo. Pri delu so potrebovali precej spodbude in usmeritve. Zanje bi bilo morda smiselno uporabiti kakšen lažji trik, ki bi ga bili sposobni razumeti. Za druge pa se je problemska naloga izkazala kot primerna. Motivacijsko pa so jih bolj pritegnili drugi triki, navedeni v prilogi.
Možnosti za razširitev problema*	• raziskovanje deljivosti s številom 9, • razlaga različnih matematičnih trikov, ki temeljijo na lastnostih deljivosti s številom 9, • učenci si sami izmislijo matematični trik, ki temelji na lastnostih deljivosti s številom 9.
Prilagoditve za učence z učnimi težavami*	Lažji trik

Uvod

Tik pred dnevom čarovnic smo v okviru izbirnega predmeta Matematična delavnica izvedli naslednji »čarovniški« trik (priloga 1):

Izberi poljubno trimestno število. Prva in zadnja številka ne smeta biti enaki. Nato zapiši število v obratnem vrstnem redu. Odštej manjše število od večjega. Če je rezultat dvomestno število, dodaj spredaj 0. Rezultat zapiši v obratnem vrstnem redu. Seštej prejšnji in novi rezultat. Dobljeni rezultat pomnoži z 100 000 000. Odštej 44 760 179 909.

Dešifriraj rezultat. Poglej, katera črka ustreza posamezni številki. Izpiši črke. Dobljeno besedilo preberi od desne proti levi.

Magična koda: 0 – Č, 1 – N, 2 – A, 3 – V, 4 – I, 5 – B, 6 – C, 7 – E, 8 – R, 9 – O

Učenci, ki so vsak zase reševali nalogo, so bili zelo presenečeni, ko so ugotovili, da so vsi dobili isto rešitev: napis NOČ ČAROVNIC. Kako je to mogoče?!

Tako so preverili pri sošolcih, ali tudi pri njih »trik deluje« in katero je bilo njihovo prvotno izbrano število. Ugotovili so, da trik vedno deluje, ne glede na izbrano prvotno število. Zakaj?

Reševanje problema

Z vidika problemske naloge je zanimiv predvsem prvi del besedila, torej:

Izberi poljubno trimestno število. Imenujmo ga prvo število. Zapiši novo število s števkami prvega števila v obratnem vrstnem redu. Nato števili odštej. Dobljeni razliki prištej število, ki je sestavljeno iz števk razlike v obratnem vrstnem redu.

Ponovi postopek na nekaj izbranih trimestnih številih. Razišči postopek in rezultat tega postopka. Vsako od ugotovitev tudi utemelji.

V nadaljevanju je opisano reševanje zgolj tega dela (v praksi pa je priporočljivo izvesti tudi drugi del, saj zelo pripomore k motivaciji učencev).

Preizkus postopka na različnih trimestnih številih

Učenci so izbrali različna trimestna števila, vsakokrat sledili postopku in vedno dobili isti končni rezultat: število 1089.

Delitev problema na »podprobleme«

Problem so samoiniciativno razdelili na dva manjša problema:

Prvi je bil vezan na razliko izbranega trimestnega števila in števila, zapisanega v obratnem vrstnem redu. Drugi pa se je glasil: *Kaj se zgodi, ko dobljeno razliko prištejemo obratu razlike?*

Ugotovitve učencev

Pri ugotavljanju, kaj velja za razliko poljubnega trimestnega števila in njegovega obrata, so učenci ugotovili:

- (ugotovitev 1): *Dobljena razlika je v vseh primerih večkratnik števila 9.*
- (ugotovitev 2): *Srednja številka v dobljeni razliki je v vseh primerih 9.*
- (ugotovitev 3): *Vsota drugih dveh števk je v vseh primerih 9.*

Ob tem pa so se jim zastavila naslednja vprašanja:

- *Ali to drži za vsa trimestna števila?*
- *Če da, zakaj?*
- *Ali to velja samo za trimestna števila ali morda tudi za druga?*

Vendar pa se pri teh vprašanjih niso ustavljali, saj jih je preveč zanimalo nadaljevanje, torej reševanje drugega manjšega problema: *Kaj se zgodi, ko dobljeno razliko prištejemo obratu razlike?* Vsi učenci so prišli do ugotovitve:

- *Dobljena vsota je vedno enaka, in sicer 1089.*

Pri razlagi, zakaj je tako, pa se je pokazala precejšna razlika med učenci.

Učno šibkejši učenci so se zadovoljili z ugotovitvijo, da tako pač je, torej da je vsota vedno 1089.

Učenci, ki so močnejši na matematičnem področju, pa so rezultat 1089 skušali pojasniti. Pri utemeljevanju so uporabljali konkretne številske primere, npr.:

$$\begin{array}{r} 198 \\ + 891 \\ \hline 1089 \end{array}$$

ter predhodnih ugotovitev, za katere so predpostavili, da so resnične (srednja številka je vedno 9, vsota drugih dveh števk je tudi 9). Rezultat 1089 so pojasnili s sledečim:

- *Vsota desetic ($9 + 9$) je gotovo 18. Torej zapišemo na mesto desetic 8 in štejemo 1 dalje k stoticam.*
- *Vsota stotic bi bila 9, ker pa smo dodali 1, je 10.*
- *Vsota enic je gotovo 9.*

Nerazrešena vprašanja – izziv za nadaljnje raziskovanje

Čeprav je bila naloga s tem na neki način pojasnjena, nerazrešena vprašanja predvsem učno močnejšim učencem niso dala miru. Odločili smo se, da jih raziščemo. Vsa smo strnili v eno: *Kaj velja za razliko poljubnega števila in njegovega obrata?* Ker učenci še niso bili večji preiskovanja, sem jih nekoliko usmerila: naj najprej poskusijo za dvomestna števila, nato za trimestna in tako naprej. Njihove ugotovitve so zbrane v preglednici 1.

Preglednica 1: Ugotovitve učencev

<i>n</i> -mestno število	Ugotovitve
2	Razlika je vedno večkratnik števila 9. Dobimo pošteevanko števila 9! Dobimo pošteevanko števila 9, in sicer 9-krat toliko, kolikor je razlika med števkama v izbranem dvomestnem številu.
3	Razlika je vedno večkratnik števila 9. Srednja števka razlike je vedno 9. Vsota 1. in 3. števke razlike je vedno 9.
4	Razlika je vedno večkratnik števila 9.
5	Razlika je vedno večkratnik števila 9. Srednja števka rezultata je vedno 9.
6	Razlika je vedno večkratnik števila 9.

Učenci s šibkejšim matematičnim znanjem so potrebovali nekoliko več pomoči. Prišli so do nekaterih ugotovitev, ne pa do vseh. Učenci z boljšim matematičnim znanjem so našli več ugotovitev ter se v nadaljevanju osredotočili na trimestna števila in skušali najti pojasnilo za svoje ugotovitve.

$$\begin{array}{r} 751 \\ - 157 \\ \hline 594 \end{array}$$

Tudi tokrat so si pri utemeljitvi pomagali s konkretnimi številskimi primeri, saj simboličnih izrazov še niso vajeni. Njihova razlaga je bila približno taka:

- Zakaj je srednja števka rezultata vedno 9:
 - Ker sta desetici obeh števil (zmanjševanca in odštevanca) enaki, bi bila razlika teh dveh števil enaka 0.*
 - Vendar ni, ker desetici odštevanca prištejemo 1 (prenos od enic). Zato je 9.*
- Zakaj je vsota prve in zadnje števke v rezultatu vedno 9:
 - (7 - 1) + (1 - 7) bi bilo 0, vendar pa moramo rezultatu prišteti 10 (razvidno iz slike 1) ter ga zmanjšati za 1. Torej 0 povečamo za 9 in dobimo 9.*

$$\begin{array}{r} 751 \quad +10 \\ - 157 \\ \hline 594 \end{array}$$

Slika 1: Razlaga na konkretnem primeru.

- Zakaj je dobljena razlika vedno večkratnik števila 9:

Število je deljivo z 9, če je vsota njegovih števk deljiva z 9. Vsota prve in zadnje števke je 9, srednja števka je 9, vsota je 18, kar pojasnjuje, da je število deljivo z 9.

Sklep

Učenci imajo radi čarovniške trike. Zakaj ne bi tega izkoristili tudi pri matematiki? Opisani primer je le ena od številnih čarovnij, ki temeljijo na deljivosti s številom 9.

Učence je pritegnil – čeprav je od njih terjal, da preberejo daljše besedilo. Zaradi slabših izkušenj pri reševanju besedilnih nalog, kjer se učenci ustrašijo besedila, sem podobno stanje pričakovala tudi tokrat. Vendar so me učenci pozitivno presenetili; večina je nalogo razumela, pravilno upoštevala navodila in prišla do pravilnega rezultata.

Pri reševanju problema so bili učenci različno uspešni, vendar pa nihče ni bil neuspešen. Večje razlike so se pojavile pri pojasnjevanju ugotovitev, kjer so se lahko izkazali le učno boljši učenci. To sem tudi pričakovala, saj se mi pojasnitve ne zdijo tako zelo očitne in enostavne. Učenci, opremljeni z znanjem o izrazih s spremenljivkami, bi imeli pri tovrstni nalogi verjetno celo lažjo nalogo, saj bi jih do ugotovitve pripeljalo predvsem proceduralno znanje, medtem ko so si morali sedmošolci pomagati z razumevanjem in s sklepanjem.

Različni učenci so se z opisanim problemom ukvarjali različno dolgo, zato sem jih zaposlila z dodatnimi nalogami, ki so na priloženi zgoščenki.

Rezultate vseh naših preiskovanj pa smo nadgradili kot uporabo pri čarovniških trikih, ki so tudi na priloženi zgoščenki.

Literatura in viri

- 1 Kmetič, S. (2013). *Problemske naloge. Interno gradivo.*
- 2 *Nine math tricks. Elementary Math and Science Journal. Dostopno na: <http://wbilljohnson.com/journal/math/ninetricks.htm> (15. 12. 2012).*
- 3 *Virtualni bralec misli misli. Dostopno na: http://users.volja.net/lukamarti/bralec_misli.htm (15. 12. 2012).*
- 4 Žakelj, A., et al. (2011). *Program osnovna šola. Učni načrt. Matematika. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (1. 12. 2011).*

Priloge



Učni list 1: Čarovniški trik

Dodatne naloge: Skrivnosti devetice

Dodatne naloge 2: Nekaj čarovniških trikov z uporabo lastnosti devetice

2.3.8 Igra s slamicami

Katja Kmetec, Osnovna šola Brinje, Grosuplje

Avtor	Katja Kmetec
Šola	Osnovna šola Brinje, Grosuplje
Učna tema	Naravna števila
Učni sklop	Reševanje problemov
Razred	7.
Potreben čas za izpeljavo	1 šolska ura
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • rešijo probleme, • razčlenijo problemsko situacijo, • raziskujejo.
Standardi	Učenec/učenka: • uporablja matematiko pri reševanju problemov.
Oblike in metode dela	• delo v dvojicah
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• učni list, • slamice
Potrebno predznanje	Učenci/učenke: • postavljajo raziskovalna vprašanja, • poznajo različne strategije sklepanja, • znajo sistematično opazovati postopek.
Dejavnosti učencev	• igra, • opazovanje igre, • sistematično beleženje igre, • sklepanje, • preizkušanje ugotovljenih zakonitosti
Faze učnega procesa	1. Uvod 2. Reševanje problemske naloge 3. Poročanje in primerjava najdenih rešitev 4. Posploševanje rešitev
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Učenci so bili motivirani za delo – igra jih je pritegnila. Njihova zavzetost za delo je bila vidna v tem, da niso nehali igrati, dokler niso ugotovili zmagovalne strategije. Kot učiteljica sem bila z izvedbo zadovoljna. Za prihodnjč moram računati na precejšnje časovne razlike med posameznimi učenci; nekateri zelo hitro ugotovijo strategijo, drugi za to potrebujejo precej časa.
Možnosti za razširitev problema	• drugi »vhodni podatki« igre: drugačno število slamic, drugačno največje možno število slamic, ki jih lahko v posamezni potezi vzamemo; • druga pravila igre, npr. kdor vzame zadnjo slamico, izgubi; • druge matematične igre.

Več težav z iskanjem zmagovalne strategije pa so imeli tisti učenci, ki so si beležili igro s šte-
tjem, koliko slamic je vsakokrat vzel posamezni igralec (v nadaljevanju: *strategija 3*). K temu
je pripomoglo predvsem to, da so beležili primere iger, pri katerih ni nihče v dvojici uporabljal
zmagovalne strategije.

Da bi se temu izognili, sem čez nekaj časa preoblikovala dvojice učencev. Nova razvrstitev je
bila takšna, da je bil v vsaki dvojici nekdo, ki je že ugotovil zmagovalno strategijo in jo v nado-
ljevanju tudi uporabljal, ter nekdo, ki jo je šele iskal.

Tisti, ki so ugotavljali strategijo, so si še naprej zapisovali korake igre. Primer takšnega beleže-
nja prikazuje preglednica 1.

Preglednica 1: Beleženje igre

Vzamemo		Število slamic, ki ostanejo
1. igralec	2. igralec	
1	2	14
2	3	9
1	1	7
3	3	1
1 – zmaga		0

S pomočjo preglednice so skušali najti kakšen vzorec – bodisi v posameznem stolpcu bodisi
v posamezni vrstici, vendar pri tem niso bili uspešni. Zato so poskusili drugače; s ponavljanjem
potez, ki jih je izvajal njihov nasprotnik. Tudi to se ni izkazalo kot uspešno.

Pač pa so vsi učenci opazili, da učenec, ki zmaguje, vedno začne igro in v prvi potezi vedno
vzame eno slamico.

Učence, ki še niso odkrili strategije, sem napotila, naj opazujejo igro od te poteze dalje. S tem
se je preglednica 1 nekoliko spremenila (v preglednico 2).

Preglednica 2: Beleženje igre po ugotovitvi, da je prva poteza vsakokrat identična

Vzamemo		Število slamic, ki ostanejo
1. igralec	2. igralec	
1		16
2	2	12
3	1	8
1	3	4
2 – zmaga	2	0

S pomočjo preglednice 2 so ugotovili strategijo: vsota slamic, ki jih vzameta igralca v posa-
mezni potezi, je 4.

Predstavitev rešitev

Posamezne dvojice so druga drugi predstavile svoje poti reševanja, ki so se med seboj razlikovale, prav zaradi tega pa tudi dopolnjevale. Pri sami igri je bilo najlažje upoštevati pravilo: prvič vzamemo eno slamico, nato pa vedno toliko, da je vsota pobranih slamic našega nasprotnika in nas enaka 4 (ugotovitve po *strategiji 3*). Prva strategija – študija igre od konca proti začetku – je bila vsem najbolj v pomoč pri razumevanju strategije, ki smo ga dodatno podkrepili še s prikazom – črtanjem narisanih slamic (*strategija 2*).

Ob koncu učenci niso zgolj poznali strategije, ampak so jo tudi dobro razumeli in seveda znali uporabljati. Tako so brez težav odgovorili na še nekaj dodatnih vprašanj:

- *Je igra poštena? Ne, ni. Kdor začne prvi, zmaga.*
- *Kako naj igra prvi, da bo zanesljivo zmagal? Pobere naj 1., 5., 9., 13. in 17. slamico.*
- *Kako naj igra drugi, da bo gotovo zmagal? Ker igra ni poštena, mu to ne bo uspelo, razen če si najde soigralca, ki še ne pozna zmagovalne strategije.*
- *Kaj če bi imeli namesto 17 30 slamic? Prav tako bi odštevali 4 nazaj, torej bi morali pobrati: 26., 22., 18., 14., 10., 6. in 2. slamico.*
- *Kaj če bi igralec lahko vzel 1, 2, 3, 4, ali 5 slamic od začetnega stanja 27 slamic? Potem bi odštevali od 27 navzdol po 6, in sicer: 21, 15, 9, 3.*

Sklep

V osnovni šoli v okviru matematične kompetence med drugim razvijamo sklepanje, posploševanje, raziskovanje in reševanje problemov.

Pri opisani igri se je dogajalo vse to: učenci so opazovali igro, sklepali, posploševali, raziskovali in pri tem reševali matematični problem: kakšna je zmagovalna strategija opisane igre.

Učenci so problem reševali na različne načine. K izbiri načina so pripomogle njihove sposobnosti, učni stili, način razmišljanja ... Ne glede na izbrani način, pa je vsem uspelo rešiti problem in doseči zastavljene cilje.

Igra z vidika doseganja ciljev ni bila prezahtevna. Učenci sedmega razreda so bili zmožni najti zmagovalno strategijo in jo nekako pojasniti. Nekateri med njimi so igro zelo dobro povezali z obravnavano snovjo: deljivostjo naravnih števil, in sicer: Od 17 slamic jih odstranimo toliko, da dobimo najbližji večkratnik števila 4 (ker lahko vzamemo največ 3 slamice, število 3 povečamo za 1 in dobimo 4). Torej v prvi potezi odstranimo 1 slamico, ostane jih 16. Nato jih jemljemo po 4. Vseskozi je število preostalih slamic večkratnik števila 4, deljenje pa se izide. To pojasnilo je lepo razvidno iz preglednice 2, vendar ga niso uporabili avtorji preglednice, ampak drugi učenci. Posplošili so ga za poljubni konkretni primer.

Pri reševanju problema so bile razlike v hitrosti, ki pa smo jih brez težav reševali z novim načinom razdelitve učencev v dvojice, tako da je bil v vsaki dvojici nekdo, ki je obvladal zmagovalno strategijo.

Drugih težav ni bilo opaziti. Morda le to, da je ugotovitev zmagovalne strategije učence zelo razveselila, obenem pa tudi razočarala; vsi so namreč ugotovili, da ko enkrat poznaš zmagovalno strategijo, igra izgubi čar in ni več zanimiva.

Literatura in viri

- 1 Sever, V. (2007). *Miselne igre*. Ljubljana: Tehniška založba Slovenije.
- 2 Žakelj, A., et al. (2011). *Program osnovna šola. Učni načrt. Matematika*. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (1. 12. 2011).

Priloga



Priloga 1: Igra s slamicami

2.3.9 Vsota zaporednih naravnih števil, 7., 9. razred

Katja Kmetec, Osnovna šola Brinje, Grosuplje

Avtor	Katja Kmetec
Šola	Osnovna šola Brinje, Grosuplje
Učna tema	Naravna števila/Enačbe
Učni sklop	Reševanje problemov
Razred	7. razred/9. razred
Potreben čas za izpeljavo	1 ura
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • rešijo probleme, • razčlenijo problemsko situacijo, • raziskujejo.
Standardi	Učenec/učenka: • opiše problemsko situacijo z enačbo, • uporablja matematiko pri reševanju problemov.
Oblike in metode dela	Delo v dvojicah
Potrebno predznanje	Seštevanje naravnih števil /enačbe
Dejavnosti učencev	Reševanje dane problemske situacije
Faze učnega procesa	1. Uvod 2. Reševanje problemske naloge 3. Poročanje in primerjava najdenih rešitev 4. Povezovanje najdenih rešitev
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Identično nalogo so reševali učenci sedmega in devetega razreda. Kot učiteljici mi je bila zlasti zanimiva primerjava načinov reševanja obeh skupin. Izkazalo se je, da več znanja (deveti razred) po eni strani učencem pomaga pri reševanju problemov, po drugi strani pa jih tudi omejuje in spravlja v okvir; učenci devetega razreda so razmišljali o rešitvi problemske naloge v okviru obravnavane snovi zadnjih ur – enačb. Učenci sedmega razreda niso videli povezave med obravnavano snovjo in problemsko nalogo, zato so bili bolj odprti pri reševanju problemske naloge. Sicer pa je bilo opazno, da so učenci devetega razreda v primerjavi z učenci sedmega razreda že bolj vešč reševanja problemskih nalog in da so že bistveno bolj samostojni pri sistematičnem preiskovanju. Nekateri učenci devetega razreda so si pri reševanju problemske situacije pomagali z znanjem o vzorcih.
Možnosti za razširitev problema*	• Katero naravno število od 1 do 100 lahko zapišemo kot vsoto zaporednih naravnih števil na največ načinov? • Razvrsti naravna števila od 1 do 100 od tistega, ki ga lahko zapišemo kot vsoto zaporednih naravnih števil na največ možnih načinov, do tistega, ki ga ne moremo zapisati kot vsoto zaporednih naravnih števil. • Poišči števila, ki jih lahko zapišemo kot vsoto zaporednih naravnih števil na 10 možnih načinov.

Izvedba v razredu

Uvod

Število 5 lahko zapišemo kot vsoto dveh zaporednih naravnih števil: $5 = 2 + 3$.

Število 6 lahko zapišemo kot vsoto treh zaporednih naravnih števil: $6 = 1 + 2 + 3$.

Število 15 lahko zapišemo kot vsoto dveh, treh ali petih zaporednih naravnih števil:

$$15 = 7 + 8$$

$$15 = 4 + 5 + 6$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

Ali obstaja kakšno pravilo – katera števila lahko zapišemo kot vsoto na več načinov? Na koliko načinov?

Pred opisani izziv sem postavila učence devetega razreda, ki obiskujejo pri matematiki tretjo raven zahtevnosti, ter skupino učencev sedmega razreda, ki obiskujejo izbirni predmet Matematična delavnica.

Reševanje problema

Obema skupinama se je problem zdel zanimiv; niso vnaprej videli, kakšna je rešitev, kar jih je pritegnilo k ugotavljanju zakonitosti, po drugi strani pa se jim izziv ni zdel pretežek. Učenci različnih matematičnih sposobnosti so začeli ugotavljati, kakšno (če sploh) je pravilo. Nalogo so reševali v dvojicah, ki so bile določene skladno s sedežnim redom učencev.

Reševanje problema v sedmem razredu

Učenci sedmega razreda so v času reševanja problemske situacije obravnavali učni sklop Večkratniki in delitelji naravnih števil. Obravnavani učni sklop jih ni usmeril k reševanju problemske situacije. Naloge so se (vsi) lotili na tak način: izpisali so naravna števila od 1 do 20 (nekateri več, drugi manj) ter za vsako število posebej ugotavljali, na koliko načinov ga lahko zapišemo kot vsoto zaporednih naravnih števil. Njihove ugotovitve prikazuje preglednica 2.

Preglednica 1: Na koliko načinov lahko dano število zapišemo kot vsoto zaporednih naravnih števil

Število	Vsote
1	/
2	/
3	$1 + 2$
4	/
5	$2 + 3$
6	$1 + 2 + 3$
7	$3 + 4$
8	/

Število	Vsote
9	$4 + 5, 2 + 3 + 4$
10	$1 + 2 + 3 + 4$
11	$5 + 6$
12	$3 + 4 + 5$
13	$6 + 7$
14	$2 + 3 + 4 + 5$
15	$7 + 8, 4 + 5 + 6, 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
16	/
17	$8 + 9$
18	$5 + 6 + 7, 3 + 4 + 5 + 6$
19	$9 + 10$
20	$2 + 3 + 4 + 5 + 6$

Nato so si ogledali svoje tabele oz. zapiske ter postavili domneve:

- Kot vsoto dveh zaporednih naravnih števil lahko zapišemo vsa liha števila, razen 1.
- Kot vsoto treh zaporednih naravnih števil lahko zapišemo vse večkratnike števila 3, razen 3.
- Kot vsoto petih zaporednih naravnih števil lahko verjetno zapišemo večkratnike števila 5, razen 5 in 10.

Ugotovili so tudi pravilo, kako poiščemo ustrezne seštevance, npr:

- Če želimo 15 zapisati kot vsoto dveh zaporednih naravnih števil, ga delimo z 2. Dobimo 7,5. Prvo število bo 7, drugo 8.
- Če želimo 15 zapisati kot vsoto treh zaporednih naravnih števil, ga delimo s 3. Dobimo 5. Srednje število bo 5. Nato zapišemo njegovega predhodnika in njegovega naslednika.
- Če želimo 15 zapisati kot vsoto petih zaporednih naravnih števil, ga delimo s 5. Dobimo 3. To je srednje število v nizu petih zaporednih naravnih števil.

Reševanje problema v devetem razredu

Učenci devetega razreda so izziv dobili po obravnavi učnega sklopa Enačbe, natančneje po reševanju številskih problemov z enačbami. Čeprav niso bili na noben način spodbujeni k reševanju problemske naloge z enačbami, jih je precej reševalo problem prav s pomočjo enačb. Vsi ti so se reševanja problema lotili sistematično (*1. način*):

- če seštejemo dve zaporedni naravni števili, je dobljena vsota $x + x + 1 = 2x + 1$ (liha števila);

- če seštejemo tri zaporedna naravna števila, je vsota oblike $x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3 = 3(x + 1)$; večkratniki števila 3;
- če seštejemo štiri zaporedna naravna števila, je dobljena vsota oblike $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 4x + 6 = 4x + 4 + 2 = 4(x + 1) + 2$; večkratniki števila 4, povečani za 2;
- če seštejemo pet zaporednih naravnih števil, je dobljena vsota oblike $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 5x + 10 = 5(x + 2)$; večkratniki števila 5;
- na enak način za vsoto šestih zaporednih naravnih števil dobimo $6x + 15 = 6x + 12 + 3 = 6(x + 2) + 3$; večkratniki števila 6, povečani za 3;
- in za vsoto sedmih zaporednih naravnih števil $7x + 21 = 7(x + 3)$; večkratniki števila 7.

Drugi učenci (2. način) so takoj ugotovili, da lahko vsa liha števila zapišemo kot vsoto dveh zaporednih števil.

Nato so sistematično raziskali, katere možne vsote lahko dobimo z izbiro treh zaporednih naravnih števil:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$2 + 3 + 4 = 9$$

$$3 + 4 + 5 = 12$$

$$4 + 5 + 6 = 15$$

$$5 + 6 + 7 = 18$$

itd.

Pri tem so ugotovili:

- vsaka naslednja vsota je od prejšnje večja ravno za 3, kar so pojasnili z utemeljitvijo: vsako novo vsoto dobimo tako, da iz prejšnje vsote odstranimo najmanjše število in dodamo število, ki je za 1 večje od prejšnjega največjega števila. Ti dve števili se med seboj vedno razlikujeta ravno za 3;
- vse dobljene vsote so večkratniki števila 3.

Na enak način so sistematično odkrivali vsote 4 zaporednih naravnih števil:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

$$4 + 5 + 6 + 7 = 22$$

itd.

in ugotovili: vsaka naslednja vsota je od prejšnje vsakokrat večja ravno za 4, in pojasnili, zakaj.

Na enak način so iskali vsoto petih zaporednih števil. Ugotovili so, da je vedno večkratnik števila 5, in po istem postopku so ugotavljali pravilo za vsoto 6 in 7 naravnih števil.

Zaporedne vsote in domneve, ki so jih postavili učenci ob opazovanju dobljenih vsot, prikazuje preglednica 2.

Preglednica 2: Delne vsote in domneve učencev

Število seštevancev	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	Domneva
2	3	5	7	9	11	13	Liha števila
3	6	9	12	15	18	21	Večkratniki 3
4	10	14	18	22	26	30	
5	5	10	15	20	25	30	Večkratniki 5
6	21	27	33	39	45	51	
7	28	35	42	49	56	63	Večkratniki 7

Nekateri učenci so opazovali vzorce po vrstah (npr. pri štirih seštevanjih zaporedje 10, 14, 18, 22, 26, 30) in na podlagi tega skušali najti splošni člen vsote z danim številom seštevancev.

Primerjava najdenih števil

Ker sta se v devetem razredu pojavila dva različna načina iskanja rešitev, smo ju primerjali. Primerjavo prikazuje preglednica 3.

Preglednica 3: Primerjava rešitev, najdenih po 1. in 2. načinu

Število seštevancev	Zaporedje vsot (2. način)	s_n	Opis (1. način)
2	3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	$2n + 1$	Liha števila
3	6, 9, 12, 15, 18, 21, ...	$3n + 3$	Večkratniki 3
4	10, 14, 18, 22, 26, 30, ...	$4n + 6$	Večkratniki 4, povečani za 2
5	5, 10, 15, 20, 25, 30, ...	$5n + 10$	Večkratniki 5
6	21, 27, 33, 39, 45, 51, ...	$6n + 15$	Večkratniki 6, povečani za 3
7	28, 35, 42, 49, 56, 63, ...	$7n + 21$	Večkratniki 7

S primerjavo obeh načinov reševanja je vsem učencem uspelo določiti splošni člen zaporedja vsot.

Sklep

Ponujena problemska situacija je zelo enostavna za izvedbo; ne zahteva nobenih posebnih učnih pripomočkov, nobene tehnologije in tudi ne posebnega predznanja učencev. Izvedemo jo lahko kot del katere koli učne ure in zanjo ne porabimo posebno veliko časa. Pa vendar se je izkazalo, da je naloga kljub enostavnosti dosegla velik učinek – in to z več vidikov:

- motivacijski vidik: učenci (sedmega in devetega razreda) so nalogo vzeli kot izziv, za katerega ne potrebuje posebnega matematičnega predznanja;
- sistematično iskanje rešitev: učenci so želeli čim hitreje priti do rešitve, zato so se samoiniciativno lotili sistematičnega iskanja rešitev, preglednega zapisovanja delnih ugotovitev ipd.;

- diferenciacija: naloga je bila primerna za učence različnih matematičnih sposobnosti. Vsak od učencev je prišel do ugotovitev in bil zaradi tega na neki način uspešen in zadovoljen;
- doseženost ciljev: zadani cilji so bili doseženi.

Zanimiva se mi je zdela tudi primerjava med reševanjem problemske naloge v sedmem in devetem razredu, pri kateri se je pokazalo, da:

- so učenci sedmega razreda bistveno manj obremenjeni z matematiko kot učenci devetega razreda;
- obravnavana snov učence nevede in nehote usmerja k reševanju nalog: več znanja sicer pomeni na eni strani večjo moč, na drugi pa lahko tudi večjo negotovost in večjo »ukalupljenost«.

Te se najlažje rešimo prav z reševanjem problemskih nalog in nalog, povezanih z življenjskimi situacijami, ki jim prenovljeni učni načrt namenja precejšnjo pozornost. Če učitelji učence navajamo na reševanje problemov, na sistematično iskanje rešitev, na opazovanje vzorcev, iskanje posplošitev, ima naše delo gotovo učinek, pa čeprav se morda pokaže na daljši rok. Tudi to se je potrdilo pri primerjavi med sedmim in devetim razredom: devetošolci so pokazali večjo sistematičnost, postavljali so boljša raziskovalna vprašanja, pri iskanju rešitev pa so si (nekateri od njih) pomagali z znanjem o vzorcih.

Pri učni uri mi je bil zelo všeč sklepni del. Ko smo strnili različne načine razmišljanja učencev, njihove različne ugotovitve in jih pogledali z različnih vidikov, smo uvideli celoto. Skupno celoto, ki so jo prispevali vsi učenci: tako tisti z manj kot tisti z več matematičnega znanja.

Literatura in viri

- 1 Kmetič, S. (2013). *Problemske naloge. Interno gradivo.*
- 2 *Summing Consecutive Numbers. NRICH Enriching mathematics. Dostopno na: <http://nrich.maths.org/507> (15. 3. 2013).*
- 3 Žakelj, A. idr. (2011). *Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (1. 12. 2011).*

2.3.10 Kvadrati na geoplošči

Katja Kmetec, Osnovna šola Brinje, Grosuplje

Avtor	Katja Kmetec
Šola	Osnovna šola Brinje, Grosuplje
Učna tema	Geometrija, Druge vsebine
Učni sklop	Pitagorov izrek, Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Razred	8. (3. raven zahtevnosti)
Potreben čas za izpeljavo	skupno 1 ura (vendar vpeto v 5-urni dan dejavnosti)
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • raziskujejo, razumejo in povezujejo znanja različnih matematičnih vsebin, • uporabljajo Pitagorov izrek pri reševanju matematičnih problemov.
Standardi	Učenec/učenka: • uporablja formule ravninske geometrije pri reševanju problemov, • prepozna odnose med količinami in jih uporablja v problemskih situacijah.
Oblike in metode dela	• delo v skupinah
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• geoplošče in elastike, • učni listi
Potrebno predznanje	• Pitagorov izrek
Dejavnosti učencev	• iskanje kvadratov, katerih ploščina je naravno število do 30, na geoplošči (brez poznavanja Pitagorovega izreka); • samostojno odkrivanje Pitagorovega izreka (odkrivanje, kaj velja za kvadrate, ki jih konstruiramo nad stranicami pravokotnega trikotnika, Pitagorov izrek; računanje neznane stranice v pravokotnem trikotniku; računanje poljubne stranice ali kvadrata nad stranico v pravokotnem trikotniku); • ponovno iskanje kvadratov, katerih ploščina je naravno število do 30, na geoplošči
Faze učnega procesa	1. Uvod 2. Reševanje problemske naloge brez ustreznega predznanja 3. Samostojno odkrivanje Pitagorovega izreka v okviru »pitagorejske šole« (medpredmetna povezava z matematiko, zgodovino in glasbeno vzgojo) 4. Ponovno reševanje problemske naloge, tokrat z ustreznim predznanjem 5. Primerjava najdenih rešitev 6. Preverjanje pridobljenega znanja

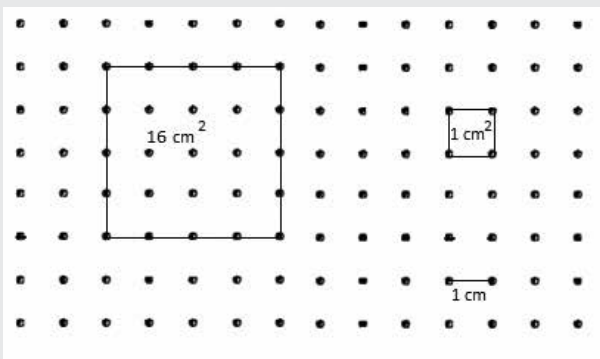
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Učenci so se naloge lotili z zanimanjem in s ciljem, da najdejo vse iskane kvadrate. Pri tem se je izkazalo: • da so učenci vajeni kvadratov v običajni legi; • da težko najdejo kvadrate, katerih stranica ne poteka čez točke na geoplošči; • ko so učenci videli, kako lahko pri reševanju problema uporabijo Pitagorov izrek, so se reševanja problema samoiniciativno lotili zelo sistematično.
Opombe, dodatna opazanja, posebnosti	Idejo za problemsko nalogo sem dobila na spletnem naslovu Sekewey Squares: http://www.teachmaths-inthinking.co.uk/activities/skewey-squares.htm.
Možnosti za razširitev problema*	• iskanje kvadratov, katerih ploščina je naravno število, manjše ali enako 100; • iskanje kvadratov, katerih ploščina je poljubno naravno število.
Domače delo*	Izziv: Kako bi na številski premici upodobili naslednja števila: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$
Prilagoditve za učence z učnimi težavami*	Učenci odkrijejo manj kvadratov.

Uvod

V okviru dneva dejavnosti so se učenci za pet šolskih ur preselili v pravo pitagorejsko šolo ter v njej med upoštevanjem strogih pitagorejskih načel povezovali in uporabljali svoje znanje matematike, zgodovine in glasbe, predvsem pa samostojno odkrivali Pitagorov izrek.

Eden izmed problemov, ki so ga morali razrešiti, je bil ta:

Na sliki sta prikazana dva primera, kako smo ogradili kvadratno zemljišče, katerega ploščina je naravno število.¹



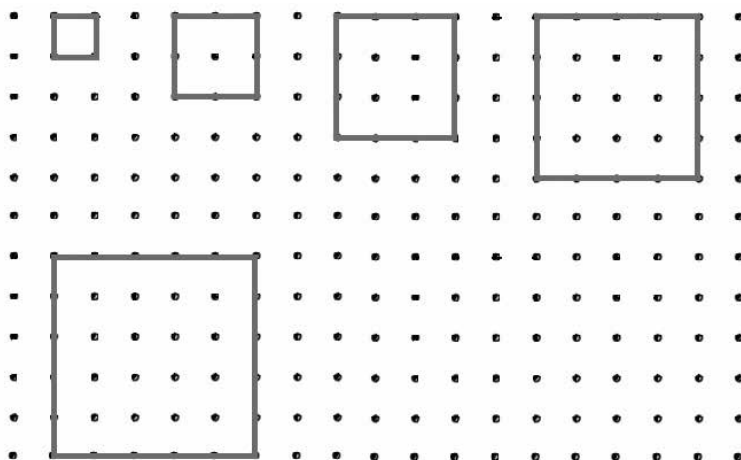
Poiščite vse kvadrate, katerih ploščina je naravno število, od vključno 1 do vključno 30.

Problem so učenci reševali dvakrat; prvič ob vstopu v pitagorejsko šolo, ko še niso slišali za Pitagorov izrek. Drugič pa ob koncu šolanja v tej šoli, tokrat opremljeni z ustreznim znanjem in razumevanjem Pitagorovega izreka.

Izvedba v razredu

Reševanje problemske naloge brez znanja Pitagorovega izreka

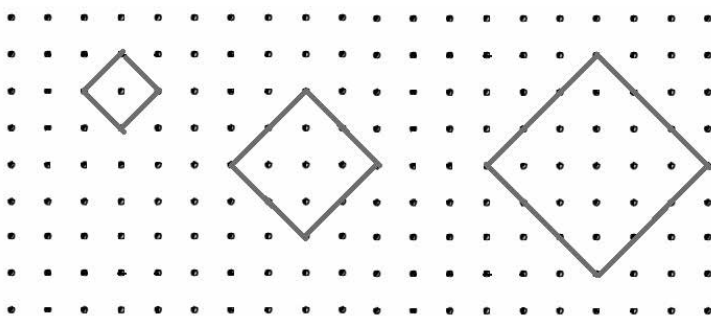
Učenci so reševali opisano problemsko nalogo v skupinah. V vsaki skupini so bili štirje učenci. Pri reševanju so si lahko pomagali z geoploščo in s priloženimi učnimi listi. Vse skupine so ogradile kvadrate, prikazane na sliki 1.



Slika 1: Najdeni kvadrati pred obravnavo Pitagorovega izreka.

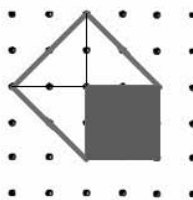
Kot je razvidno, so ogradili kvadrate, katerih stranica je naravno število.

Učno boljši učenci so našli še kvadrate, katerih stranica je večkratnik števila $\sqrt{2}$ (slika 2).



Slika 2: Najdeni kvadrati pred obravnavo Pitagorovega izreka – učno boljši učenci.

Svojo rešitev so utemeljili z znanjem o iracionalnih številih (slika 3):



Slika 3: Pojasnitev, kako vemo, da so ploščine sivih kvadratov naravna števila.

»Osenčeni kvadrat ima ploščino 4 kvadratne enote. Večji kvadrat ima dvakrat večjo ploščino, torej ima ploščino 8 kvadratnih enot.«

Drugih kvadratov (katerih ploščina bi bila naravno število, manjše od 30) učenci niso našli. Prepričani so bili, da jih dejansko ni več. Vse najdene kvadrate smo zapisali v preglednico na posebnem plakatu, ki je bil izobešen v »pitagorejski šoli« do konca dneva dejavnosti.

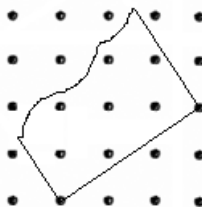
Samostojno odkrivanje Pitagorovega izreka

Učenci so nato s pomočjo učnih listov, na katerih so bile usmeritve, samostojno odkrivali Pitagorov izrek. V okviru tega so sami odkrili:

- kakšna je povezava med ploščinami kvadratov, ki jih konstruiramo nad stranica-mi pravokotnega trikotnika,
- kakšna je povezava med stranicami pravokotnega trikotnika,
- da Pitagorov izrek velja samo za pravokotne trikotnike.

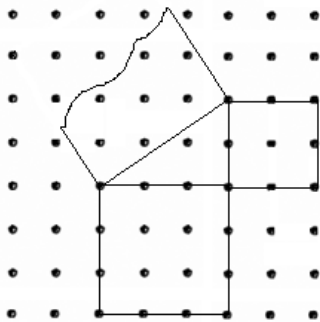
Naredili so nekaj primerov, pri katerih so morali bodisi izračunati manjkajočo stranico pravokotnega trikotnika oz. ploščino kvadrata nad stranico pravokotnega trikotnika.

Rešili so tudi naslednjo nalogo: na spodnji sliki (slika 4) je ostanek kvadrata. Kolikšna je bila njegova ploščina?



Slika 4: Ostanek kvadrata. Kolikšna je bila njegova prvotna ploščina?

Učenci so nalogo rešili brez posebnih težav; konstruirali so pravokotni trikotnik, katerega hipotenuza je stranica kvadrata (slika 5).



Slika 5: Konstrukcija pravokotnega trikotnika

Z upoštevanjem Pitagorovega izreka so ugotovili, da je bila ploščina prvotnega kvadrata

$$9 e^2 + 4 e^2 = 13 e^2.$$

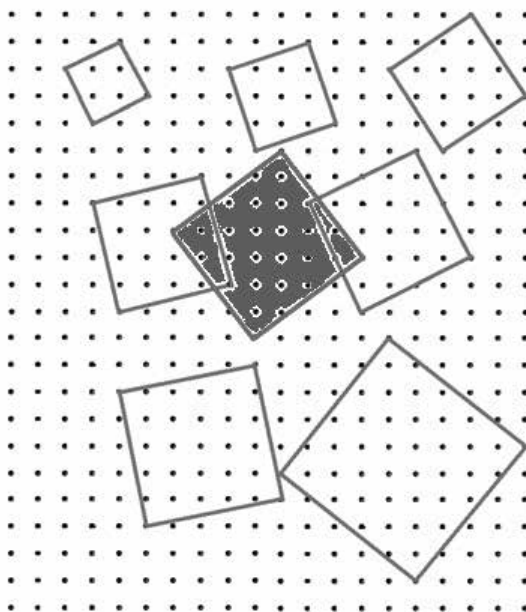
Ponovno reševanje problemske naloge, tokrat z ustreznim predznanjem

Prejšnja naloga je bila dejansko nekakšen namig učencem v smislu: obstajajo torej tudi kvadrati, katerih ploščina je naravno število, manjše od 30, a njihova stranica ni naravno število niti ni večkratnik $\sqrt{2}$. Kako torej poiskati vse takšne kvadrate? Koliko jih sploh je?

Učenci so se problemske naloge lotili najprej z naključnim iskanjem kvadratov, ki ustrezajo danemu kriteriju. Nato so se iskanja lotili sistematično: preiskali so, katera naravna števila do 30 dobimo kot vsoto dveh naravnih števil, ki sta obe popolna kvadrata:

$$1 + 4, 1 + 9, 1 + 16, 1 + 25, 4 + 9, 4 + 16, 4 + 25, 9 + 16.$$

Na ta način so nato brez težav našli iskane kvadrate (slika 6).



Slika 6: Najdeni kvadrati po obravnavi Pitagorovega izreka.

Kvadrat, označen s sivo barvo, ima ploščino 25 kvadratnih enot (skladni kvadrat so našli že prej).

Primerjava najdenih rešitev

Učenci so dopolnili plakat in primerjali, koliko kvadratov so našli sprva, koliko pa ob koncu. Sprva so našli kvadrate s stranicami 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, torej kvadrate, katerih stranice so naravna števila. Učenci z boljšim znanjem so našli tudi kvadrate s stranicami $\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm, torej kvadrate, katerih stranice so večkratniki števila $\sqrt{2}$. Po obravnavi pa so vsi učenci našli tudi kvadrate s stranicami $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{10}$ cm, $\sqrt{13}$ cm, $\sqrt{17}$ cm, $\sqrt{20}$ cm, $\sqrt{26}$ cm in $\sqrt{29}$ cm.

Sklep

Problemska naloga se mi je zdela zanimiva; ravno prav težka, da pritegne učence, hkrati pa dovolj enostavna, da se je učenci ne ustrašijo in se je lotijo z zanimanjem in veseljem. V pouk bi jo lahko vključila na različne načine (kot uvod v Pitagorov izrek, samo po obravnavi Pitagorovega izreka, pri obravnavi iracionalnih števil ...). Za opisani način sem se odločila iz več razlogov:

- z namenom opazovati razliko med prvotnim in drugotnim iskanjem kvadratov na geoplošči;
- zanimalo me je, ali bodo učenci opazili povezavo med Pitagorovim izrekom in dano nalogo;
- videti sem želela, kako se bodo učenci lotili naloge, koliko rešitev bodo našli, kako jih bodo iskali.

Zato sem nalogo namenoma zastavila v obliki problema. Število najdenih kvadratov pred obravnavo Pitagorovega izreka in po njej me ni presenetilo, razveselilo pa me je, ko sem videla, kako sistematično so se učenci lotili iskanja kvadratov. Po pregledu izpolnjene preglednice 1 menim, da so bili zastavljeni cilji doseženi. Nalogo bom z veseljem uporabila in nadgradila pri obravnavi, kako na številski premici ponazorimo korene nekaterih števil.

Priloga



Učni list 1: Problem kvadrati

2.3.11 Koza

Marija Magdič, Osnovna šola Turnišče

Avtor	Marija Magdič
Šola	Osnovna šola Turnišče
Učna tema	Matematični problemi in problemi z življenjsko situacijo
Učni sklop	Krog – utrjevanje
Razred	9.
Potreben čas za izpeljavo	20 minut
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • rešijo besedilne naloge v povezavi s krogom, • uporabljajo geometrijsko znanje za reševanje življenjskih problemov.
Standardi	Učenec/učenka: • uporablja formule ravninske in prostorske geometrije pri reševanju problemov, • pri reševanju besedilnih nalog uporablja bralne strategije in besedilno nalogo opiše z matematičnim jezikom, • življenjske situacije prikaže z modeli, • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja.
Oblike in metode dela	• individualna oblika dela
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• učni list
Potrebno predznanje	• ploščina kroga in njegovih delov
Dejavnosti učencev	• reševanje problema
Faze učnega procesa	• reševanje problema, • analiza reševanja

Uvod

Del matematične ure so učenci za ponavljanje in utrjevanje namenili reševanju problema z življenjsko situacijo. Glede na to, da gre za devetošolce (v učni skupini učno zmožnejših učencev), ki so znanje o krogu in njegovih delih spoznali že v osmem razredu in to znanje že obvladajo, jim za samo reševanje nisem dala posebnih navodil.

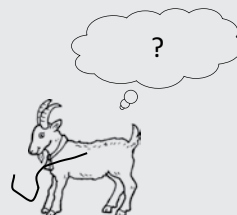
Reševanje problema

Učencem sem razdelila učni list s problemsko nalogo.

Reši nalogo.

Koza je privezana na 6-metrsko vrv, ki je pritrjena na zunanji vogal hleva. Hlev je 5 m dolg in 4 m širok. Okoli hleva je trava.

- Kolikšna je površina travnika, na katerem se lahko pase koza?
- Zapiši izraz za izračun površine travnika.



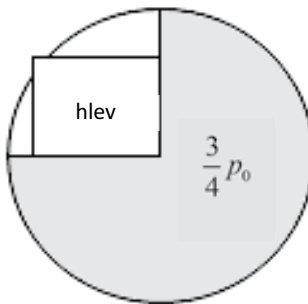
Nalogo so reševali individualno, sama pa sem spremljala njihovo delo. Naloga se jim je zdela zabavna, pritegnila jih je in lotili so se je zavzeto.

Najprej so si narisali skico. Velika večina kar v merilu: pravokotnik, nato pa še krožnico s središčem v oglišču pravokotnika.

Glede na besedilo jim ni bilo težko ugotoviti, da gre za ploščino. Tretjina učencev je najprej izračunala ploščino pravokotnika (površino hleva), verjetno brez posebnega razmišljanja. Sami so hitro ugotovili, da jim to ne pomaga pri rešitvi in da bo treba poiskati drugo pot. Drugi so se naloge lotili bolj premišljeno.

V nadaljevanju so ugotovili, da je največji del travnika ki ga koza lahko popase, enaka ploščini krožnega izseka. Ker se niso spomnili formule za ploščino krožnega izseka, me je eden izmed učencev prosil, če jim jo lahko povem. Povedala sem jim, da če se ne spomnijo formule, naj si pomagajo kako drugače.

Izračunali so ploščino kroga s polmerom 6 cm, nato pa še $\frac{3}{4}$ te ploščine. Prvi korak reševanja je prikazan na spodnji sliki.



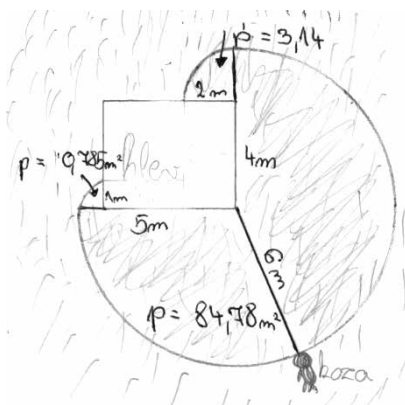
Slika 1: Prvi korak reševanja, kjer ni domišljen del travnika za hlevom in je na skici narisano napačno. (vir: lasten)

Nekoliko več razmišljanja je bilo treba za izračun površine preostalega dela travnika.

Nekaj učencev je tukaj naletelo na težave. Ena izmed učenek je površino travnika za hlevom določila tako, da je izračunala ploščino dveh kvadratov (eden s stranico 1 m, drugi s stranico

2 m), nekateri so ta del travnika kar izpustili. Tem sem pomagala z namigom, da naj razmislijo, kje se koza lahko pase za hlevom, ko pride do vogala, in naj to narišejo na skici. To jim je pomagalo, da so ugotovili, da je površina za hlevom enaka četrtini kroga.

V nadaljevanju je reševanje potekalo tekoče.



Slika 2: Učenec je v skico zapisal tudi delne rešitve. (avtor izdelka: učenec 9. razreda)

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \pi \cdot r^2 & p_2 &= \pi \cdot r^2 & p_3 &= \pi \cdot r^2 \\
 p_1 &= 3,14 \cdot 6^2 & p_2 &= 3,14 \cdot 2^2 & p_3 &= 3,14 \cdot 1^2 \\
 p_1 &= 3,14 \cdot 36 & p_2 &= 3,14 \cdot 4 & p_3 &= 3,14 \cdot 1 \\
 p_1 &= 113,04 \text{ m}^2 & p_2 &= 12,56 \text{ m}^2 & p_3 &= \frac{1}{4} \cdot 12,56 \\
 p_{i1} &= \frac{3}{4} \cdot 113,04 & p_{i2} &= \frac{1}{4} \cdot 12,56 & p_{i3} &= 0,785 \text{ m}^2 \\
 p_{i1} &= 84,78 \text{ m}^2 & p_{i2} &= 3,14 \text{ m}^2 & & \\
 p &= 84,78 + 3,14 + 0,785 \\
 p &= 88,705 \text{ m}^2 \\
 \text{Goza lahko popa 88,705 m}^2 \text{ travnika.}
 \end{aligned}$$

Slika 3: Primer rešene naloge učenca. (avtor izdelka: učenec 9. razreda)

Ob koncu reševanja so učenci zapisali še izraz za izračun površine travnika.

$$p = \frac{3}{4} p_1 + \frac{1}{4} p_2 + \frac{1}{4} p_3$$

Ker gre za skupino učno zmožnejših učencev, jim ta del ni povzročal težav in so ga samostojno zapisali.

Refleksija

Ob koncu dela smo se pogovorili o nalogi. Povedali so:

- Naloga ni bila težka, treba je bilo narisati dobro skico in si znati situacijo predstavljati.
- Tisti, ki so se naloge lotili z računanjem površine hleva, so povedali, da so v prvem hipu mislili, da jo bodo potrebovali, in so jo samodejno izračunali. V nadaljevanju pa so ugotovili, da te ploščine ne potrebujejo.
- Če si nisi dobro predstavljal situacije, si pozabil na del za hlevom.
- Naloga je bila zanimiva.
- Hlev bi bil lahko ograjen in bi se koza lahko pasla kjer koli.

Take vrste nalog učence pritegnejo in jih motivirajo za delo, kar se je izkazalo tudi pri današnjem delu. Menim, da so dosegli zastavljene cilje. Večina učencev je nalogo rešila samostojno, znašli so se v novi situaciji, nekaj pa jih je potrebovalo manjšo pomoč, da so prišli do rešitve. Glede na sestavo skupine bi pričakovala popolno samostojnost pri reševanju. Ta se prav gotovo povečuje ob večkratnem vnašanju problemskih situacij v pouk, saj ob tem pridobivajo izkušnje z različnimi pristopi k reševanju, hkrati pa ponavljajo in utrjujejo matematična znanja.

Literatura in viri

- 1 *Nabor problemskih nalog. Interno gradivo PRS (10. 1. 2013).*
- 2 *Žakelj, A. idr. (2011). Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (1. 12. 2011).*
- 3 *www.zrss.si/projektiess/skladisce/...za.../didakticni_zakelj.doc (18. 5. 2012).*

2.3.12 Vsota zaporednih naravnih števil

Ana Kodelja, Osnovna šola Kanal

Avtor	Ana Kodelja
Šola	Osnovna šola Kanal
Učna tema	Linearne enačbe z eno neznanko
Učni sklop	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Razred	9.
Potreben čas za izpeljavo	30 minut
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • rešijo odprti problem, • razčlenijo problemsko situacijo in postavijo raziskovalna vprašanja, • zapišejo enačbo, s pomočjo katere poiščejo rešitev, • analizirajo rešitve.
Standardi	Učenec/učenka: • opiše problemsko situacijo z enačbo in jo reši, • uporablja bralne strategije in nalogo opiše z matematičnim jezikom, • uporablja matematiko pri reševanju problemov.
Oblike in metode dela	• individualna
Potrebno predznanje	Učenec/učenka: • zna zapisati in rešiti enačbo, • pozna pravila za deljivost.
Dejavnosti učencev	• samostojno reševanje naloge
Faze učnega procesa	• uporaba znanja
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Učitelj: Ali je naloga postavljena tako, da dosežem želeni cilj? Učenec: Kaj sem novega spoznal, kje bom lahko uporabil?

Primer problemske naloge

Katera zaporedna naravna števila imajo vsoto 171?

Nalogo so reševali učenci devetega razreda, ki obiskujejo pouk na najvišji ravni zahtevnosti. Poučujem jih drugo leto, doslej se s problemskimi nalogami pri pouku matematike še niso srečali. Nalogo sem našla v stari zbirki nalog (Jože Žabkar, Vaje in naloge iz matematike za VIII. razred osnovne šole, DZS, Ljubljana, 1971). Zanimalo me je, kako se bodo učenci lotili reševanja, saj naloga ne določa, koliko zaporednih naravnih števil iščemo. Za to skupino učencev je značilno, da so na splošno zelo motivirani za delo. Tudi v tem primeru je bilo tako. Še posebej se je dvignilo zanimanje za nalogo, ko so ugotovili, da naloga nima ene same rešitve.

V nadaljevanju bom opisala, kako je potekalo reševanje naloge.

Reševanje naloge

Učenci so nalogo reševali individualno, vendar je med njimi prihajalo da interakcij, ker so nekateri precej razmišljali na glas. Tako, da smo nekaj časa reševali tudi skupaj.

Vprašanja učencev: *Koliko zaporednih naravnih števil iščemo?*

Nekaj učencev se je zadovoljilo z rešitvijo, da gre za števili 85 in 86, kar so rešili s sklepanjem.

Rešitev: *To sta števili 85 in 86.*

Pri večini se je takoj postavilo vprašanje, ali je to edina možnost. Na tej točki sem jih prepustila raziskovanju. Zahtevala sem le, da pri reševanju uporabljajo algebrske zapise in enačbe.

Vsi učenci so nato preizkušali, *ali obstajajo tri zaporedna naravna števila, katerih vsota je 171.*

Rešitev so iskali samostojno, pomagali so si z enačbo.

Postopek reševanja:

1. število: x
2. število: $x - 1$
3. število: $x + 1$

Enačba: $x + x - 1 + x + 1 = 171$

$$x = 171 / : 3$$

$$x = 57$$

Rešitev: *Ta tri števila so 56, 57 in 58.*

Ob reševanju te enačbe je eden izmed učencev na glas pomislil:

»Ker je 171 deljivo tudi z 9, bi lahko obstajalo 9 takih števil.«

Drugi učenci so začeli razpravljati, ali je to mogoče. Izračunali so količnik $171 : 9 = 19$. Ugotovili so, da je število 19 dovolj veliko, da obstajajo še preostala števila.

Rešitev so poiskali po vzorcu od prej:

Rešitev: *Ta števila so 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23.*

Katera zaporedna naravna št. imajo vsoto 171

število: x zaporedna št.: $x, x+1, x+2, \dots$
 ali $x-2, x-1, x, x+1, x+2, \dots$

številki sta dve: $x, x+1$ prvo št. je 85 drago
 pa 86

$$x + x + 1 = 171$$

$$2x = 171 - 1$$

$$2x = 170 \quad |:2$$

$$x = 85$$

$$x + x - 1 + x + 1 = 171$$

$$3x = 171 \quad |:3$$

$$x = 57$$

prvo $x = 57$

drugo $x - 1 = 56$

tretje $x + 1 = 58$
 $\underline{171}$

$$171 : 9 = 19$$

$$\begin{array}{r} 171 : 9 = 19 \\ 81 \\ \hline 90 \\ \hline 81 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$x = 19$$

$$x - 1 = 18$$

$$x + 1 = 20$$

$$x - 2 = 17$$

$$x + 2 = 21$$

$$x - 3 = 16$$

$$x + 3 = 22$$

Slika 1: Zapiski učenca. (avtor izdelka: učenec 9. razreda)

Na tej točki sem učence spet pozvala, naj samostojno razmišljajo naprej in poskusijo priti do vseh rešitev. Reševali so individualno. Večina jih je nadaljevala z vprašanjem, ali obstajajo štiri taka števila. Ponovno so si pomagali z enačbo, reševanje pa je pokazalo, da nima cele rešitve. Tako so ugotovili, da taka rešitev ne obstaja.

Reševanje so nadaljevali doma. Prosila sem jih, da zapišejo nova raziskovalna vprašanja, s pomočjo katerih bodo prišli do drugih rešitev. Izkazalo se je, da nekateri niso našli več nobene rešitve, kar je bilo zame pričakovano, saj je po mojem mnenju ta naloga kar zahtevna za reševanje.

»Katera naravna zaporedna št. imajo vsoto 171«

-2 števili : 85, 86
 -3 števila : 56, 57, 58
 -4 števila :
 -5 števili :
 -6 števili :
 -7 števili :
 -8 števili :
 -9 števili : 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23
 -10 števili :
 -11 števili :
 -12 števili :
 -13 števili :
 -14 števili :
 -15 števili :
 -16 števili :
 -17 števili :
 -18 števili :
 -19 števili :

$171 : 6 = 28,5$
 $171 : 4 = 42,75$
 $171 : 7 = 24,428571$
 $171 : 5 = 34,2$
 $171 : 8 = 21,375$
 $171 : 9 = 19$
 $171 : 11 = 15,545454$
 $171 : 17 = 10,0588235$
 $171 : 19 = 9$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Slika 2: Primer rešitve. (avtor izdelka: učenec 9. razreda)

Navajamo še nekaj vprašanj učencev:

- Ali lahko število 171 zapišemo kot vsoto 19 (57) naravnih števil?

Vprašanje je nastalo na osnovi deliteljev števila 171. Ti so 1, 3, 9, 19, 57, 171.

Odgovor: Rešitev ne obstaja, saj bi v prvem primeru potrebovali 10 »naravnih predhodnikov« števila 9 oziroma 56 »naravnih predhodnikov« števila 3.

- Kako ugotoviti, katere možnosti še imamo?

Pozvala sem jih, naj pregledajo postopke reševanja, ki smo jih doslej uporabili. To smo opravili skupaj in ugotovili, da ni drugih rešitev.

Za liho število seštevancev smo ugotovili, da mora biti njihovo število delitelj 171, kar smo že raziskali. Za sodo število seštevancev pa smo zapisali enačbe in preverili, ali je rešitev lahko naravno število.

Sklep: Po analizi domačih nalog so prišli učenci do sklepa, da obstajajo tri rešitve, ki smo jih že navedli.

Refleksija

Ob tej nalogi sem prvič namerno spremljala, kako se bodo učenci lotili reševanja problemske naloge. Res je, da so jo reševali učno najbolj zmožni učenci (v skupini je 13 učencev), zato sem pričakovala, da bodo znali samostojno postaviti vsaj kakšno vprašanje. Ker pa so tako nalogo reševali prvič, sem dopustila, da so vprašanja postavljali naglas, nato pa so individualno iskali rešitve. Moram jih pohvaliti, ker so bili vsi zelo zavzeti.

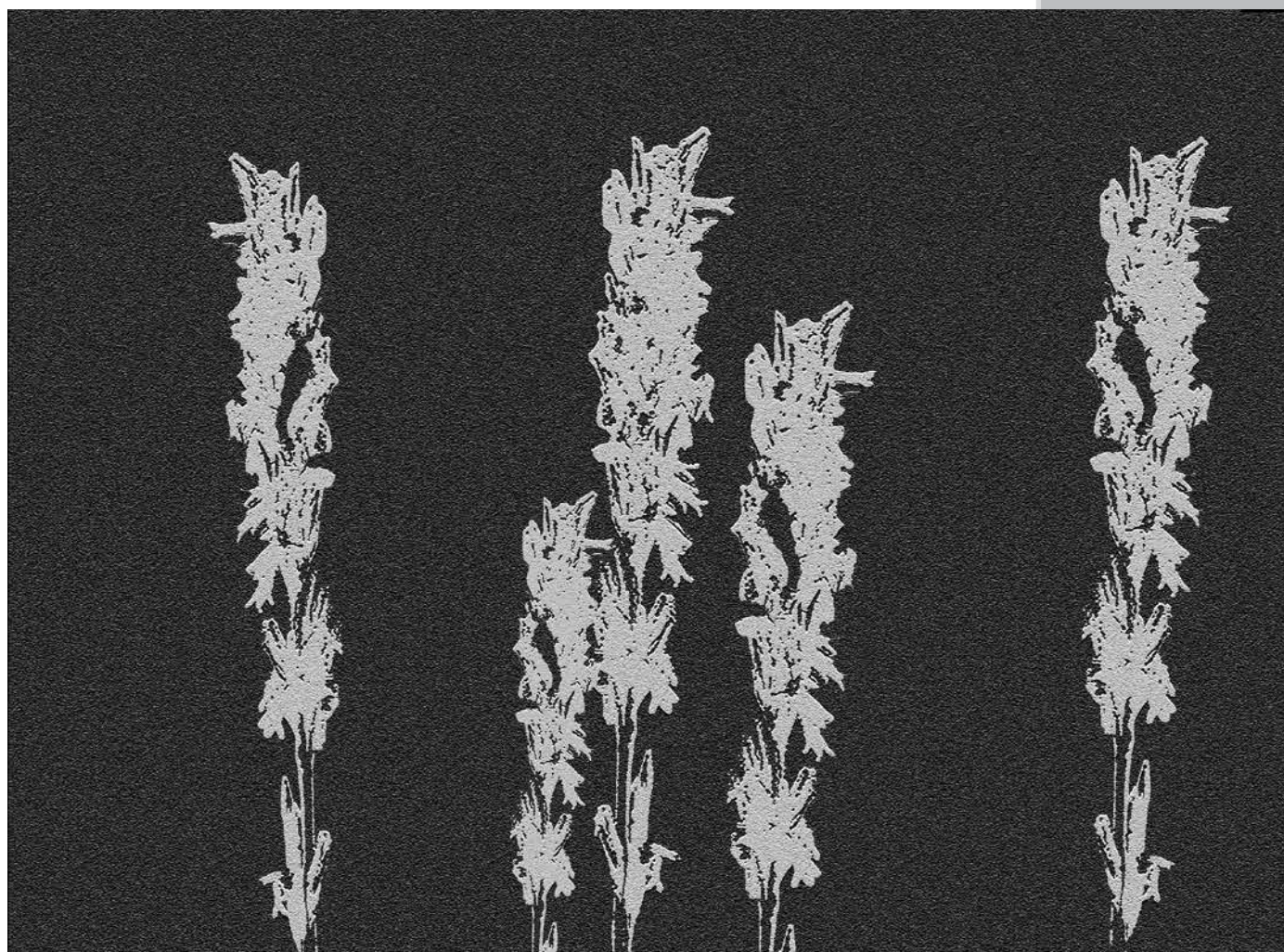
Menim, da je treba pri pouku iskati primerne trenutke, ko lahko učencem damo njihovim zmožnostim primerno problemsko nalogo. Tako jih bomo spodbujali k samostojnemu razmi-

šljanju in raziskovanju tudi na matematičnem področju. Preden se tega lotimo, pa mora biti med učencem in učiteljem ter med učenci vzpostavljena primerna stopnja razumevanja in spoštovanja. Tako bomo zagotovili, da ne bo pravilno in napačno rešenih nalog oz. pravih in napačnih vprašanj. Učence pri tem naučimo, da so vprašanja lahko le dobra ali manj dobra, nikakor pa ne pravilna in napačna. Naj bo opisana naloga še komu v spodbudo.

Literatura in viri

- 1 Žabkar, J. (1971). *Vaje in naloge iz matematike za VIII. razred osnovne šole*. Ljubljana: DZS.

Vzorci



3.1 Vzorci

Dr. Alenka Lipovec, Pedagoška fakulteta Maribor

Prepoznavanje in nadaljevanje vzorca je pomemben proces predalgebrskega razmišljanja in kot tak predstavlja osnovo novih pristopov k algebri, ki se pojavlja v učnih načrtih za matematiko v večini držav. Preprost primer rastočega vzorca, ki je uporaben za mlajše šolarje, so »šotori« iz vžigalic $\Delta \Delta\Delta \Delta\Delta\Delta\Delta$. Otrokom bo pomagal pri odkrivanju relacije »podvojitve«, druge možnosti za »pomnoži z dve«.

3.1.1 Velike ideje

Navedimo jedrne ideje tega področja.

- Vzorci se redno pojavljajo v matematiki. Vzorce najdemo v konkretnih fizičnih ali geometrijskih situacijah, pa tudi v aritmetiki.
- Isti vzorec lahko najdemo v različnih pojavnih oblikah.
- Vzorce lahko prepoznamo, nadaljujemo in na podlagi njih izpeljujemo posplošitve na verbalni ali simbolni ravni.
- Simbolizem, posebej simbolizem enačb in spremenljivk, se uporablja za izražanje posplošitev.

Vertikalna učna pot razvoja vzorcev se razteza od ponavljajočih se vzorcev preko rastočih do zaporedij števil in funkcij.

3.1.2 Ponavljajoči se vzorci

Ponavljajoče vzorce lahko začnejo otroci preiskovati že v vrtcu. Uporabljali bomo naslednje termine. *Gradnik vzorca* je tisti del vzorca, ki se ponavlja. Sestavljen je iz najmanj dveh *elementov*. Primer: krog-kvadrat-trikotnik (gradnik), krog-kvadrat-trikotnik (gradnik), krog (element gradnika)-kvadrat (element gradnika)-trikotnik (element gradnika). Za lažje in hitrejše branje vzorcev elemente gradnika lahko nadomestimo s črkami. Tako bi zgoraj naveden primer zapisali takole: ABC, ABC, ABC ... Zapis ABC bomo imenovali *shema vzorca*. Izrazov gradnik, element in shema vzorca ne uporabljamo pred otroki in jih od otrok ne zahtevamo. Namesto gradnik bomo rekli *nekaj*, kar se ponavlja, ali *del*, ki se ponavlja, namesto element pa bomo poimenovali *konkretni* predmet, zvok, gib, sliko, simbol; shemo poimenujemo npr. *zapis s črkami*.

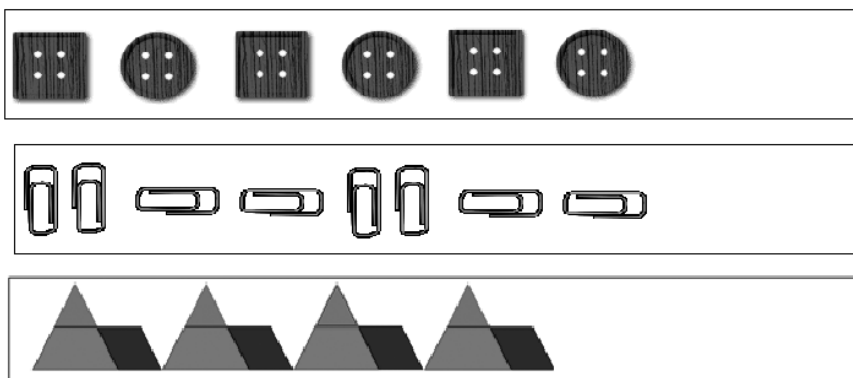
Kadar je le mogoče, naj dejavnosti z vzorci vključujejo konkreten material, kajti s tem otrokom omogočamo varno okolje za nadaljevanje vzorca in eksperimentiranje. Nekatera gradiva za vrtec ali nižje razrede osnovne šole ponujajo slikovne ponazoritve vzorcev kot npr. niz pobarvanih krožcev. Naloga običajno zahteva, da otrok nadaljuje barvanje. Obstajata dve bistveni razliki med tako podano nalogo in dejavnostjo, ki vključuje konkretni material (npr. nizanje barvnih kock). Prva in najpomembnejša razlika je v tem, da pri slikovni predstavitvi dejavnost v ozadju skriva idejo »pravilno« in »napačno«. Če otrok barva »napačno«, je (sprememba barve) radiranje dokaj težavno in lahko pri otroku vzbudi občutke nesposobnosti. Konkretni material

po drugi strani otroku omogoča metodo poskusa in napake. Druga slabost slikovne predloge je omejenost s prostorom, kajti otroci vzorca ne morejo nadaljevati preko vnaprej predvidenega prostora. Večina otrok uživa v uporabi konkretnih materialov, kot so npr. barvne kocke, gumbi ali stekleni biseri. Večkrat jih tako lahko opazujemo, kako nizanje nadaljujejo zelo dolgo, pri čemer nastanejo vzorci, ki se raztezajo čez cele učilnice (slika 1).



Slika 1: Primer ponavljajočih se vzorcev. (Vir: Golob, A. (2007). Celostni pristop pri matematiki - vzorci skozi glasbo, diplomsko delo, Maribor: Pedagoška fakulteta.)

Koncept ponavljajočih se vzorcev in način, kako vzorec nadaljujemo, lahko celotnemu razredu predstavimo na več različnih načinov. Vzorce lahko oblikujemo vnaprej (npr. razne simbole pritrdimo v niz na tablo, na vrvico obesimo predmete, ki oblikujejo vzorec ...). Glasbeni vzorci, npr. »do-mi-mi; do-mi-mi«, so namenjeni temu, da se celoten razred pridruži nadaljevanju. Gibalni vzorci, kot so npr. »gor-dol« v igri dan in noč ali pa gibanje treh elementov pri gibanju rok v nizu »gor-stran-stran-dol, gor-stran-stran-dol« so lahko dobrodošel uvod. Ko je osnovna ideja ponavljajočega se vzorca jasna, učenci začnejo delati v manjših skupinah, ki bo osnova učinkovitejšemu učenju koncepta. V skupinah naj nadaljujejo vzorce, oblikovane iz preprostih materialov: gumbov, kock, zobotrebcev, ploščic ... Za vsako skupino materialov učitelj na papirnat trak (približno 5 cm x 30 cm) nariše nekaj ponovitev gradnika. Otroci morajo uporabiti konkreten material, ponoviti že narisan niz in ga nadaljevati. Za vsako skupino materialov potrebujemo od 10 do 15 predlog; za celoten razred zadošča 6 do 8 takih skupin oz. materialov (slika 2).



Slika 2: Primer: predlog ponavljajočih se vzorcev, narisanih na karton. Vsak gradnik se ponovi v celoti vsaj dvakrat, pri čemer se niz ne prelomi na sredi gradnika. Kot material uporabimo gumbe, sponke, ploščice za vzorčke. (Vir: Avtorica oblikovala po idejah raznih avtorjev, npr. Van de Walle, J. (2004))
Opomba: Ponavljajoči vzorec AABB, AABB ... učenci pogosto abstrahirajo v AB, AB ...

Začetni cilj učenja ponavljajočih se vzorcev je pravzaprav prepoznati gradnik, ki se ponavlja. Gradnik, včasih imenovan tudi jedro, je najkrajši niz elementov, ki se ponavlja. Ponovno opozorimo na to, da je v nižjih razredih pomembno, da se gradnik ponovi v celoti in da se prikazan niz ne prelomi sredi gradnika. Če je npr. gradnik -oo, lahko na traku prikažemo npr.-oo-oo (dve ponovitvi gradnika), da se izognemo dvournemu podajanju naloge, pa raje ne narišemo -oo-oo- ali -oo-. Ko otroci dosežejo stopnjo prepoznavanja gradnika, lahko sestavljajo tudi svoje vzorce. Verjetno se bo treba pogovoriti o tem, ali je sestavljena struktura sploh »vzorec«, kajti beseda ima v naravnem jeziku drugi pomen. Če otrok na paličico naniza kvader, kocko in stožec ter trdi, da je zgradil vzoreček, mu je treba razjasniti, da ni naredil ponavljajočega se vzorca (ker pač ni ničesar, kar se ponavlja). Otroci radi sami določajo pravila, medtem ko oblikujejo gradnik, še posebej takrat, ko se to igro igrajo s sošolcem, ki mora odkriti pravilo, po katerem je vzorec sestavljen.

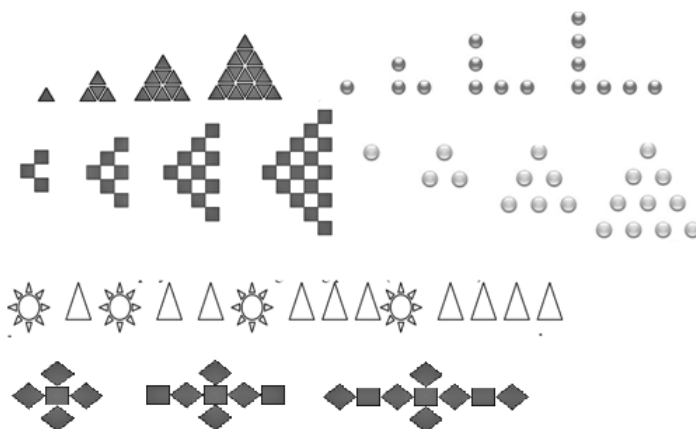
Pomemben korak v razvoju koncepta je, da otroci zaznajo, da sta dva vzorca, ki sta zgrajena iz različnega materiala, pravzaprav isti vzorec. Otroci naj bi zaznali neodvisnost strukture od uporabljenega materiala. V ta namen jim lahko damo trak, ki npr. prikazuje vzorec s sponkami, in drug material (npr. gumbi). Lahko pa izvedemo tudi klasifikacijsko dejavnost, kjer učenci iščejo trakove, ki prikazujejo vzorce z enako strukturo, toda različnim materialom. Kot preverjanje, ali so klasificirali pravilno, lahko uporabimo branje vzorca s črkami. Otroci naj bi torej ugotovili, da je vzorec »modra-rdeča-rdeča, modra-rdeča-rdeča« enak kot vzorec »sedi-stoj-stoj, sedi-stoj-stoj«. S tem pridobimo osnovo za ugotovitev, da imajo lahko zelo različne situacije podobne matematične lastnosti. Otrokom lahko pri teh ugotovitvah pomagamo z vpeljevanjem shem oz. simbolnih zapisov vzorcev z npr. črkami (seveda bi lahko uporabili katere koli druge dogovorjene simbole npr. številke). Vzorce npr. lahko beremo AB AB AB ..., AAB AAB AAB ..., ABC ABC ABC ... (slika 2).

Učitelj lahko za vpeljavo shem uporabi npr. prikaz od šestih do sedmih vzorcev, ki jih najprej z uporabo črk preberejo. Polovica razreda nato zapre oči, medtem ko druga polovica prebere vzorec, ki ga pokaže učitelj. Nato odpro oči in poskušajo ugotoviti, kateri vzorec je bil prebran. Če imata dva vzorca med prikazanimi enako strukturo, se lahko razvije med učenci zelo učinkovita razprava.

Kot končni korak na tej etapi, ki naj bi se zaključila po prvem VIO, od otrok pričakujemo, da predvidijo, kateri element se bo pojavil na npr. 15. mestu. Od njih pričakujemo tudi utemeljitev svoje odločitve, npr. pri gumbih bi lahko bila utemeljitev drugošolca »kvadraten bo, ker je vsak drug kvadraten in se začne s kvadratnim«, utemeljitev četrtošolca pa bi že vključevala »kvadraten bo, ker je 15 liho število«. Dejavnosti napovedovanja so verjetno prevelik izziv za prvi razred, zato z njimi začnemo v drugem razredu. Vedno pa smo pozorni na to, da lahko svojo napoved preverijo s tem, da nizajo do zahtevanega mesta. Po več dejavnostih bodo otroci ugotovili, da ima dolžina gradnika pomembno vlogo, in povezali vsebino z večkratniki, ki so jim v tretjem razredu pri napovedovanju lahko v veliko pomoč. Če na primer pri vzorcu, ki je predstavljen s sponkami, vprašamo po 34. elementu, lahko razmišljajo takole: »Dolžina ponavljanja je 4, štejem 1-2-3-4, 5-6-7-8, 9-10-11-12, štejem torej po 4; prvi je vedno za eno več, kot so večkratniki števila 4, drugi za 2 več, tretji za 3 več, četrti pa je natanko večkratnik števila 4; ker je 34 za 2 več, kot je večkratnik števila 4, bom prišel na drug element; 34. element bo torej sponka, ki stoji pokonci«.

3.1.3 Rastoči vzorci

Učenci lahko raziskujejo tudi vzorce, ki iz koraka v korak rastejo (večkrat gre za naraščajoča aritmetična zaporedja). Pravzaprav take vzorce že poznajo, saj že od prvega razreda naprej ob spoznavanju števil štejejo »s korakom« in tako gradijo naraščajoče vzorce, kot npr. 1, 3, 5, 7 ..., ki je prikazan z zelenimi krožci (slika 3).



Slika 3: Rastoči vzorci. (Vir: Avtorica oblikovala po idejah raznih avtorjev, npr. Van de Walle, J. (2004).)

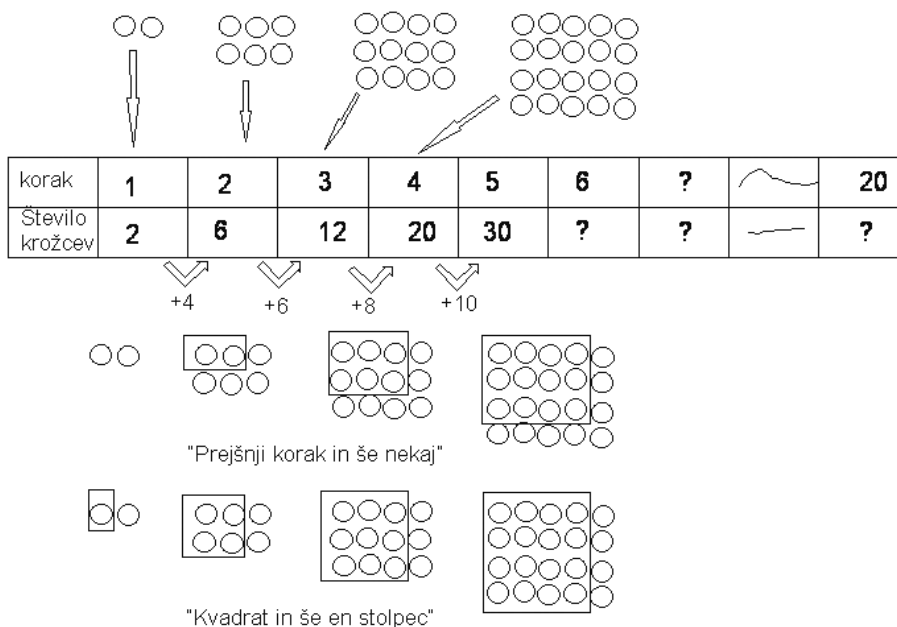
Teh vzorcev naj bi učenci ne le nadaljevali, ampak težišče prenesemo na posplošitve oz. algebrske relacije, ki bodo učencem povedale, kakšni bodo vzorci v nadaljevanju niza. Ti vzorci nakazujejo koncept funkcije in so lahko uporabljeni kot vstopna točka za to izjemno pomembno matematično idejo.

Še vedno vzorce gradimo iz konkretnih materialov in smo posebej pozorni na to, da se učenci počutijo varne ob tem, ko gradijo vzorce in govorijo o tem, kako jih lahko logično nadaljujemo. Vključujemo tudi slikovne ponazoritve, kjer lahko uspešno uporabljamo slike na karo papirju. Učenci naj poskušajo ugotoviti, kako se vsak naslednji korak v nizu razlikuje od predhodnega. Pri rumenih krožcih npr. vedno dodamo še eno vrstico, v nasprotju s spodnjim modrim vzorcem, ki predstavlja širjenje.

Najprej bodo učenci zaznali rekurzivno pravilo tipa »je za dva več« ali »v vsaki vrstici je eden več« in podobno. V tej fazi lahko začnemo vzorce preglednicirati in usmerimo pozornost v število elementov, ki nastopajo v vsakem izmed členov slikovnega zaporedja. Znova se vprašamo, kako ugotoviti, koliko elementov je potrebnih za npr. petindvajseti člen zaporedja. Skupaj ugotovimo, da rekurzivno pravilo ne daje odgovora, zato iščemo splošno pravilo, ki poveže člen s korakom ali mestom slike v nizu. Rastoči vzorci namreč vključujejo tudi numerično komponento oz. število elementov v vsakem koraku. Slika 4 prikazuje možnost pregledniciranja. Ena izmed vrstic v preglednici je vedno oznaka število korakov, druga pa, koliko objektov potrebujemo za gradnjo v tem koraku.

Pogosto vzorci naraščajo tako hitro, da je smiselno zgraditi oz. narisati le prvih pet do šest korakov. Naloga učencev je zato predvideti število objektov, potrebnih v 20. koraku. Izziv je seveda v tem, da ugotovimo, ali je to mogoče, ne da bi izpolnili prejšnjih 19 stolpcev preglednice. Učenčeva predvidevanja morajo biti podkrepljena z argumenti. Gre za naravno nadaljevanje

dejavnosti predvidevanja iz ponavljajočih se vzorcev. Iskanje dvajsetega ali celo stotega vnosa predstavlja vstopno točko v iskanje relacij, ki jih bodo učenci pozneje razumeli kot primere funkcij, ko bodo zmožni najti neodvisno spremenljivko in pripadajoče število v vzorcu.



Slika 4: Preglednica in dve različni relaciji v slikovnem rastočem vzorcu. (Vir: Avtorica oblikovala po idejah raznih avtorjev, npr. Van de Walle, J. (2004).)

3.1.4 Iskanje relacij

Ko učenci naredijo preglednico, sta pred njimi dve reprezentaciji vzorca: tista, ki so jo ustvarili z risanjem ali z materiali, in številska verzija s preglednico. Pri iskanju relacij se bodo nekateri učenci osredotočili na preglednico, nekateri pa na slikovni vzorec. Pomembno je, da se učenci zavedo, da mora relacija, ki jo bodo našli, obstajati v obeh reprezentacijah. Če torej najdejo relacijo v preglednici, jih spodbudimo, da pogledajo, kakšno vlogo igra v slikovni različici.

Vzorci iz koraka v korak: rekurzivni opis

Večina učencev bo najprej našla relacijo med sosednjima korakoma. To relacijo lahko zapišemo pod preglednico, tako kot vidimo na sliki 5. V tem primeru lahko število v naslednjem koraku določimo tako, da dodamo sodo število številu objektov v prejšnjem koraku. Opis relacije, ki govori o odnosu med dvema sosednjima korakoma, bomo imenovali *rekurzivni opis*. Vsakič, ko imamo zapis s preglednico, je zelo pomembno, da relacijo najdemo tudi v slikovni obliki ali pa z realnimi objekti. Na sliki 4 lahko opazimo, kako sta dve možni interpretaciji relacije »prištej sodo število« prikazani s pomočjo uokvirjanja.

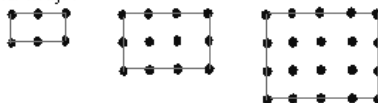
Vzorci iz koraka v število objektov: funkcijski opis

Rekurzivni opis relacije iz koraka v korak bo skoraj zagotovo prva stvar, ki jo bodo učenci opazili. Pri iskanju objektov, potrebnih v stotem koraku, učencem ta opis pomaga le, če izpolnijo vseh devetindevetdeset prejšnjih korakov. Kmalu postane jasno, da bi bila povezava med zaporedno številko koraka in številom objektov v njem uporabnejša. Tak opis relacije bomo imenovali *funkcijski opis*. Kot pomoč pri iskanju tega prepisa ne moremo navesti nobene učinkovite metode. Nekateri učenci bodo morda doživeli iluminacijsko fazo s tem, da se bodo preprosto poigrali s števili in se spraševali: »Kaj naj storim s številom 5, da dobim število 30? Ali uporaba tega pravila na številu 4 da število 20?« Večini učencev pomaga opazovanje pravilnosti v konkretnem prikazu vzorca. Slika 4 prikazuje uokvirjen kvadrat, pri čemer ima vsak naslednji kvadrat stranico za en krožec daljšo od predhodnega. Lahko se vprašamo po funkcijskem opisu odnosa, ki določa tole podmnožico vzorca. V danem primeru je dolžina kvadrata enaka kot število, ki določa korak. Prav tako je število objektov v stolpcu desno enako številu, ki določa korak. Na tej točki je lahko zapisovanje številskih izrazov, ki opisujejo posamične korake, učinkovita dejavnost. Prve štiri korake (slika 3) lahko npr. opišemo kot $1^2 + 1$, $2^2 + 2$, $3^2 + 3$ in $4^2 + 4$. Kar precej eksperimentiranja je treba, da učenci v skupinah najdejo opise, ki so povezani s številom, ki določa korak. Učitelj ne sme postati vznemirjen in izgubiti vere v sposobnosti svojih učencev. Iskanje relacij je treba spodbujati, četudi traja dlje kot predvideno eno šolsko uro, kajti gre za temeljno idejo, ki se razvija dalj časa.

Prehod iz vzorcev na funkcije in spremenljivke

Ko učenci odkrijejo številski izraz, ki funkcijsko opisuje relacijo, jim učitelj lahko pomaga pri prehodu na klasičen funkcijski zapis z uporabo posebnega simbola (npr. oglatih oklepajev) pri zapisu števila, ki opisuje korak (slika 5).

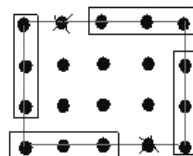
Koliko pik je na liniji?



Korak	1	2	3	4
Št.pik	6	10	14	1

$$\begin{aligned} [1] \cdot 4 + 2 \\ [2] \cdot 4 + 2 \\ [3] \cdot 4 + 2 \\ [4] \cdot 4 + 2 \end{aligned}$$

$$n \cdot 4 + 2$$



Slika 5: Iskanje funkcijskega opisa v vzorcu. (Vir: Avtorica oblikovala po idejah raznih avtorjev, npr. Van de Walle, J. (2004).)

Ob opazovanju takega zapisa vidimo, da se število v oglatih oklepajih spreminja, vse drugo pa ostaja enako. Zato lahko število v oglatem oklepaju nadomestimo s črko oz. oznako za spremenljivko ter tako pridobimo splošno formulo.

Literatura in viri

- 1 Golob, A. (2007). *Celostni pristop pri matematiki - vzorci skozi glasbo. Diplomsko delo. Maribor: Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta.*
- 2 Orton, J. (2001/02). *Algebra, vzorci in motivacija. Matematika v šoli, 9 (1-2), 14-26.*
- 3 Van de Walle, J. (2004). *Elementary and middle school mathematics. Teaching Developmentally. NY: Pearson.*

3.2 Vzorci v raziskavi TIMSS

Silva Kmetič, Zavod RS za šolstvo

Vzorci v raziskavah TIMSS za osnovno šolo so pomemben element preverjanja. V raziskavi TIMSS 2011 je bilo z vzorci objavljenih pet nalog za četrty razred in štiri naloge za osmi razred, nekatere zelo kompleksne.

V prispevku bomo analizirali naloge, interpretirali nekatere dosežke učencev ter posamezno nalogo nadgradili z vprašanji ali z analogno različico naloge in s tem pokazali, kako lahko kompleksno razvijamo cilje povezane z vzorci in matematičnimi vsebinami.

3.2.1 Vzorci v četrtem razredu

Glede na delitev znanja v okviru raziskave TIMSS je bilo v četrtem razredu od sedmih vprašanj eno s področja poznavanja dejstev in postopkov, dve sta bili uvrščeni v kognitivno kategorijo sklepanje, ostala pa so bila umeščena v uporabo znanja.

Objekti v vzorcih:

1. slike fizičnih objektov: liki z vžigalicami,
2. geometrijski modeli: liki s kvadratkami, vzorci s krožci,
3. naravna števila.

Primer 1: Nadaljevanje vzorca (Vir: TIMSS 2011, str. 24)

Miha mora iz vžigalic sestaviti vzorec iz likov od 1 do 4.

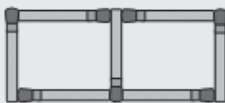
Liki 1, 2 in 3 so prikazani spodaj.

Za lik 1 potrebuje štiri vžigalice, za lik 2 potrebuje sedem vžigalic, za lik 3 pa deset vžigalic.

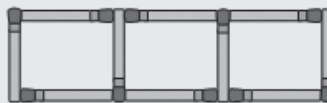
Vsakič, ko sestavi naslednji lik v vzorcu, uporabi isto pravilo.



1



2



3

Koliko vžigalic bo potreboval za lik 4?

Odgovor: _____

Omenjamo dva možna načina razmišljanja ob reševanju dane naloge. Učenci lahko odgovorijo na osnovi ugotovljenega pravila za pripadajoče številsko zaporedje (4, 7, 10 ...) ali pa na osnovi pravila o izgradnji naslednjega lika (četrti lik je za en kvadratale daljši), ki ga opišejo s številom dodanih ali pa prešteti vžigalic. Vsako naslednje število je za 3 večje, torej je četrti število 13. Druga možnost: Učenec sestavi četrti lik (ki je za en kvadratale daljši) in prešteje vžigalice. Iz odgovora učenca ne moremo sklepati, na kateri način je učenec razmišljal.

Isto nalogo lahko dopolnimo z naslednjimi vprašanji:

- *Nariši deseti lik.*
- *Opiši, kako si razmišljal.*
- *Zapiši pravilo za nadaljevanje vzorca z besedami.*
- *Koliko vžigalic potrebuješ za 10. (15., 100.) lik?*
- *V osmem razredu lahko spodbujamo posploševanje.*
- *100-tega lika ne moremo risati, lahko pa se vprašamo, kako bi izračunali potrebno število vžigalic.*
- *Zapišite pravilo s simboli. Črka n naj pomeni n -ti lik.*
- *Opiši pravilo za sestavljanje likov iz vžigalic na slikah in upoštevaj orientacijo vžigalic.*

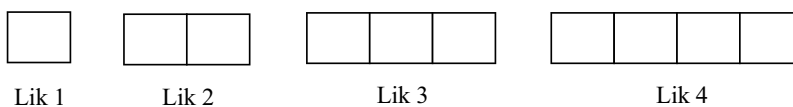
Nalogo lahko podamo s preglednico o številu vžigalic v posameznem liku. S tem lahko učno situacijo diferenciramo ali individualiziramo. Z dano preglednico ponudimo način razmišljanja in osiromašimo učno situacijo pomembnih miselnih korakov.

Iz naloge lahko naredimo nalogo izbirnega tipa. Dane odgovore črpamo iz pogostih napačnih odgovorov učencev, ki jih povežemo z vzroki za napake.

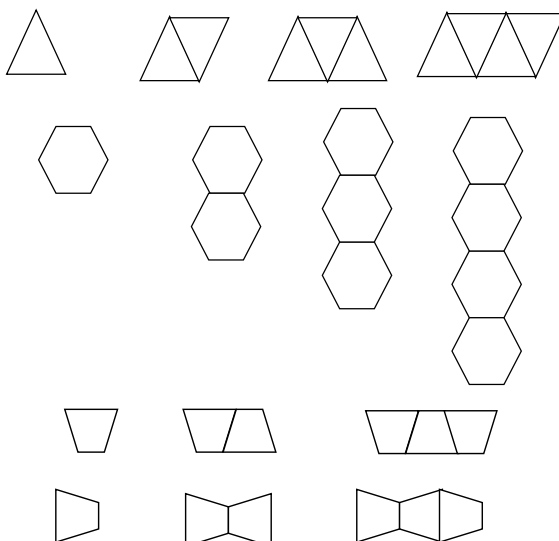
Isto nalogo lahko povežemo z drugimi pojmi: npr. s ploščino in z obsegom.

Like z vžigalicami lahko nadomestimo s kvadrati in ustrezno spremenimo besedilo.

Definiramo dolžinsko enoto in sprašujemo po obsegu ali ploščini likov, ki so sestavljeni iz kvadratkov.



Kvadratke lahko zamenjamo z drugimi enakostraničnimi liki in postavljamo enaka ali podobna vprašanja:



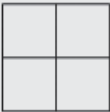
Vse enakostranične objekte lahko sestavimo tudi z vžigalicami. Zanimivo je opazovati razliko v uspešnosti reševanja, če npr. pri isti obliki objekta enkrat učence sprašujemo po številu potrebnih vžigalic, drugič pa po obsegu. V čem je razlika?

Primer 2: Induktivni sklep (Vir: TIMSS 2011, str. 64)

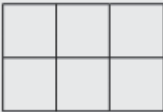
Boštjan je zlagal kvadratke na naslednji način.



1. lik



2. lik



3. lik

A. Nariši 5. lik.

B. Koliko kvadratkov bi potreboval Boštjan za 16. lik ?

Odgovor: _____

Naloga podobno kot prejšnja kombinira vizualni geometrijski vidik in številski opis, ki tokrat ni vsebovan v besedilu naloge. Učenci rišejo bližnji element (peti lik) in bolj 'oddaljenega' (16. lik), kjer si ne morejo pomagati s strategijo nadaljevanja, ampak morajo uporabiti splošnejšo strategijo sklepanja. Vprašanje B lahko preoblikujemo v: *Kolikšna je ploščina lika, če je ploščinska enota 1 kvadratega?* S tem v nalogo pripeljemo še en matematični pojem.

Tudi v tem primeru lahko gradimo oblike z vžigalicami in sprašujemo po številu vžigalic, nato povežemo nalogo s pojmom ploščina in obseg. Primerjamo pojme in rezultate. Spodbujamo zapise pravih z besedami in posplošitev za npr. 52. lik oziroma za n -tega.

Druga možna vprašanja:

- V katerem koraku je lik zgrajen iz 50 (98 ...) kvadratkov?
- Kateri lik po vrsti ima ploščino 100 ploščinskih enot (kvadratkov)?
- Ali lahko na enak način zgradimo lik iz 67 kvadratkov? Odgovor pojasni.
- Obseg prvega lika je 6 dolžinskih enot. Koliko je obseg četrtega (10., 15., 40.) lika?
- Kateri lik po vrsti ima obseg 100 (22, 48, 50)?

Primer 3: Na poti do funkcijskega opisa vzorca (Vir: TIMSS 2011, str. 79)

Zgoraj je prikazano zaporedje štirih slik.

A. Dopolni spodnjo tabelo za 4. sliko.

Slika	Število krožcev
1	1
2	3
3	5
4	

B. Če bi zaporedje nadaljevali s 5. sliko, iz koliko krožcev bi bila sestavljena 5. slika?

Odgovor: _____

C. Če bi zaporedje slik še nadaljevali, iz koliko krožcev bi bila sestavljena 10. slika? (Ne riši slik!)

Odgovor: _____

Naloga z uvedbo preglednice v vprašanju A posredno vpeljuje pojem spremenljivk in učencu ponuja sistematično razmišljanje tako v primeru nadaljevanja zaporedja kot v primeru induktivnega sklepa. Naloga preverja z vprašanjem B uporabo, s C pa sklepanje.

Tudi v tem primeru lahko sprašujemo po ,bolj oddaljenem' členu, besednem opisu in posplošitvi. Ker npr. 100. slike ne moremo risati, lahko osmislimo pomen formul, s pomočjo katerih pa lahko izračunamo število kroglic, ki bi jih potrebovali pri ustvarjanju slike.

Druga možna vprašanja in razširitve:

- Na katerem mestu je zgrajena slika iz 101 krožca?
- Če na vsaki sliki krožec na vrhu pobarvaš, koliko kroglic je v eni »veji« 40. slike?

Učencem, ki so zmožni posploševanja, pa lahko ponudimo naslednjo različico vprašanja C ali pa ga dodamo kot D:

Različica vprašanja C

- C. Obkroži število krožcev na n -tem mestu.
- a) $2n + 1$
 - b) $2n$
 - c) $2(n + 1)$
 - d) $2n - 1$

Poglejmo si še nalogi s števili.

Primer 4: Nalogi s številskimi zaporedji (Vir: TIMSS 2011, str. 76)

Ela je po pravilu „prištej 4“ ustvarila zaporedje. Zaporedje je začela z 1. Katero je Elino zaporedje?

- (A) 1, 4, 8, 12, 16
- (B) 1, 4, 16, 64, 256
- (C) 1, 5, 9, 12, 16
- (D) 1, 5, 9, 13, 17

Če bi nadaljevali zaporedje števil 3, 6, 9, 12, katero od naslednjih števil bi bilo še v tem zaporedju?

- (A) 26
- (B) 27
- (C) 28
- (D) 29

Prva preverja razumevanje podanega pravila z besedami, ki ga učenec izkaže z iskanjem zaporednih funkcijskih vrednosti, pri drugi pa je treba najti 'bližnji' člen danega številskega zaporedja (funkcijsko vrednost) po prepoznanem pravilu.

Prva naloga je s področja poznavanja dejstev in postopkov, druga pa s področja uporabe znanja.

Vprašali bi še lahko, kateri člen v zaporedju je iskani člen, torej po neodvisni spremenljivki. Za četrti razred so funkcijski pojmi preverjani na intuitivni ravni, prav tako kot so tudi razvijani.

Iz vseh predhodnih nalog lahko sestavimo podobne naloge, kot sta pravkar prikazani nalogi primera 4.

Rezultati raziskave TIMSS kažejo, da je raven sklepanja, to je sposobnost izvesti induktivni sklep, pod 50 odstotki in uporaba znanja nad 50, kar je iz razvojnega vidika logično.

3.2.2 Vzorci v osmem razredu

Glede na delitev znanja v okviru raziskave TIMSS je bilo v osmem razredu v štirih nalogah z vzorci vseh vprašanj devet, ki preverjajo različna znanja, eno s področja poznavanja dejstev in postopkov, preostala so uvrščena v kognitivno kategorijo sklepanje, kamor spadata induktivni sklep in posploševanje. Rezultati potrjujejo razvojno teorijo. Učenci osmega razreda izkazujejo zmožnost induktivnega sklepa kljub težavnosti in kompleksnosti vprašanj bistveno višje kot učenci četrtega razreda, nizki pa so izkazani dosežki na ravni posploševanja.

Objekti v nalogah z vzorci v raziskavi so na tej stopnji naravna števila, ulomki in dvobarvne ploščice. Začnimo z nalogo, ki ima vprašanje s področja poznavanja dejstev in postopkov.

Primer 5: Zaporedje z ulomki (Vir: TIMSS 2011, str. 172)

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$$

A. Kaj je naslednji člen tega zaporedja?

Odgovor: _____

B. Kaj bi bil 100. člen zaporedja?

Odgovor: _____

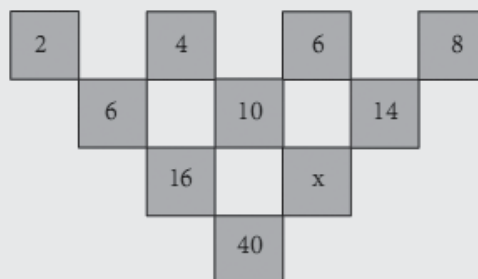
C. Kaj bi bil n -ti člen zaporedja?

Odgovor: _____

Cilja „zna nadaljevati zaporedje“ je področje poznavanja in učenci so dosegli 90,4 odstotne točke. Vprašanji B in C spadata na področje sklepanja; induktivni sklep je izvedlo pravilno 56,8 odstotka otrok, posplošitev pa le 15,2 odstotka. Kot vidimo, je posplošitve v osmem razredu zmožen zelo nizek odstotek otrok. Rezultati so podobni pri vseh preostalih primerih.

V razredu je po vprašanju A učence smiselno napotiti, da z besedami opišejo svoja opažanja. Verbalizacija jih usmerja v natančnejše opazovanje, ki lahko pomaga pri uvidu pravila za sestavo zaporedja. Ker je matematika predmet povezav med pojmi, bomo učence tudi napotili, da ulomke primerjajo s številom 1 in k opisu medsebojnega odnosa števila v števcu in števila v imenovalcu ulomka. Med danimi zaporednimi ulomki lahko opazujejo nov vzorec na razlikah ulomkov.

Primer 6: Številski trikotnik (Vir: TIMSS 2011, str. 124)



Določi vrednost x v zgornjem številskem vzorcu.

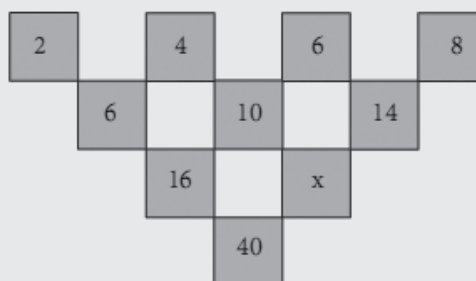
Odgovor: _____

Podobnih nalog je kar nekaj v slovenskih učbenikih. Rezultat pa kaže, da je bila naloga za učence trd oreh. Najti manjkajoče število, pomeni najti pravilo, za kar je treba opazovati „ravninski rastoči“ vzorec in sklepati.

Do rezultata se da prebiti vsaj na dva načina. Če opazujemo števila po vrsticah, ugotovimo, da se števila v prvi vrsti večajo za 2, števila v drugi vrstici za 4. Toda ne vemo, ali naj v naslednji vrstici števila povečamo za 6, to je za plus 2 glede na prejšnjo razliko ali za 8, kar je krat 2. Kako preveriti pravilnost izbrane odločitve?

Situacija je glede na izkušnje osnovnošolcev redka. Treba je vedeti, da mora biti ugotovljeno pravilo preizkušeno na vseh številih razen na številih v prvi vrstici piramide. Sklepamo lahko, da je bil nizek dosežek učencev (37,4 %) pridobljen tudi po drugi strategiji sklepanja, ker je po pravilu $16 + 8$ rezultat pravilen, pravilo pa ne velja za vsako število trikotnika brez števil prve vrstice. To nalogo lahko dopolnimo z vprašanjem, ki nam razkrije način sklepanja: Razloži, kako si prišel do rezultata.

Druga možnost odkrivanja razmišljanja je z nalogo izbirnega tipa, ki jo prav tako dopolnimo z zahtevo po razlagi razmišljanja.



Obkroži število, s katerim bi lahko nadomestili x v številski piramidi:

- a) 22
- b) 24
- c) 20
- d) 30

Razloži svojo izbiro.

Lahko pa sestavimo tudi drugi del vprašanja, ki preverja sklepanje, z nalogo izbirnega tipa, če imamo dovolj idej za ponujene odgovore.

Izberi, kako si sklepal: Število v piramidi sem dobil na naslednji način:

- a) Število 16 v tretji vrstici povečam za 6, ker se števila v prvi vrstici povečujejo za 2, v drugi vrstici za 4, v tretji za 6.
- b) Število 16 v tretji vrstici povečam za 8, ker se števila v prvi vrstici povečujejo za 2, v drugi vrstici za 4, v tretji za 8.
- c) Števila v 2., 3. in 4. vrstici dobim po istem pravilu: števila so vsota dveh števil v predhodni vrstici, ki sta v dotikajočih kvadratih iskanega števila.
- d) Drugo. Opiši.

Primer 7: Vzorec s ploščicami v dveh barvah (Vir: TIMSS 2011, str. 92)

Naloga ima v izvirniku skupaj pet vprašanj. Vsa so opredeljena na področje sklepanja, se pa po težavnosti in po dosežkih učencev bistveno razlikujejo.

Polona ima rdeče in črne ploščice. Iz njih sestavlja kvadratne like.

Lik 3 x 3 ima 1 črno
in 8 rdečih ploščic.



Č = črna ploščica
R = rdeča ploščica

Lik 4 x 4 ima 4 črne
in 12 rdečih ploščic.



Spodnja tabela prikazuje število ploščic za prve tri like, ki jih je sestavila Polona. Polona je za sestavljanje likov uporabila enak vzorec. Dopolni tabelo za lik 6×6 in lik 7×7 .

Lik	Število črnih ploščic	Število rdečih ploščic	Skupno število ploščic
3×3	1	8	9
4×4	4	12	16
5×5	9	16	25
6×6	16		
7×7	25		

Uporabi podatke iz prejšnje tabele in odgovori na naslednja vprašanja.

- A. Polona je sestavila lik, ki je imel **skupaj 64** ploščic. Koliko je bilo črnih in koliko rdečih ploščic?

Odgovor: _____ črnih ploščic _____ rdečih ploščic

- B. Polona je sestavila nov lik tako, da je uporabila 49 **črnih** ploščic. Koliko **rdečih** ploščic je Polona uporabila za ta lik?

Odgovor: _____ rdečih ploščic

- C. Nato je Polona sestavila še en lik tako, da je uporabila 44 **rdečih** ploščic. Koliko črnih ploščic bi Polona potrebovala, da bi dokončala še črni del lika?

Odgovor: _____ črnih ploščic

Vprašanja A, B, C povezujejo vrednosti treh funkcijskih pravil preko iste neodvisne spremenljivke. Dosežki učencev padajo v skladu z naraščanjem zahtevnosti vprašanja.

Naloge lahko poenostavimo, če ponudimo odgovore (naloge izbirnega tipa).

Zanimivo bi bilo postaviti še vprašanje »Kaj se zgodi, če zgradimo lik 2×2 ?«. Ali razširitev naloge vpliva tudi na posplošitev?

Polona bi rada dodala v tabelo vrstico, iz katere bi lahko ugotovila število ploščic za katerikoli lik. S pomočjo podatkov iz tabele na prejšnji strani dopolni vrstico za lik $n \times n$ v spodnji tabeli.

Lik	Število črnih ploščic	Število rdečih ploščic	Skupno število ploščic
$n \times n$	$(n - 2)^2$		

Naloga bi bila verjetno uspešneje reševana, če bi bila preglednica in posplošitev na istem listu in vprašanja A, B, C postavljena za preglednico z možnostjo zapisa induktivnega sklepa do ,bližnjega' in ,daljnega' člena ter s posplošitvijo.

Sklep

Iz nanizanih primerov za dve starostni stopnji vidimo, katere miselne dejavnosti so za učence težke in kako se uspešnost izvajanja posamezne dejavnosti izboljšuje s starostjo in izkušnjami otrok. Nakazali smo tudi, kako lahko iz posamezne ideje razvijemo podobne učne situacije, vključujemo različne matematične pojme oziroma vsebine s ciljem, da učenci uvidijo enako strukturo.

Literatura in viri

- 1 Japelj Pavešić, B. (2012). *Matematične naloge raziskave TIMSS: mednarodna raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja*. Ljubljana: Pedagoški inštitut.

3.3 Vzorci in jezik

Silva Kmetič, Zavod RS za šolstvo

Pomen besede vzorec

Vsak dan verjetno večkrat uporabimo besedo vzorec v različnih pomenih, npr. ko opisujemo blago ali pletenino. Beseda vzorec nastopa tudi kot primer s tipičnimi ali predpisanimi lastnostmi, npr. splošni osnutek za pismo ali prošnjo. Temu sledi naslednja raba, v pomenu vzeti vzorec za preiskavo, npr. vzorec živila. Zadnji pomen nas zapelje v statistiko, k besedni zvezi statistični vzorec. V Slovarju slovenskega knjižnega jezika si lahko pogledamo še ostalo pestro množico pomenov in rabe te besede.

V matematiki se beseda pojavlja kot oznaka za pojem, ki najbolje sovпада s prvo razlago pomena besede vzorec: *stvar, katere lastnosti, značilnosti se posnemajo, upoštevajo kot merilo: določiti, izbrati vzorec; delati predmete po vzorcu.*

Pri uporabi različnih gradiv lahko opazimo, da se tudi znotraj matematične stroke beseda vzorec pojavlja v različnih pomenih. Poskušali bomo ilustrirati, kako se lahko izognemo večpomenski rabi besede pri samem predmetu.

Jezik stroke

Opredelimo jezik, ki ga govorimo v pedagoški stroki učitelji matematike, kot jezik stroke. Ta jezik ni enak jeziku, ki ga v zvezi s predmetom razvijajo učenci. Naslednje pojme uporabljamo v jeziku stroke za lažje sporazumevanje v stroki. Neposredno z vzorci so povezani pojmi: *gradnik, element gradnika, shema gradnika, shema vzorca, pravilo, zaporedje, niz, matematično zaporedje, člen zaporedja, ponavljajoči se vzorci ali gradniki, rastoči vzorci oz. gradniki ...* Nekaj opredelitev posameznih pojmov srečamo v tem priročniku; npr. v prispevku A. Lipovec na str. 187. Ko pridemo do rastočih vzorcev, se spremeni pomen pojma gradnik. Raste 'gradnik' oziroma vzorec, ki je sestavljen iz enega elementa (krožec, kvadrat, trikotnik ...) ali iz različnih elementov, npr.: sonček in trikotnik (slika na str. 190, ki 'rasteta' po različnih pravilih). Konkretnim in slikovnim vzorcem praviloma lahko priredimo shemo ali številsko reprezentacijo oziroma rekurzivni ali funkcijski opis.

Jezik učencev

Ob pojmihi sistematično gradimo tudi matematični jezik. Vsakemu pojmu pripada ime (beseda) v naravnem jeziku in včasih dogovorjen simbol ali oznaka za imenovanje pojma. Pri tem naj se ne dogaja, da vpeljujemo samo nove besede za pojem, pojma pa sploh ne izgradimo. Ko se pogovarjamo z učenci, ko pišemo sporočila in napotke, je koristno premisliti in preveriti za vsako novo besedo, kako jo učenci razumejo, ali jo morda poznajo z drugačnim pomenom, kot je želeni matematični pomen.

Za jezik sporočanja učencem sta pomembni razumljivost in nedvoumnost povedanega in zapisanega.

Zato pri pouku sistematično in postopno gradimo jezik učencev, ker ga potrebujejo zaradi gradnje in izkazovanja znanja.

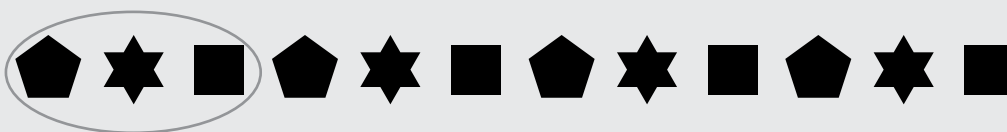
Problemi rabe jezika

Prikazani primeri ilustrirajo težavnost natančnega opisa različnih situacij pri nastajanju vzorca. Za učence je pomembno, da prepoznajo pravilo, prepoznavanje pa izkazujejo z nadaljevanjem vzorca, z dopolnjevanjem, z izdelavo vzorca, napovedjo, opisi na različnih stopnjah matematične abstraktnosti in na koncu s posplošitvami z besedami ali simboli.

Pri ponavljajočih vzorcih je pomemben element znanja o vzorcih pojem gradnika. V nekaterih nalogah mora učenec prepoznati za uspešno nadaljevanje vzorca gradnik. Gradnik je lahko sestavljen iz več elementov (glej str. 189).

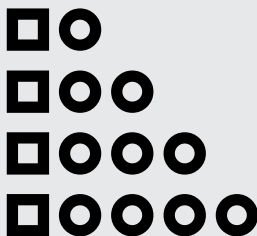
Primer 1: Prepoznavanje gradnika pri ponavljajočih vzorcih

Obkroži elemente, ki se ponavljajo.



V navodilu učencem beseda gradnik ni uporabljena. Učenec lahko nadaljuje vzorec tudi po drugačnem premisleku.

Primer 2: Pri 'ravninskih' rastočih vzorcih nimamo več enakega 'pojma gradnik'



Primer 3: Pravilo rasti v vrstičnem prikazu



V tem primeru bi lahko rekli, da raste gradnik.

Učitelj zaradi svojih bogatih izkušenj razume besedilo naloge, tudi če ni prav natančno in nedvoumno zapisano, saj zna nalogo rešiti že ob preletu slike ali besedila. Preberimo naslednjo nalogo:

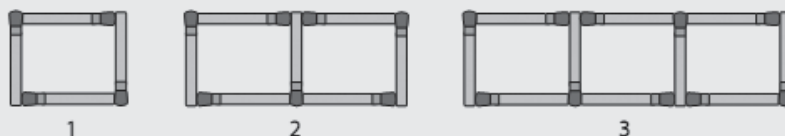
Primer 4: Vzorec v večpomenski rabi (Vir: TIMSS 2011, str. 24)

Miha mora iz vžigalic sestaviti vzorec iz likov od 1 do 4.

Liki 1, 2 in 3 so prikazani spodaj.

Za lik 1 potrebuje štiri vžigalice, za lik 2 potrebuje sedem vžigalic, za lik 3 pa deset vžigalic.

Vsakič, ko sestavi naslednji lik v vzorcu, uporabi isto pravilo.



Koliko vžigalic bo potreboval za lik 4?

Odgovor: _____

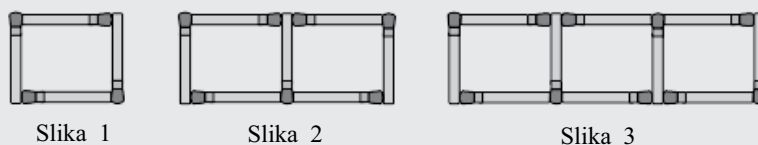
Kaj pomeni beseda lik v prvi povedi? Kaj pomeni beseda lik v drugi povedi? Kaj je tretji lik? Ali je beseda lik v tej nalogi v skladu z matematičnim pojmom lik? Kaj pomeni beseda vzorec v prvi in četrti povedi?

V prvi povedi pomeni kvadrat, v drugi pa različne like, kvadrat in dva različna pravokotnika (v tej starosti otroci še ne pojmujejo kvadrata kot pravokotnika). Od učenca se pričakuje, da opazuje največjega od možnih likov. Uporaba besede *lik* ne ustreza tudi z vidika matematike, ker v nadaljevanju naloge pri gradnji modelov pravokotne oblike, opazujemo tudi vžigalice v notranjosti največjega pravokotnika.

Beseda vzorec v besedni zvezi 'vzorec iz likov' je v besedilu lahko razumljena zelo splošno. Lahko si jo razlagamo kot lep vzorec, morda smo pozorni celo na to, kam so obrnjene kapice vžigalic, in študiramo vzorec tudi glede na to lastnost. V nadaljevanju je besedna zveza 'naslednji lik v vzorcu', ki kaže, da je beseda *vzorec* povezana s poznanimi pojmi, ki se skrivajo za besedami niz ali zaporedje.

Poskušajmo zapisati jezikovno in pojmovno nedvoumno navodilo. Ugotovili bomo, da je to zelo zahtevna naloga.

Miha mora iz vžigalic sestaviti like na poseben način, ki je prikazan na slikah z liki od 1 do 3.



Slika 1

Slika 2

Slika 3

Za lik 1 potrebuje štiri vžigalice, za lik 2 potrebuje sedem vžigalic, za lik 3 potrebuje deset vžigalic. Vsakič, ko sestavi Miha naslednji lik, uporabi isto pravilo.

Koliko vžigalic bo potreboval za lik 4?

Odgovor: _____

Beseda lik pomeni objekt zgrajen na poseben način in v nalogi ni besede vzorec. Ponovili smo ime vključene osebe. Pod slike likov bi lahko zapisali: lik 1, lik 2, lik 3. Namenoma smo uporabili besedo slika. Učenec mora v tem primeru povezati neizrečeno: Na sliki 1 je lik 1.

Primer kaže, da se lahko besedi vzorec izognemo. S tem naloga ni izgubila ne pomena ne jasnosti zapisanega.

Poglejmo še nekaj različnih jezikovnih rešitev.

Primer 5: Zaporedje likov brez besed zaporedje in vzorec

Opazuj obsege ali ploščine likov, ki so sestavljeni iz kvadratkov v vrsti. Predstavi svoje ugotovitve.



Lik 1



Lik 2



Lik 3



Lik 4

Primer 6: Vzorec kot zaporedje slik



1. slika



2. slika



3. slika



4. slika

Besedilo in vprašanja k sliki so na strani 200.

Primer 7: Jezikovna rešitev z besedo mesto

Vsak lik je sestavljen iz enakih kvadratkov, kot kaže slika.



Mesto 1



Mesto 2



Mesto 3

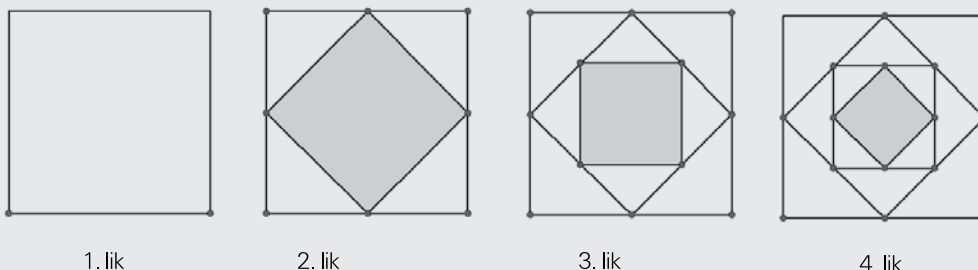


Mesto 4

Zelo pogoste so različne naloge, dane z vzorcem kvadratu včrtanih kvadratov.

Primer 8: Kaj pomeni beseda lik v nalogi?

Prvi lik je kvadrat z dano dolžino stranice. Ugotovi ploščino obarvanega dela na četrtem (n -tem) liku.



Izkušeni reševalec pravilno razume besedilo naloge, v nasprotnem primeru pa že na drugi sliki vidimo vsaj šest likov. Tudi opredelitev 'obarvan' lik predpostavlja, da beli deli niso barvni.

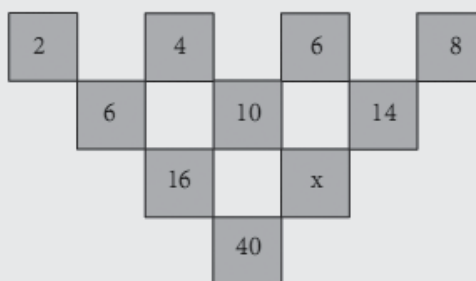
Primer 9: Besedi slika in pravilo (Vir: str. 277)

Oglej si spodnje tri slike in ugotovi pravilo, po katerem so nastale. Uporabi to pravilo in sestavi naslednjo sliko.



V nalogi so uporabljene samo znane besede za poznane pojme.

Primer 10: Pojem številskega vzorca zamenjamo z iskanjem pravila



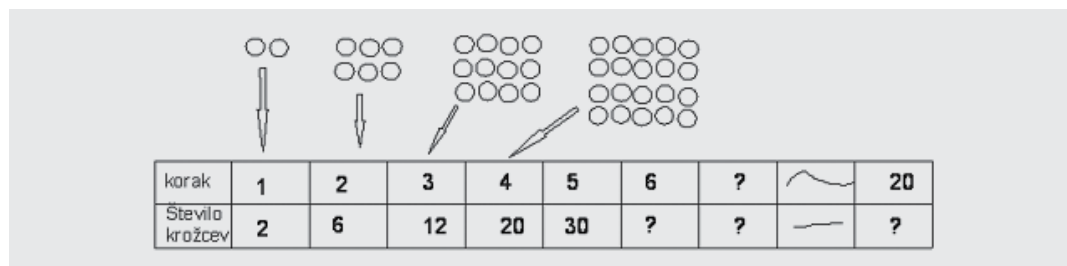
Določi vrednost x v zgornjem številskega vzorca.

Odgovor: _____

Napotek bi se lahko glasil:

Številski trikotnik je sestavljen po neznanem pravilu. Ugotovi to pravilo in izračunaj manjkajoče število x . Besedi vzorec smo se zlahka izognili.

Primer 11: Dinamični opis rasti opisuje beseda *korak* (Več na str. 191).



Pri razvoju funkcijskega opisa beseda *korak* pripomore k osredotočenju na proces, ki poveže dve spremenljivki, število krožcev v odvisnosti od številke koraka.

Naslednji primeri prikazujejo vzorce v splošnem vizualnem pomenu, npr. štetje po 3 ustvari v stotičnem kvadratu isti vizualni vzorec ne glede na prvo število.

Primer 12: Stotični kvadrat in preglednica množenja kot pripomočka za proučevanje vzorcev

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Štetje po 3 od 0.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Štetje po 3 od 1.

Presenetijo vzorci večkratnikov števil v tabeli množenja.

.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Večkratniki števila 3.

Z vzorci v preglednicah števil lahko bogatimo številske predstave in lastnosti pojmov, kot so večkratniki in posredno delitelji ter poštrevanko. Ob tem učenci nastale vzorce opisujejo, jih razlagajo, napovedujejo in utemeljujejo.

Zaključimo z vprašanjem: *Na kateri krivulji v tabeli množenja ležijo zmnožki, npr. 24?*

Sklep

Ker je raba terminologije na področju vzorcev za naše učno okolje neuhojena, naj bo prvi kriterij pri izbiri izrazov jasnost zapisanega glede na starost in izkušnjo otrok. Poskušamo se izogibati dvo- in več pomenski rabi iste besede ter nepotrebni uporabi „novih“ besed za pojme, ki niso nujno potrebni. Besedo vzorec lahko v komunikaciji z učenci nadomestimo z besedami in pojmi, ki so za učence ustrežnejši in predvsem dovolj jasni. Podobno velja za pojem in besedo gradnik (glej definicijo na strani 189).

Literatura in viri

- 1 Japelj Pavešić, B. (2012). *Matematične naloge raziskave TIMSS: mednarodna raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja*. Ljubljana: Pedagoški inštitut.
- 2 Orton, J. (2001/02). *Algebra, vzorci in matematika*. Matematika v šoli, 9 (1-2), str. 14-26.
- 3 Orton A. (1999). *Pattern in the teaching of mathematics*. London: Cassell.

3.4 Vzorci in vrednotenje

Silva Kmetič, Zavod RS za šolstvo

Vrednotenje izkazanega znanja je zahtevna naloga za učitelja, še posebej, ker se pričakuje strokovno veljavna in utemeljena ocena.

Ko vrednotimo vsebinsko, problemsko ali procesno znanje, se premalo zavedamo, da hkrati vrednotimo tudi sporočanje. Učenčevo znanje namreč ocenjujmo na osnovi njegovega sporočila, ki je pisno ali ustno oziroma izdelek. Ko vrednotimo izdelek učenca, ne moremo zagotoviti, da je zapisana ocena v skladu z njegovim dejanskim znanjem, saj je učenec lahko nespreten, npr. pri posredovanju, to je sporočanju svojega znanja. Slednje potrjuje smiselnost zahteve, da je treba znanje preverjati na različne načine, saj s tem damo učencem več različnih možnosti za izkazovanje svojega znanja. Izkazovanje znanja ni povezano samo z obliko ocenjevanja, ampak tudi z različnostjo postavljenih nalog, vprašanj oziroma problemskih izhodšč ter, npr. z drugo pomembno kategorijo, to je taksonomsko stopnjo naloge.

Učenje z vzorci in induktivno sklepanje

Pri ukvarjanju z vzorci učenci najpogosteje po opazovanju in nekaterih nepredvidenih spoznavnih dejavnostih sklepajo induktivno, posplošujejo in dokazujejo, vsebino vzorcev pa vežejo še na druga matematična področja.

Primer spremljanja miselnih dejavnosti za dani vzorec prikazuje preglednica 1. V preglednici nakazujemo iste dejavnosti na različnih podatkih. Podatki oz. objekti so lahko: zaporedje števil ali spremenljivk, konkretnih, simbolnih ali geometrijskih objektov ...).

Preglednica 1: Primer pripomočka za načrtno in sistematično spremljanje dosežkov učenca

	Zna nadaljevati dani vzorec*	Zna dopolniti vrzeli v danem vzorcu	Zna napovedati poljubni element v vzorcu**	Zna posplošiti***	Zna opisati, razložiti, utemeljiti, poiskati protiprimer ...
Številski vzorec					
Geometrijski ali slikovni vzorec					
Kombiniran (geometrijsko številski)					
Kombinacija števil in operacij					
...					

*Za besedo vzorec se lahko skriva zaporedje števil, geometrijski elementi ...

**Napoved poljubnega elementa ali člena je pomemben korak k posplošitvi in pomeni za učence večji miselni preskok. Učenec je lahko zmožen napovedati „bližnji“ element, ima pa težave z „bolj oddaljenim“.

***Posplošitev je lahko opisana z naravnim jezikom na različnih stopnjah matematične natančnosti in z različnimi simboli ali drugimi ponazoritvami.

Z dodatnimi zahtevami lahko ugotavljamo, ali učenec zna abstrahirano pravilo ubesediti (uporabo je izkazal z nadaljevanjem ali dopolnjevanjem vzorca) ali kako drugače predstaviti, npr. zna zapisati pravilo z matematičnimi simboli.

Podobno preglednico lahko izdelamo za različne starosti otrok. Če je preglednica izpolnjena v jeziku otrok, potem bi jo lahko uporabili za samovrednotenje.

Naslednji primeri ilustrirajo preglednico 1 glede na dano učno izhodišče.

Primer 1: Delo z danim številskim vzorcem

Nadaljuj dano zaporedje števil: 3, 6, 9, 12, ____, ____, ____

Dopolni dano zaporedje števil: 3, ____, 9, 12, 15, 18, 21. ____, 27 ...

Poišči deseto število: 3, 6, 9, 12 ...

Poišči 100. število: 3, 6, 9, 12 ...

Poišči n -to število: 3, 6, 9, 12 ...

Opiši z besedami pravilo, po katerem sestavimo:

- naslednje število,
- 99. število, če poznaš prvo število,
- n -to število, če poznaš prvo število.

Primer 2: Delo z danim številskim vzorcem in operacijo seštevanja

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Nadaljuj vzorec.

Zapiši pravilo za nadaljevanje z besedami.

Ali lahko na ta način dobiš število 121? Odgovor utemelji.

Rezultat poišči s sklepanjem.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots 19 = ?$$

Naloga je zahtevna, ker je spremenljivka, ki nam pomaga poiskati rezultat, na drugačen način 'skrita', torej ni korak dejavnosti, ampak število seštetih zaporednih lihih števil.

Alternativna naloga 1: Delo z danim številskim vzorcem in različnima operacijama, seštevanjem in množenjem

$$1 + 3 = 2 \cdot 2$$

$$1 + 3 + 5 = 3 \cdot 3$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \cdot 4$$

...

Alternativna naloga 2: Delo z danim številskim vzorcem in potencami.

$$1 + 3 = 2^2$$

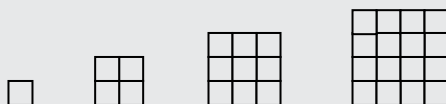
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

....

Primer 3: Geometrijski vzorec

Like sestavljamo iz enakih majhnih kvadratkov. Nariši naslednji lik po istem pravilu.



Nariši manjkajoči lik:



Najmanj koliko velik karo papir potrebuješ za 50. lik?

Vprašanje usmerja učenca v številski opis danega problema.

Primer 4: Kombinacija geometrijskega prikaza in opisa s števili

Like sestavljamo iz enakih majhnih kvadratkov. Sestavi preglednico, ki bo predstavila, s koliko kvadrati je sestavljen peti in s koliko deseti lik.

Napovej, koliko kvadratkov bi potreboval za izdelavo 45. lika?



1. lik

2. lik

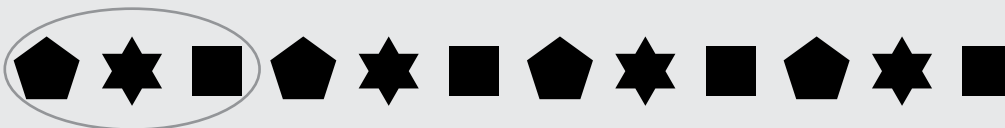
3. lik

4. lik

Opomba: Funkcijsko lahko povežemo številko koraka s številom kvadratkov v eni vrstici velikega kvadrata, od koder izpeljemo funkcijsko povezavo s številom vseh kvadratkov.

Primer 5: Prepoznavanje gradnika pri ponavljajočih vzorcih

Obkroži elemente, ki se ponavljajo, in nadaljaj vzorec.



Z nekaj preprostimi primeri smo ilustrirali možno klasifikacijo osnovnega znanja povezanega z vzorci.

Naslednji primeri prikazujejo izdelke učencev v šestem razredu, ki so raziskovali vsote dveh zaporednih naravnih števil. Delo z vzorci je zanje način oziroma strategija raziskovanja. V teh primerih ne moremo soditi, kaj je prav in kaj narobe. Za vrednotenje izdelkov potrebujemo *opisnike*, ki bodo opisali matematično kvaliteto odgovorov glede na izkušnje otrok in znanje, ki ga pričakujemo.

$$\begin{aligned} 0+1 &= 1 \\ 1+2 &= 3 \\ 2+3 &= 5 \\ 3+4 &= 7 \\ 4+5 &= 9 \\ 5+6 &= 11 \\ 6+7 &= 13 \\ 7+8 &= 15 \\ 8+9 &= 17 \end{aligned}$$

Rezultat je vedno za 1 večji od dvakratnika manjšega zaporednega števila.

Npr. $1+2=3$
 $\downarrow$
 prvo število
 $2 \cdot 1 = 2$ $\xrightarrow{+1}$

Vsote se za 1 število nasključijo.

Npr. $1, 3, 5, 7, \dots$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $2 \quad 4 \quad 6$

Števila med vsotami so nečrnatniki števila 2.

$$\begin{aligned} 0+1 &= 1 \\ 1+2 &= 3 \\ &\vdots \\ 17+18 &= 35 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vsota dveh zaporednih števil je vedno liho število

$$\boxed{\text{sodo} + \text{liho} = \text{liho}}$$

Če seštejemo sodo in liho število je vsota vedno liho število

Slika 1: Prvi učenec opisuje odkrite povezave, drugi pa je svojo ugotovitev posplošil in jo zapisal na 'delni simboli' ravni. Drugi zapis je matematično 'eleganten', prvi učenec je opazil nekaj povezav, ugotovitev je enaka kot pri prvem učencu, le sporočilo ni matematično izpolnjeno. (Avtorja izdelkov: učenca 6. razreda)

$3 + 4 = 7$ Če zaduje število v računu mi
 $2 + 3 = 5$ deljivo npr. $4 + (5) = 9$ z 2,
 $4 + 5 = 9$ potem tudi rezultat mi
 $6 + 7 = 13$ deljiv z 2.

Slika 2: Pot do matematičnega izražanja je dolga. Tudi ta učenec dobro opazuje svoj nabor vsot. Lihost izraža z negacijo sodosti, zapisani sklep pa ni splošen. (Avtor izdelka: učenec 6. razreda)

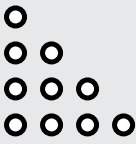
$1+2=3$, $3+4=7$, $5+6=11$, $7+8=15$, $9+10=19$
 $11+12=23$, $13+14=27$, $15+16=31$, $17+18=35$, $19+20=39$
 $21+22=43$, !...
 Rezultati zaporednih števil, se razlikujejo za 4.

Slika 3: Kako oceniti nalogo, če je učenec razumel dani problem drugače? Primeri ilustrirajo njegovo razumevanje problema. Rezultat je pravilen, ni pa povezal vseh matematičnih lastnosti, ki jih pozna. (Avtor izdelka: učenec 6. razreda)

Naslednji primer kaže primer ocenjevanja vzorcev kot samostojnega preverjanja znanja. Znanje se oceni na osnovi opisnikov, ki jih natančneje izdelamo za vsak konkretni primer raziskovanja danega vzorca.

Primer 6: Razišči dane vzorce, 8. razred

Razišči štiri dane vzorce s pikami.

	1. število	2. število	3. število	4. število	
To so prva štiri trikotniška števila.	 1	 3	 6	 10	Katero je deveto trikotniško število?
To so prva štiri kvadratna števila.	 1	 4	 9	 16	Katero je osmo kvadratno število?

	1. število	2. število	3. število	4. število	
To so pravokotniška števila.					Katero pravokotno število bi bilo na sedmem mestu?
	2	6	12	20	

Poišči podobnosti in razlike.

Predstavi svoje delo na sistematičen način.

Kako je povezano število pik z vrstnim številom slike, ki predstavlja neko geometrijsko obliko?

Za vsak primer poišči algebrski izraz.

Razloži posamezni algebrski izraz in ga utemelji.

Merila za vrednotenje (Vir: Dvoržak, B., 2012: 102)

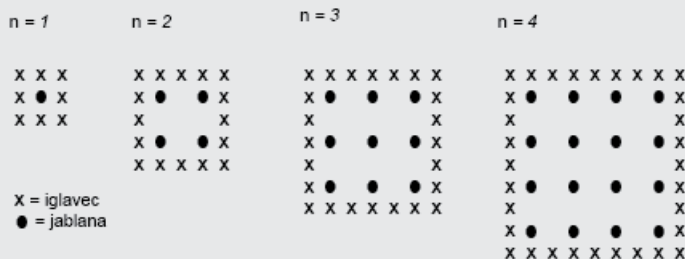
Stopnja dosežka	Opisniki
0	Ni dosežkov, ki so opisani spodaj.
1-2	Ob namigih uporabi vodeno strategijo reševanja za prepoznavanje preprostih vzorcev.
3-4	Izbere in uporabi strategijo reševanja za prepoznavanje vzorcev in predlaga zveze kot splošna pravila.
5-6	Izbere in uporabi strategijo reševanja za prepoznavanje vzorcev, jih opiše kot zveze in kot splošna pravila in konsistentno sklepa glede na odkritja.
7-8	Izbere in uporabi strategijo reševanja za prepoznavanje vzorcev, jih opiše kot zveze in kot splošna pravila in konsistentno sklepa glede na odkritja ter jih razloži.

Predstavimo še primer vrednotenja naloge iz preiskave PISA 2003, ki je podobna številnim nalogam v tem priročniku. Njena značilnost je, da je postavljena v realno situacijo. Način preverjanja je primeren za preverjanje vsakršnih kompleksnih dosežkov, kot so problemska in procesna znanja, ki vključujejo cilje, povezane z vzorci, kot so zastavljeni v učnem načrtu za osnovno šolo.

Primer 7: Vrednotenje naloge iz PISA 2009

Kmet je posadil jablane v kvadratni razporeditvi. Da bi zaščitil drevesa proti vetru, je okrog celega sadovnjaka posadil iglavce.

Spodaj je risba, na kateri lahko vidiš razporeditev jablan in iglavcev za katero koli število vrst jablan (n):



1. *vprašanje*: Poišči formuli, s katerima lahko izračunaš število jablan in število iglavcev za poljubno število vrst jablan (n).
2. *vprašanje*: Obstaja vrednost spremenljivke n , pri kateri je število jablan enako številu iglavcev. Poišči to vrednost in zapiši, kako si to izračunal.
3. *vprašanje*: Če kmet povečuje sadovnjak, kaj je večje: število jablan ali število iglavcev? Razloži, kako si prišel do odgovora.

Naslednji točkovnik je izdelan po predlogi in po načinu vrednotenja omenjene raziskave za vprašanje 3.

I Vse točke	1. <i>Pravilen odgovor (jablane) z veljavno razlago.</i> 1.1 Jablane = $n \times n$ in iglavci = $8 \times n$ obe formuli imata faktor n, toda formula za jablane ima še en n, ki po $n = 8$ postane večji, 8 pa ostane enako. Število jablan se povečuje hitreje. 1.2 Število jablan se povečuje hitreje, ker se število kvadrira v primerjavi z množenjem z 8, ki ostane enako. 1.3 Število jablan je kvadratna odvisnost, število iglavcev je linearna odvisnost, zato je število jablan večje od števila iglavcev. 1.4 Odgovor je utemeljen z grafom, ki ponazarja, da n^2 preseže $8n$ po $n = 8$.
II Del točk	1. <i>Pravilen odgovor (jablane) z razlago, ki izhaja iz posameznih primerov ali iz razširjene preglednice.</i> 1.1 Število jablan se povečuje hitreje, ker če pogledamo preglednico, vidimo, da se število jablan povečuje hitreje kot število iglavcev. To se zgodi, potem ko je število jablan enako številu iglavcev. 1.2 Preglednica kaže, da se število dreves povečuje hitreje. 2. <i>Pravilen odgovor (jablane) z nekaj izkazanega razumevanja odnosa med n^2 in $8n$, toda nejasno zapisano.</i> 2.1 Jablane po $n > 8$. 2.2 Po 8 vrstah bo število jablan večje kot število iglavcev; 2.3 Iglavci, dokler ne doseže 8 vrst, potem je več jablan.
III 0 točk	1. <i>Pravilen odgovor (jablane) brez razlage, z nepopolno ali napačno razlago:</i> 1.1 Jablane. 1.2 Jablane, ker so v notranjosti in zapolnjujejo prostor, kar je večje od obsega. 1.3 Jablane, ker so obdane z iglavci. 2. <i>Drugi odgovori:</i> 2.1 Iglavci. 2.2 Iglavci, ker za vsako vrsto jablan potrebuješ veliko iglavcev. 2.3 Iglavci, ker za vsako jablano posadimo 8 iglavcev. 2.4 Ne vem. 3. <i>Manjka</i>

Opomba: Dosežek učenca je v raziskavi PISA poleg točk opremljen še z dvomestno kodo, ki sporoča vrsto odgovora oziroma napake.

Glede na to, da je v originalni nalogi ob vprašanju 2 ponujena preglednica, bi kazalo razmisliti, ali je v rubriki II za odgovor 1.1 res upravičena odločitev del točk. Opisniki dajo prednost matematičnim argumentom, empirični pa so manj ovrednoteni, kar pa besedilo naloge pri vprašanju 3 ne predvideva.

Število jablan, kar pri iglavcih vedno ostane
prvo število 8, pri jablanah pa bo vedno enako
drugemu.

Slika 4: Primer razlage učenca sedmega razreda osnovne šole.

Sklep

V priročniku se večkrat srečamo z ocenjevanjem vzorcev. Razen namigov v tem razdelku nam predstavi avtorica J. Bone (str. 230) primer ocenjevanja samostojne naloge z vzorci in opisnike ter celotni pogled na ocenjevanje problemskih in procesnih znanj A. Žakelj (str. 102).

Predstavljena raziskava TIMSS, rezultati NPZ in refleksije učiteljev v tem priročniku kažejo na pojem in cilje, ki učencem določene starosti delajo težave, za učitelje pa so izziv na poti razvoja. Sistematično načrtovanje razvoja in spremljanja nam lahko pomaga pri učinkovitosti doseganja ciljev.

Literatura in viri

- 1 Dvoržak, B. (2012). Model preverjanja in ocenjevanja znanja pri pouku matematike v programu mednarodne šole (Middle years programme). V: Žakelj, A., Borstner, M. (2012): Razvijanje in vrednotenje znanja, Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, str. 102.
- 2 Dvoržak, B. (2013). Model vrednotenja na primeru število diagonal v konveksnih večkotnikih. V: Kmetič, S. (2013), Izzivi razvijanja in vrednotenja znanja v gimnazijski praksi – Matematika. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo (v pripravi).
- 3 Long Range Plans for MYP 3 v LRP_MYP3_2012-13. Osnovna šola Danile Kumar Ljubljana. Dostopno na: <http://os-danilekumar.si/our-programmes/myp-programme/> (24. 3. 2013).
- 4 PISA 2003 – Program mednarodne primerjave dosežkov učencev, Matematična pismenost PISA 2003. Ljubljana: Nacionalni center PISA, Pedagoški inštitut. Dostopno na: http://193.2.222.157/UserFilesUpload/file/raziskovalna_dejavnost/PISA/PISA2009/Naloge_iz_matematicne_pismenosti_in_prob1_nal%202003.pdf (24. 1. 2013).
- 5 PISA 2003 – Program mednarodne primerjave dosežkov učencev, Matematična pismenost PISA 2003. Ljubljana: Nacionalni center PISA, Pedagoški inštitut. Dostopno na: http://193.2.222.157/UserFilesUpload/file/raziskovalna_dejavnost/PISA/PISA2009/Naloge_iz_matematicne_pismenosti_in_prob1_nal%202003.pdf (24. 1. 2013).
- 6 Kos, J. in Vreš, S. (2012). Reševanje problemske naloge iz raziskave PISA 2003, Preverjanje matematične pismenosti učiteljev in dijakov ter opisniki za ocenjevanje problemskih nalog pri matematiki. Zbornik prispevkov. Nacionalna konferenca Poti do kakovostnega znanja naravoslovja in matematike, Brdo pri Kranju, 11. in 12. december 2012; str. 132. Dostopno na: <http://www.zrss.si/pdf/Zbornik-prispevkov-NAMA2012.pdf> (24. 5. 2013).

3.5 Pristop k vpeljevanju vzorcev in zaporedij v pouk v osmem razredu

Jerneja Bone, Zavod RS za šolstvo

3.5.1 Uvod

Posodobljeni učni načrt (PUN) vpeljuje novo vsebino, to so vzorci in zaporedja. Kako načrtovati vpeljevanje vzorcev v pouk, je vprašanje, ki si ga učitelji pogosto zastavljajo ob načrtovanju letne priprave. V nadaljevanju podamo predlog z nekaterimi rešitvami.

Predstavljeni pristop ima štiri korake:

1. Pregled PUN za določen razred
2. Izbor primerov, nalog ter sklopov in vsebin, kjer bomo vpeljevali vzorce in zaporedja
3. Umestitev v proces pouka
4. Evalvacija

Vzorci v osmem razredu v učnem načrtu

V PUN za osmi razred so zapisani naslednji cilji, povezani z zaporedjem in vzorci (preglednica 1):

Preglednica 1: Izpis ciljev, povezanih z vzorci in zaporedjem iz PUN, za osmi razred

Sklop	Vsebina	Cilji Učenci/učenke:
Transformacije	Transformacije v večkotnikih	
Izrazi	Vzorci	• opazujejo vzorce, ugotovijo pravilo in ga zapišejo z algebrskim izrazom,
Realna števila	Zaporedja	• oblikujejo ali nadaljujejo dano zaporedje v množici celih števil,
Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami	Vzorci	• samostojno oblikujejo vzorce, • opazujejo in prepoznajo pravilo v vzorcu in vzorec nadaljujejo, • prepoznajo pravilo v vzorcu, poiščejo posplošitev in zapišejo algebrski izraz.

Iz izpisa razberemo, katere cilje morajo učenci doseči. Zapis nam tudi pove, da je zapisani cilj pri sklopu Izrazi zelo podoben ciljem, zapisanim v sklopu Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami. Iz tega lahko upravičeno sklepamo, da se vsebine prepletajo in da vzorce in zaporedja lahko umeščamo v vse druge sklope.

Pri pregledu PUN ne izpustimo didaktičnih priporočil, kjer kot učitelji dobimo pomembne napotke in usmeritve za pouk (preglednica 2).

Preglednica 2: Izpis iz didaktičnih priporočil

Sklop	Didaktična priporočila
Transformacije	V osmem in devetem razredu ne predvidevamo novih ciljev v sklopu Transformacije. Znanja tega vsebinskega sklopa nadgrajujemo z uporabo pri obravnavi vzorcev, geometrijskih likov in teles. (PUN, str. 46)
Izrazi	Didaktični pristopi v algebrske vsebine so lahko tudi vzorci, pri katerih se učenci učijo posploševanja in zapisovanja algebrskih izrazov. Učenci opazujejo vzorce, ugotovijo pravilo in ga zapišejo z algebrskim izrazom. (PUN, str. 56)
Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami	Uvod v algebrske vsebine so lahko tudi vzorci. S samostojnim oblikovanjem različnih vzorcev učenci razvijajo ustvarjalnost; z opazovanjem, ugotavljanjem pravilnosti, zakonitosti pa se učijo posploševanja in zapisovanja algebrskih izrazov. Sklop o matematičnih problemih razumemo kot sklop, ki povezuje različne vsebine in znanja. Prav cilji tega sklopa omogočajo razvoj različnih kompetenc, saj jih uresničujemo v vseh vsebinskih sklopih, zato večine ciljev tega sklopa ne uresničujemo v posebej izbranih urah, ampak sočasno z razvijanjem drugih znanj (npr. delo z vzorci pri številih in geometriji). (PUN str. 62)

Z narejenim pregledom PUN smo si odgovorili na vprašanje, kako vpeljevati vsebine o vzorcih in zaporedjih v osmem razredu v različne sklope. Pozorni smo, da jih vpeljujemo smiselno in premišljeno. Zavedati se moramo, da je dobra uporaba vzorcev lahko v veliko podporo razvoju matematičnih idej.

Izbor primerov, nalog ter sklopov in vsebin, kjer bomo vpeljevali vzorce in zaporedja

Naslednje vprašanje, ki si ga zastavimo, je, kje najti ustrezne primere nalog. Sistematično in načrtno vpeljevanje zahteva od učitelja nekaj iznajdljivosti, še posebej ker v obstoječih učbenikih ne zasledimo veliko primerov; nekaj jih najdemo kot utrjevanje, manj v primerih uvajanja nove snovi.

Primerne naloge o vzorcih poiščemo v različnih virih in literaturi:

- TIMSS-ove naloge:
 - v publikaciji Matematične naloge raziskave TIMSS 2011 (<http://timsspei.blog.arnes.si/>) ali
 - v publikaciji Matematične naloge za višje razrede osnovne šole (TIMSS 2007) (<http://www.pei.si/Sifranti/InternationalProject.aspx?id=17>);
- naloge v Nacionalnem preverjanju znanja:
 - ob koncu drugega obdobja: leto 2009, naloga 6, leto 2012, naloga 2;
 - ob koncu tretjega obdobja: leto 2010 (naknadni rok), naloga 11; leto 2012 (redni rok), naloga 10.

Pomagamo si lahko tudi z iskalnikom COBISS. Tako najdemo primerna gradiva na temo vzorci (slika 1). Ob podrobnejšem pregledovanju ugotovimo, da je kar nekaj člankov izšlo v reviji Matematika v šoli. Ugotovimo tudi, da je veliko diplomskih del na temo vzorcev pri pouku matematike.

Željko, Matjaž	Vzorci in zaporedja	članek - sestavni del	slv	2003
Željko, Matjaž	Vzorci in zaporedja	prispevek na konferenci	slv	2003
Orton, Jean	Algebra, vzorci in motivacija	članek - sestavni del	slv	2001
Polya, George	Patterns of plausible inference. Vol. 2, Of mathematics and plausible reasoning	učbenik	eng	1954

Slika 1: Izsek iz COBISS-a.

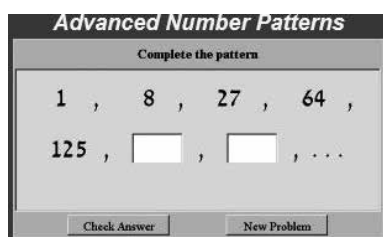
Če imamo možnost, lahko pogledamo tudi učbenike za matematiko v drugih državah (Hrvaška, Madžarska, Italija ...) in tam najdemo naloge o vzorcih.

Iskanje ustreznih primerov si poenostavimo z iskanjem po spletu, kjer v poljuben iskalnik vpišemo »math patterns« or »number sequences«. Iščemo kot slike, lahko pa vpišemo ti dve besedi tudi v drugem jeziku (morda v madžarščini, nemščini oz. italijanščini).

Najdene primere pregledamo, izberemo primerne, jih ustrezno predelamo in umestimo v določen sklop oz. vsebino. Veliko najdenih primerov je zanimivih za naravna števila. Z raziskovanjem ugotovimo, ali bi lahko primer predelali za cela, racionalna ali realna števila. Pomembno je, da dobimo idejo, ki jo nato smiselno umestimo v pouk. Tako lahko tudi zbiramo primere, ki jih bomo pozneje uporabili.

Poglejmo si primer:

Pri iskanju najdemo sliko (slika 2), ki nas pripelje do spletne strani <http://www.free-training-tutorial.com/sequences-games.html> (pridobljeno 3. 11. 2012). Primer umestimo k sklopu Potence v osmem razredu, npr. pri ponavljanju in utrjevanju. Na spletni povezavi pri teh vajah najdemo še druge zanimive primere.



Slika 2: Primer zaporedja, najden z iskalnikom.

Iz tega primera in drugih najdenih izpeljemo navodilo za nalogo in nalogo:

Dopolni zaporedje. Pomagaj si z žepnim računalom. Zapiši pravilo.

a) 1, 8, 27, 64, 125, _____, _____, _____

Pravilo: _____

b) 9, -27, 81, -243, 729, _____, _____, _____

Pravilo: _____

Pri vpeljevanju novih nalog v pouk se lahko zgodi, da kateri od izbranih primerov ne bo najboljši, da se bo zastavljeno navodilo izkazalo za neprimerno, nenatančno. Skupaj z učenci raziskujemo, preverjamo primere, izboljšujemo navodila. Tudi ob takih primerih bomo razvijali in uresničevali procesne cilje in kompetence, razvijali bralno in matematično pismenost.

Umestitev v proces pouka

Pri načrtovanju pouka je pomembno, da vzorce umeščamo v vse faze pouka: vzorci in zaporedja pri vpeljevanju nove snovi, utrjevanju, ponavljanju, preverjanju, ocenjevanju.

Evalvacija

Ob končanem načrtovanju preverimo, ali smo zajeli čim več različnih sklopov in vsebin, ali bomo uresničili zapisane cilje v učnem načrtu, ali smo načrtovali naloge v vseh fazah pouka. Po vsaki izvedeni dejavnosti zapišemo vse pomembne opombe, ki nam bodo koristile pri ponovitvi primera: ali je bilo navodilo nedvoumno, enoznačno, oz. predlagamo boljše; kje so imeli učenci težave, kje ni bilo težav.

3.5.2 Primeri nalog pri različnih sklopih

Kocka

Sklop	Geometrijski pojmi
Vsebina	Kocka
Cilji	Učenci/učenke: • poznajo osnovne pojme pri kocki in kvadru, • izračunajo površino in prostornino kocke (z računalom in brez njega), • uporabljajo Pitagorov izrek pri reševanju nalog o kocki in kvadru, • opazujejo in prepoznajo pravilo v vzorcu, vzorec nadaljujejo, • poiščejo posplošitev in zapišejo algebrski izraz.
Faza pouka	Ugotavljanje predznanja

V osmem razredu pri učencih ugotavljamo predznanje o kocki, ki jo poznajo že iz prejšnjih razredov. Znajo že izračunati površino in prostornino kocke. Predznanje o površini in prostornini kocke lahko ugotavljamo s pomočjo vzorcev. Primere izbiramo od lažjega k težjemu, še posebej če se učenci z vzorci v povezavi s telesi verjetno srečujejo prvič. Učitelj s sistematičnim opazovanjem ugotavlja, kaj učenci še znajo in česa ne. Učencem, ki potrebujejo kocke za lažjo prostorsko predstavo, ponudimo, da lahko posežejo po enotskih (link) kockah.

Naloga

Enota je ena kocka. Rob kocke je dolg a . (naloga je na naslednji strani)

Poskušajmo zapisati splošno formulo za n -to telo: za število kock, število kvadratnih ploskev, ki omejujejo telo, površino telesa, prostornino telesa. Z učenci lahko raziščemo še katero lastnost, kot je na primer dolžina telesne diagonale, dolžina vseh robov ...

	1. telo	2. telo	3. telo	4. telo	...	10. telo	100. telo	n - to telo
Slika					...			
Število kock	1	2	3	4				
Prostornina nastalega telesa	a^3	$2a^3$	$3a^3$	$4a^3$				
Število kvadratnih ploskev, ki telo omejujejo	6	$5 + 5 = 10$	$5 + 4 + 5 = 14$	$5 + 4 + 4 + 5 = 18$				
Površina nastalega telesa	$6a^2$	$10a^2$	$14a^2$	$18a^2$				

Naloga

Razišči vzorec. Enota je ena kocka. Notranjost ni votla. Kaj se lahko vprašaš?

1. telo	2. telo	3. telo	4. telo	...	10. telo	n - to telo
				...		

1. telo	2. telo	3. telo	4. telo	...	10. telo	n - to telo
				...		

1. telo	2. telo	3. telo	4. telo	...	10. telo	n - to telo
				...		

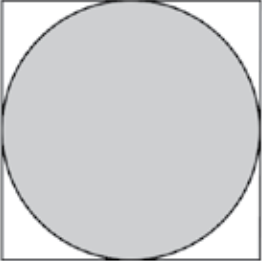
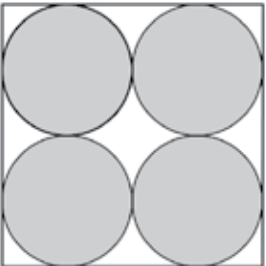
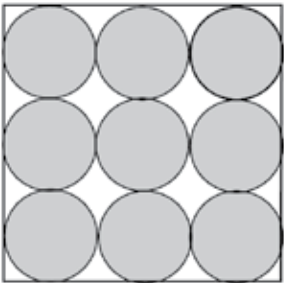
Krog

Sklop	Geometrijski pojmi
Vsebina	Krog
Cilji	Učenci/učenke: - izračunajo obseg in ploščino kroga z uporabo obrazcev, - rešijo besedilne naloge v povezavi s krogom (z računalom in brez njega).
Faza pouka	Ponavljjanje, utrjevanje

Naloga

V kvadrat z dolžino stranice 6 cm narišemo največji možni krog. Nato v isti kvadrat narišemo štiri največje možne kroge enake velikosti. Postopek ponavljamo.

Razišči dolžine polmerov in ploščine nastalih krogov.

Slika	Polmer kroga (cm)	Ploščina enega kroga
	3	
	1,5	
	1	

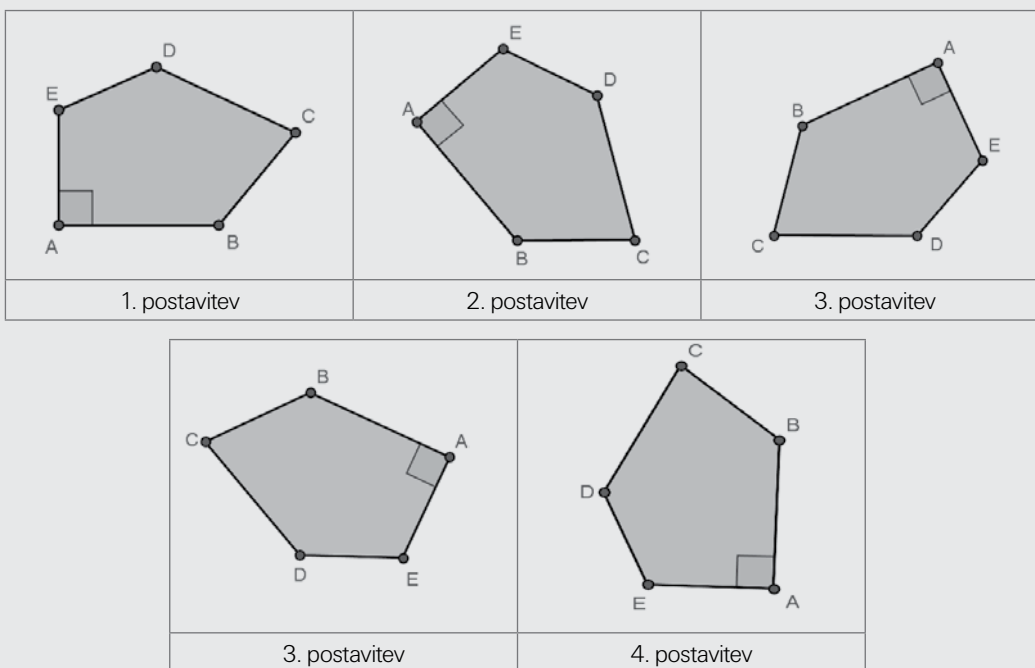
Večkotnik

Sklop	Transformacije
Vsebina	Transformacije v večkotnikih
Cilji	Učenci/učenke: • opazujejo in prepoznajo pravilo v vzorcu in vzorec nadaljujejo.
Faza pouka	Utrjevanje, ponavljanje, ocenjevanje, preverjanje

Naloga

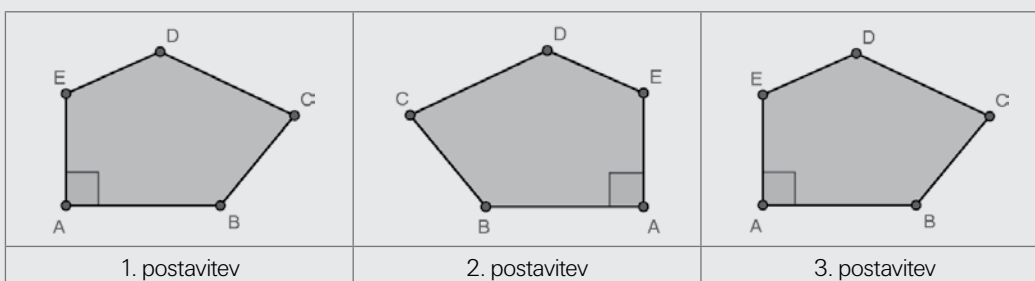
Opazuj lik. Katera transformacija premakne lik iz 1. v 2. postavitev in v naslednje postavitev?

Katera postavitev (od vseh petih predstavljenih) bo na 38. (95., 124.) mestu?

**Naloga**

Opazuj lik. Katera transformacija premakne lik iz 1. v 2. postavitev?

Katera postavitev (1. ali 2.) bo na 24. (45.) mestu?



Cela števila

Sklop	Realna števila
Vsebina	Cela števila
Cilji	Učenci/učenke: • nadaljujejo dano zaporedje v množici celih števil.
Faza pouka	Ponavljjanje, preverjanje, ocenjevanje

Pri celih številih so naloge o zaporedjih analogne nalogam o zaporedjih pri naravnih številih, zato ne pričakujemo težav. Od učencev zahtevamo, da ubesedijo pravilo, ga utemeljijo in tudi zapišejo. Tako spodbujamo tudi pisno in ustno sporočanje. Učenci pravzaprav seštevajo oz. odštevajo cela števila in se tega niti ne zavedajo.

Naloga

Ugotovi pravilo in zapiši manjkajoča števila. Pravilo zapiši.

- 4, 0, -4, -8, ____, ____, ____, ____
- 6, ____, ____, -24, -30, -36
- 21, -16, ____, ____, -1, ____, ____, ____, 19, 24
- 28, 21, ____, ____, 0, ____, ____, ____, -28, -35
- 35, -26, ____, ____, 1, ____, ____, ____, 37, 46

Računske operacije s celimi števili

Sklop	Računske operacije in njihove lastnosti.
Vsebina	Seštevanje in odštevanje celih in racionalnih števil, množenje in deljenje celih in racionalnih števil.
Cilji	Učenci/učenke: • prevedejo odštevanje racionalnih števil v seštevanje in poenostavijo izraz z odpravljanjem oklepajev, • z žepnim računalom zanesljivo izvajajo računske operacije z racionalnimi števili, • prepoznajo pravilo v vzorcu, poiščejo posplošitev in zapišejo algebrski izraz.
Faza pouka	Uvajanje nove snovi

Novo snov lahko vpeljemo z vzorci. Na koncu zapišemo posplošitev. Poglejmo si nekaj primerov. Učenci sami raziščejo in ugotavljajo pravilo.

Naloga: Odštevanje

- $$\begin{aligned}
 5 - 5 &= \\
 5 - 4 &= \\
 5 - 3 &= \\
 5 - 2 &= \\
 5 - 1 &=
 \end{aligned}$$

$$5 - 0 =$$

$$5 - (-1) =$$

$$5 - (-2) =$$

$$5 - (-3) =$$

...

Učenci izračunajo vrednosti številskih izrazov. Pri reševanju nato pridejo do točke, kjer morajo zaradi vzorca oz. reda pri matematiki napovedati rezultat ($5 - (-1) = 6$). Učence spodbudimo, da napovedo, kaj bi bil smiselni rezultat. Tako lahko učenci sami ugotovijo, da je $5 - (-1)$ enako kot $5 + 1$. To ugotovitev najprej učenci ubesedijo in nato še zapišejo s simboli: $a - (-b) = a + b$.

Pogovor naj bo usmerjen v iskanje pravila. Učencem lahko pomagamo pri napovedovanju z naslednjimi vprašanji:

- Kaj lahko povemo o zmanjševancu?
- Kaj o odštevcu?
- Kaj se dogaja z razliko?
- Kaj pomeni odšteti negativno število?
- Povejte pravilo, kako odštevamo negativno število od pozitivnega števila.
- Zapišite pravilo z algebrskim izrazom.
-

Na koncu z uporabo žepnega računalu učenci preverijo svojo napoved.

Na analogen način lahko izpeljemo prištevanje pozitivnih oz. negativnih števil.

Naloga: Množenje

$$4 \cdot (-2) =$$

$$3 \cdot (-2) =$$

$$2 \cdot (-2) =$$

$$1 \cdot (-2) =$$

$$0 \cdot (-2) =$$

$$-1 \cdot (-2) =$$

$$-2 \cdot (-2) =$$

$$-3 \cdot (-2) =$$

$$-4 \cdot (-2) =$$

...

Učenci vedo, da je produkt z enim negativnim številom negativen. Z opazovanjem vzorca napovedo prvi zmnožek dveh negativnih števil. Svojo napoved preverijo še z žepnim računalom. Nato sledi pogovor z učenci:

- Opišite spreminjanje prvega in drugega faktorja pri množenju?
- Kolikšen/kakšen je produkt, če pomnožimo pozitivno in negativno število?
- Kolikšen je produkt, če pomnožimo dve negativni števili?
- Kdaj je produkt enak 0?
- Povejte pravilo, ki velja za množenje dveh pozitivnih števil, pozitivnega in negativnega števila, dveh negativnih števil.
- Zapišite pravilo z algebrskim izrazom.

Deljenje celih števil lahko vpeljemo z napovedjo (hipotezo), dokaz pa izvedemo na osnovi povezanosti operacij množenja in deljenja.

Predlagamo še en način vpeljevanja nove snovi – množenja celih števil.

Naloga

Učenci izpolnijo preglednico (z uporabo žepnega računalja). Preglednico lahko učenci izpolnijo za domačo nalogo pred obravnavo nove snovi, o izpolnjeni preglednici pa se pogovarjamo naslednjo šolsko uro.

.	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4									
-3									
-2									
-1									
0									
1									
2									
3									
4									

Izpeljava je odvisna od predznanja učencev. Pogovarjamo se lahko, tako kot smo se v prejšnjih primerih in proučujemo simetrijo. Preglednico lahko priredimo za odštevanje, seštevanje in deljenje.

Potence

Sklop	Potence
Vsebina	Zapis potence s celim eksponentom
Cilji	Učenci/učenke: • poznajo zapis $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$, • prepoznajo pravilo v vzorcu, poiščejo posplošitev in zapišejo algebrski izraz.
Faza pouka	Uvajanje nove snovi

Uvajanje potenc s stopnjo 0 in potenc z negativno stopnjo uvedemo v tem priročniku z vzorci na strani 242.

3.5.3 Celostni pogled na vpeljevanje vzorcev v pouk

Ob izbranih primerih lahko označimo v preglednici (preglednica 3), pri katerih sklopih smo vključili vzorce in v katerem delu učne ure; dodamo lahko še raziskovanje, ki ga učenci izvedejo ob raziskovanju vzorcev.

Preglednica 3: Celostni pogled na vpeljevanje vzorcev v osmem razredu

	Vzorci – preverjanje pred uvajanjem nove snovi	Vzorci – uvajanje nove snovi	Vzorci – utrjevanje, ponavljanje	Vzorci – preverjanje, ocenjevanje	Raziskovanje
Tema: Geometrija in merjenje					
Geometrijski pojmi	da		da	da	da
Transformacije			da	da	
Tema: Aritmetika in algebra					
Realna števila			da	da	
Računske operacije in njihove lastnosti		da			
Potence		da	da	da	
Izrazi					
Odstotni račun ter premo in obratno sorazmerje					
Funkcija					
Enačbe in neenačbe					
Tema: Druge vsebine					
Zbiranje, urejanje in predstavitev podatkov					
Merila za sredino in razpršenost					
Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami	da	da	da	da	da

Po takem pregledu lahko hitro opazimo, koliko vzorcev smo umestili v letno pripravo in ali smo vzorce vpeljevali v vseh fazah pouka. Tak pregled nam pomaga pri iskanju novih primerov. Ob tem se moramo zavedati, da vzorce vključujemo smiselno v posamezne sklope.

3.5.4 Ocenimo naloge z vzorci

Med predstavljenimi nalogami lahko izberemo nekatere in jih ponudimo učencem za samostojno raziskovanje, ki ga pozneje tudi ocenimo. Za ocenjevanje je treba izdelati primerne kriterije.

Kriteriji dosežejo svoj namen, če so z njimi seznanjeni tudi učenci. Učenci naj bi jih poznali vnaprej, pred začetkom obravnave posamezne učne snovi. Učitelj jih uporabi tako pri načrtovanju dejavnosti za pouk kot tudi pri oblikovanju povratne informacije učencem o doseženem znanju. Z njimi učencem predstavi dosežene cilje in učne rezultate, pokaže na učenčeve potenciale oz. na morebitne vrzeli v znanju. Tako z uporabo opisnih kriterijev v pogovoru učitelj učencem oceno pojasni s kvalitativnega vidika, ne le na podlagi doseženih točk (Žakelj, 2012).

Predstavitev naloge za ocenjevanje

Naloga

Razišči postavitve več enakih kock, kjer je enota ena kocka, npr.: postavitve kock v L-obliki, T-obliki, U-obliki ... in predstavi svojo postavitve.

Še nekaj navodil:

- Smiselno predstavi svoje raziskovanje.
- Zastavi si eno ali več raziskovalnih vprašanj.
- Preveri pravilnost izračunov in jasnost zapisanega. Poskušaj uporabiti matematično terminologijo in simbole.
- Nakaži razširitev problema.
- Pri predstavitvi naloge boš moral odgovoriti še na učiteljevo vprašanje.

Učenci sestavijo poljuben vzorec, ga skicirajo in raziščejo. Pri tem si pomagajo s smiselno predstavitvijo podatkov. Predpostavimo, da si bodo zastavili raziskovalno vprašanje in nanj odgovorili. Če učenci nimajo ideje, kako naj oblikujejo vzorec, jim ponudimo predstavljeni vzorec (slika 3, osnovno kocko in prvo telo; v nadaljevanju morda še drugo telo). Dobro je, da imamo pripravljenih več različnih možnosti, če imamo več učencev, ki bi potrebovali našo pomoč.

Od učencev pričakujemo, da bodo v dani nalogi uporabili pridobljeno znanje iz prej rešenih primerov.



Slika 3: Primer vzorca.

Standardi in cilji, povezani z nalogo

V začetku si izpišimo standarde in cilje iz PUN, ki so povezani z reševanjem predstavljene naloge.

Z nalogo lahko preverimo, koliko so učenci že usvojili nekatere standarde tretjega VIO (PUN, str. 67–68):

- uporablja formule ravninske in prostorske geometrije pri reševanju problemov,
- opiše in zapiše odnos med spremenljivkami,
- uporablja pojem spremenljivke, računa z algebrskimi izrazi,
- opiše problemsko situacijo z izrazom ali enačbo,
- pozna in uporablja načine zbiranja, strukturiranja in predstavljanja podatkov,
- razvije učinkovite bralne strategije za nadaljnje učenje in izobraževanje (sporazumevanje v maternem jeziku),
- v skladu z vsebinami osnovnošolske matematike razvije matematično in nematematično terminologijo (sporazumevanje v maternem jeziku),
- matematični jezik uporablja pri sporazumevanju,
- pri reševanju besedilnih nalog uporablja bralne strategije in besedilno nalogo opiše z matematičnim jezikom,
- pri reševanju (besedilnih) problemov kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih.

Standardov VIO je veliko, morda smo katerega izpustili, morda ne bomo upoštevali vseh v enakem obsegu, a je prav, da smo pozorni na njih.

Z nalogo preverjamo tudi usvojenost nekaterih minimalnih standardov znanja v osmem razredu (PUN, str. 70):

- izračuna površino in prostornino kocke in kvadra,
- uporablja skico pri reševanju geometrijskih nalog,
- reši matematični problem in problem z življenjsko situacijo.

Cilji iz PUN, ki jih povežemo s predstavljenjo nalogo (preglednica 4):

Preglednica 4: Cilji povezani s predstavljenjo nalogo

Sklop	Cilji Učenci/učenke:
Geometrijski pojmi	• poznajo osnovne pojme pri kocki in kvadru, • izračunajo površino in prostornino kocke in kvadra (z računalom in brez njega), • uporabljajo Pitagorov izrek pri reševanju nalog o kocki in kvadru, • uporabljajo obrazec za površino in prostornino kocke in kvadra za izračun neznanih količin;
Izrazi	• računajo z algebrskimi izrazi: seštevajo, odštevajo, množijo enočlenik z veččlenikom, • izpostavijo skupni faktor, • opazujejo vzorce, ugotovijo pravilo in ga zapišejo z algebrskim izrazom;
Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami	• samostojno oblikujejo vzorce, • opazujejo in prepoznajo pravilo v vzorcu in vzorec nadaljujejo, • prepoznajo pravilo v vzorcu, poiščejo splošitev in zapišejo algebrski izraz.

Oblikovanje kriterijev

Ob upoštevanju standardov in ciljev, ki jih z nalogo želimo preveriti, oblikujemo kriterije (preglednica 5). V pomoč nam je bil opisni kriterij spremljanja problemskih znanj, opisan v knjigi A. Žakelj, 'Kako poučevati matematiko' in opis kriterijev pri spremljanju problemskega znanja v prispevku A. Žakelj, 'Od preverjanja do ocenjevanja' v monografiji 'Razvijanje in vrednotenje znanja'.

A. Žakelj (2003) v opisnih kriterijih spremljanja problemskih znanj pravi, da učitelj pri iskanju odgovora na raziskovalni problem zasleduje učenčev:

- zastavitev problema (postavitev vprašanja, hipoteze),
- pristop k iskanju odgovora (izbor ustrezne metode),
- ustreznost rešitve (predstavitev dokazov),
- interpretacijo ugotovitev (strukturiranje znanja).

Kriterije oblikujemo glede na zastavljeno nalogo in se lahko v izvedbenem delu razlikujejo od tistih, ki jih navaja A. Žakelj. V našem primeru spremljanja problemskih znanj v povezavi z vzorci smo pri učencih zasledovali:

- razumevanje problemske situacije,
- analiziranje ustvarjenega vzorca in
- predstavitev.

Ob iskanju vzporednic med našim spremljanjem učenčevega znanja in spremljanjem znanja pri A. Žakelj, ugotavljamo: razumevanje problemske situacije je vključeno v zastavitev problema (po A. Žakelj), analiziranje ustvarjenega vzorca je vključeno v pristop k iskanju odgovora, predstavitev zajema tako ustreznost rešitve kot interpretacijo ugotovitev.

Sklenemo lahko, da nam je bilo spremljanje znanja A. Žakelj zelo dobro izhodišče za pripravo konkretnega spremljanja znanja pri nalogi z vzorci.

V preglednici 5 predstavljamo opis kriterijev za ocenjevanje. Predlagamo, da kriterije učitelj predstavi učencem ob reševanju drugih nalog iz vzorcev pri geometrijskih telesih. Ob reševanju nalog naj se učitelj pogovarja z učenci, jih usmerja in opozarja na posamezne zapise v kriterijih. Učenci tako sami ugotavljajo, v kolikšni meri dosegajo posamezne kriterije in kje morajo svoje znanje še izboljšati.

Preglednica 5: Opis kriterijev za ocenjevanje naloge iz vzorcev pri geometriji

	Razumevanje problemske situacije		
	Opis kriterija/opisniki		
	A Učenec/ka:	B Učenec/ka:	C Učenec/ka:
Oblikovanje vzorca	Samostojno oblikuje vzorec s kockami.	Ob opazovanju predloga prepoznajo pravilo v vzorcu in vzorec s kockami nadaljujejo.	Nadaljuje vzorec, ki je napačen ali ga ni.
Postavitev vprašanj	Postavi/zapiše smiselno in izvirno problemsko vprašanje, ki sledi iz postavljenega vzorca kock. Z vprašanjem izkaže širše razumevanje vzorcev.	Postavi/zapiše smiselno problemsko vprašanje, ki sledi iz postavljenega vzorca kock.	Postavi/zapiše vprašanje, ki le deloma sledi iz postavljenega vzorca kock.
Predstavitev vzorca	Naredi potrebne preglednice. Izbere/poišče/določi potrebne podatke. Sistematično uredi podatke v preglednici. Skicira nastala telesa v vzorcu v poševni projekciji.	Naredi preglednice, ki so pomanjkljive. Večinoma izbere potrebne podatke. Podatke zapisuje nepopolno in nepregledno, delno skicira kocke v poševni projekciji.	Izbere podatke, a nepravilne. Zapisuje podatke, a zelo nesistematično, zelo pomanjkljivo, mestoma tudi napačno. Skicira le osnovno kocko v poševni projekciji.

	Analiziranje ustvarjenega vzorca		
	Opis kriterija/opisniki		
	A Učenec/ka:	B Učenec/ka:	C Učenec/ka:
Poznavanje geometrijskega telesa	Pozna in pravilno uporablja osnovne geometrijske pojme o kocki, zna izračunati površino in/ali prostornino kocke/nastalega telesa v vzorcu ter uporablja Pitagorov izrek.	Pozna in le delno pravilno uporablja osnovne geometrijske pojme o kocki, z nekaterimi napakami izračuna površino in/ali prostornino kocke/nastalega telesa v vzorcu.	Uporablja osnovne geometrijske pojme o kocki nedosledno in napačno izračuna površino in/ali prostornino nastalega telesa v vzorcu.
Računanje z izrazi	Pokaže znanje o računanju z algebrskimi izrazi.	Pokaže pomanjkljivo znanje o računanju z algebrskimi izrazi.	Pokaže zelo pomanjkljivo znanje o računanju z algebrskimi izrazi.
Posplošitev	Zapiše posplošitev za n -telo v vzorcu z algebrskim izrazom.	Zapiše posplošitev za n -telo v vzorcu z algebrskim izrazom, vendar pomanjkljivo, ali izračuna le delni rezultat (npr. $n = 100$).	Nakaže le pot do posplošitve vzorca (izračuna za prvih nekaj teles v vzorcu).

	Predstavitev		
	Opis kriterija/opisniki		
	A Učenec/ka:	B Učenec/ka:	C Učenec/ka:
Odgovarjanje na zastavljena vprašanja	Smiselno in pravilno odgovori na začetno/začetna zastavljena vprašanja. Zna preveriti svojo rešitev.	Odgovori na začetno/začetna zastavljena vprašanja, vendar zasledimo manjše napake.	Odgovori na začetno/začetna zastavljena vprašanja, a nepravilno, ali pa sploh ne odgovori.
Ustreznost rešitve	Zna preveriti in utemeljiti svojo rešitev.	Pomanjkljivo preveri in utemelji svojo rešitev.	Zelo pomanjkljivo ali sploh ne preveri rešitve.
Razširitev problema	Zna nakazati razširitev problema.	Delno nakaže razširitev problema.	Nakaže neustrezno razširitev problema.
Utemeljevanje	Zna jasno in natančno odgovoriti na vprašanje učitelja. Svoje trditve utemeljuje.	Pomanjkljivo odgovori na vprašanje učitelja. V svojih utemeljitvah ni prepričljiv.	Odgovori neustrezno na učiteljevo vprašanje. Se izogne utemeljitvi svojih trditve.
Terminologija	Pravilno uporablja matematični jezik in terminologijo v zapisih in ustnem sporočanju.	Z manjšimi pomanjkljivostmi uporablja matematični jezik in terminologijo v zapisih in ustnem sporočanju.	Z več napakami uporablja matematični jezik in terminologijo v zapisih in ustnem sporočanju.

3.5.5 Sklep

Z načrtnim in sistematičnim vpeljevanjem vzorcev in zaporedij v pouk uresničujemo več ciljev iz učnega načrta hkrati. S takim načinom ne »porabimo« več ur pouka. Priporočamo, da učitelji skupaj z učenci raziskujejo vzorce. Učence vpeljujemo v raziskovanje in razmišljanje, ki na nekaterih mestih presega matematične vsebine. Nekatere od predlaganih nalog lahko postavimo v realni kontekst (Soma kocka). Ob podanih nalogah uresničujemo cilje iz PUN, ki so povezani z vsemi štirimi komunikacijskimi veščinami (govorjenje, pisanje, poslušanje, branje). Z reševanjem nalog z vzorci lahko učitelji pridobijo oceno, ki ni pisna. Predlagane opisnike lahko prilagajajo svojim potrebam in jih izboljšujejo.

Menimo, da je prikazan način vpeljevanja vzorcev v pouk prenosljiv tudi v druge razrede. Učiteljem predlagamo, da si naredijo »banko« nalog in primerov, ki naj jo ves čas dopolnjujejo. Spodbujamo, da si primere izmenjujejo z drugimi učitelji preko spletne učilnice za matematiko v osnovni šoli.

Literatura in viri

- 1 *Circles in Squares. Erich's Packing Center. Dostopno na: <http://www2.stetson.edu/~efriedma/cirinsqu/> (3. 11. 2012).*
- 2 *Cobiss.si. Kooperativni online bibliografski sistem in servisi. Dostopno na: <http://www.cobiss.si/> (28. 12. 2012).*
- 3 *Ellis, W., Burzynski, D. Signed Numbers: Multiplication and Division of Signed Numbers, Connexions Web site. Dostopno na: <http://cnx.org/content/m35033/1.2/> (3. 11. 2012).*

- 4 Hudson, T. (2011). *Circle packing in a square*. Dostopno na: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Circles_packed_in_square_4.svg (3. 11. 2012).
- 5 Kong, L. (2011). *File: Integer Pattern Worksheet.docx*. Better Lesson. Dostopno na: <http://betterlesson.com/document/168362/integer-pattern-worksheet-docx?lessonID=37328&from=tree> (3. 11. 2012).
- 6 School of Science and Technology Singapore (2011). *S1-01 Maths Blog*. Dostopno na: http://sst2011-s101maths.blogspot.com/2011_02_01_archive.html (3. 11. 2012).
- 7 Žakelj, A. (2012). 'Od preverjanja do ocenjevanja znanja'. V: Žakelj, A., Borstner, M. (2012). *Razvijanje in vrednotenje znanja*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 8 Žakelj, A., et al. (2011). *Program osnovna šola. Učni načrt. Matematika*. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (3. 11. 2012).
- 9 Žakelj, A. (2003). *Kako poučevati matematiko? Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

3.6 Primeri vzorcev

3.6.1 Obravnava vzorcev v osmem razredu

Katja Kmetec, Osnovna šola Brinje, Grosuplje

Avtor	Katja Kmetec
Šola	Osnovna šola Brinje, Grosuplje
Učna tema	Druge vsebine
Učni sklop	Vzorci
Razred	8. (3. raven zahtevnosti)
Potreben čas za izpeljavo	3 x 1 ura (vsakokrat del učne ure)
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • opazujejo vzorce, • prepoznavajo pravila, • nadaljujejo vzorec, • iščejo posplošitev, • zapisujejo algebrski izraz, • odkrivajo in povezujejo matematične vsebine: pojem spremenljivke, potence z negativnim eksponentom, ploščina, obseg.
Standardi	Učenec/učenka: • reši matematične probleme.
Oblike in metode dela	• individualna, • delo v dvojicah
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• učni listi, • animacije
Potrebno predznanje	• upodobitev nekaterih iracionalnih števil (za pitagorejsko drevo), • potence (za trikotnik Sierpiškega, Kochovo snežinko)
Dejavnosti učencev	• opazovanje vzorcev pri pitagorejskem drevesu, • ugotavljanje, kaj pomeni negativni eksponent potenc s pomočjo vzorcev pri trikotniku Sierpiškega, • preučevanje vzorcev pri Kochovi snežinki
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	S sistematičnim vključevanjem vzorcev v preostale učne sklope brez težav realiziramo cilje, ki naj bi jih učenci dosegli pri vzorcih. Opazen je napredek učencev pri raziskovanju vzorcev, če temu namenimo dovolj časa. Učenci so zelo motivirani za odkrivanje pravil.
Opombe, dodatna opažanja, posebnosti	Priporočeno poznavanje Pitagorovega izreka ter pojem iracionalnega števila oziroma načrtovanje daljic z iracionalno dolžino.

Možnosti za razširitev problema*	Vse opisane probleme bi bilo smiselno izvesti z istimi učenci še kdaj, ko bodo imeli več matematičnega znanja (npr. v devetem razredu pri podobnosti, razmerjih) in primerjati njihove takratne in zdajšnje ugotovitve ter način reševanja.
Prilagoditve za učence z učnimi težavami*	Več usmeritev, navajanje na sistematično preučevanje vzorcev, pomoč pri oblikovanju ustrezne preglednice; večji poudarek na iskanju pravila vzorcev ter manjši na posploševanju in zapisu algebrskega izraza.

Uvod

Učni načrt za matematiko vzorcem namenja poseben poudarek. Učenci naj bi:

- samostojno oblikovali vzorce,
- opazovali in prepoznali pravilo v vzorcu in vzorec nadaljevali,
- prepoznali pravilo v vzorcu, poiskali posplošitev in zapisali algebrski izraz,
- ob tem pa naj bi sočasno razvijali tudi druge učne cilje ter povezovali različne vsebine in znanja (Učni načrt – Matematika, 2011).

Tako sem se že pri načrtovanju letne delovne priprave za osmi razred odločila, v katere obravnavane učne sklope bom vključevala vzorce in na kakšen način: kot motivacijo, z namenom razvijanja veščin prepoznavanja pravil v vzorcih ali z namenom odkrivanja katere druge učne vsebine prek vzorcev.

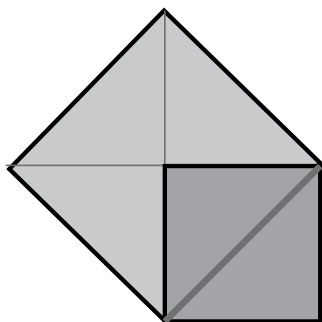
Začeli smo s preprostimi številskimi zaporedji, kjer so učenci po določenem pravilu nadaljevali zaporedje (cela števila, racionalna števila); nato s preprostimi številskimi vzorci, pri katerih so morali učenci najti pravilo in nadaljevati zaporedje (cela, racionalna števila). Težavnost smo med letom stopnjevali (kvadratna števila, trikotnik Sierpińskega, Pascalov trikotnik, Kochova snežinka). Pri obravnavi izrazov smo dodali zapis splošnega člena nekega zaporedja oz. vzorca z algebrskim izrazom. Pridobljeno znanje o vzorcih so učenci konec šolskega leta uporabili pri raziskovanju igre hanojski stolpi, kjer so strnili vsa znanja o vzorcih, in pri nekaterih drugih učnih vsebinah, ki so jih pridobili v osmem razredu. Med šolskim letom sem spremljala in opazila napredek učencev pri opazovanju vzorcev, kot bo navedeno v refleksiji.

V nadaljevanju navajam tri primere vključevanja vzorcev v pouk matematike v osmem razredu.

Izvedba v razredu

Pitagorejsko drevo in iracionalna števila

Pri obravnavi iracionalnih števil so učenci spoznali, kako upodobimo nekatera iracionalna števila (npr. $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{32}$...). S primerjavo dolžin stranic in plosččin kvadratov, prikazanih na sliki 1, so ugotovili, da diagonalo kvadrata lahko izračunamo kot produkt stranice kvadrata in števila $\sqrt{2}$.


MALI KVADRAT

a (cm)	p(cm ²)
1	1
2	4
3	9

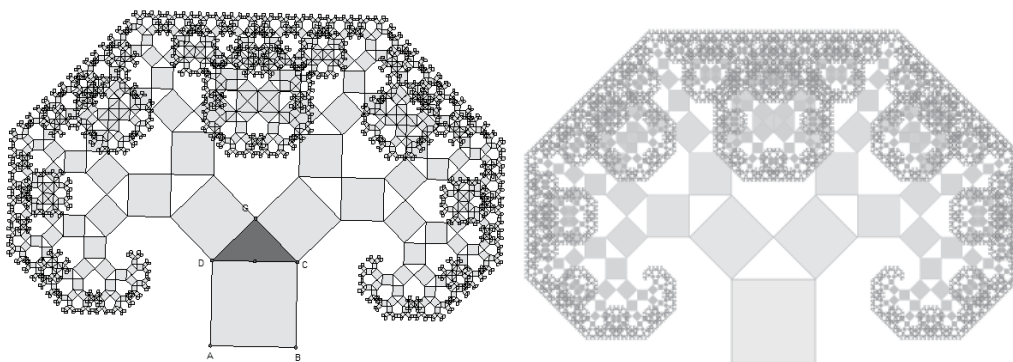
VELIKI KVADRAT

a (cm)	p(cm ²)
$\sqrt{2}$	2
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	8
$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$	18

Slika 1: Primerjava stranic in ploščin prikazanih kvadratov.

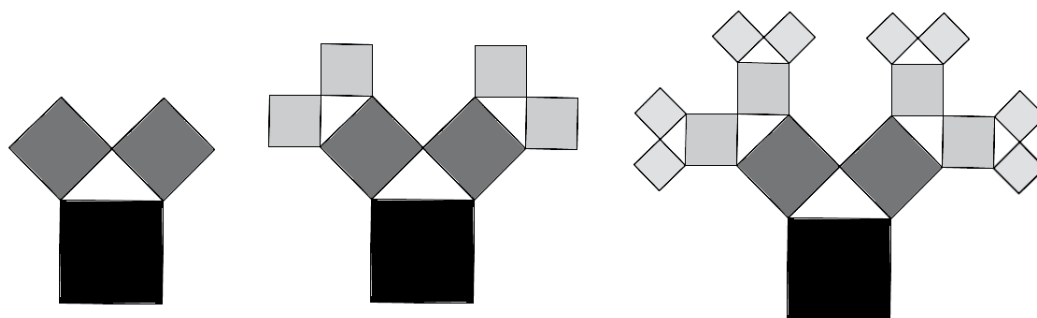
Svoje znanje in razumevanje učne vsebine so imeli učenci nato možnost preizkusiti in uporabiti pri preučevanju vzorcev. Dobili so naslednji izziv:

Oglejmo si, kako nastane pitagorejsko drevo (slika 2).



Slika 2: Pitagorejsko drevo. (Vir slike: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/88/Pythagoras_tree_1_1_13_Summer.svg/220px-Pythagoras_tree_1_1_13_Summer.svg.png (22. 4. 2003))

Oglejmo si, kako nastane takšno drevo (slika 3).



Slika 3: Nastanek pitagorejskega drevesa. (Vir: lasten)

Kako bi z besedami opisali nastanek pitagorejskega drevesa?

Učenci so si ogledali animacijo, ki je prikazovala postopno nastajanje pitagorejskega drevesa. Brez težav so ugotovili, kako drevo nastaja, vendar so bili precej nerodni pri pojasnitvi, kako narišemo pitagorejsko drevo. Izrazoslovje bi bilo verjetno boljše po obravnavi Pitagorovega izreka, mi pa smo dejavnost izvedli, preden so ga učenci spoznali.

Ko so pojasnili, kaj natanko se zgodi v vsakem koraku in kako, so dobili preglednico 1, ki so jo morali izpolniti s pomočjo slike 3.

Preglednica 1: Izpolni za pitagorejsko drevo

Kvadrat	Ploščina kvadrata (e^2)	Dolžina stranice kvadrata (e)	Število kvadratov
	4		
			
			
			

Izpolnjeno preglednico 2 smo nato vodeno opazovali.

Preglednica 2: Izpolnjena preglednica za pitagorejsko drevo

Kvadrat	Ploščina kvadrata (e^2)	Dolžina stranice kvadrata (e)	Število kvadratov
	4	2	1
	2	$\sqrt{2}$	2
	1	1	4
	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	8

Ogledali smo si vsak stolpec posebej. Učenci so nadaljevali zaporedja in ugotavljali njihova pravila.

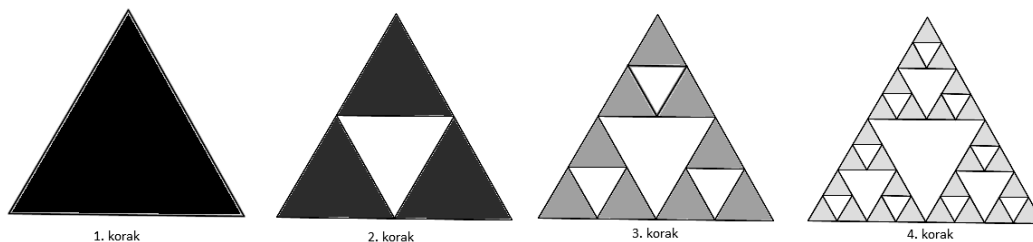
Pri tem se je izkazalo:

- Hitro so videli, kako se nadaljuje zaporedje, in ga brez težav rekurzivno nadaljevali.
- Težko jim je bilo poiskati splošni člen zaporedja.
- Najuspešnejši so bili pri nadaljevanju stolpca, ki prikazuje število nastalih kvadratov (četrty stolpec).
- Pri drugem stolpcu (ploščina) so imeli nekateri težave pri določanju ploščin, manjših od 1.
- Drugi in četrty stolpec predstavljata zaporedje potenc števila 2; v četrtem stolpcu so učenci najprej videli večkratnike števila 2 in pozneje pravilno ugotovili, da gre za zaporedje potenc števila 2. Drugega stolpca (padajoče zaporedje potenc števila 2) pa niso povezali s potencami števila 2.

Dejavnost je bila učencem všeč. Pri izvedbi je bilo videti, da še nimajo dovolj izkušenj z vzorci, zato jih je bilo treba pri delu precej usmerjati. Čez približno en teden so imeli ponovno priložnost za raziskovanje vzorcev – tokrat na trikotniku Sierpiškega.

Trikotnik Sierpiškega in majhna števila

Tokrat so bili vzorci sredstvo, s katerim so učenci usvajali novo učno snov: majhna števila. Uvodoma sem učencem zastavila vprašanje: koliko je po njihovem mnenju vrednost potence 4^{-2} . Večina je menila, da gre za neko negativno število, najpogosteje – 16. Njihova predvidevanja so bila zapisana na tabli do konca šolske ure. Napovedala sem jim, da bodo med uro spoznali, ali so bile njihove predpostavke točne ali ne, še prej pa bodo spoznali zanimiv trikotnik: trikotnik Sierpiškega. Ogledali smo si animacijo nastanka trikotnika Sierpiškega. Nadaljnje delo je potekalo s pomočjo učnih listov, ki so priloženi (priloga 1). S pomočjo nekaj usmeritev na učnem listu in slike 4 so učenci izpolnjevali preglednico 3.



Slika 4: Nastanek trikotnika Sierpińskega. (Vir: lasten)

Preglednica 3: Izpolnjena preglednica – trikotnik Sierpińskega

<i>korak</i>	<i>trikotnik</i>	<i>število trikotnikov*</i>	<i>ploščina trikotnika (e^2)</i>
1.		1	16
2.		4	4
3.		16	1
4.		64	$\frac{1}{4}$

***Pozor! Napiši, koliko takšnih trikotnikov bi zapolnilo celotni rdeč trikotnik.**

Pri delu se je izkazalo:

- Učenci so bili že nekoliko samostojnejši kot pri prejšnjem preučevanju vzorcev.
- Tudi tokrat so brez težav ugotovili nadaljevanje zaporedja, še vedno pa so imeli težave pri iskanju splošnega člena zaporedja. Opazno je bilo, da učenci ne razumejo dobro pomena spremenljivke n .
- Ponovno se je potrdilo, da so učenci bolj vajeni naraščajočih zaporedij. Tokrat so v tretjem stolpcu zelo hitro prepoznali zaporedje potenc števila 4. Za četrti stolpec so ugotovili, da gre za »isto zaporedje v drugi smeri«.
- Ugotovili so, da je produkt tretjega in četrtega stolpca vedno enak, in pojasnili, zakaj.

Nato sem jih usmerila, naj s pomočjo preglednice sami ugotovijo, kolikšna je vrednost poten-
ce 4^{-2} (uvodni primer).

Rezultate v preglednici so zapisali drugače – izrazili so jih s potencami števila 4, kot je razvidno
v preglednici 4. Najprej so kot potence števila 4 prepoznali števila 4, 16, 64, 256 ... (v pregled-
nici označeno s sivo), nato so sklepali, za katere potence števila 4 gre v preostalih primerih.

Preglednica 4: Potence števila 4 v trikotniku Sierpińskega

<i>korak</i>	<i>trikotnik</i>	<i>število trikotnikov*</i>	<i>ploščina trikotnika (e^2)</i>
1.		$1 = 4^0$	$16 = 4^2$
2.		$4 = 4^1$	$4 = 4^1$
3.		$16 = 4^2$	$1 = 4^0$
4.		$64 = 4^3$	$\frac{1}{4} = 4^{-1}$

Izpisali so številska zaporedja, ki nastopajo v preglednici:

1, 4, 16, 64, 256 ...

4^0 , 4^1 , 4^2 , 4^3 , 4^4 ...

ter:

16, 4, 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$...

4^2 , 4^1 , 4^0 , 4^{-1} , 4^{-2} ...

in na podlagi tega pravilno sklepali: $4^{-2} = \frac{1}{16}$ ter nato, kaj pomeni negativni eksponent: $a^{-n} = \frac{1}{n}$.

Zainteresirani učenci so se v prostem času preizkusili tudi v likovnem ustvarjanju vzorcev v tri-
kotniku Sierpińskega in Kochove snežinke. Njihove izdelke smo uporabili kot motiv novoletnih
voščilnic (slika 5).

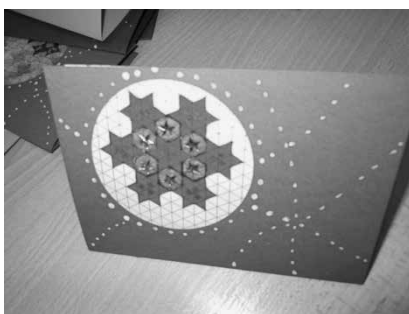


Slika 5: Likovno ustvarjanje trikotnika Sierpińskega. (Avtor izdelka: učenec 8. razreda, foto: Katja Kmetec)

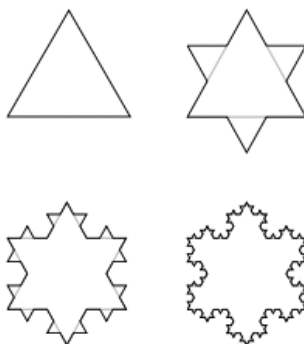
Kochova snežinka

Prvi sneg nas vedno spomni na matematično snežinko, Kochovo snežinko. Tudi pri njej lahko opazujemo številne vzorce!

Po animaciji, ki je prikazovala, kako nastane ta matematična snežinka, so učenci sami predlagali, kaj vse bi pri snežinki lahko opazovali.



Slika 6: Likovno ustvarjanje Kochove snežinke. (Avtor izdelka: učenec 8. razreda, foto: Katja Kmetec)



Slika 7: Nastanek Kochove snežinke. (Vir slike: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d9/KochFlake.svg/280px-KochFlake.svg.png>; (22. 4. 2013))

Odločili smo se, da bomo opazovali:

- koliko trikotnikov nastane v posameznem koraku,
- kako veliki so trikotniki,
- (boljši učenci v okviru dodatnega pouka tudi, kolikšna je ploščina Kochove snežinke v posameznem koraku in kaj se dogaja z njenim obsegom).

Naloga je bila tokrat nekoliko težja. Čeprav so jo reševali učenci tretje ravni zahtevnosti, smo delo diferencirali. Diferenciacija je v grobem potekala na naslednji način (A – najlažji način, C – najtežji način):

- A reševanje z usmeritvami, ugotavljanje pravil zaporedij;
- B reševanje brez usmeritev, ugotavljanje pravil zaporedja;
- C reševanje brez usmeritev, ugotavljanje pravil zaporedij, napovedovanje, zapis splošnega člena zaporedja z algebrskim izrazom.

Učenci so brez težav ugotavljali, kaj se dogaja v posameznem koraku – s stranicami, trikotniki, velikostjo trikotnikov; ugotovitve so dobro pojasnili in jih celo utemeljili, kot npr.: »Vsakokrat, ko konstruiramo trikotnik nad srednjo tretjino stranice, se s tem število stranic štirikrat poveča. Zato je v vsakem koraku število stranic štirikrat večje. Ker konstruiramo trikotnike nad vsako stranico, je novih trikotnikov toliko, kot je stranic. Vsak nov trikotnik je devetkrat manjši od prejšnjega.« Usmeritve so potrebovali predvsem pri zapisu izraza na tak način, da so lahko ugotovili formulo splošnega člena. Nekateri učenci so ploščine manjših trikotnikov izrazili s potencami števila 3 (in ne 9) in zaradi tega težje našli formulo splošnega člena.

Obravnava Kochove snežinke bi verjetno bolj sodila v srednješolsko matematiko, ko se obravnava neskončne geometrijske vrste. Pa vendar: učenci osnovne šole lahko v njej odkrijejo že marsikaj. Kot cilj si nisem zadala do potankosti preučiti Kochove snežinke, ampak zgolj opazovati vzorce v njej – skladno z znanjem ter tudi sposobnostmi učencev. Menim, da so bili cilji ob koncu dejavnosti doseženi.

Sklep

Znanje o vzorcih so učenci strnili pri analizi matematične igre hanojski stolpi (http://www.zrss.si/kupm2012/datoteke/cetrtek_1730_Minarik/Katja_Kmetec.pdf). V okviru slednje so pokazali doseganje vseh ciljev, ki naj bi jih dosegli v okviru učnega sklopa vzorci, in sicer:

- opazovali so vzorce, prepoznali pravila v vzorcih in vzorce nadaljevali;
- poiskali so posplošitve pravil in jih zapisali z algebrskimi izrazi,
- samostojno so oblikovali vzorce.

Med šolskim letom je bil pri večini učencev viden napredek pri preučevanju vzorcev. Kazal se je predvsem v:

- tem, kako pristopiti k delu – kako se lotiti dela,
- samostojnosti pri delu (od izrazito vodenega pouka do bistveno manj vodenega),
- sistematičnem beleženju delnih ugotovitev,

- iskanju pravila; sprva so bili učenci sposobni ugotoviti le, kaj se dogaja z razliko med sosednjima členoma, pozneje so znali poiskati tudi splošni člen zaporedja in pravilno napovedati n -ti člen zaporedja;
- boljši učenci so vzorce usvojili do te mere, da so jih samoiniciativno uporabili pri različnih matematičnih preiskavah.

Kot pravi učni načrt za matematiko (Program osnovne šole. Matematika. Učni načrt, 2011):

»Pri pouku matematike spodbujamo različne oblike mišljenja, ustvarjalnost, formalna znanja in spretnosti ter učencem/učenkam omogočamo, da spoznajo praktično uporabnost in smiselnost učenja matematike.«

Veliko od zapisanega lahko uresničujemo prav z umeščanjem vzorcev v različne učne vsebine. Pri tem pa je pomembno, da učence učimo teh veščin, jih sprva nekoliko usmerimo, stopnjujemo težavnost in jih postopoma »pripeljemo« do stopnje, ko jim vzorci postanejo sredstvo, s katerim si lahko pomagajo pri odkrivanju novih matematičnih znanj.

Kot se je izkazalo, učenci radi preiskujejo vzorce in so zelo motivirani za tovrstno delo.

Menim, da prenovljen učni načrt za matematiko v osmem razredu ponuja veliko možnosti za vključevanje vzorcev, ki jih je gotovo vredno izkoristiti.

Literatura in viri

- 1 *Kochova Snežinka. Wikipedia. Dostopno na: http://sl.wikipedia.org/wiki/Kochova_sne%C5%BEinka (1. 12. 2011).*
- 2 *Žakelj, A., et al. (2011). Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (1. 12. 2011).*

Priloge



Priloga 1: Učni list trikotnik Sierpińskega

Priloga 2: Učni list Kochova snežinka

Priloga 3: Dodatek k prilogi 2

Priloga 4: Rešitve učnega lista

3.6.2 Vzorci in preiskovanja

Silva Kmetič, Zavod RS za šolstvo

Avtor	Silva Kmetič
Učna tema	Aritmetika in algebra
Učni sklopi	Števila in računske operacije ter Matematični problemi
Razred	Od 2. do 9. razreda
Potreben čas za izpeljavo	Ena učna ura
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: znajo sistematično poskušati, opazovati, opisovati, postavljati vprašanja, množiti, raziskovati matematične odnose med števili.
Standardi	Učenec/učenka: - oblikuje vzorce in številski zaporedja ter jih nadaljuje, - reši matematične probleme.
Oblike in metode dela	delo v skupinah po 3 ali 4
Potrebno predznanje	Ko učenci znajo množiti z 2 in poznajo mestne vrednosti ter znajo opazovati vzorce.
Dejavnosti učencev	raziskovanje, sporočanje

Uvod

V literaturi se kot ena izmed metod reševanja ali raziskovanja problemov omenja tudi iskanje vzorca. Na ta način lahko velikokrat razrešimo abstraktno matematično situacijo oziroma učencem približamo abstraktni svet matematike ter jim pomagamo pri odkrivanju in razumevanju matematičnih pojmov in odnosov.

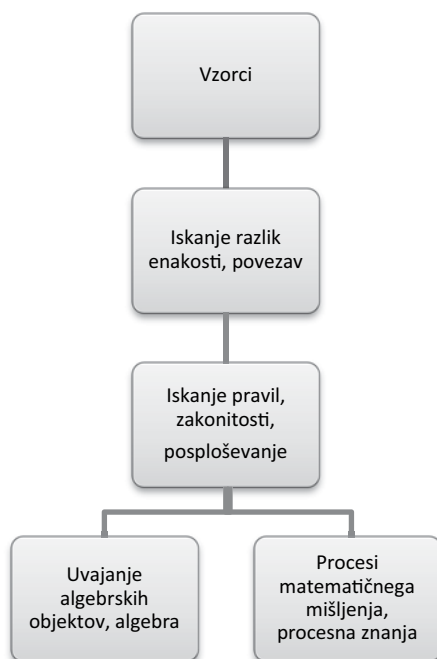


Diagram 1: Vzorci vsebine in procesi mišljenja.

Med procesi mišljenja bi najprej omenili opazovanje matematičnih objektov: števil, likov, teles, številskih izrazov, enakosti ... Včasih so izhodiščne učne situacije postavljene tako, da zlahka opazimo pravilo oziroma podobnosti in razlike, drugič pa moramo še kaj spremeniti, drugače razvrstiti, drugače zapisati, da opazimo vzorec oziroma pravilo.

Tem dejavnostim sledijo: nadaljevanje opaženega pravila, induktivno sklepanje z induktivnim sklepom ali napovedjo, posplošitev, oblikovanje hipoteze, preverjanje oziroma testiranje hipoteze in dokaz. Predstavili bomo delo z vzorci v raziskovanju kot procesu in metodi ter v dokazih.

Ura raziskovanja

Uro raziskovanja pričnemo z zapisom zaporedja števil.

1 2 4 8 16 32 64 128 ...

Učencem postavljamo vprašanja, ki razkrijejo nastanek zaporedja.

Pravilo zapišejo v zvezek in dodajo nadaljnjih šest števil. Poudarimo, da se zaporedje števil začne z **1**.

Nato učenci podčrtajo vse enice in sestavijo novo zaporedje iz podčrtanih enic:

1 2 4 8 16 32 64 128 ...

Novo zaporedje:

1 2 4 8 6 2 4 8 ...

Učenci naj v paru razložijo, kaj so opazili.

Katero število pričakuješ za številom 8?

Nadaljuj novo zaporedje. Kaj opaziš? Zapiši.

Preveri ali si zaporedje pravilno nadaljeval.

Raziskuj različna zaporedja, ki jih lahko sestaviš na predstavljeni način.

Primer zapisa: učenci na različne načine poudarijo cikličnost, to je ponavljanje istih števk. Zakaj se ne ponovi število 1?

1 2 4 8 6 2 4 8 6 2 4 8 6 2 4 8 6 2 4 8 6 ...

Razvoj dejavnosti

Morda se bo treba z razredom pogovoriti, kaj pomeni 'različna zaporedja'.

Postopek

Prvo zaporedje se začne z 1. Pravilo za nadaljevanje je množenje z 2.

Drugo zaporedje: Zaporedje enic prvega zaporedja.

Kako bi lahko ustvarili drugačno zaporedje?

Želeni odgovor: tako, da začnemo z drugim številom. (Mogoče je tudi spremeniti pravilo, torej množiti z drugim številom ali pa spremeniti računsko operacijo.)

Večina otrok je zmožna sestaviti svoja zaporedja z različnimi prvimi števili.

Naslednje zaporedje se prične s številom 3:

3 6 12 24 48 96 192 384 ...

Zakaj izpustimo število 2?

Naslednji korak je zapis vzorca z enicami, najprej enice podčrtamo, nato jih prepisemo.

3 6 12 24 48 96 192 384 ...

3 6 2 4 8 6 2 4 ...

Otroci naj poudarijo opaženo zanimivost.

3 6 2 4 8 6 2 4 8 6 2 4 8 ...

Zakaj se ne ponovi število 3?

Nadaljujete še z zaporedji, ki se začnejo s 7, 9 in 5. Otroci, ki so razumeli, kaj se dogaja, bodo prvo zaporedje izpustili.

7 4 8 6 2 4 8 6 2 4 8 6 2 4 ...

9 8 6 2 4 8 6 2 4 8 6 2 4 ...

Število 5 je posebej zanimivo, ker se ne ponavljajo štiri števila. Postopek se konča z istim številom enic.

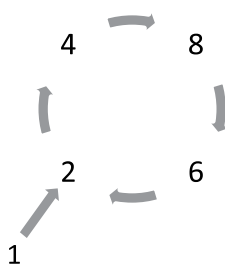
5 0 0 0 ...

Morda bodo otroci našli svoj način nazorne predstavitve pravila oziroma vzorca, ki se pojavlja.

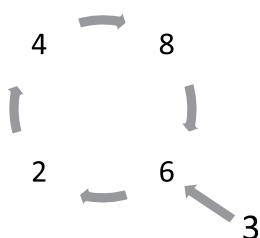
Preden nadaljujemo, je treba preveriti, zakaj zaporedja števil s sodim prvim številom niso zanimiva. Dejansko so del zaporedij, ki se začnejo z lihim številom.

2	4	8	6
4	8	6	2
6	2	4	8
8	6	2	4

Zaporedja s sodim prvim številom lahko predstavimo z naslednjim puščičnim prikazom:



Eden izmed učencev naj razloži, kako si razlaga puščični prikaz. Učenci naj ga naredijo za število 3.

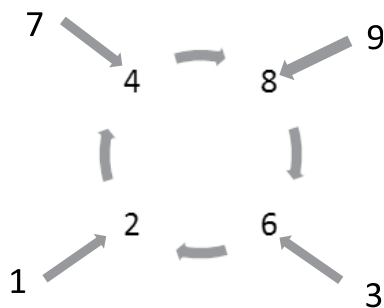


Lihim številom, razen številu 5, sledi eno od **sodih števil**, ki so vključena v **sodo zanko**.

Prva števila zaporedja 2, 4, 6 in 8 imajo isti puščični diagram. **Sodo število** je že vključeno v **sodo zanko (zanka sodih števil)**.



Vsa zaporedja z lihim prvim številom lahko združimo v en prikaz, le število 5 je izjema.



Puščični prikaz za število 5 je zelo preprost, vendar je ideja za prikaz za učence novost, če se srečamo s ponavljajočim se številom prvokrat.



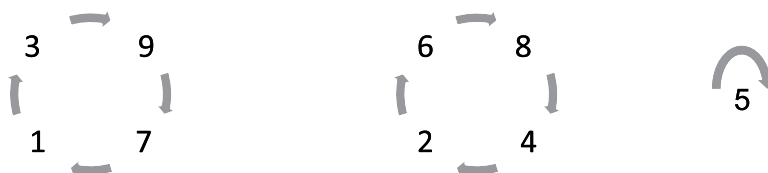
Razlaga

Bolj sposobne in motivirane učence lahko izzovemo, da razložijo, zakaj lihim številom sledijo soda števila in zakaj soda števila sestavljajo zanko. Ko pomnožimo liho število z 2, dobimo sodo število, ki je že v zanki. Če pomnožimo sodo število s številom 2, dobimo sodo število, in zato število ostane v sodi zanki.

Število 5 se obnaša drugače, ker je povezano s številom 10, ki je osnova številskega sistema, 10 je ravno dvakratnik števila 5. Ko število preide v večkratnik števila 10, se ponavlja 0 enic, ki so enice vseh nadaljnjih večkratnikov tega števila.

Možne razširitve dejavnosti

- Otroci lahko raziskujejo, kaj se zgodi z enicami števil, če števila množimo s 3. Naslednji puščični diagrami opisujejo relacije med enicami.



Liha števila, razen števila 5, tvorijo zanko in prav tako soda števila tvorijo zanko. Zakaj je tako? Zakaj se zopet obnaša število 5 drugače?

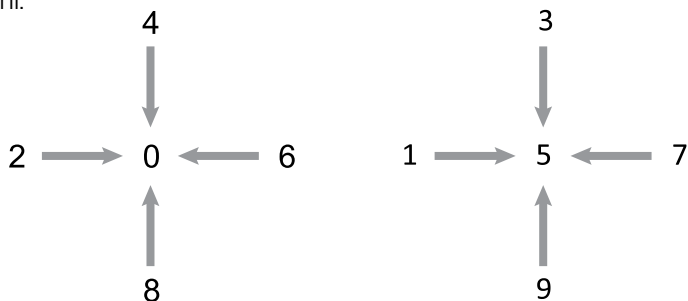
- Otroci lahko raziskujejo, kaj se zgodi z enicami, če ponavljajoče množimo s 4. V tem primeru nam enice povezujejo naslednji puščični diagrami:



V tem primeru tvorijo sode enice dve zanki. Lihe enice ponovno preidejo v sode, kakor hitro jih pomnožimo s 4.



3. Otroci lahko raziskujejo, kaj se zgodi, če enice ponavljajoče množimo s 5. V tem primeru se pojavita naslednja puščična diagrama, ki opisujeta relacije med enicami.



4. Otroci lahko raziskujejo, kaj se zgodi, če enice množimo ponavljajoče s števili 6, 7, 8 ali 9.

Literatura in viri

- 1 Kmetič S., Frobisher L. (1996). *Izzivi za mlade matematike: izzivi za učence, učitelje in starše*. Maribor: Založba Obzorja.

3.6.3 Preizkušanje z ulomki

Marija Magdič, Osnovna šola Turnišče

Avtor	Marija Magdič
Šola	Osnovna šola Turnišče
Učna tema	Razlika dveh ulomkov
Učni sklop	Številski izrazi in matematični problemi
Razred	7.
Potreben čas za izpeljavo	1 ura
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • utrjujejo seštevanje in odštevanje ulomkov, • raziskujejo in samostojno oblikujejo vzorce, • opazujejo in prepoznavajo pravilo v vzorcu in vzorec nadaljujejo, • oblikujejo posplošitev in preverijo pravilo.
Standardi	Učenec/učenka: • pozna in uporablja lastnosti številskih množic, • matematični jezik uporablja pri sporazumevanju.
Oblike in metode dela	• delo v parih
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• učni list
Potrebno predznanje	• seštevanje in odštevanje ulomkov, • opazovanje, induktivno sklepanje
Dejavnosti učencev	• raziskovanje vzorcev
Faze učnega procesa	• uvod – navodila za delo, • raziskovanje, • povzetek
Opombe, dodatna opažanja, posebnosti	Učencem s hitrejšim tempom dela moramo pripraviti še nekaj izzivov oziroma jih naučiti razširiti problemsko situacijo z vprašanji, kot sta: Kaj se zgodi, če...? Kaj bi še lahko raziskovali?
Možnosti za razširitev problema	Odštevanje ulomkov z enakimi števci in različnimi poljubnimi imenovalci ...
Prilagoditve za učence z učnimi težavami	Uporaba žepnega računalnika

Uvod

Po predelanem učnem sklopu Računske operacije z ulomki sem s sedmošolci izvedla uro raziskovalnega učenja, kjer naj bi se učenci ob aktivnem delu učili analiziranja, opazovanja, sklepanja, posploševanja ter preverjanja ugotovljenega.

Raziskovanje je potekalo ob reševanju nalog na učnem listu in je zajemalo več korakov. Učenci so naloge reševali individualno in v parih. Ob koncu učne ure pa smo opravili posplošitev raziskovanja. Delo učencev sem ves čas spremljala in jim po potrebi pomagala ter jih usmerjala s krajšimi namigi.

Potek ure

Uvod v raziskovanje

V uvodnem delu sem učencem napovedala, da bodo poskušali ob reševanju nalog na učnem listu poiskati pravilo, ki velja pri seštevanju in odštevanju ulomkov – katerih, pa bodo ugotovili sami. Nato sem jim razdelila učne liste.

Pred samim začetkom jim drugih navodil nisem dala, saj omenjeni operaciji že obvladajo. Svetovala sem jim le, da naj rezultatov ne krajšajo, kot smo to počeli pri delu doslej.

Raziskovanje

Raziskovanje je potekalo po posameznih korakih:

1. *Ugotavljanje razlike ulomkov s števcem 1, imenovalca pa sta zaporedni naravni števili.*

Prva naloga na učnem listu je bila sestavljena iz treh delov. Najprej je bilo treba izračunati razliko ulomkov s števcem 1, imenovalca teh ulomkov pa sta bili zaporedni naravni števili. Na podlagi teh izračunov so ugotovili pravilo in v nalogi b) zapisali rešitev brez izračuna, v nalogi c) pa so to še zapisali z besedami. Večina učencev je ta del opravila zelo uspešno, pri nekaterih pa je bil zapis nenatančen. Zapisali so le, da sta števca enaka, imenovalec pa je enak najmanjšemu skupnemu imenovalcu, in ne točno, da je števec v vseh primerih 1, imenovalec pa je enak produktu imenovalcev.

2. *Ugotavljanje razlike ulomkov s poljubnima enakima števčema, imenovalca pa sta zaporedni naravni števili.*

Po opravljeni prvi nalogi so nadaljevali raziskovanje razlik, kjer pa števec ni bil 1 kot v prejšnjih primerih, ampak poljubno naravno število, imenovalec pa sta ostali zaporedni naravni števili. Na podlagi izračuna so dokaj hitro ugotovili, da je števec razlike enak števcu ulomka, imenovalec pa zmnožku ulomkov. To so dokazali na konkretnem primeru, kjer je bilo treba zapisati razliko brez računanja. V nadaljevanju so morali sami zapisati tri podobne primere. Večina je primere zapisala pravilno, nekaj jih je tudi preverilo pravilnost razlik z izračunom. Pri nekaj učencih sem zasledila, da pri navajanju primerov niso upoštevali, da morata biti imenovalca zaporedni naravni števili. Svojo ugotovitev so še zapisali. Večina se jih je pri svojem zapisu osredotočila le na rezultat: da se števec v računu ne spremeni, imenovalec pa dobimo z množenjem obeh imenovalcev. Nekaj pa jih je bilo pri zapisu natančnejših in so opisali tudi ulomka, ki so ju odštevali.

Ugotovitev: Da morata ulomba imeti enak števec in drugi ulomek mora imeti imenovalcec ~~za~~ ena število večji kot ga ima prvi. Števec prepisemo, imenovalcec pa dobimo tako da pomnožimo imenovalca.

Slika 1: Primer natančnejšega zapisa ugotovitve. (Avtor izdelka: učenec 7. razreda)

3. Ugotavljanje vsote ulomkov s števcem 1, imenovalca pa sta zaporedni naravni števili.

Raziskovanje smo razširili še na seštevanje. Navodila za ta del raziskovanja so bila skromna, saj je bilo na učnem listu zapisano le, da naj v gornjih primerih spremeni znak minus v plus in ponovijo postopek. Samo računanje jim ni delalo težav, pa tudi pri zapisu ugotovitev so bili spretni, verjetno zaradi izkušenj iz prvega dela raziskovanja.

Ugotovili so, da je števec vsote enak vsoti imenovalcev, imenovalcec pa je enak produktu obeh imenovalcev.

3.
a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{11}{30}$$

b) $\frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{17}{72}$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} = \frac{21}{110}$$

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{101} = \frac{201}{10100}$$

c) Števec vsote je vsota imenovalcev, imenovalcec vsote množek obeh imenovalcev.

Slika 2: Razširitev problema na seštevanje je potekala brez težav. (Avtor izdelka: učenec 7. razreda)

4. Ugotavljanje vsote ulomkov s poljubnima enakima števčema, imenovalca pa sta zaporedni naravni števili.

Po opravljenem računskem delu so učenci za samo ugotovitev potrebovali nekoliko več časa. Samostojno je prišel do ugotovitve en sam učenec. Drugim sem pomagala z namigom, da se naj spomnijo, kako so prišli do rezultata pri prejšnji nalogi in ali se tudi v teh primerih v števcu skriva vsota imenovalcev. To je bilo dovolj, da so ugotovili pravilo.

5. Učenci s hitrejšim tempom dela so ob koncu razmišljali še o dveh vprašanjih:

Kaj se zgodi, če...?

Kaj bi lahko še raziskovali?

To nalogo so reševali v parih.

V samem začetku učenci niso vedeli, kaj naj bi počeli, in so potrebovali mojo pomoč, kar sem tudi predvidevala, saj s tako vrsto vprašanj nimajo izkušenj. Po krajšem razgovoru sem jim namignila, da naj opazujejo ulomke, s katerimi so računali, in razmislijo, kaj bi lahko spremenili.

Po izmenjavi predlogov s sošolcem in razmisleku so si zastavili vprašanja:

- Kaj se zgodi, če števca nista enaka?
- Kaj se zgodi, če imenovalca nista zaporedni števili?
- Kaj se zgodi, če sta ulomka poljubna?

Učenci so v poročilu zapisali izbrani račun in predviden rezultat. Nato so napoved preverili z izračunom. Ugotovili so, da v teh primerih pravilo ne velja.

Povzetek

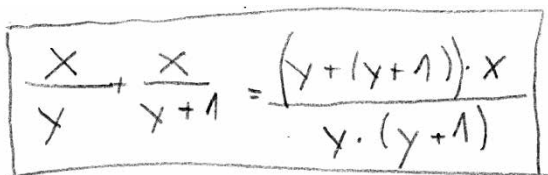
Ob koncu ure smo v razgovoru povzeli ugotovitve.

- opisali smo števce in imenovalce ulomkov, ki smo jih odštevali/seštevali,
- kolikšna je razlika/vsota v posameznih primerih,
- navedba primera, kjer bo veljalo enako pravilo,
- ali pravilo velja, če imenovalca nista zaporedni naravni števili,
- ali pravilo velja, če števca nista enaka.

Ugotovili so, da ugotovljeno pravilo velja le, če sta imenovalca zaporedni naravni števili, števca pa enaka.

Opisano raziskavo sem izvedla tudi z devetošolci zato, da bi ugotovila, kako razmišljajo oni in ali sploh obstaja razlika v ugotovitvah, izražanju.

Delo je potekalo ravno tako tekoče kot pri sedmošolcih. Velika razlika je bila pri zapisu ugotovitev, saj so uporabljali več matematične terminologije, nekateri so ugotovitev zapisali tudi z algebrskim izrazom.



$$\frac{x}{y} + \frac{x}{y+1} = \frac{(y + (y+1)) \cdot x}{y \cdot (y+1)}$$

Slika 3: Zapis vsote z algebrskim izrazom. (Avtor izdelka: učenec 7. razreda)

Nekaj učencev pa je ob zgoraj prikazanem pravilu ugotovilo še nekaj, kar so ponazorili s puščicami in zapisali tudi z besedami.

$$\bullet \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{27}{20}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{20}$$

$$\frac{12}{15}$$

$$\bullet 4 \cdot 5 = 20$$

$$\bullet 3 \cdot 5 = 15$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

$$12 \oplus 15 = 27$$

$$\bullet \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$$

$$\bullet 4 \cdot 5 = 20$$

$$\bullet 3 \cdot 5 = 15$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

$$15 \ominus 12 = 3$$

Slika 4: Ponazoritev pravila s puščicami je bilo enostavneje. (Avtor izdelka: učenec 7. razreda)

Zapis z besedami je nekoliko zahtevnejši.

*Števce je enak vredti zmnožilca števila 1. in imenovalca 2. ulomka
ter zmnožilca števila 2. in imenovalca 1. ulomka.
Imenovalci je enak zmnožilcu imenovalcev obeh ulomkov.*

Slika 5: Zapis ugotovitve z besedami. (Avtor izdelka: učenec 7. razreda)

V nadaljevanju so razmišljali še o vprašanju, kaj se zgodi, če ... Pri tem so bili nekoliko spretnější kot sedmošolci in niso potrebovali moje pomoči.

Zastavili so si naslednja vprašanja:

- Kaj se zgodi, če zmnožimo ulomka?
- Kaj se zgodi, če ulomka delimo?
- Kaj se zgodi, če sta ulomka poljubna?

Pri raziskovanju prvih dveh vprašanj niso prišli do posebnih ugotovitev, razen da so pri prvi nalogi enake razlike in produkti in da prej ugotovljeno pravilo ne velja, kar so tudi pričakovali, in je bilo tako raziskovanje nesmiselno. Prijetno presenečena pa sem bila ob spremljanju dela učenke, ki je obe zgoraj navedeni pravili sistematično raziskala, in to tudi zapisala v poročilu.

mat. 4

Kaj se zgodi če ... ?

$$\frac{3}{3} + \frac{3}{5} = \frac{15}{15} + \frac{9}{15} = \frac{24}{15} \leftarrow \begin{array}{l} \text{SEŠTEVANJE} \\ \text{imenovalca nista zaporedna} \\ \text{PRAVILO VELJA} \end{array}$$

$$\frac{3}{3} - \frac{3}{5} = \frac{15}{15} - \frac{9}{15} = \frac{6}{15} \leftarrow \begin{array}{l} \text{ODŠTEVANJE} \\ \text{imenovalca nista zaporedna} \\ \text{PRAVILO VELJA} \end{array}$$

$$\frac{3}{3} + \frac{4}{5} = \frac{15}{15} + \frac{12}{15} = \frac{27}{15} \leftarrow \begin{array}{l} \text{SEŠTEVANJE} \\ \text{imenovalca nista zaporedna in} \\ \text{števec nista enaka} \\ \text{PRAVILO } \uparrow \uparrow \text{ NE VELJA} \\ \text{PRAVILO } \times \text{ VELJA} \end{array}$$

$$\frac{3}{3} - \frac{4}{5} = \frac{15}{15} - \frac{12}{15} = \frac{3}{15} \leftarrow \begin{array}{l} \text{ODŠTEVANJE} \\ \text{imenovalca nista zaporedna in} \\ \text{števec nista enaka} \\ \text{PRAVILO O IMENOVALCU VELJA,} \\ \text{PRAVILO O ŠTEVCU NE VELJA} \\ \text{PRAVILO O } \times \text{ VELJA!} \end{array}$$

PRAVILO $\times$ velja vseponod!**Slika 6:** Sistematičen zapis preizkušanja pravila. (Avtor izdelka: učenec 7. razreda)

Ob koncu dela devetošolcev ugotavljam, da jim primanjkuje znanja in izkušenj za razširitev problema, kar je razumljivo, saj se s tem ne srečajo pogosto.

Refleksija

Učenci so se z raziskovanjem, kjer se na podlagi dejavnosti učijo opazovanja, iskanja pravil in posploševanja, že srečali v lanskem šolskem letu, tako da so imeli že nekaj izkušenj. Glede na omenjeno, so pri tej uri dobili dokaj skromna navodila za delo. Delo je potekalo v prijetnem delovnem ozračju, tekoče. Presenetila me je spretnost večine učencev pri delu, pa tudi sam zapis ugotovitev, ki so bila zapisana preprosto, včasih malo nenatančno, kljub temu pa sem lahko razbrala, da so ugotovili bistvo. Pri nekaj učencih pa so se pojavile težave pri samem zapisu ugotovitev. Tem sem ob spremljanju njihovega dela pomagala s podvprašanji. Zaradi precej različne hitrosti dela (nekaj jih je zelo počasnih), vsi učenci niso končali dela, počasnejšim je zmanjkalo časa predvsem za posplošitev pri zadnji nalogi. Večina pa je delo končala in bila uspešna.

Večje težave so se pojavile pri razširitvi problema, ko so razmišljali, kaj bi se zgodilo, če ... Na podlagi mojih usmeritev jim je uspelo zastaviti nekaj vprašanj. Izkazalo se je, da tega še ne obvladajo in jih bo treba tega še naučiti.

Literatura in viri

- 1 Kmetič, S. (2011). *Vzorci v OŠ – podlaga za razvoj matematičnega mišljenja. Inter-no gradivo PRS* (8. 12. 2011).
- 2 Strnad, M. in drugi (2000). *Presečišče 7. Ljubljana: DZS.*
- 3 Žakelj, A., et al. (2011). *Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (1. 12. 2011).*

Priloga



Učni list 1: Preizkušanje z ulomki

3.6.4 Vzorci v fiziki

Ana Kodelja, Osnovna šola Kanal

Avtor	Ana Kodelja
Šola	Osnovna šola Kanal
Učna tema	Pospešeno gibanje in drugi Newtonov zakon
Učni sklop	Pot pri enakomerno pospešenem gibanju
Razred	9.
Potreben čas za izpeljavo	15 minut
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • vedo, da je pot premo sorazmerna ploščini lika, ki ga omejuje graf $v(t)$, • uporabijo enačbo za računanje poti pri enakomerno pospešenem gibanju, če telo na začetku miruje, • uporabijo matematični postopek pri reševanju naloge iz življenjske situacije.
Standardi	Učenec/učenka: • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja, • življenjsko situacijo prikaže z modelom, • uporabi preglednice, grafe, ipd. za prikaz medsebojne odvisnosti količin.
Oblike in metode dela	• frontalna, • individualna
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• geometrijsko orodje
Potrebno predznanje	• ploščina trikotnika, • risanje grafov
Dejavnosti učencev	• računanje ploščine, • iskanje pravila
Faze učnega procesa	• obravnava nove snovi
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Učitelj: Ali je naloga postavljena tako, da dosežem želeni cilj? Učenec: Kaj sem novega spoznal, kje bom lahko uporabil?

Uvod

Ker poučujem tudi fiziko, sem se odločila, da predstavim primer, ko je mogoče vzorce uporabiti tudi pri tem predmetu. Učencem seveda ne razlagam, da gre za vzorec, ampak poskušam s tem doseči, da učenci »sami« pridejo do nekega postopka – npr. obrazca.

V tem primeru sem se odločila, da pokažem, kako je mogoče tako pridobiti enačbo za računanje poti pri enakomerno pospešenem gibanju.

Primer

Enakomerno pospešeno gibanje obravnavamo s pomočjo klanca. Uporabimo brnač, ki nam omogoča, da lahko izmerimo opravljeno pot. Ker učenci hitreje vidijo povezavo med izračunanimi podatki, za pridobivanje obrazca raje uporabim prosti pad ($g = 10 \frac{m}{s^2}$).

Učenci dobijo naslednjo nalogo:

Kamen spustimo z visokega mostu v reko. Zračni upor zanemarimo.

Katere podatke poznaš za to gibanje. Zapiši jih.

- Izdelaj preglednico in nariši graf, ki prikazuje odvisnost hitrosti od časa za prvih 5 sekund gibanja.
- S pomočjo grafa izračunaj, za koliko metrov pade telo v prvih petih sekundah padanja. Podatke zapisuj v preglednico, ki prikazuje odvisnost poti od časa.
- Poišči računski postopek (obrazec), s pomočjo katerega bi lahko pot izračunal.

Zapiski učenca

Kot primer vzorca vzamemo preglednico odvisnosti poti od časa. Učenci so pot izračunali s pomočjo ploščine trikotnika. V našem primeru dobimo zaporedje: 5, 20, 45, 80, 125. Učence spodbudim, da poiščejo pravilo. Po navadi učenci že sami razmišljajo o pravilu, preden jih na to opozorim. Ugotovijo, kako naraščajo členi in na podlagi razlike napovedo naslednji člen. Torej:

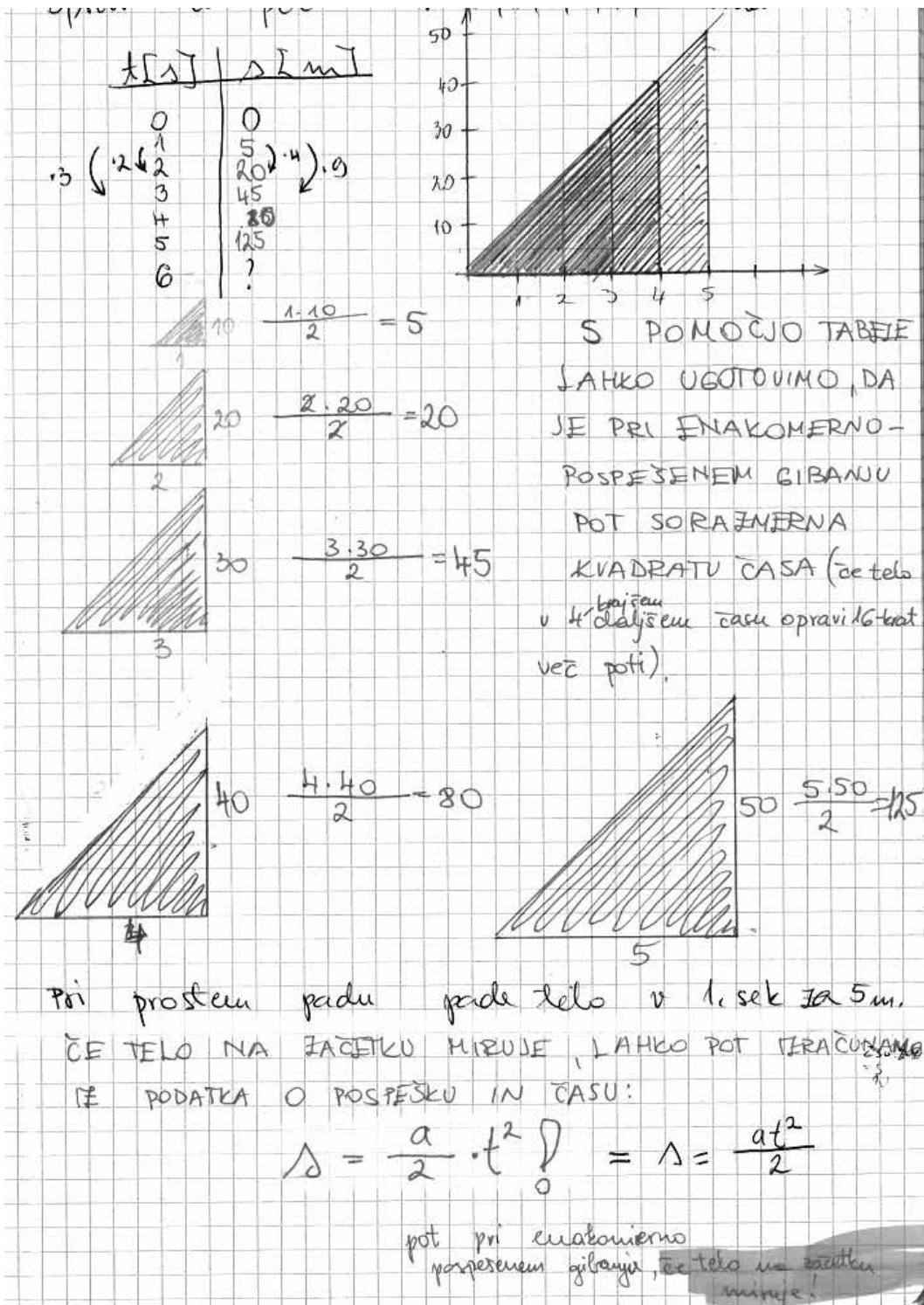
$$5 + 15 \rightarrow 20 + 25 \rightarrow 45 + 35 \rightarrow 80 + 45 \rightarrow 125 + 55 \dots$$

Izzovem jih z vprašanjem, kako bi s pomočjo ugotovljenega pravila izračunali pot, ki jo opravi telo v 10 sekundah. Spoznajo, da bi morali izračunati še vse vmesne člene; kar jih hitro usmeri na iskanje drugega pravila, ki bi bilo bolj univerzalno.

Tako pridejo do sklepa za n -ti člen, za katerega velja

$$a_n = a_1 \cdot n^2.$$

Do obrazca za računanje poti je potem treba razmisliti še, kako dobimo a_1 . Vemo, da je to polovica pospeška. Od tu naprej se prepustimo fiziki ...



Slika 1: Zapis v zvezek kaže prepletanje slikovnih in številskih vzorcev. (Avtor izdelka: učenec 9. razreda)

3.7 Različni načini reševanja nalog z vzorci

Sonja Rajh, Zavod RS za šolstvo

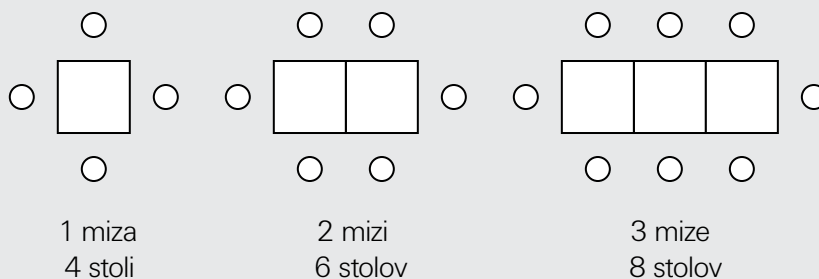
V posodobljenem učnem načrtu se pojavlja nova vsebina: Vzorci. Učitelji mrzlično iščejo naloge o vzorcih, a se ne zavedajo, da so to vsebino vedno poučevali, samo da je niso poimenovali s tem izrazom.

V nadaljevanju navajamo nekaj nalog, ki bodo učiteljem morda v pomoč, ko jim bo zmanjkalo idej, ali pa da jih spomni, da so tudi v takih problemskih nalogah vzorci.

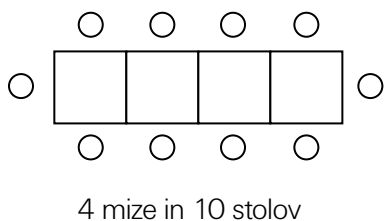
Naslednja naloga je problem iz vsakdanjega življenja. Nalogo lahko rešujejo učenci od prvega do devetega razreda. Nekatera vprašanja pri mlajših učencih izpustimo, ali pa jim jih prilagodimo.

Naloga 1

V restavraciji postavljajo mize skupaj v eni vrsti na način, kot je ponazorjeno na naslednjih treh slikah.



- a) Nariši sliko s štirimi mizami postavljenimi v eni vrsti. Kaj lahko izračunaš?

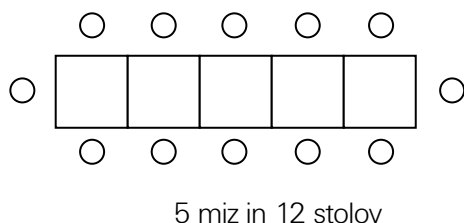


Učenec z narisano sliko potrdi, da je prepoznal pravilo v vzorcu in da ga zna nadaljevati. Pričakujemo odgovor, da lahko izračunaš število stolov, ki jih potrebujemo za to postavitve, ali največje možno število oseb, ki jih lahko posedemo ob štirih mizah postavljenih v eni vrsti ipd.

- b) Koliko stolov lahko na podoben način razporedimo okoli petih miz, postavljenih v eni vrsti?

Tudi pri reševanju tega primera si lahko učenci pomagajo s sliko, pričakujemo pa, da bodo začeli podatke sistematično zbirati.

Reševanje s sliko:



Sistematičen zapis podatkov:

- 1 miza in 4 stoli
- 2 mizi in 6 stolov
- 3 mize in 8 stolov
- 4 mize in 10 stolov
- 5 miz in 12 stolov

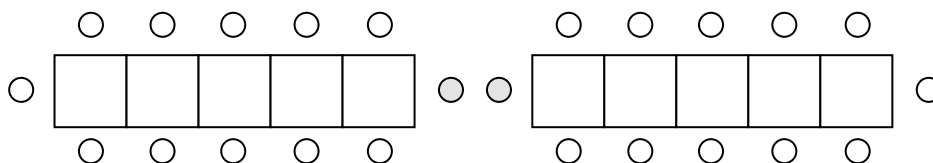
Morda bodo mlajši učenci pri iskanju odgovora na naslednje vprašanje c) potrebovali še podvprašanja: Največ koliko oseb lahko posedemo za šestimi (sedmimi, osmimi, devetimi) mizami postavljenimi v eni vrsti?

- c) Koliko stolov potrebujemo za postavitve z desetimi mizami postavljenimi v eni vrsti? Ali potrebujemo dvakrat več stolov kot v primeru b)?

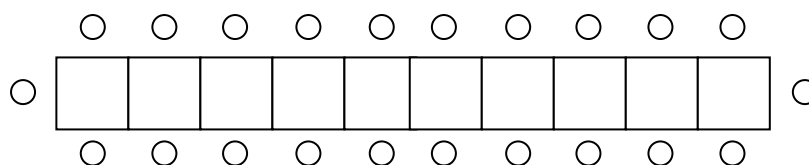
S tem vprašanjem preverjamo, ali učenci razumejo, na kakšen način se povečuje število stolov. Vedo, da okoli ene mize lahko postavijo štiri stole. Ali za postavitve z dvema mizama potrebujemo dvakrat več stolov? Ne. Le za dva več.

S tem preverjamo tudi, ali učenci razumejo, kaj je **dvakrat več** in kaj **za dva več**.

Za postavitev s petimi mizami v eni vrsti potrebujemo 12 stolov. Ali za postavitev z desetimi mizami v eni vrsti potrebujemo dvakrat več stolov kot za postavitev s petimi mizami v eni vrsti? Ali torej potrebujemo $2 \cdot 12 = 24$ stolov? Ne.



Učenci ugotovijo, da morajo vmesna stola (na zgornji sliki obarvana sivo) odstraniti, če želijo sestaviti postavitev z desetimi mizami, postavljenimi v eni vrsti, torej:



S pomočjo slike ali s sistematičnim zapisovanjem števila stolov, ki jih potrebujemo za posamezno postavitev miz, bodo tako ugotovili, da ob 10 miz, postavljenih v eno vrsto, lahko postavimo 22 stolov.

- d) V tako postavitev miz dodamo še eno mizo. Koliko stolov moramo dodati?

Učenci lahko z risanjem slik ali s sistematičnim zapisovanjem ugotovijo, da moramo dodati le dva stola. Vsako naslednjo sliko dobimo, če dodamo (v postavitev vrinemo) mizo in dva stola.



Ta 'grafična' ugotovitev lahko učencem pomaga, da pri naslednjem vprašanju sistematično uredijo številski opis, npr. s preglednico. Ko se za 1 povečuje število miz, se za 2 povečuje število stolov.

- e) Sistematično zapisuj število miz in število stolov ob njih.

Mlajšim učencem pomagamo, da sistematično zbirajo in predstavijo podatke. Morda jim ponudimo že izdelano preglednico, v katero vpisujejo nekatera ali vsa števila.

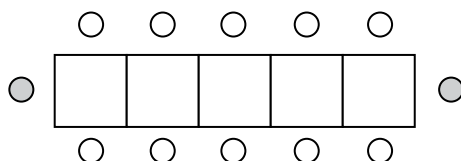
Število miz	1	2	3	4		6	7	8	9	10
Število stolov	4				12	14		18	20	

- f) Koliko ljudi lahko sedi za n -timi mizami, postavljenimi v eni vrsti? Koliko stolov potrebujemo?

Algebrski zapis splošnega člena pričakujemo od učencev šele v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju, ubesedene posplošitev pa lahko spodbujamo že prej.

Nalogo lahko povežemo tudi s sedežnim redom na zabavi. Na skrajnih koncih pravokotne mize (ki je sestavljena iz n miz, postavljenih v eni vrsti) naj sedita gostitelj in gostiteljica (morda kralj in kraljica), ostale ljudi-goste na zabavi, posedemo ob obeh daljših straneh pravokotnika.

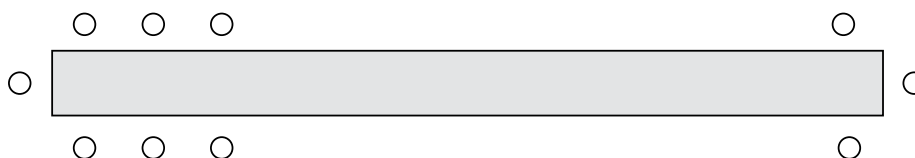
S pomočjo slik naj učenci opisujejo, kako se ob povečanju števila miz, postavljenih v eni vrsti povečuje število stolov za goste (stoli bele barve) in gostitelje (stoli sive barve).



Odgovor na zastavljeno vprašanje lahko poiščemo v spodnji preglednici:

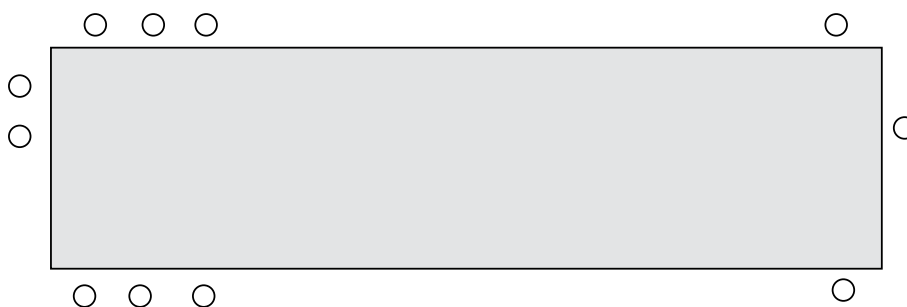
Število miz	1	2	3	4	5	6	...	n
Število stolov za goste	2	4	6	8	10	12		$2n$
Število stolov za gostitelje	2	2	2	2	2	2		2
Število vseh stolov	4	6	8	10	12	14	...	$2n + 2$ $2 \cdot (n + 1)$

Drugi od možnih načinov reševanja: Učenci si lahko predstavljajo, da ob mizah, postavljenih v eni vrsti (ki jih prekrijemo s sivim prtom ter tako povežemo v eno dolgo mizo-pravokotnik), lahko postavimo n stolov zadaj, n stolov spredaj in po enega levo in desno od »dolge« mize. Skupaj torej $n + n + 1 + 1 = 2n + 2$ stolov.



Od te posplošitve je še zahteven korak do splošne formule za izračun obsega poljubnega pravokotnika z dolžinami stranic n in m .

Oziroma, za pravokotno mizo lahko postavimo n stolov zadaj in n stolov spredaj, ter m stolov levo in m stolov desno od mize. Skupaj je to $m + m + n + n = 2m + 2n$ stolov oziroma $2(m + n)$ stolov, kar predstavlja obseg pravokotnika dolžine n in širine m .



Ob tem dobimo idejo za razširitev problema. Morda pa učenci že sami ugotovijo, da v tem primeru število miz predstavlja ploščino sivega pravokotnika. Seveda je to število enotskih miz, iz katerih je pravokotnik sestavljen. Torej je pod sivim prtom »skritih« $m \cdot n$ enotskih kvadratkov – miz.

- g) Najmanj koliko miz postavljenih v eni vrsti potrebujemo, da posedemo 24 ljudi?

Mlajši učenci bodo verjetno odgovor na vprašanje iskali z uporabo ustreznega didaktičnega materiala ali z risanjem.

S pomočjo prve slike iz primera f) lahko ugotovijo, da bosta na skrajnih koncih dolge mize sedela gostitelj in gostiteljica, torej preostale ljudi – goste na zabavi, ki jih je $24 - 2 = 22$, posedemo ob obeh daljših stranicah pravokotnika po $22 : 2 = 11$ na vsaki strani. Torej 24 ljudi posedemo tako: 1 levo od mize, 1 desno od mize, 11 zadaj za mizo in 11 spredaj. Tako potrebujemo 11 miz.

Starejši učenci se bodo reševanja lotili z enačbo $2n + 2 = 24$ in izračunali, da je $n = 11$. Potrebujemo torej 11 miz, postavljenih v eni vrsti, da lahko posedemo 24 ljudi. Uzavestiti je treba dogovor, da mize postavljamo ves čas na enak način in da so stoli zasedeni.

- h) Koliko miz, postavljenih v eni vrsti, potrebujemo, da posedemo 100 gostov?

Sklepanje je podobno kot v prejšnjem primeru. Imamo dva gostitelja in 98 gostov. Gostitelja sedita skrajno levo in desno, goste pa razdelimo po $98 : 2 = 49$ zadaj in 49 spredaj. Tako potrebujemo tudi 49 miz.

Do enakega odgovora pridemo tudi z reševanjem enačbe $2n + 2 = 100$.

- i) Ali je katera od postavitev miz primerna, da posedemo liho število ljudi? Utemelji.

Nobena postavitev miz, ki jih postavljamo v eni vrsti, ni ustrezna za liho število ljudi, če so vsi stoli zasedeni. Levo in desno od »sestavljene« dolge mize imamo dva stola (po enega levo in enega desno), torej sodo število. Tudi stoli, ki so postavljeni zadaj in spredaj so po parih, kar smo pokazali pri odgovoru na vprašanje d). Vsota dveh sodih števil pa je soda. Vsi stoli v taki postavitvi so »po parih«.

- j) Še sam zapiši vprašanje, ki se ti poraja ob teh slikah.

Koliko pogrinjkov potrebujemo za posamezno postavitev miz?

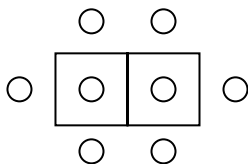
Koliko krožnikov potrebujemo za posamezno postavitev, če vsak udeleženec pri mizi dobi plitvi, globoki in desertni krožnik?

Koliko nog imajo mize in stoli skupaj v posamezni sliki?

- k) Ali se ti zdi postavitev miz v eni vrsti optimalna? Predstavlja si, da si vodja restavracije, zato postavlja mize na drugačen način in sestavi nalogo za svoje sošolce.

Za mlajše učence je pomembno, da to problemsko situacijo predstavijo z mizami in stoli ali s ponazorili, kot so ploščice in žetoni, šele potem s slikovnimi materiali oziroma z risano shemo in nazadnje še računsko.

Lahko se zgodi, da učenci slike napačno razumejo in krogce postavijo tudi v notranjost lika, ki predstavlja mizo.



V prvem VIO lahko ob tem utrdijo pojem lika. Ali učenci razumejo, kaj je kvadrat? (Lipovec A. (2012): Je kvadrat lik ali okvir?)

Morda nekateri mlajši učenci sploh ne bodo razumeli, kako lahko mizo ponazorimo s kvadratom. Kje so pa noge od mize?

Kontekst predstavljene naloge je primeren za pouk matematike po vsej vertikali. Z reševanjem te naloge ne realiziramo samo ciljev v zvezi z vzorci, ampak še mnoge druge. Nekaj jih je zbranih spodnji v preglednici.

	Cilji iz učnega načrta Učenci/učenke:	Razvijamo pa tudi
1. VIO	• uporabijo računske operacije pri reševanju problemov, • predstavijo podatke s preglednico, • zberejo in uredijo podatke ter jih čim pregledneje predstavijo in preberejo, • rešijo problem, ki zahteva zbiranje in urejanje podatkov, njihovo pregledno predstavitev ter branje in interpretacijo, • predstavijo problemsko situacijo z različnimi didaktičnimi ponazorili, s konkretnimi in slikovnimi materiali, • besedno in grafično rešujejo probleme, ki so predstavljeni na različnih ravneh: konkretni, grafični, • spoznajo sestavo (besedilnega) problema in ločijo: (besedilo), podatke, vprašanje, • obnovijo problem s svojimi besedami, • spoznajo različne strategije reševanja problemov in jih uporabljajo pri reševanju podobnih problemov, • oblikujejo slikovne in geometrijske vzorce, • prepoznajo pravilo v slikovnem in geometrijskem vzorcu in vzorec nadaljujejo, • problem analizirajo, ga sistematično rešijo in pri tem uporabljajo različne strategije reševanja, • nadaljujejo slikovne in geometrijske vzorce, • sistematično rešujejo probleme (branje besedila, oblikovanje vprašanj, analiza podatkov, matematični zapis postopka reševanja, grafična predstavitev, kritično vrednotenje rešitev, oblikovanje odgovorov), • analizirajo in obnovijo problem s svojimi besedami ter utemeljijo rešitev;	• ustvarjalnost, • induktivno sklepanje, • predstavo o obsegu (število stolov) in ploščini (število miz) • matematično mišljenje, • geometrijske predstave, • povezovanje znanj znotraj matematike in tudi širše (interdisciplinarno), • uporabnost matematike v vsakdanjem življenju, • razmišljanje, sklepanje, izpeljevanje ugotovitev, • posploševanje, abstrahiranje, • raziskovanje in reševanje problemov, • zbiranje, urejanje, analiziranje podatkov ter interpretiranje in vrednotenje podatkov oziroma rezultatov, • posploševanje, ki pripelje do zapisa algebrskih izrazov, • analitično mišljenje, ustvarjalnost, sposobnost sintetiziranja, posploševanja, • kritično razmišljanje, • interpretiranje, utemeljevanje, argumentiranje rešitev, • posploševanje in abstrahiranje, • sistematično zapisovanje, • predvidevanje in preverjanje, • prepoznavanje pravilnosti, zakonitosti in posploševanje, • postavljanje ključnih raziskovalnih vprašanj, • kritično razmišljanje o potrebnih in zadostnih podatkih, • dekodiranje in prevajanje matematične situacije iz naravnega jezika v simbolni jezik in obratno, • izbiranje primernih sredstev in predstavitev za izražanje in sporočanje rešitev.

	Cilji iz učnega načrta Učenci/učenke:	Razvijamo pa tudi
2. VIO	• izmerijo s konstantno nestandardno in standardno enoto ploščino pravokotnika in kvadrata, • izračunajo ploščino pravokotnika in kvadrata (brez uporabe obrazcev), • izračunajo obseg pravokotnika in kvadrata, • spremembo ene količine znajo povezati s spremembo druge količine, • rešijo besedilne naloge (probleme), • izpolnijo preglednice, • spoznajo in uporabljajo različne tehnike štetja, • beležijo štetje v preglednice, • oblikujejo preglednico za zapis podatkov, • dane (zbrane) podatke smiselno uredijo v preglednico, • postavljajo raziskovalna oziroma problemska vprašanja, • rešijo probleme in pri tem uporabljajo različne strategije, • opazujejo vzorec, prepoznajo pravilo v vzorcu in ga nadaljujejo, • oblikujejo vzorce, • berejo z razumevanjem (samostojno oblikujejo vprašanja, razpravljajo o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi, izpišejo bistvene podatke oziroma odnose med podatki, poiščejo manjkajoče podatke), • razčlenijo problemsko situacijo, jo predstavijo z različnimi ponazorili in matematičnim zapisom, • postavljajo raziskovalna vprašanja, • rešijo probleme in pri tem uporabljajo različne strategije, • matematična pravila, obrazce, definicije ubesedi-jo in jih uporabijo pri reševanju problemov, • opazujejo vzorec, prepoznajo pravilo v vzorcu in ga nadaljujejo, • oblikujejo slikovne in geometrijske vzorce (poljubno ali po pravilu);	
3. VIO	• uporabljajo strategije za računanje obsega in ploščine večkotnika (npr. uporaba obrazca, merjenje, preoblikovanje na znane like), • uporabljajo računske zakone pri spretnem računanju, • izračunajo vrednost izraza, ki vsebuje črkovno oznako za izbrano vrednost oznake, • računajo z algebrskimi izrazi (primer: $a + a = 2 \cdot a$), • opazujejo vzorec in ugotovijo pravilo, • izračunajo vrednost številskih izrazov, • razumejo pomen spremenljivk v izrazih, • prepoznajo izraze s spremenljivkami, • izračunajo vrednost izraza s spremenljivkami za izbrane vrednosti spremenljivk, • v izrazu prepoznajo in razlikujejo člene in faktorje, • računajo z algebrskimi izrazi: seštevajo, odštevajo, množijo enočlenik z veččlenikom, • izpostavijo skupni faktor,	

	Cilji iz učnega načrta Učenci/učenke:	Razvijamo pa tudi
	• opazujejo vzorce, ugotovijo pravilo in ga zapišejo z algebrskim izrazom, • poenostavijo izraz s spremenljivkami in izračunajo njegovo vrednost za izbrano vrednost spremenljivke, • uporabljajo primerne prikaze in preglednice za prikaz življenjskih situacij, • raziskujejo in samostojno oblikujejo vzorce, • opazujejo in prepoznajo pravilo v vzorcu in vzorec nadaljujejo, • uporabljajo geometrijsko znanje za reševanje življenjskih problemov, • samostojno oblikujejo vzorce, • opazujejo in prepoznajo pravilo v vzorcu in vzorec nadaljujejo, • prepoznajo pravilo v vzorcu, poiščejo posplošitev in zapišejo algebrski izraz, • opazujejo in prepoznajo pravilo v številskem zaporedju in zaporedje nadaljujejo, • prepoznajo pravilo v zaporedju, poiščejo posplošitev in zapišejo algebrski izraz, • modelirajo abstraktne (življenjske) situacije ali procese (oblikujejo algebrski izraz, formulo, enačbo, prikaz itd., ki prikazuje dano situacijo).	

Naloga 2

Oglej si spodnje tri slike. Zapiši pravilo, po katerem iz prejšnje slike sestaviš naslednjo.



1. slika



2. slika



3. slika

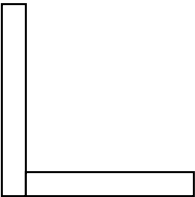
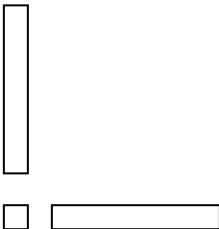
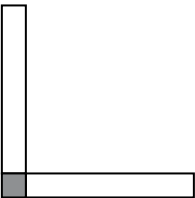
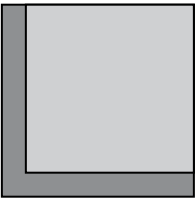
- Koliko kvadratkov potrebuješ za 37. sliko?
- Koliko kvadratkov potrebuješ za n -to sliko?

Učenci se posploševanja (generalizacije) lotijo na različne načine.

Za mlajše učence je priporočljivo, da narišejo še nekaj naslednjih slik. Ugotovijo, da predhodni sliki dodaš dva kvadrata in dobiš naslednjo sliko. Spodbujamo jih, da prepoznajo zakonitosti, napovedujejo, posplošujejo in induktivno sklepajo. Zelo pomembno je, da jih navajamo k sistematičnemu zapisovanju ugotovitev.

Seveda je vprašanje b) (posploševanje, ki pripelje do zapisa algebrskih izrazov) namenjeno le učencem v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju.

Nekateri učenci pri reševanju take naloge sistematično zapisujejo število kvadratkov v preglednico, drugi sestavljajo številsko zaporedje, tretji se lotijo reševanja na različne grafične načine.

1. način reševanja		$37 + 36$ $n + (n - 1)$
2. način reševanja		$2 \cdot 36 + 1$ $2 \cdot (37 - 1) + 1$ $2 \cdot (n - 1) + 1$
3. način reševanja		$2 \cdot 37 - 1$ $2 \cdot n - 1$
4. način reševanja		$37^2 - 36^2$ $n^2 - (n - 1)^2$

Brez učiteljeve pomoči vsi učenci ne ugotovijo, da so navedene rešitve ekvivalentne. Seveda je v razredu najlažje nalogo rešiti frontalno na način, ki je blizu učitelju, a v tem primeru izgubimo dragocene različne oblike zapisa rešitve. Zelo pomembno je, da se učitelj zna vživeti v otrokov način razmišljanja, kar pa je zelo težko, posebej če je učitelj nalogo rešil na drugačen način kot učenec. Tudi če sta oba rešila nalogo pravilno, sta končna zapisa tako zelo različna, da lahko učitelj spregleda pravilnost učenčeve rešitve. Še težje pa je pravilnost razmišljanja učenca ugotoviti, če je v zapisu naredil računsko ali kakšno drugo napako, ali pa če postopka reševanja ni sistematično in pregledno zapisoval. Takega učenca, ki je »obtičal«, je težko voditi po njegovi poti naprej, lažje mu je svetovati: »Raje delaj, tako kot sem jaz. To je preverjena pot do rešitve.« Zato je dobro, da učenci svoj način razmišljanja in posploševanja tudi ubesedijo. S tem razvijajo svoj besedni zaklad, utemeljevanje, argumentiranje in uporabljajo matematično terminologijo.

Odgovor na vprašanje a) je trivialen. Vsi učenci, ki so razmišljali pravilno, čeprav na različne načine, so prišli do istega odgovora: Za 37. sliko potrebujemo 73 kvadratkov. Glejte preglednico na naslednji strani.

Seveda se v tem primeru takoj porajajo nova vprašanja: Ali za 48. sliko potrebujemo 84 kvadratkov? Ali za 23. sliko potrebujemo 32 kvadratkov? Kaj pa za 9. sliko? Ali za 103. sliko potrebujemo 301 kvadrata? Učenci naj utemeljijo svoj odgovor.

V tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju, ko učenci že znajo posplošitev zapisati z algebrskim izrazom in tako rešiti še primer b), lahko na ta nova vprašanja odgovorijo tako, da izračunajo vrednost dobljenega izraza za izbrano vrednost spremenljivke.

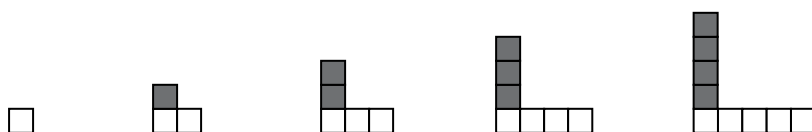
Toda pravilna odgovora na vprašanje b) sta lahko zapisana na različne načine. Tukaj je priložnost in izziv, da preko geometrije in vzorcev razvijamo algebro. Predlagamo, da vse dobljene izraze učenci preoblikujejo do izbranega zapisa, npr. do $2 \cdot n - 1$.

Koliko kvadratkov potrebuješ za 37. sliko?	Koliko kvadratkov potrebuješ za n -to sliko?
$37 + 36 = 73$	$n + (n - 1) = n + n - 1 = 2 \cdot n - 1$
$2 \cdot (37 - 1) + 1 = 2 \cdot 36 + 1 = 72 + 1 = 73$	$2 \cdot (n - 1) + 1 = 2 \cdot n - 2 + 1 = 2 \cdot n - 1$
$2 \cdot 37 - 1 = 74 - 1 = 73$	$2 \cdot n - 1$
$37^2 - 36^2 = 1369 - 1296 = 73$	$n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - (n^2 - 2 \cdot n + 1) =$ $= n^2 - n^2 + 2 \cdot n - 1 = 2 \cdot n - 1$

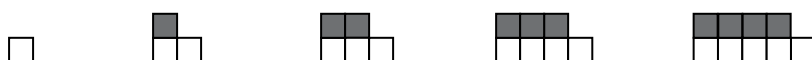
Ob tem izrazu se spomnimo, da je $2 \cdot n - 1$ splošen zapis za liha števila. Učenci naj vstavljajo v dobljen izraz za n zaporedna naravna števila in preverijo, ali so dobljena števila res liha.

n	$2 \cdot n - 1$
1	$2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$
2	$2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$
3	$2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$
4	$2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$
5	$2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9$

To lahko dokažemo tudi s slikami »likov L«, ki jih preoblikujemo.



Sivo obarvane kvadratke prestavimo, kot kažejo naslednje slike.



Iz slik je razvidno, da sta po en siv in en bel kvadrata v paru, na vsaki sliki pa ostane en bel kvadrata, ki je brez para. Zato je na vsaki sliki ponazorjeno neparno (liho) število.

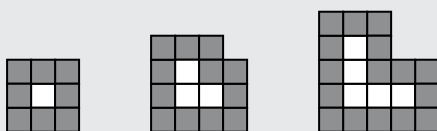
Na podoben način so na spodnjih slikah ponazorjena parna (soda) števila, saj so vsi kvadratki po parih (par tvori en siv in en bel kvadrata).



Tako smo preko vzorcev ponovili še soda in liha števila. In prav to je čar vzorcev, najdemo jih lahko pri vseh vsebinah in tako prepletamo različna znanja in spretnosti znotraj matematike. Marsikatero zanimivost najdejo učenci sami, če jim le ponudimo dovolj odprtih situacij in jim dovolimo raziskovati.

Nalogo lahko tudi nadgradimo

Koliko kvadratkov potrebujemo, da ogradimo prejšnje like oblike L? Svoj način reševanja primerjaj s sosedom.



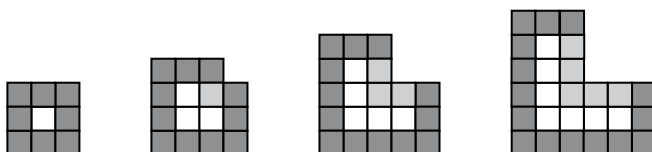
Seveda učitelji pričakujemo sistematično zapisovanje v preglednico ali zapis z zaporedji števil kvadratkov in tudi posploševanje na ta način.

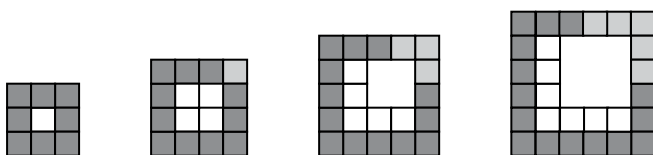
Številka slike	1	2	3	4	5	...	37	...	n
Število (belih) kvadratkov v liku L									
Število (sivih) mejnih kvadratkov									

Spet iščemo število kvadratkov, ki omejujejo 37. lik (lahko si izberemo poljubno število in s tem poljubni zaporedni lik) in splošno formulo za n -ti lik.

Učenci, ki v sliki prepoznajo možnost grafičnega preoblikovanja in prestavljanja kvadratkov, so v prednosti. Svetlosivo obarvane mejne kvadratke (glejte spodnjo sliko) prestavijo, tako da mejni kvadrati oblikujejo mejo kvadrata velikosti $n \cdot n$. Učenci vedo, da se število kvadratkov pri tem ohrani. Analogno bodo razmišljali v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju, ko bodo iskali ploščino lika tako, da ga bodo (z »rezanjem in lepljenjem«) preoblikovali v ploščinsko enak lik, katerega ploščino že znajo izračunati oz. izraziti.

Svetlosivo obarvane kvadratke pa lahko prestavimo tudi z zrcaljenem čez premico, ali zrcaljenjem čez točko, ali z zasukom in pri tem upoštevamo, katere lastnosti svetlo sivega lika se pri tem ohranijo. Učence postavimo pred izziv, da poiščejo premico, čez katero zrcalijo, točko, čez katero zrcalijo in kot za katerega zasučejo svetlo sivo obarvani lik.





Posploševanje in iskanje splošne formule za število mejnih kvadratkov tako izpeljejo s pomočjo iskanja števila kvadratkov, ki omejujejo bel kvadrat velikosti $n \cdot n$.

Spet s pomočjo geometrije najdemo več načinov reševanja, podobno kot v zgornjem primeru (pri likih L). Tako na več načinov iščemo število kvadratkov, ki omejujejo 37. lik in n -ti lik.

1. način reševanja		$37 + 39 + 37 + 39$ $2 \cdot 37 + 2 \cdot 39$ $2 \cdot n + 2 \cdot (n + 2)$
2. način reševanja		$4 \cdot 38$ $4 \cdot (37 + 1)$ $4 \cdot (n + 1)$
3. način reševanja		$4 \cdot 37 + 4$ $4 \cdot n + 4$
4. način reševanja		$4 \cdot 39 - 4$ $4 \cdot (n + 2) - 4$
5. način reševanja		$39^2 - 37^2$ $(n + 2)^2 - n^2$

Spet postavimo učence pred izziv, kako utemeljiti, da so zapisi ekvivalentni. Ker smo nekaj podobnega že počeli, so učenci sposobni to narediti sami.

Koliko kvadratkov potrebuješ, da z njimi omejiš 37. sliko?	Koliko kvadratkov potrebuješ, da z njimi omejiš n -to sliko?
$2 \cdot 37 + 2 \cdot 39 = 74 + 78 = 152$	$2 \cdot n + 2 \cdot (n + 2) = 2 \cdot n + 2 \cdot n + 4 = 4 \cdot n + 4$
$4 \cdot (37 + 1) = 4 \cdot 38 = 152$	$4 \cdot (n + 1) = 4 \cdot n + 4$
$4 \cdot 37 + 4 = 148 + 4 = 152$	$4 \cdot n + 4$
$4 \cdot 39 - 4 = 156 - 4 = 152$	$4 \cdot (n + 2) - 4 = 4 \cdot n + 8 - 4 = 4 \cdot n + 4$
$39^2 - 37^2 = 1521 - 1369 = 152$	$(n + 2)^2 - n^2 = n^2 + 4 \cdot n + 4 - n^2 = 4 \cdot n + 4$

Ker so nekatere algebrske zapise zmožni učenci zapisati in poenostavljati, še preden spoznajo dogovor o opuščanju znaka za množenje, so ob slikah in v preglednici zapisi z znakom za množenje.

Poleg ciljev, zapisanih v preglednici prve naloge, pri tej nalogi razvijamo še:

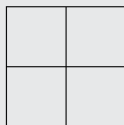
Cilji iz učnega načrta Učenci/učenke:	
2. VIO	- izračunajo vrednost številskega izraza in upoštevajo vrstni red izvajanja računskih operacij, - izračunajo vrednost številskega izraza z oklepaji, - s potenco zapišejo zmnožek (produkt) enakih faktorjev in obratno, - izračunajo vrednost potence naravnega števila, - izračunajo vrednost številskega izraza z upoštevanjem vrstnega reda izvajanja računskih operacij, - pri reševanju besedilnih nalog uporabijo računske operacije, - v izrazu zamenjajo črkovno oznako (x, a ...) z danim številom, - izračunajo vrednost izraza s črkovno oznako za izbrano vrednost oznake (npr. za $a = 5$, izračunajo vrednosti izrazov $2 \cdot a$, $2 \cdot a + 3$, $2 \cdot (a + 5)$), - zapišejo potenco in izračunajo njeno vrednost;
3. VIO	- množijo dvočlenike z uporabo razčlenitvenega zakona, - izračunajo zmnožek vsote in razlike dveh danih členov ter kvadrat dvočlenika, - prepoznajo ekvivalentne algebrske izraze in jih računsko utemeljijo, - poenostavijo izraz s spremenljivkami in izračunajo njegovo vrednost za izbrano vrednost spremenljivke, - s preoblikovanjem lika uporabljajo pojem ploščinska enakost likov, - poznajo transformacije (zrcaljenje, premik, vrtež) in njihove lastnosti, - zrcalijo točko, premico, daljico, kot, lik čez izbrano premico oziroma čez točko, - opišejo lastnosti zrcaljenja in ga simbolično zapišejo.

Podobno nalogo so reševali učenci devetega razreda pri NPZ leta 2012, redni rok.

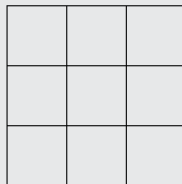
10. Lik na vsakem mestu je sestavljen iz enotskih kvadratov, kakor prikazuje slika.



Mesto 1



Mesto 2



Mesto 3

- a) Koliko enotskih kvadratov bi sestavljalo lik na mestu 4? _____
- b) Koliko enotskih kvadratov bi morali dodati liku na mestu 4, da bi dobili lik na mestu 5?

- c) Koliko enotskih kvadratov bi vseboval lik na mestu n ? _____
- d) Koliko enotskih kvadratov bi morali dodati liku na mestu n , da bi dobili lik na mestu $n + 1$?

Reševanje:

Odgovor: _____

Slika 1: Naloga 10, NPZ 2012.

Navodila za vrednotenje so bila naslednja:

Naloga	Točke	Odgovor	Dodatna navodila
10.1 a)	1	eden od: • 4^2 • 16 • ekvivalentni zapis	
10.2 b)	1	• 9	
10.3 c)	1	eden od: • n^2 • $n \cdot n$	
10.4 d)	1	• ustrezna strategija reševanja (npr.: skica, preglednica, sklepanje...)	
10.5	1	eden od: • $2n + 1$ • $(n + 1)^2 - n^2$ • ekvivalentni izraz	
Skupaj	5		

V spodnji preglednici so podatki o tem, kako so učenci reševali to nalogo. Na prvi dve vprašanji so učenci zelo suvereno odgovarjali, saj so lahko uporabljali konkretna števila in celo prešteli število kvadratkov, če so si narisali naslednji dve sliki. To pomeni, da znajo poiskati pravilo v vzorcu in vzorec nadaljevati, čeprav tega po učnem načrtu iz leta 1998 še nismo obravnavali v šoli.

Ogromno učencev se nadaljevanja naloge sploh ni lotilo. To pomeni, da naši učenci še ne znajo prepoznati zakonitosti, napovedovati, sklepati po analogiji, posploševati in zapisati splošne formule, niti za kvadrat s stranico n (kar je spraševalo c) vprašanje).

Št. kandidatov, ki so prejeli določeno št. točk oz. niso reševali naloge (N)

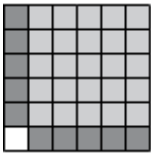
Št. naloge \ Točke	0	1	N	Skupno
10.1	3.410	13.360	146	16.916
10.2	4.784	11.811	321	16.916
10.3	8.720	4.597	3.599	16.916
10.4	6.397	1.625	8.894	16.916
10.5	6.619	1.437	8.860	16.916

Rada bi opozorila na podobnost med primeroma b) in d), kjer so morali učenci ugotavljati, koliko kvadratkov morajo dodati prejšnji sliki, da dobijo naslednjo. Ta primera sta ekvivalentna primeru iz naše naloge. Dodajati morajo kvadratke v obliki črke L.



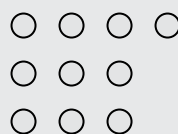
Število teh kvadratkov pa smo zgoraj poiskali na več različnih načinov. Pa dodajmo še en način reševanja, ki nas lahko pripelje do splošne formule za kvadrat dvočlenika.

Slika	Besedilo	Krajši zapis	Dodali smo
	Svetlosivemu kvadratu velikosti $1 \cdot 1 = 1^2$ smo dodali $2 \cdot 1$ temnosivega kvadratka in enega belega, da dobimo kvadrat velikosti $2 \cdot 2 = 2^2$.	$(1 + 1)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1$	$2 \cdot 1 + 1$
	Svetlosivemu kvadratu velikosti $2 \cdot 2 = 2^2$ smo dodali $2 \cdot 2$ temnosiva kvadratka in enega belega, da dobimo kvadrat velikosti $3 \cdot 3 = 3^2$.	$(2 + 1)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1$	$2 \cdot 2 + 1$
	Svetlosivemu kvadratu velikosti $3 \cdot 3 = 3^2$ smo dodali $2 \cdot 3$ temnosive kvadratke in enega belega, da dobimo kvadrat velikosti $4 \cdot 4 = 4^2$.	$(3 + 1)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$	$2 \cdot 3 + 1$
	Svetlosivemu kvadratu velikosti $4 \cdot 4 = 4^2$ smo dodali $2 \cdot 4$ temnosiva kvadratka in enega belega, da dobimo kvadrat velikosti $5 \cdot 5 = 5^2$.	$(4 + 1)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 + 1$	$2 \cdot 4 + 1$

	Svetlosivemu kvadratu velikosti $5 \cdot 5 = 5^2$ smo dodali $2 \cdot 5$ temnosivih kvadratkov in enega belega, da dobimo kvadrat velikosti $6 \cdot 6 = 6^2$.	$(5 + 1)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 + 1$	$2 \cdot 5 + 1$
	Svetlosivemu kvadratu velikosti $n \cdot n = n^2$ smo dodali $2 \cdot n$ temnosivih kvadratkov in enega belega, da dobimo kvadrat velikosti $(n + 1) \cdot (n + 1) = (n + 1)^2$.	$(n + 1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1$	$2 \cdot n + 1$

Naloga 3

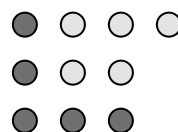
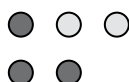
Oglej si spodnje tri slike. Ugotovi pravilo, po katerem iz predhodne slike sestaviš naslednjo.



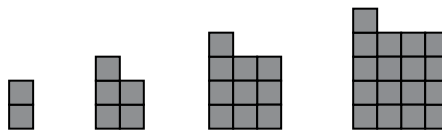
- Nariši 4. sliko.
- Ob vsaki sliki zapiši število krogcev, iz katerih je sestavljena slika. Opazuj števila. Kaj ugotoviš? Zapiši ugotovitev.
- Koliko krogcev potrebuješ, da sestaviš 7. sliko?
- Koliko krogcev bi potreboval, če bi želel narisati 23. sliko? Zapiši, kako si razmišljal.
- Koliko krogcev potrebuješ za n -to sliko?
- Koliko krogcev moraš dodati 4. sliki, da dobiš 5. sliko?
- Sistematično zapisuj, koliko krogcev moraš dodati predhodni sliki, da dobiš naslednjo.
- Koliko krogcev moraš dodati $n - 1$. sliki, da dobiš n -to?

Naloga je podobna prejšnji. Čeprav so na sliki krogci, učenci ugotovijo, da so ti postavljeni v obliki kvadrata, ki mu je dodan en krogec. Tako pridejo do formule, kjer n -to sliko sestavlja $n^2 + 1$ krogcev.

Analogno kot pri prejšnji nalogi lahko učenci s pomočjo slike ugotavljajo število krogcev, ki jih moramo dodati prejšnji sliki, da dobimo naslednjo sliko. Spet dodani krogci tvorijo obliko črke L, kar smo srečali že v prejšnji nalogi.

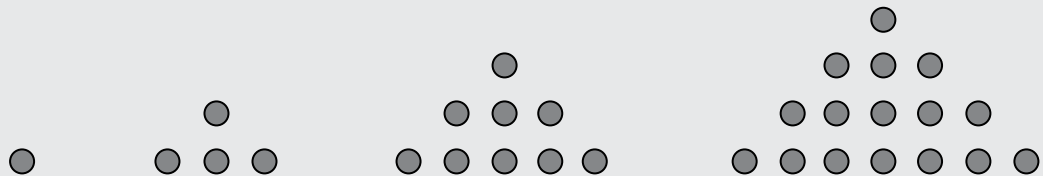


Krogce bi lahko zamenjali s kvadrati, zvezdicami ali katerimi drugimi simboli ali slikami. Če je naloga za učence prezahtevna, predlagamo učiteljem, da učencem ponudijo še nalogo z podobnim besedilom, a drugačno sliko (npr. slika na naslednji strani), iz katere je lažje razvidno, da kvadrati sestavljajo večji kvadrat z dodatkom (npr. dimnikom) iz enega kvadrata, torej $n^2 + 1$.



Naloga 4

Razišči števila, ki so ponazorjena s krogci na spodnjih štirih slikah.



Učenci iz slike razberejo, da je:

na 1. sliki 1 krogec,

na 2. sliki $1 + 3 = 4$ krogeci, kar lahko zapišemo kot 2^2 ,

na 3. sliki $1 + 3 + 5 = 9$ krogcev, kar lahko zapišemo kot 3^2 ,

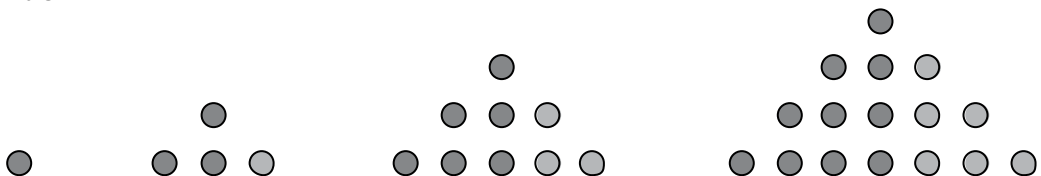
na 4. sliki $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ krogcev, kar lahko zapišemo kot 4^2 ,

predvidevajo, da je na 5. sliki $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ krogcev, kar lahko zapišemo kot 5^2 in induktivno sklepajo, da je na n -ti sliki $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ krogcev.

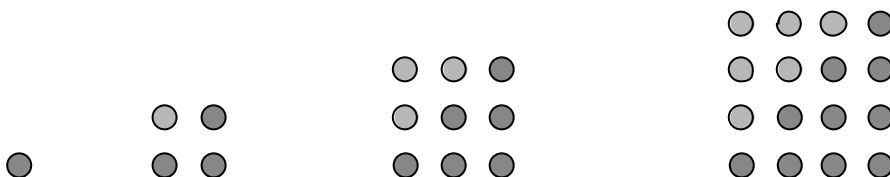
Torej: Vsota prvih n lihih števil je n^2 .

Učenci ugotovijo, da seštevajo zaporedna liha števila, katerih vsota je popoln kvadrat. To lahko grafično dokažejo s preoblikovanjem zgornjih slik.

1. način



Svetlosivo obarvane krogce prestavimo, kot kaže spodnja slika.

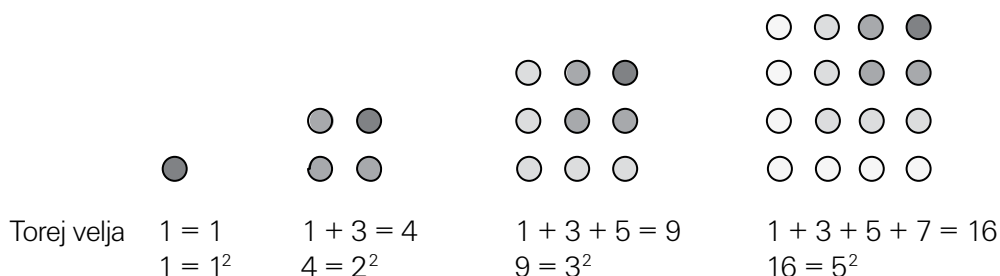


Očitno velja

	1. slika	2. slika	3. slika	4. slika	n -ta slika
Število krogcev	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	n^2

2. način

Liha števila ponazorimo s krogci, ki tvorijo obliko črke L, kot smo pokazali pri nalogi 2. Če krogce, ki predstavljajo liha števila zložimo, kot je prikazano na spodnji sliki, sestavimo kvadrat. Zaradi preglednosti smo krogce, ki ponazarjajo eno od lihih števil obarvali z isto barvo.

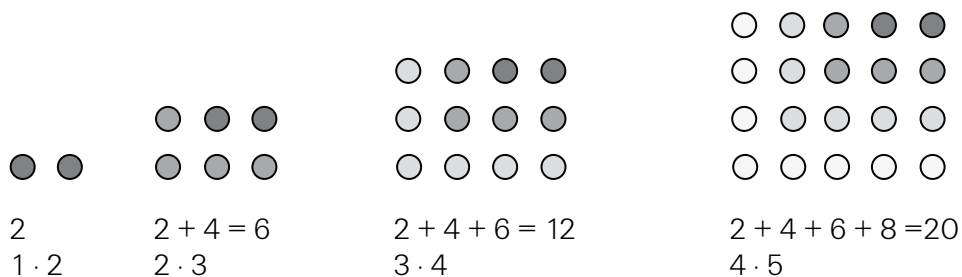


Števila 1, 4, 9, 16 ... imenujemo *kvadratna števila*. Torej: vsota prvih n lihih števil je kvadratno število.

Takoj dobimo ideje za **razširitev problema**. Kaj pa, če seštevamo vsoto prvih sodih števil?

Ponazorimo zaporedna soda števila. To lahko geometrijsko naredimo na več načinov, enega smo prikazali pri nalogi 2, kjer smo slikam lihih števil dodali eno enoto (kvadratek) in dobili slike sodih števil.

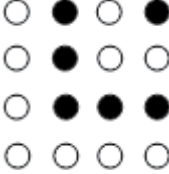
Uporabimo kar prejšnje slike, na katerih dodamo še en stolpec desno: torej smo geometrijski ponazoritvi vsote prvih zaporednih lihih števil dodali po en krogec v vsaki barvi in dobili ponazoritev zaporednih sodih števil (spet krogci v eni barvi ponazarjajo isto sodo število). Te slike ne ponazarjajo več kvadratnih števil, ampak *pravokotna števila*.

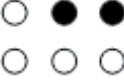
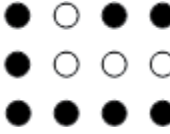
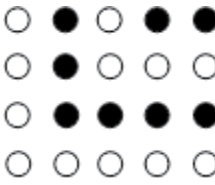


Iz tega posplošimo $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n + 1)$.

Seveda naj učenci pridobljeno splošno formulo vedno preverijo še s tem, da zaporedno vstavljajo vanjo poljubna števila in preverijo, ali izračunana vrednost ustreza sliki.

Nekateri učenci za ponazoritev kvadratnih in pravokotnih števil ne uporabljajo barv. Če si pri štetju pomagajo s črno-belo sliko, dobijo idejo za **razširitev problema**. Raziščimo naraščanje števila belih in črnih krogcev?

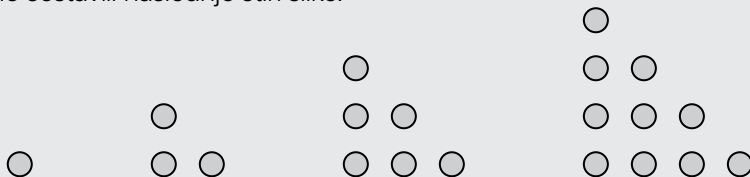
Slika				
Število črnih krogcev	1	1	6	6
Število belih krogcev	0	3	3	10

Slika				
Število črnih krogcev	2	2	8	8
Število belih krogcev	0	4	4	12

Učenci naj najprej poskusijo predvideti število črnih in število belih krogcev v naslednjem kvadratnem oziroma pravokotnem številu, ne da bi risali. Svoja predvidevanja naj preverijo s tem, da narišejo še sliko. Potem naj postopek nadaljujejo.

Naloga 5

S krogci smo sestavili naslednje štiri slike.



- Nariši 5. sliko.
- Koliko krogcev potrebuješ za 10. sliko?
- Sistematično zapisuj, koliko krogcev potrebuješ za posamezno sliko.
- Koliko krogcev potrebuješ za n -to sliko.
- Koliko krogcev moramo dodati 2. sliki, da dobimo 3. sliko?
- Sistematično zapisuj koliko krogcev moraš dopisati predhodni sliki, da dobiš naslednjo.
- Koliko krogcev moramo dodati 17. sliki, da dobimo 18. sliko?
- Koliko krogcev moramo dodati $n - 1$. sliki, da dobimo n -to sliko?
- Koliko krogcev moramo dodati n -ti sliki, da dobimo $n + 1$. sliko?
- Iz 210 krogcev sestavimo eno od slik, za naslednjo sliko pa uporabimo 231 krogcev. S katerima zaporednima številka bi označili ti dve sliki?

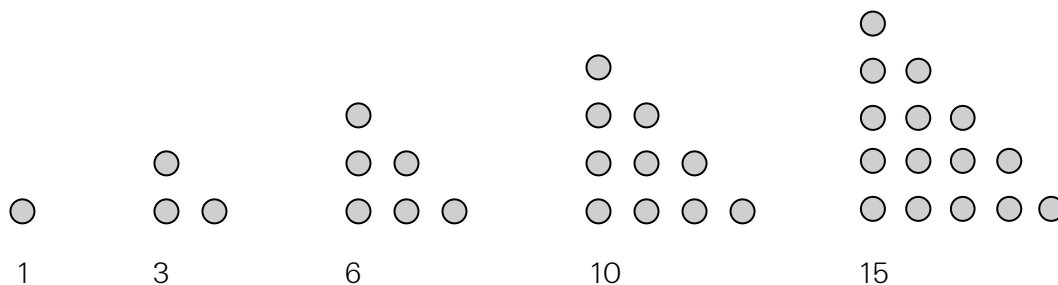
Slike, ki jih uporabimo pri tej nalogi, so zelo podobne slikam iz prejšnje naloge, kjer smo seštevali števila krogcev, ki so ponazarjali zaporedna liha števila. V tem primeru pa je na vsaki sliki ponazorjena vsota (vseh) zaporednih števil.

Iz slik razberemo:

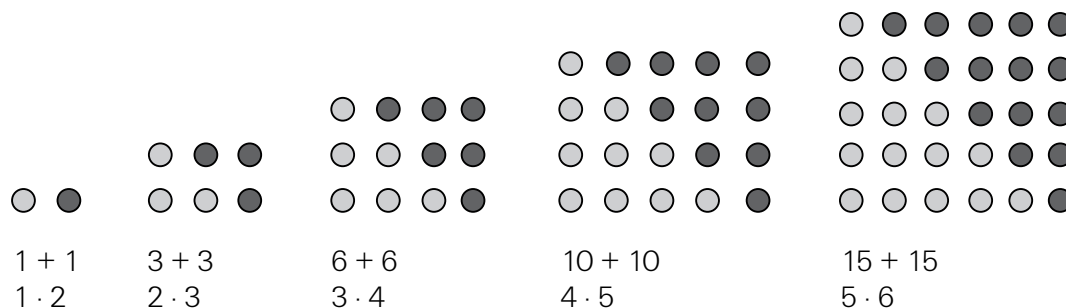
- 1. slika 1
- 2. slika $1 + 2 = 3$
- 3. slika $1 + 2 + 3 = 6$
- 4. slika $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
- 5. slika $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
- n -ta slika $1 + 2 + 3 \dots + n$

V tem primeru smo pred izzivom, kako ugotoviti vsoto $1 + 2 + 3 \dots + n$.

Uporabimo idejo prejšnje naloge in slike števil 1, 3, 6, 10, 15 ... (ki jih imenujemo *trikotniška števila*) dopolnimo.



Če zložimo skupaj sliki dveh enakih trikotniških števil, dobimo pravokotno število (ki smo ga ponazorili že pri prejšnji nalogi).

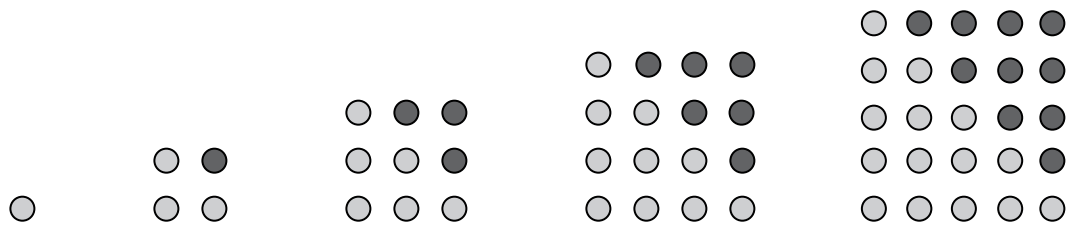


Iz prejšnje naloge že vemo, da je n -to pravokotno število predstavljeno z $n \cdot (n + 1)$ krogci.

Razmišljamo analogno kot pri geometriji, ko izpeljemo ploščino paralelograma na osnovi dejstva, da je sestavljen iz dveh enakih trikotnikov. V tem primeru je pravokotno število sestavljeno iz dveh enakih trikotniških števil, zato je trikotno število polovica pravokotnega števila. Torej je n -to trikotno število sestavljeno iz $n \cdot (n + 1)/2$ krogcev. Tako velja $1 + 2 + 3 \dots + n = n \cdot (n + 1)/2$.

Dva trikotnika lahko sestavljata kvadrat. Ali lahko dve trikotniški števili sestavljata kvadratno število?

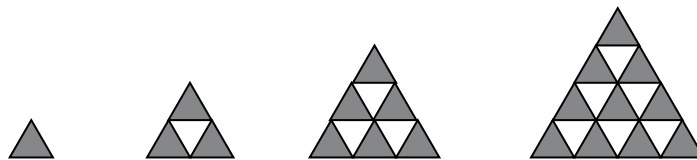
Spet poskusimo z geometrijskimi slikami.



Vidimo, da kvadrat lahko sestavlja dva trikotnika, le da nista enake velikosti. Torej kvadratno število sestavlja dve zaporedni trikotniški števili.

Tukaj morajo učenci znanje in izkušnje, ki so jih pridobili pri enem sklopu znotraj matematike, prenesti in seveda znati uporabiti pri drugem sklopu. Pri takih nalogah odkrijejo lepoto matematike in red, ki vlada v njej.

Tudi pri tej nalogi bi lahko krogce zamenjali z drugimi liki in znaki ter jih tudi razporedili drugače.



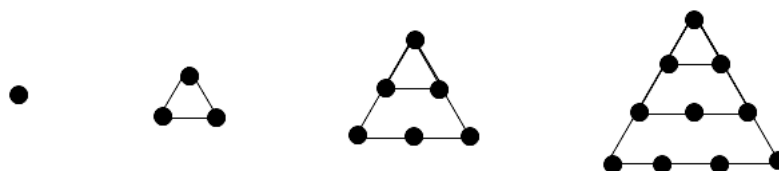
Tudi v tem primeru bi lahko nalogo razširili in nadgradili tako, da bi iskali število vmesnih trikotnikov, ki se nahajajo med obarvanimi trikotniki. Poiskali bi tudi število vseh trikotnikov, ki se nahajajo na posamezni sliki. Iskali bi število enotskih kvadratkov (enake velikosti, ki so modri ali beli) ali pa število vseh trikotnikov na sliki, ki so različnih velikosti, saj so sestavljeni iz več ali manj trikotnikov.

Še bolje pa je, če učencem ponudimo sliko, pa naj si sami postavijo raziskovalna vprašanja. Tako ponudimo učencem še eno novost iz posodobljenega učnega načrta, to so odprte naloge.

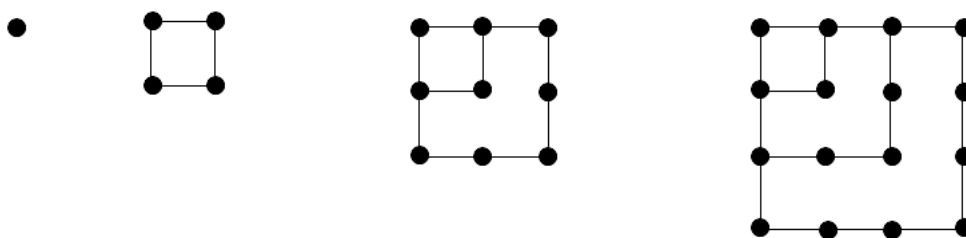
Ko začnemo sestavljati naloge z vzorci, se nam hitro utrnejo ideje za nove naloge. Pa tudi učenci lahko prispevajo svoje.

Pri teh nalogah smo uporabili mnogokotniška števila. To so števila, ki primerno grafično ponazorjena, predstavljajo obliko pravilnega mnogokotnika.

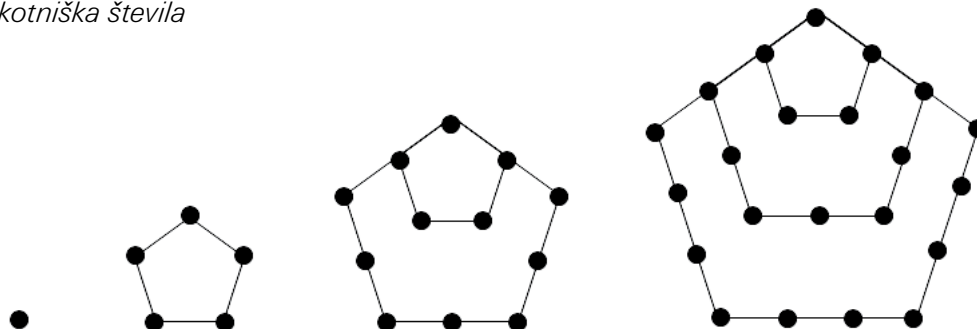
Trikotniška števila



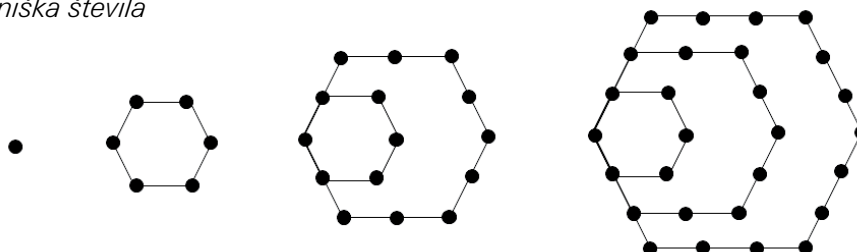
Kvadratna števila



Petkotniška števila



Šestkotniška števila



Predlagamo učiteljem, da z učenci raziščejo še preostala mnogokotniška števila ter morda naredijo še posplošitev.

Trikotniška števila	1, 3, 6, 10, 15, ...	$\frac{n(n+1)}{2}$
Kvadratna števila	1, 4, 9, 16, 25, ...	$\frac{n(2n-0)}{2} = n^2$
Petkotniška števila	1, 5, 12, 22, 35, 51, ...	$\frac{n(3n-1)}{2}$
Šestkotniška števila	1, 6, 15, 28, 45, 66, ...	$\frac{n(4n-2)}{2} = n(2n-1)$
Sedemkotniška števila	1, 7, 18, 34, 55, 81, ...	$\frac{n(5n-3)}{2}$
Osemkotniška števila	1, 8, 21, 40, 65, 96, ...	$\frac{n(6n-4)}{2} = n(3n-2)$
Devetkotniška števila	1, 9, 24, 46, 75, 111, ...	$\frac{n(7n-5)}{2}$
Desetkotniška števila	1, 10, 27, 52, 85, 126, ...	$\frac{n(8n-6)}{2} = n(4n-3)$

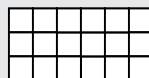
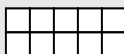
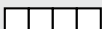
Nadomestimo kroge, s katerimi smo ponazorili trikotniška števila, s kroglami, pa se premaknemo v geometrijo v prostoru. Če polagamo plasti manjših trikotniških števil na večja trikotniška števila, sestavimo 3-strano piramido (tetraeder). Tako dobimo *tetraedrska števila* 1, 4, 10, 20, 35, ...

Podobno polagajmo plasti manjših kvadratnih števil na večja kvadratna števila, da sestavimo 4-strano piramido. Tako ponazorimo *piramidna števila*, ki so 1, 5, 14, 30, 55, ...

Kubična števila (glejte sheme na spodnji sliki) pa učenci že poznajo in jih povezujejo s kocko pri geometriji in s potencami števil. Možnosti za vpeljevanje vzorcev v matematiko in povezovanje vsebin znotraj matematike je ogromno, le videti jih moramo. Tako si bomo z geometrijskimi vzorci morda utrli pot v algebro.

Naloga 6

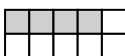
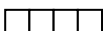
Oglej si slike pravokotnikov, sestavljenih iz enakih kvadratkov.



- Ugotovi pravilo, po katerem načrtujemo naslednji pravokotnik, če poznamo predhodne. Zapiši ga.
- Nariši še 4. in 5. pravokotnik.
- Kolikšna je ploščina 7. pravokotnika? Kako si to ugotovil? Zapiši.
- Sistematično zapisuj ploščine pravokotnikov v preglednico.
- Ali bomo za 9. pravokotnik potrebovali več kot 100 kvadratkov?
- Zapiši izraz za ploščino n -tega pravokotnika.
- Neki pravokotnik v tem vzorcu ima ploščino 130 kvadratkov. Koliko merijo stranice tega pravokotnika?
- Raziskuj, ali tudi obsegi teh pravokotnikov naraščajo po kakšnem pravilu.
- Zapiši še sam nekaj vprašanj, ki bi jih lahko zastavil svojim sošolcem.

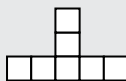
Tudi pri tej nalogi ne uresničujemo samo ciljev iz vsebine Vzorci. Poleg ciljev, ki smo jih izpostavili že v predhodnih nalogah, sta tukaj vključeni ploščina in obseg pravokotnika. Pri vprašanju e) morajo učenci znati napovedati rešitev in jo argumentirati. Pri vprašanju g) učenci lahko zapišejo kvadratno enačbo, a je verjetno ne znajo rešiti.

Tistim, ki ne najdejo lastne poti reševanja, lahko damo namig za eno od strategij. Če si pomagajo z barvanjem predhodnega lika v naslednjem liku, morda lažje pridejo do posplošitve. Zavedati pa se moramo, da s tem ponujamo namig za rekurzivno zvezo.



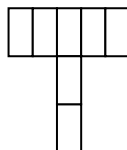
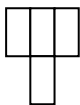
Naloga 7

Oglej si naslednje tri slike sestavljene iz enakih ploščic.



- Nariši 4. in 5. sliko.
- Koliko ploščic potrebuješ za 6. sliko?
- Koliko ploščic potrebuješ za n -to sliko?
- Koliko ploščic moraš dodati 3. sliki, da dobiš 4. sliko?
- Koliko ploščic moraš dodati 12. sliki, da dobiš 13. sliko?
- Razišči obseg in ploščino nastalih likov.

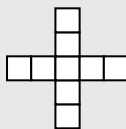
Tudi v tem primeru lahko kvadratke, iz katerih sestavljamo slike, zamenjamo s pravokotniki ali drugimi znaki. Če je širina pravokotnika dvakrat daljša od dolžine, je posploševanje za obseg in ploščino nov izziv. Če še like postavimo v drugo lego, je lahko za učence to popolnoma nova naloga.



Slike lahko tudi zamenjamo, dopolnimo in sestavimo novo nalogo, npr:

Naloga 8

Razišči števila, ki so ponazorjena na spodnjih slikah.

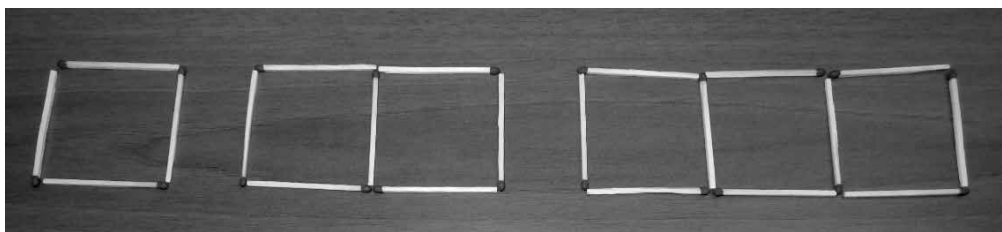


Like, iz katerih sestavljamo slike, lahko ponazorimo tudi z vžigalicami.

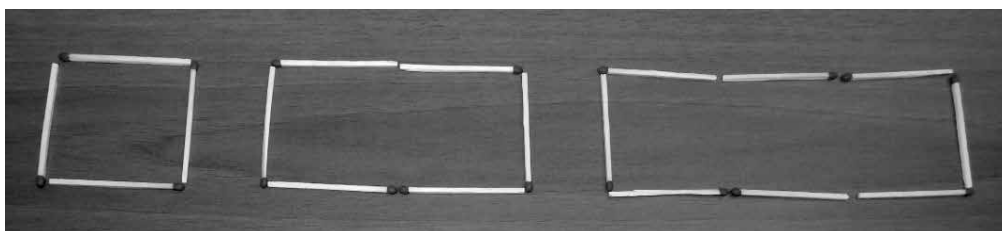
Naloga 9

Iz vžigalic smo sestavljali slike. Razišči koliko vžigalic potrebuješ za posamezno sliko.

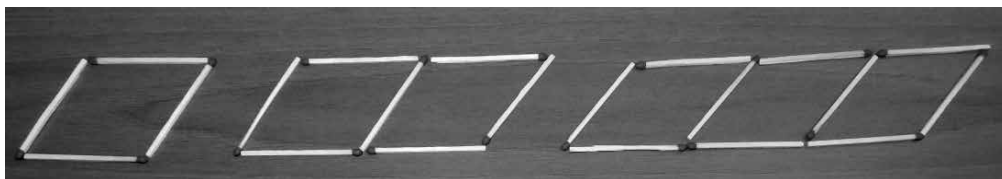
- Najprej nariši 4. sliko v vsakem od naslednjih primerov.
- Zraven vsake slike zapiši, iz koliko vžigalic je sestavljena.
- Razmisli, koliko vžigalic potrebuješ za 5. sliko?
- Pri vsakem primeru zapiši vsaj 7 števil. Ta števila tvorijo zaporedje.
- Ugotovi, koliko vžigalic potrebuješ za n -to sliko.
- Sistemično zapisuj, koliko dolžin vžigalic je obseg vsakega lika. Naredi posplošitev za vsakega od navedenih primerov.



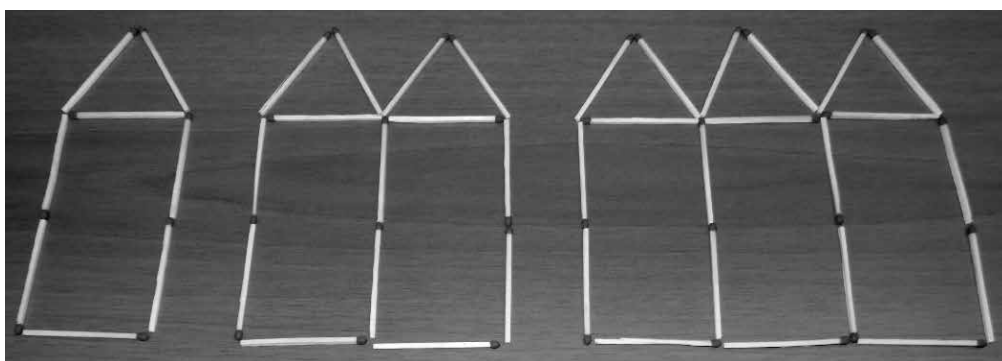
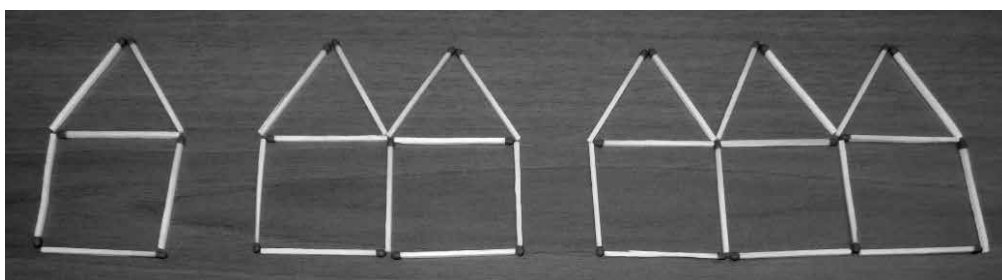
Učenci raziskujejo koliko vžigalic potrebujemo za posamezno sliko, kako bi izrazili ploščino nastalih likov ... Ko iščejo posplošitev za obseg lika, jih lahko »mejne« vžigalice med posameznimi kvadrati motijo. Zato lahko raziskujejo tudi, koliko vžigalic morajo odstraniti v posamezni sliki, da preostale vžigalice ponazarjajo lik, katerega obseg iščemo.

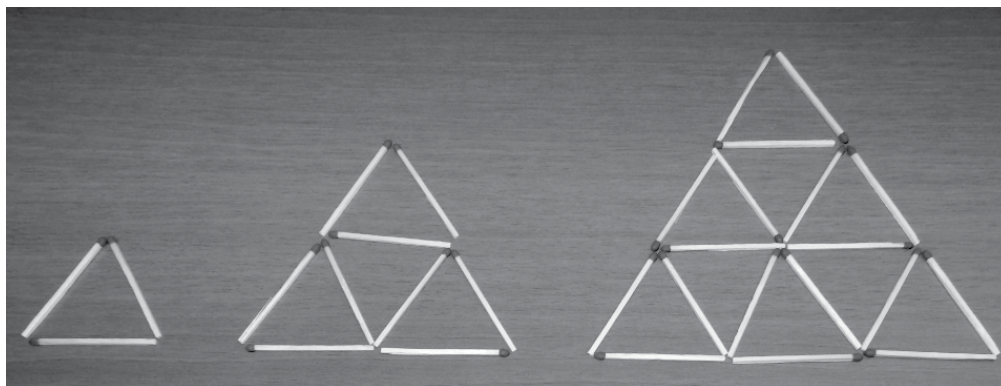


Z vžigalicami lahko sestavljamo slike še z drugimi enakostraničnimi liki. Kvadrat »deformiramo« v romb.



Učenci pa se lahko prepustijo domišljiji in sestavljajo vedno nove vzorce, npr.:



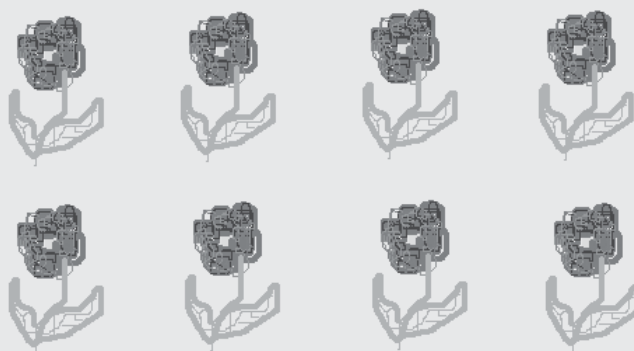


Slike 1–6: Primeri nalog z vžigalicami. (Avtorica fotografij: S. Rajh)

Vzorci s premiki, vrteži in z zrcaljenjem

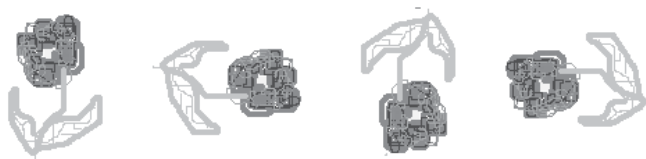
Naloga 10

S računalniškim programom za risanje (npr. Slikar) učenci narišejo majhno risbico npr. rožico. Z ukazoma Kopiraj, Prilepi izdelajo »tapeto« iz rož.

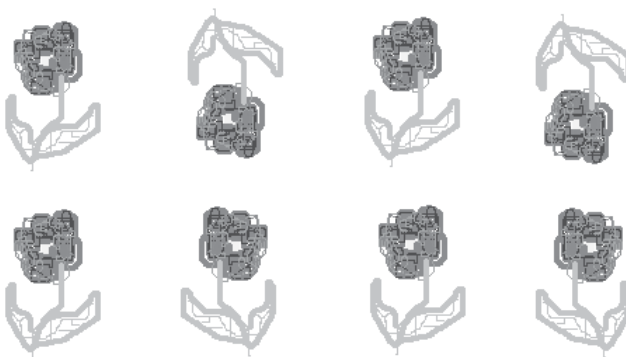


Vzorec je nastal z **vzporednim premikom** osnovnega motiva.

Rožice tudi zasukajo za 90° . Nastane vzorec z **vrteži**.



Rožice zrcalijo čez x os in čez y os. Vzorca sta nastala z **zrcaljenjem**.

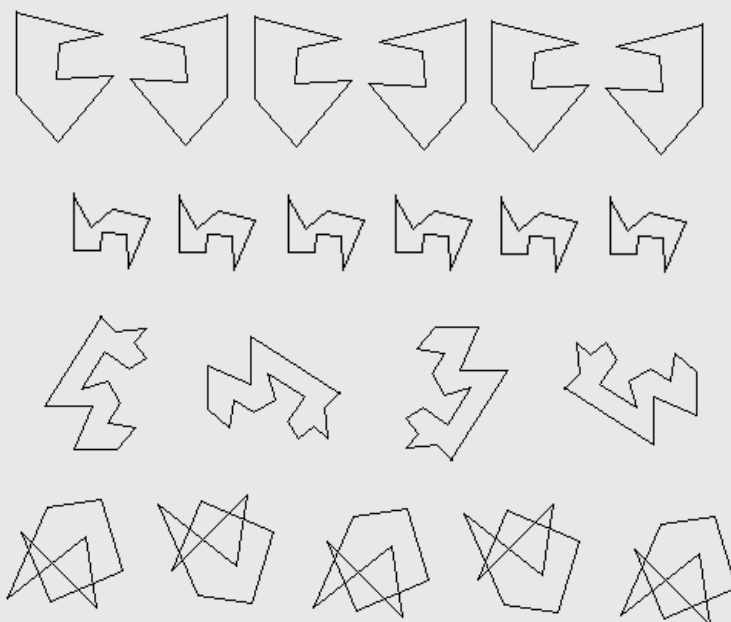


Še sam nariši nekaj vzorcev z računalnikom.

Učenci drugega vzgojno-izobraževalnega obdobja bodo znali narisati kaj bolj zahtevnega.

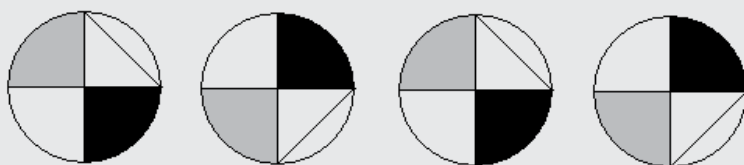
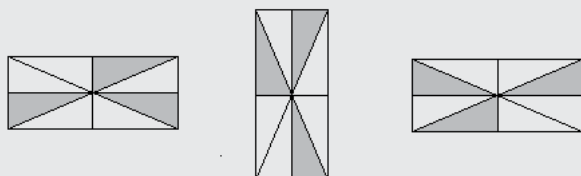
Naloga 11

Ugotovi, kako smo oblikovali naslednje vzorce. Kje smo uporabili vzporedni premik, vrtež in kje zrcaljenje? (Slike so oblikovane s slikarskimi orodji programa za urejanje besedila.)



Naloga 12

Nadaljuj naslednje vzorce. Opiši pravilo z besedami ali pa opiši postopek risanja.



Naloga 13

Znaki na spodnji sliki so razvrščeni po nekem pravilu. Opiši pravilo z besedami.

♀♂♣♠♀♂♣♠♀♂♣♠♀♂♣♠

Nariši enak vzorec z drugimi znaki, liki ali slikami predmetov.

Po istem pravilu nadaljuj naslednje vzorce

☀♀♂☀♀♂

♣♥☺♣

♥♦+♥♦

Naloga 14

Znaki so razvrščeni v vzorec.

0 0 # 0 0 # 0 0

Po istem pravilu nadaljuj naslednje vzorce

♀ ♂ ♂ ♀ ♂

♣ ♥ ♥ ♣

a b b a b b

Naloga 15

Znaki v treh vzorcih so razvrščeni po enakem pravilu. Ugotovi to pravilo.

☺ ♥ ☺ ☺ ♥ ♥ ☺ ☺ ☺ ♥ ♥ ♥

A B A A B B A A B B B

□ ■ □ □ ■ ■ □ □ □ ■ ■ ■

V katerem primeru so znaki razvrščeni po enakem pravilu kot zgoraj?

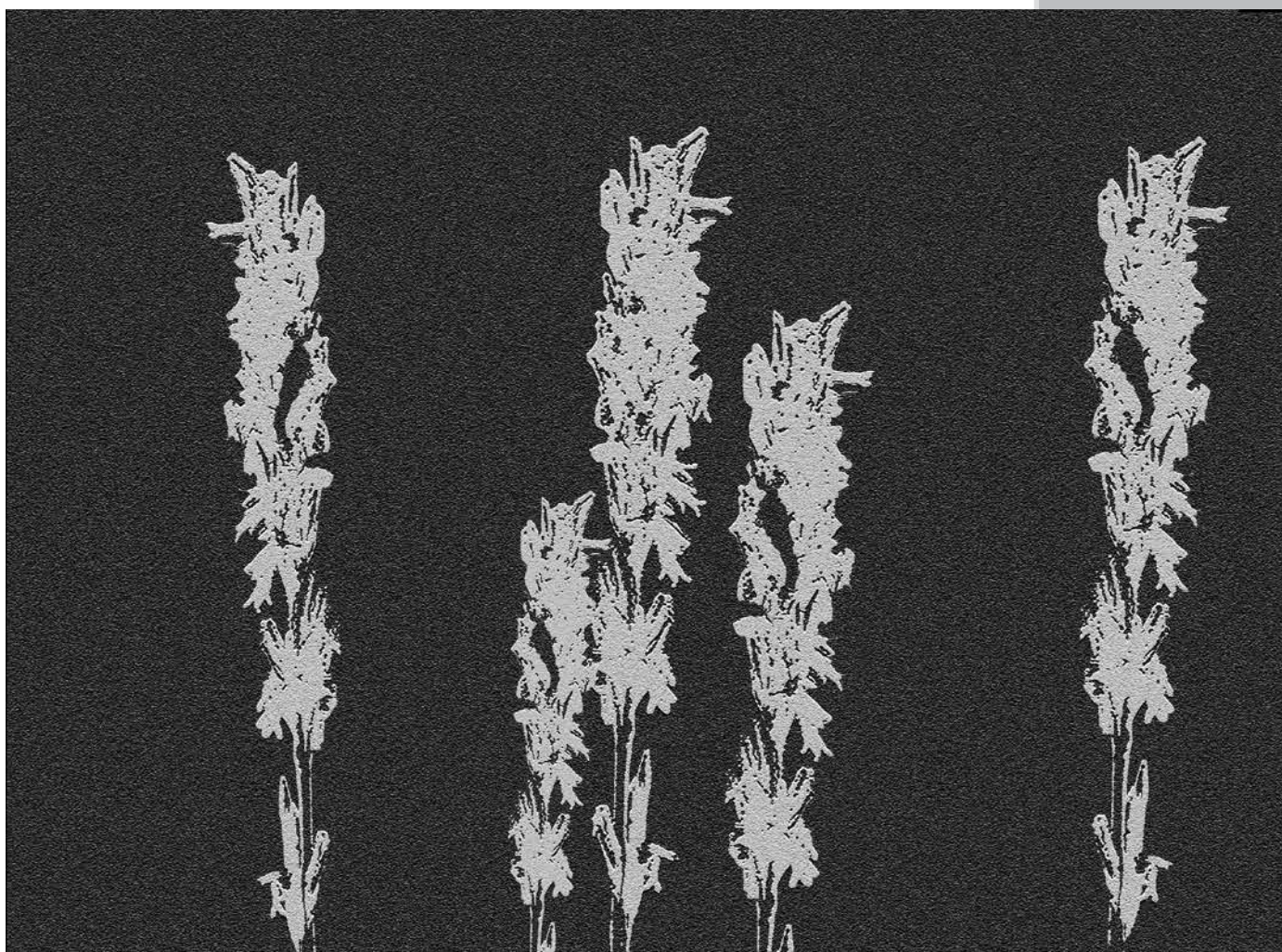
- ♥ ☺ ♥ ☺ ♥ ♥ ♥ ☺ ☺ ♥ ☺ ♥ ♥
- ☺ ☼ ♀ ♂ ♠ ♣ ♥ ♦ ☺ ☼ ♀ ♂ ♠ ♣ ♥ ♦
- ♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂
- ♂ ♠ ♂ ♂ ♠ ♠ ♂ ♂ ♂ ♠ ♠ ♠
- ♂ ♠ ♣ ♂ ♠ ♣ ♂ ♠ ♣ ♂ ♠ ♣

Nariši enak vzorec s svojimi znaki, liki ali slikami predmetov.

Literatura in viri

- 1 Državni izpitni center (2012). Nacionalno preverjanje znanja, Letno poročilo o izvedbi nacionalnega preverjanja znanja v šolskem letu 2011/2012. Ljubljana: Državni izpitni center. Dostopno na naslovu: http://www.ric.si/preverjanje_znanja/statisticni_podatki/ (8. 11. 2012).
- 2 Lipovec, A. (2012). Je kvadrat lik ali okvir?. Zbornik Mednarodne konference KUPM 2012. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.zrss.si/kupm2012/datoteke/predavatelj_03.pdf (8. 11. 2012).
- 3 Novak, J. in Rajh, S. (1996). Reševanje in posploševanje problemov. V: Kmetič S. in drugi, Prispevki k poučevanju matematike, Maribor: Rotis.
- 4 Žakelj, A., et al. (2011). Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport. Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (8. 11. 2012).

Matematično modeliranje v osnovni šoli



4.1 Matematično modeliranje v osnovni šoli

Dr. Zlatan Magajna, Pedagoška fakulteta Ljubljana

4.1.1 Od besedilnih nalog do modeliranja

Namenov pouka matematike je več. Da je res tako, se zlahka prepričamo, če o namenu pouka matematike povprašamo nekaj ljudi, ali če pregledamo kateri koli učni načrt matematike. Pregled učnih načrtov razkrije, da se deklarirani nameni učenja matematike sčasoma spreminjajo, med nameni, ki so stalnica, pa zasledimo naslednjega: matematiko se učimo zato, da bi jo znali uporabljati v vsakdanjem življenju, pri učenju drugih šolskih predmetov, v poklicnem življenju. O pomenu tega vidika šolske matematike priča izraz „uporabne naloge“ za naloge, ki jim danes pravimo besedilne naloge. Že ime pove, da naj bi ob uporabnih nalogah učenci uporabljali naučene matematične pojme in postopke v drugih, predvsem nematematičnih kontekstih. Vendar je ta ideja pogosto le fikcija. Vzemimo preprosto nalogo:

V trgovini stane 5 jajc 0,80 €. Koliko jajc lahko kupi gospodinja, ki ima v denarnici 10,50 €.

Naloga zveni kot povsem običajna besedilna naloga. Podobne naloge tudi dejansko srečamo v matematičnih učbenikih, denimo v sklopu obravnave premega sorazmerja. A opisana situacija, predvsem pa „šolski“ način reševanja naloge se močno razlikujeta od dejanskega reševanja problema v trgovini. Trgovine namreč ne navajajo cene za pakiranje petih jajc. Poleg tega si v trgovini, kjer potrebujemo roki za nabiranje oziroma držanje nakupljenih izdelkov, težko privoščimo šolski postopek računanja premega sorazmerja s svinčnikom in papirjem. Verjetno gospodinja, ki nemara plačuje s kreditno kartico, in ne z gotovino, sploh ne zanima natančen izračun, kvečjemu le približen. Sploh pa je vprašanje, kaj naj gospodinja počne s 65 jajci.

Čeprav je gornja naloga postavljena v realistični kontekst, se ob njej ne učimo, kako dejansko ravnati v trgovini, ampak gre za druge cilje. Ob njej se lahko učimo, kaj je odnos premega sorazmerja v matematiki. Situacija je ponazoritev obravnavanega matematičnega pojma. Namen naloge je učenje šolskega postopka reševanja nalog o premem sorazmerju ali pa preverjanje poznavanja tega postopka.

Nalogo lahko interpretiramo še drugače: Gre za učenje prepoznavanja situacij, kjer nastopa odnos premega sorazmerja in kjer naj bi brez posebnega premišljanja izvedli določen računski postopek. Prepoznavanje lahko temelji na nekih tipičnih situacijah, včasih na nekih tipičnih sintaktičnih tvorbah ali celo ključnih besedah. V vsakem od teh primerov gre za povezovanje neke sheme (stavčne ali situacijske) s pojmi in postopki iz šolske matematike. Situacija v besedilni nalogi torej predstavlja neko tipizirano okolje za obravnavano matematično vsebino.

Situacija v predstavljeni nalogi je realistična: to pomeni, da si je učencu ni težko predstavljati, kakšna bi bila v resnici. V besedilnih nalogah ni vedno tako. Neredko v matematičnih učbenikih naletimo na naloge iz „vsakdanjega življenja“, ki so povsem nesmiselne, če jih postavimo v resničnost. Največkrat gre za tako imenovano »oblačenje računov«. Pri takih nalogah avtorji izhajajo iz nekega matematičnega postopka ali problema in ga umetno povežejo s pojmi iz učenčevega okolja, pri čemer ni prav nobene vsebinske ali strukturne povezave med matematičnimi objekti in nematematičnimi pojmi. Denimo: »Klara stanuje na hišni številki 18, Petra

na hišni številki 21, Cene pa na hišni številki 23. Katera od teh hišnih števil je praštevilo?» V takih nalogah bi hišno številko lahko nadomestili s čimer koli. Zanimivo je, da malokdo izraža pomisleke ob tovrstnih nalogah. Včasih so pač duhovite, ali pa vsebujejo motivacijske elemente. Seveda pa se ob njih ne učimo uporabe matematike.

Opisali smo nekaj primerov nalog, ki povezujejo področje matematike z drugimi področji. Mnogokrat pri tem povezovanju ne gre za učenje povezovanja ali učenje uporabe, temveč za učenje matematičnih pojmov in postopkov. Kjer pa gre za učenje uporabe, gre za povezovanje tipičnih situacij in postopkov, ki naj jih izvedemo ob taki situaciji. Ob tem se lahko vprašamo o smiselnosti podatkov in rezultata, ne pa o primernosti postopka.

4.1.2 Matematično modeliranje

Izhajali bomo iz naloge:

Spodnja preglednica prikazuje, koliko medalj so dobile izbrane države na letnih olimpijskih igrah leta 2008. Predlagaj, kako bi kar najbolj pravično razvrstili te države po uspešnosti na igrah.

Država	Z	S	B	Skupaj	Preb. (milj.)
ZDA	36	38	36	110	309
Kitajska	51	21	28	100	1337
Rusija	23	21	28	72	142
Velika Britanija	19	13	15	47	62
Avstralija	14	15	17	46	22
Nemčija	16	10	15	41	82
Francija	7	16	17	40	65
Južna Koreja	13	10	8	31	50
Italija	8	10	10	28	60
Ukrajina	7	5	15	27	4

Predstavljena naloga je primer osnovnošolske naloge iz modeliranja. Učenci morajo določiti kriterij za razvrstitev držav po uspešnosti na udeležbi na olimpijskih igrah. Je primeren kriterij število zlatih odličij ali število vseh odličij? Bi bilo primerno upoštevati število prebivalcev države? Kako?

Oglejmo si, v čem se naloga razlikuje od običajnih besedilnih nalog.

Izhodiščna situacija

Pri običajnih besedilnih nalogah je izhodiščna situacija največkrat enolično določena. Mogoče je sicer, da je v nalogi preveč ali premalo podatkov, ali da so celo podatki nekonsistentni. V teh primerih si mora učenec vhodne podatke na neki način urediti, nato pa se o njih več ne spra-

šuje. Pri modeliranju so vhodni podatki praviloma nedorečeni. Učenec se mora sam odločiti, katere podatke bo upošteval in katerih ne. Kot bomo videli, ta odločitev ni nepovratna. Učenec med modeliranjem lahko spreminja odločitev o izbiri vhodnih podatkov.

Cilj v nalogi

Za cilj velja podobno kot za izhodišče naloge. Pri običajnih besedilnih nalogah je cilj podan, naloga sprašuje po točno določenem podatku. Poznamo tudi odprte naloge, kjer si učenec sam zastavi cilj, torej kaj bo v nalogi izračunal, izpeljal, dokazal. Ko pa je cilj izbran, njegova primernost ni več predmet obravnave. Pri modeliranju je cilj naloge podan ali pa tudi ne, vedno pa je podan v nematematičnem kontekstu. Gornja naloga, na primer, sprašuje po „uspešnosti“ držav udeleženk – ni pa jasno, kakšen naj bo (matematični) kriterij za to. Vprašanje cilja je odprto med celotnim potekom modeliranja: lahko namreč ugotovimo, da je izbrani cilj ni primeren, in cilj spremenimo.

Pot reševanja

Pri običajnih besedilnih nalogah je pot reševanja lahko določena ali pa ne. Pravilnost matematičnega postopka pa ni predmet razmišljanja: postopek je lahko pravilen (v smislu, da načeloma vodi do pravilnega rezultata) ali pa ne. Pri nalogi o jajcih lahko uporabimo premo sorazmerje ali pa seštevamo po 0,80 € za vsakih 5 jajc, dokler ne pridemo do 10,50 € (ali pa ravnamo še kako drugače). V vsakem primeru lahko za postopek odločimo, ali je načeloma pravilen ali pa ne (drugo vprašanje je, ali je v skladu z učnimi cilji obravnave oziroma preverjanja). Pri modeliranju te enoličnosti ni. Problem je vedno podan v kontekstu, matematični opis pa – razen v banalno enostavnih primerih – lahko bolje ali slabše odseva situacijo. Noben model ni točen ali povsem pravilen, lahko je le bolj ali manj točen in bolj ali manj primeren. Gornja naloga to jasno potrjuje.

Namen

Tako besedilne naloge kot naloge iz modeliranja so podane v kontekstu, ki je učencem dobro poznan. Pri besedilnih nalogah sta osnovni namen prepoznavanje matematičnih pojmov v tipičnih situacijah in učenje postopkov pri matematični obravnavi tipičnih situacij. Nasprotno pa je pri modeliranju poudarek na povezovanju situacije iz konteksta in matematičnih objektov. Ta povezava nasploh ni vnaprej predvidena in možnih je več povezav. Učenec mora predlagati povezavo in kritično obravnavati njeno primernost, v procesu modeliranja lahko matematični opis obravnavanega pojava tudi spremeni oziroma modificira. V gornjem primeru ni bistvo naloge, da seštevamo medalje ali da pravilno izračunamo razmerje med medaljami in številom prebivalcev, temveč v tem, da učenec razmišlja o mogočih kriterijih, njihovem matematičnem opisu in o primernosti uporabe posameznih kriterijev.

Realističnost

Realističnost naloge pomeni, da je v nalogi opisana situacija taka, da jo učenec zmore doživljati, kot bi bila resnična in do take mere, da lahko v situacijo vnaša lastne izkušnje. Običajne besedilne naloge so lahko bolj ali manj realistične, kot smo že pokazali v uvodnem razdelku. Naloge iz modeliranja pa morajo biti realistične, vendar ne le to, pri modeliranju učenec raz-

mišlja in odloča o tem, kako realistično situacijo povezati z matematiko. Razliko pa najbolje ponazorimo na primeru naloge.

Nekdo ima 10 kosov vrvi, vsak kos je dolg 50 cm. Odloči se, da konce med seboj poveže z vozlom, tako da dobi dolg vrv. Kako dolg vrv bo dobil?

Nerealistični premislek	Realistični premislek	Modeliranje
Vrv bo dolga $10 \times 0,5 \text{ m} = 5 \text{ m}$.	Vrv bo dolga $10 \times 0,5 \text{ m} = 5 \text{ m}$, vendar to ne drži povsem, ker je napravil vozel, tako da je v resnici krajša.	Najprej ne bom upošteval vozlov. Vrv bo dolga $10 \times 0,5 \text{ m} = 5 \text{ m}$. V resnici bo zaradi vozlov vrv krajša? Vsak vozel porabi nekaj vrvi. Bom privzel, da vsak vozel porabi enako mnogo vrvi. Vrv bo potem dolga Od česa pa je odvisna količina vrvi, ki je potrebna za posamezni vozel? Bom privzel, da je odvisna samo od debeline vrvi. Kakšna pa je ta odvisnost ...?

Model

Model je posebna vrsta predstavitve. Pri običajnih predstavitev matematični pojem ponazorimo z drugim pojmom, denimo daljico ponazorimo z lasom ali z napeto tanko struno. S primerjavo poudarimo 'tankost' oziroma ravnost premice. Za model pa je pomembna strukturna podobnost med objektom in njegovo predstavitvijo. Strukturna podobnost omogoča, da pri razmišljanju objekt nadomestimo z modelom. Z modelom lahko predvidimo, kaj se je ali kaj bi se zgodilo z objektom v nekih novih okoliščinah. Pri nalogi o jajcih smo situacijo povezali s premim sorazmerjem. Premo sorazmerje uporabimo kot model za odnos med količino nakupljenih jajc in potrebnim zneskom za plačilo zanje. Nedvomno gre za strukturno podobnost med njima, ne moremo pa ju enačiti. Model, na primer, omogoča izračun zneska za 10 jajc, a tudi za 3,2 jajca ali pa milijon jajc, pri čemer izračun v zadnjih dveh primerih za nakupovanje v trgovini verjetno ne drži.

Poleg strukturne podobnosti s predstavljenim objektom so za model pomembne še druge značilnosti. Kot prvo naj omenimo zamenljivost: žoga je lahko model za geometrijsko kroglo (oz. sfero), a tudi geometrijska krogla (oz. sfera) je lahko model za žogo. Model mora biti avtonomen, o njem torej lahko razmišljam neodvisno od objekta, na katerem je uporabljen. Nadalje model ima le omejeno območje veljavnosti, objekt nadomešča le v določenih okoliščinah in v določenih pogledih. Geometrijska krogla (oz. sfera) je model za žogo, če nas, na primer, zanima površina, prostornina ali prerez žoge, a je neuporabna, če skušamo z njo napovedati, kako se bo žoga odbila od tal.

V šolski matematiki ni torej model nič novega. Povsem običajno je, da pri reševanju besedilnih nalog uporabimo tak ali drugačni model: premo sorazmerje pri nakupovanju, (geometrijsko) kroglo pri obravnavi žoge. Novost modeliranja v šolski matematiki je v tem, da učenci sami izdelujejo matematične modele, če pa uporabijo poznane modele, pa kritično razmišljajo o primernosti uporabe modela v dani situaciji.

Metode modeliranja

Bistvo matematičnega modeliranja je iskanje ali izdelava primerne matematične predstavitve za obravnavani pojav. Pogoj za modeliranje je seveda usvojenost matematičnih pojmov in postopkov, ki jih uporabimo pri modeliranju. Pri izdelavi modela si običajno pomagamo z nekaj preprostimi tehnikami oziroma pristopi. Vendar pa je matematično znanje učencev v osnovni šoli preskromno, da bi jih lahko uporabili, zato jih bomo le kratko opisali.

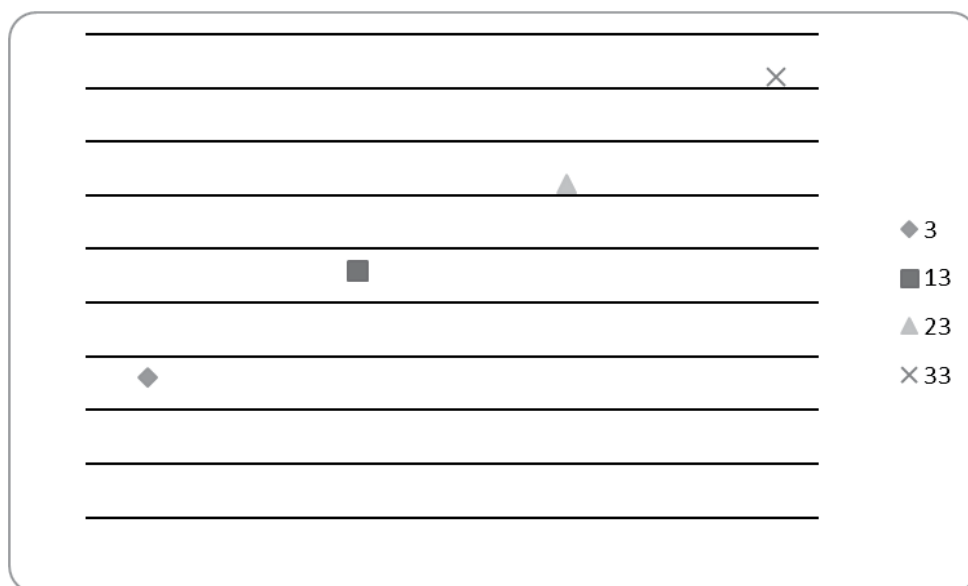
Empirični pristop

Ta pristop (pri šolski matematiki) uporabimo, kadar iščemo odnos med spremenljivimi količinami in imamo na voljo ustrezne empirične podatke (meritve). S prikazom podatkov v koordinatnem sistemu skušamo ugotoviti funkcijsko odvisnost med količinami.

Primer

Spodnja preglednica prikazuje ceno vožnje z avtobusom v eno smer glede na prevoženo pot.² Predlagaj ceno vozovnice za razdaljo 20 km.

Razdalja [km]	3	13	23	33
Znesek [€]	1.3	2.3	3.1	4.1



V osnovni šoli bi učenci, ki poznajo pojem grafa funkcije, lahko nalogo rešili grafično. V koordinatnem sistemu bi narisali poznane točke in jih bodisi na neki način povezali med seboj ali pa bi potegnili premico, ki bi se kolikor toliko prilegala danim točkam. Iz dobljenega grafa funkcije bi nato odčitali želene vrednosti.

Teoretični pristop

Teoretični pristop uporabimo, kadar lahko na osnovi predpostavk obravnavano situacijo povežemo z obvladljivimi matematičnimi pojmi – to pomeni, da na modelu z matematičnimi orodji lahko odgovorimo na vprašanja, ki nas zanimajo o dani situaciji.

Primer



Navpično postavljen sod polnimo z vodo. Po eni uri sega gladina vode do tretjine višine sode. Čez koliko časa bo sod napolnjen do treh četrtin?

Slika 1: Navpično postavljen sod. (vir: lasten)

Razmislimo o naslednjih dveh predpostavkah: Prvič, dotok vode v sod je enakomeren. Drugič, po obliki je sod valj. Ob teh privzetkih so spremenljivke iz naloge (čas, višina vode v sodu) v odnosu premega sorazmerja, tako da lahko odgovorimo na vprašanja, kakršno je zastavljeno v nalogi. Seveda pa se tudi vprašamo, kako točen je naš model. Če so izračuni po našem modelu zadovoljivo natančni, lahko model sprejmemo. V nasprotnem primeru je treba spremeniti predpostavke in postaviti drugačen model (morda tudi spremeniti pristop).

Simulacijski pristop

Simulacijski pristop uporabimo, kadar znamo (ob izbranih predpostavkah) matematično opisati le posamezne dele pojava, ne pa pojav v celoti. Včasih namreč lahko iz poznavanja dela pojava preučimo večji del pojava ali tudi pojav v celoti.

Primer

Rejec Marko se ukvarja z vzrejo ovac, ima jih 200. Nasploh se črede ovac vsako leto povečajo za 20 %, Marko pa se je odločil, da bo vsako leto prodal 50 ovac. Kako se bo spreminjala številčnost Markove črede ovac?

Z osnovnošolskim znanjem si pri taki nalogi lahko pomagamo le s simulacijo. Torej izračunamo, kolikšna bo čreda po enem letu, ta rezultat uporabimo za izračun števila ovac po drugem letu itd. Izračune najlepše predstavimo v preglednici.

Leto	Št. ovac	Prirastek	Prodano	Dejanski prirastek
0	200	40	50	- 10
1	190	38	50	- 12
2	178	36	50	- 14
3	164	33	50	- 17
4	146	29	50	-21
5	126	25	50	-25
6	101	20	50	-30
7	71	14	50	-36
8	35	7	50	-43

4.1.3 Modeliranje v osnovni šoli

Matematično znanje učencev je v osnovni šoli preskromno, da bi lahko sami izdelali matematični model obravnavanega pojava. Zato v zvezi z modeliranjem poudarjamo druge prvine, predvsem take, ob katerih se učenec uči, kaj je to model in kako kritično obravnavati odnos med modeliranim pojavom in modelom. Ti elementi so:

- **Interpretacija izhodišč naloge.**
- **Formuliranje omejitev pri obravnavi pojava.** Utemeljitev izbrane interpretacije, izbire omejitev, postavljenih hipotez.
- Izbira oziroma izdelava matematičnega modela. Ta vidik je manj poudarjen zaradi omejenega matematičnega znanja učencev.
- **Interpretacija izračunov in veljavnosti izračunov.**
- **Usklajevanje med udeleženci o interpretacijah, izbiri omejitev, izbiri ciljev.**
- **Zapis postopka modeliranja, predstavitev modela.**

4.1.4 Postopek modeliranja v osnovni šoli

Predvsem naj poudarimo, da je modeliranje ciklični proces, v katerem povezujemo obravnavani pojav z matematičnimi objekti. Še tako preprosto modeliranje zahteva dobro poznavanje modeliranega pojava in seveda nekaj matematičnega znanja. Izdelava matematičnega modela zato ni preprosta. V naslednjem razdelku bomo pokazali enostavnejše pristope k modeliranju v osnovni šoli.

Postopek modeliranja bomo ponazorili ob sledeči nalogi³:

Okroglo dvorišče želimo tlakovati s pravilnimi šestkotnimi tlakovci. Koliko tlakovcev potrebujemo?

Pri nalogi želimo raziskati odnos med velikostjo okroglega dvorišča in številom potrebnih tlakovcev.

1. **Interpretacija situacije.** Najprej si morajo učenci dobro predstavljati situacijo. Prav mogoče je, da bodo morali poizvedeti po podatkih in dejstvih, ki jih v sami nalogi ni. Učenci v skupini, ki rešujejo to nalogo, morajo med seboj uskladiti razumevanje vsebine naloge.
V gornji nalogi je tako treba doseči skupno razumevanje o tem, kaj pomeni tlakovati dvorišče s šestkotnimi tlakovci, kako poteka tlakovanje, kakšni so pravzaprav tlakovci ipd.
2. **Nastopajoče spremenljivke.** Pri vsakem pojavu nastopa ogromno spremenljivk. V tem koraku skušamo navesti vse, ki bi lahko bile kakor koli pomembne za nastajajoči model.
Pri tlakovanju je poleg velikosti (premera) dvorišča pomembna tudi velikost tlakovca (dolžina stranice pravilnega šestkotnika), prostor med tlakovci, lahko pomislimo tudi na debelino tlakovcev, material, način rezanja tlakovcev oziroma ali je tlakovce mogoče rezati ipd.
3. **Upoštevanje spremenljivk. Formuliranje predpostavk.** Verjetno je to najpomembnejši korak pri modeliranju. Zdaj premislimo, katere od spremenljivk so nemara povsem nepomembne za model, katere je nujno upoštevati. Mnoge spremenljivke pa so take, da bolj ali manj vplivajo na pojav, vendar je stvar naše odločitve, ali jih bomo upoštevali ali pa ne. Morda presodimo, da vpliv spremenljivke ni tolikšen, da bi jo bilo vredno upoštevati, morda pa enostavno ne vemo, kako naj bi jo upoštevali. Poleg tega, da izberemo spremenljivke, ki jih bomo upoštevali, je zares pomembno, da formuliramo, s kakšno predpostavko bomo posamezno spremenljivko uporabili. Moramo se namreč zavedati, na kakšnih predpostavkah bo temeljil naš model ali izračun, saj ga bomo le tako lahko kritično ovrednotili in ga eventualno dodelali.
V našem primeru se bomo na začetku odločili, da bomo upoštevali le velikost dvorišča (premer = D) in velikost tlakovcev (stranica = a). Naš model bo temeljil na predpostavki, da se 'površina tlakovcev pretopi v površino dvorišča'.
4. **Prevedba v matematične objekte, izračun.** Če smo primerno izbrali spremenljivke in primerno formulirali predpostavke, navadno ne bo težko prevesti situacije v matematični jezik in opraviti potrebne izračune.
Pri naši predpostavki iz točke 3 je izračun preprost. Površino dvorišča delimo s ploščino enega tlakovca. Potrebno število tlakovcev je torej enako $(\pi \cdot D^2/4)/(6 \cdot a^2\sqrt{3}/4)$.

5. **Interpretacija rešitve.** V tem koraku matematično izraženo rešitev prevedemo v izhodiščni kontekst.

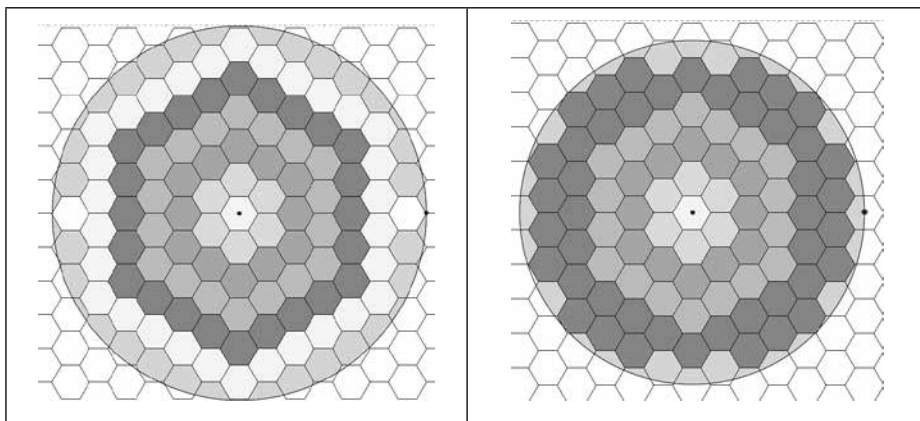
V našem primeru, denimo, rezultat predstavlja število tlakovcev, vendar rezultat navadno ne bo celo število.

6. **Obravnava ustreznosti rešitve.** Pri izdelavi modela smo pozorni na želeno območje veljavnosti. Ker je bil model izdelan ob upoštevanju le nekaterih spremenljivk in ob določenih predpostavkah, je treba preizkusiti, ali na želenem območju veljavnosti daje ustrezne rezultate.

Če preizkusimo naš model na primeru dvorišča s premerom 4 m in tlakovcih z osnovnico 20 cm, dobimo po izračunu rezultat 120,92 tlakovca, oziroma 121 tlakovcev. Dejansko pa, kot je razvidno iz slike, potrebujemo $1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 2 = 91$ celih tlakovcev in 36 delov tlakovcev, skupaj torej 127 tlakovcev. Če bi bil premer dvorišča 3,6 m, bi po našem modelu potrebovali 98 tlakovcev, dejansko pa 91 celih tlakovcev, 30 tlakovcev pa bi uporabili delno. V prvem primeru smo z modelom lahko zadovoljni, v drugem pa ne najbolj.

Naš model nas ne bo izneveril glede števila celih tlakovcev. Potrebno število celih tlakovcev zagotovo ne bo večje od izračunanega. Bolj pa moramo biti pozorni na število tlakovcev, ki jih delno uporabimo. Zato bomo popravili model in ocenili število delno uporabljenih tlakovcev. Zato se vrnemo k točki 2 in ločeno obravnavamo dve spremenljivki: število celih tlakovcev in število delnih tlakovcev na tlakovanem dvorišču. Število delno uporabljenih tlakovcev lahko izračunamo iz obsega dvorišča. Poskusimo s predpostavko, da rob dvorišča seka robne tlakovce po sredini. Ocena števila delnih tlakovcev je torej $(\text{obseg dvorišča})/(\text{premer tlakovca})$. Postopek ponovimo. Če smo z dobljeno oceno celih in delnih tlakovcev zadovoljni, z izdelavo modela zaključimo.

7. **Poročanje.** Preostane le še izdelava poročila o tem našem modelu. V poročilu posebej poudarimo, na katere spremenljivke smo se omejili in na kakšnih predpostavkah temelji naš model.



Slika 2: Tlakovanje okroglega dvorišča s pravilnimi šestkotnimi tlakovci. (avtorica: Barbara Kavčnik)

4.1.5 Dejavnost modeliranja

Uvajanje

L. English, ki je izvedla veliko raziskav o uvajanju modeliranja na razredni stopnji šolanja, poudarja pomen priprave učencev, preden se soočijo s situacijo modeliranja. V pripravljalnem obdobju je skušala učence usposobiti za naslednje dejavnosti:

- interpretacija informacij iz besedila, branje preprostih diagramov,
- branje informacij iz preprostih preglednic,
- zbiranje, analiziranje, predstavljanje podatkov,
- izdelava poročila o reševanju,
- sodelovanje v skupini,
- predstavitev naloge, postopka reševanja oz. rezultatov reševanja.

Modeliranje v osnovni šoli je največkrat skupinska dejavnost, delo v skupini pa zahteva zmožnost sodelovanja, torej usposobljenost za sodelovalno učenje. Poleg tega se pri modeliranju skoraj vedno srečamo z delom s podatki (če ne drugje, pa pri preverjanju modela). Kot vidimo, je torej modeliranje primer kompleksne dejavnosti, kjer pridejo do izraza številne kompetence splošnega pomena. Modeliranje je tako priložnost za učenje teh kompetenc.

Kritična uporaba znanih modelov

Izdelava matematičnih modelov je skoraj praviloma zahtevna. Po drugi strani pa je uporaba modelov v šolski matematiki nekaj običajnega, pomislimo le na opise pojavov s premim ali obratnim sorazmerjem ali pa modeliranje predmetov z geometrijskimi telesi. O modeliranju se veliko naučimo, če – vsaj občasno – tipičnih modelov ne uporabljamo mehansko, temveč kritično. Poglejmo to na primeru:

Vrtnar obstriže 15 m žive meje v 25 minutah. Koliko časa potrebuje, da obstriže 300 m žive meje?

Pri reševanju tovrstne naloge naj bi učenec prepoznal odnos premega sorazmerja in izračunal, da je potreben čas striženja $25 \cdot 300 / 15 \text{ min} = 500 \text{ min}$. Prav pa je, da – vsaj občasno – ob reševanju poudarimo elemente modeliranja. Preden uporabimo model premega sorazmerja formulirajmo pri kakšnih predpostavkah bomo reševali nalogo. Ti predpostavki sta:

1. Količina obstrižene žive meje je odvisna samo od časa striženja.
2. Vrtnar striže živo mejo z enakomerno hitrostjo.

Pri teh predpostavkah lahko striženje žive meje modeliramo s premim sorazmerjem. Po izračunu, da je čas striženja 500 minut, je treba rezultat interpretirati v okviru predpostavk. Kako razumeti rezultat 500 minut? Če gre za delovne ure, razporejene v daljšem časovnem obdobju, je rezultat sprejemljiv. Če pa gre za nepretrganih 500 minut, je vprašljiva predpostavka o enakomerni hitrosti in posledično seveda tudi sam rezultat.

Analiza predstavljenega modela

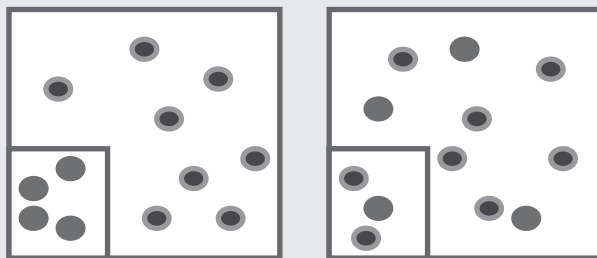
Izdelava matematičnega modela je običajno zahtevna, zato učencem ponudimo že izdelan model. Naloga učencev je, da model analizirajo. Torej, da ugotovijo, na katerih predpostavkah sloni, morda model tudi poskusijo uporabiti, razmislijo, v katerih mejah je uporaben. Skratka, analizirajo model. Ponazorimo to s primerom izdelanega modela.

Da bi ocenil število rib dane vrste v ribniku, ravna ribič na naslednji način: Ribič ujame vzorec rib, recimo 10 rib, jih označi in spusti nazaj v ribnik. Čez čas ponovno ulovi vzorec, denimo 20 rib, in ugotovi, da so med njimi 3 označene. Število rib v ribniku izračuna tako, da reši enačbo:

$$\frac{15}{x} = \frac{3}{20}$$

$$x = \frac{20 \cdot 15}{3}$$

Pojasni, zakaj se lahko opisani način uporablja za ocenjevanje števila rib. Obravnavaj natančnost ocene. Kateri dejavniki bi lahko vplivali na ustreznost ocene? Kje bi prišel v poštev tak način ocenjevanja števila. (Pri razmišljanju si pomagaj s spodnjo skico.)



Modeliranje na razredni stopnji

Z izjemo naloge o državah udeleženkah olimpijskih iger se ostali primeri modeliranja nanašajo na vsebine iz predmetne stopnje osnovne šole. Modeliramo pa tudi na razredni stopnji, seveda pa je treba učence na to dejavnost ustrezno popraviti. Za konec zato predstavljamo zanimivo nalogo, prirejeno po (English, Watters, 2004), ki je primerna tudi za razredno stopnjo.

Gospod Jaka prideluje fižol. Letos je posadil fižol na dveh gredicah: eno na sončni legi, drugo na senčni. Vsakih nekaj tednov je ocenil, koliko fižola je zraslo na posamezni gredici.

Sončna gredica			
	6. teden	8. teden	10. teden
1. vrsta	9 kg	12 kg	13 kg
2. vrsta	8 kg	11 kg	
3. vrsta	9 kg	14 kg	18 kg
4. vrsta	10 kg	11 kg	17 kg

Senčna gredica			
	6. teden	8. teden	10. teden
1. vrsta	5 kg	9 kg	15 kg
2. vrsta	5 kg	8 kg	14 kg
3. vrsta	6 kg	9 kg	12 kg
4. vrsta	6 kg	10 kg	13 kg

Ugotovite, s katerim načinom pridelave bo gospod Jaka prišel do več pridelka. Napišite gospodu Jaki pismo: sporočite mu svoj predlog in utemeljitev za svojo odločitev.

Napovejte, kolikšen bo pridelek na eni in drugi gredici po 12 tednih, ko fižol dozori. Pojasnite, kako ste prišli do napovedi, da si bo gospod Jaka znal sam pomagati v podobnih primerih.

Opomba: Na predmetni stopnji lahko k nalogi dodamo vprašanje o tem, kako bi lahko gospod Jaka ocenil količino fižola v vrsti, ne da bi pri tem uničil vseh rastlin. Lahko obere nekaj rastlin in s premim sorazmerjem oceni količino za vso vrsto.

Literatura in viri

- 1 Berry, J., Houston, K. (1995). *Mathematical Modelling*. Edward Arnold: London.
- 2 Boaler, J. (2001). *Mathematical modelling and theories of learning. Teaching mathematics and its applications*, 20, str. 121–127.
- 3 English, L. D., Watters, J. J. (2004). *Mathematical modelling with young children. V: Proceedings of the 28th International PME Conference, Bergen, Norway 14–18 July 2004*, str. 335–342.
- 4 English, L. D., (1997). *The Development Of Fifthgrade Children's Problem Posing Abilities. Educational Studies in Mathematics*, 34, str. 183–217.
- 5 Giordano, F. R., Weir, M. D., Fox, W. P. (2003). *A First Course in Mathematical Modeling. Cengage Learning: Brooks/Cole*.
- 6 Lesh, R., Harel, G. (2003). *Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development. Mathematical Thinking and Learning*, 5, 2–3, str. 157–189.

4.2 Matematično modeliranje pri geometriji

Mag. Mojca Suban, Zavod RS za šolstvo

Uvod

V posodobljenem učnem načrtu se cilji, povezani z modeliranjem, formalno pojavijo v tretjem VIO, čeprav se učenci neformalno z modeliranjem srečujejo že prej. Omejimo se na cilje, ki se navezujejo na vsebino Modeliranje (geometrijski modeli).

V osmem razredu je zapisan cilj: *modelirajo fizične objekte z geometrijskimi modeli (npr. fizični model strehe modeliramo z geometrijskim modelom piramide)*, smiselno ga realiziramo tudi v sedmem razredu pod to vsebino.

V devetem razredu se geometrijski modeli obravnavajo pri ciljih:

- *modelirajo abstraktne (življenjske) situacije ali procese (oblikujejo algebrski izraz, formulo, enačbo, prikaz itd., ki prikazuje dano situacijo),*
- *interpretirajo matematične modele,*
- *ugotavljajo veljavnost modela,*
- *razmišljajo o modelu in njegovih rezultatih.*

Nabor nalog o modeliranju, s katerimi se učenci lahko uspešno spopadejo, se povečuje s širjenjem in poglobljanjem znanja iz geometrijskih vsebin. Pri tem razvijajo in krepijo geometrijske predstave ter razvijajo svoje kompetence za raziskovanje in reševanje problemov. Učijo se povezovati znanje znotraj matematike in znanje matematike z znanji drugih disciplin, zato matematično modeliranje ponuja tudi možnosti medpredmetnega povezovanja (npr. primer izdelave tlorisa sobe).

Primer

Za izhodišče vzemimo fotografijo posode in preberimo podatek, da posoda drži 1000 l.

Zastavimo vprašanje:

Kolikšne bi lahko bile mere posode na sliki?



Slika 1: Posoda. (vir: lasten; barvno fotografijo najdete na zgoščenki, ki je priloga priročniku)

Predstavimo nekaj modelov, ki se razlikujejo v stopnji matematičnega znanja, nekateri pa so za učence v osnovni šoli celo prezahtevni, izračuni pa prekompleksni.

Vprašanja, ki se zastavljajo:

- Katere podatke potrebujemo za izdelavo modela?
- Kako jih bomo pridobili?
- Katere predpostavke bomo uporabili pri izdelavi modela?
- Kako bi preverili ustreznost modela?

1. Posodo modeliramo s kvadrom. Izračun bo temeljil na oceni iz fotografije, da je višina posode približno enaka dvakratniku polmera r dna posode. Dno posode modeliramo s kvadratom s stranico $2r$.

Prostornina kvadra je tako: $2r \cdot 2r \cdot 4r = 16r^3$. Ko to izenačimo s prostornino 1000 dm^3 , dobimo, da je $r \doteq 4 \text{ dm}$. Izračunamo še višino, ki je približno 16 dm .

Komentar modela: opisani model se precej razlikuje od dejanske oblike posode, zato je rezultat precej nenatančen.

2. Posodo modeliramo z valjem. Izračun bo temeljil na oceni iz fotografije, da je višina posode približno enaka dvakratniku polmera r dna posode. Prostornina valja je tako: $2\pi r^2 \cdot 4r$. Ko to izenačimo s prostornino 1000 dm^3 , dobimo, da je $r \doteq 3,4 \text{ dm}$, in računamo še višino, ki je približno $13,6 \text{ dm}$.

Komentar modela: o tem, ali je rezultat vsaj približno smiselni, bi lahko sklepali tako, da bi velikost posode primerjali z velikostjo drugih predmetov na fotografiji (npr. talna ploščica, kovinska rešetka).

3. Posodo modeliramo s polkroglo in valjem (namesto valja bi lahko vzeli kvader ali prisekan stožec). Ocenimo, da je premer krogle $2R$ približno enak dvema tretjinama višine v , premer valja $2r$ pa približno eni tretjini višine v .



Slika 2: Modeliranje posode s polkroglo in valjem. (vir: lasten)

Izračunajmo prostornino polkrogle: $\frac{4\pi R^3}{6} = \frac{8}{81}\pi v^3$.

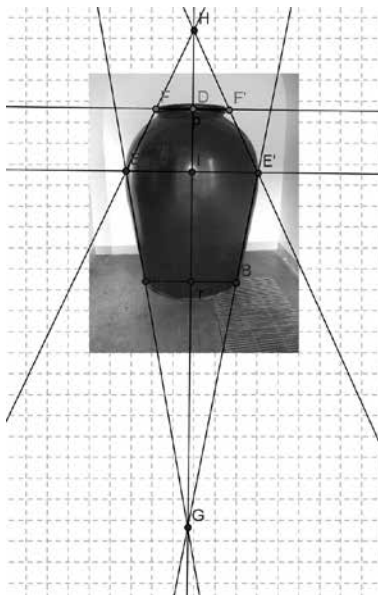
Izračunajmo prostornino valja: $\pi r^2 \cdot \frac{2}{3}v = \frac{1}{54}\pi v^3$.

Vsota obeh prostornin je enaka: $\frac{513}{4374}\pi v^3 \doteq 0,1173\pi v^3$.

Ko skupno prostornino izenačimo s 1000 dm^3 , dobimo, da je višina posode enaka $v = 13,9 \text{ dm}$. Od tod je polmer valja enak $r = 2,3 \text{ dm}$.

Komentar modela: uporabljena predpostavka o premeru valja je pomenila, da smo zanemarili del prostornine.

4. Posodo modeliramo z dvema prisekanima stožcema (slika 3), pri izdelavi modela uporabimo program dinamične geometrije.⁴ Aktivna predloga je dosegljiva na zgoščenki, ki je priloga priročniku.



Slika 3: Modeliranje posode z dvema prisekanima stožcema (vir: lasten, mag. Mateja Sirnik).

Označimo z d razdaljo med točkama A in B . S pomočjo orodja za merjenje v Geogebri pridemo do naslednjih podatkov:

$$\frac{|EE'|}{|AB|} = 1,45d$$

$$\frac{|FF'|}{|AB|} = 0,81d$$

$$|IG| = 3,9d$$

$$|IC| = 1,21d$$

$$|ID| = 0,69d$$

$$|IH| = 1,56d$$

⁴ Izračun in predlogo v Geogebri je naredila mag. Mateja Sirnik.

Izračunajmo prostornino spodnjega prisekanega stožca:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot 1,45^2 \cdot 3,9 \cdot d^3}{3} - \frac{\pi \cdot 2,69 \cdot d^3}{3} = 1,84\pi d^3$$

Izračunajmo prostornino zgornjega prisekanega stožca:

$$V_2 = \frac{\pi \cdot 1,45^2 \cdot 1,56 \cdot d^3}{3} - \frac{\pi \cdot 0,87 \cdot d^3}{3} = 0,80\pi d^3$$

Vsota obeh prostornin je $V_1 + V_2 = 2,64\pi d^3$.

Iz podatka o prostornini posode (1000 litrov) bomo izračunali polmer: $2,64\pi d^3 = 1000$. Od tod izračunamo, da je $d = 4,9$ dm.

Komentar modela: izračun presega znanje osnovnošolske matematike.

Didaktična izpeljava

Primer lahko obravnavamo v fazi ponavljanja in utrjevanja, lahko pa je tudi uvodna motivacija pri obravnavi nove vsebine (krogla, valj). Če imamo možnost, jo lahko z istimi učenci izvedemo večkrat in preučujemo, kaj se dogaja z modeli, ko učenci povečujejo svoje znanje iz geometrije. Izvedemo jo lahko z učenci različnih starosti in preučujemo nastale modele.

Sklep

Geometrijsko modeliranje lahko učenci izvedejo za različne objekte, ki jih opazijo v svoji okolici. Glede na to, da jih je večina opremljena z mobilnimi telefoni s funkcijo fotografiranja, kaže tudi na tem področju izkoristiti priložnost in učence dejavno vključiti v načrtovanje in izvedbo dejavnosti.

Prilogi



Predloga v Geogebra

Slika posode

Literatura in viri

- 1 Žakelj, A. et al. (2011). *Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljene_UN/UN_matematika.pdf (3. 10. 2012).*

4.3 Primeri matematičnega modeliranja

4.3.1 Tloris sobe

Boštjan Repovž, Osnovna šola Krmelj

Avtor	Boštjan Repovž
Šola	Osnovna šola Krmelj
Učna tema	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Učni sklop	Modeliranje
Razred	9.
Potreben čas za izpeljavo	1 šolska ura
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • raziskujejo, razumejo in interpretirajo različne življenjske situacije, • modelirajo življenjske situacije; oblikujejo formulo, ki prikazuje dano situacijo, • interpretirajo matematične modele, • ugotavljajo veljavnost modela, • razmišljajo o modelu in njegovih rezultatih.
Standardi	Učenec/učenka: • življenjske situacije prikaže z modeli, • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja.
Oblike in metode dela	• individualno delo
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• merilni trak, • računalnik s PowerPoint predstavitevjo, • delovni list
Potrebno predznanje	• reševanje besedilnih nalog
Dejavnosti učencev	• reševanje besedilne naloge, • posploševanje, • iskanje modela
Faze učnega procesa	1. Uvod: predstavitev problemske situacije in nakazana pot reševanja 2. Izvedba v razredu: reševanje problema 3. Sklep: razmišljanje o modelu in njegovih rezultatih
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Učenci radi rešujejo naloge, ki so nekoliko drugačne od običajnih. Pri reševanju naloge so se zelo potrudili in narisali vse detajle (posteljo, mizo, omaro ...). Za predstavitev so uporabili različne like, največkrat se pojavi pravokotnik in kvadrat. Uporabili so tudi krog in polkrog.

Opombe, dodatna opažanja, posebnosti	Z nalogami me je seznanila pedagoška svetovalka Zavoda RS za šolstvo. Z veseljem sem sprejel povabilo k sodelovanju o preskušanju reševanja naloge v razredu.
Možnosti za razširitev problema	Postavili bi podobne situacije iz vsakdanjega življenja in iskali modele, ki bi jih pripeljali do rešitev.
Prilagoditve za učence z učnimi težavami	Naloga je bila primerna za vse učence.

Uvod

Učence sem nagovoril z vprašanjem, s katerim sem želel spodbuditi razmišljanje in iskanje ustreznih znanj, ki so imela teoretična izhodišča pri predmetu tehnike in tehnologije. Vprašanje se je glasilo: »Kako bi se lotili naloge, če bi želeli narisati tloris učilnice?« Pojem tloris so povezali z risanjem pri pouku tehnike in tehnologije. Vedeli so, da so že načrtovali tloris, stranski ris in naris.

Predstavil sem jim moja pričakovanja oziroma kaj od njih pričakujem, kaj želim, da je na listu narisano. Pričakovani izdelek je narisano tloris učilnice.

Izvedba v razredu

Učencem sem razdelil delovni list z nalogo in se pogovorili o nalogi. Besedilo naloge ni bilo zahtevno, zato sem jih usmeril k razmišljanju, kako bi nalogo rešili še doma.

Naloga

Izdelaj tloris svoje učilnice (svoje sobe). S katerimi geometrijskimi objekti na sliki si nadomestil fizične objekte? Katero merilo si upošteval?⁵

Predstavitev rešitev

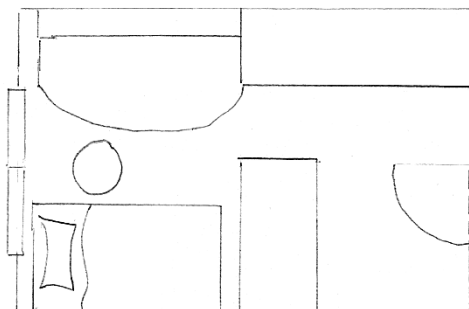
Vsi učenci devetega razreda so nalogo rešili in predstavili svoje rešitve. Predstavljene rešitve so bile osnova za domačo nalogo. Ponovili so nalogo, in sicer: »Nariši tloris svoje sobe.«

Rešitve domače naloge sem zbral in uredil.

Rešitve

- Narisan pravokotnik z dolžinama stranic $a = 7$ cm, $b = 6$ cm in pripis: »Upoštevala sem merilo svoje sobe«.
- Narisan pravokotnik z dolžino stranice $a = 11$ cm, $b = 6$ cm. Na sliki sta označena tudi okno s širino 1,5 cm in vrata s širino 1,1 cm. Merila ni.

- c) Narisani pravokotniki, na njih napisi: omara, postelja, miza, TV in ob njem zapisano merilo 1 : 10.
- d) Narisani pravokotniki, kvadrati, krogi. Ob sliki zapisano merilu 1 : 100, ali zapisano 1 m v sobi, 1 cm na listu.
- e) Narisana slika:



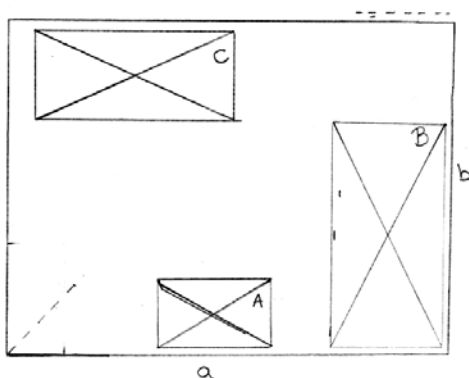
Slika 1: Izdelek učenke 9. razreda

Ob sliki je učenka zapisala:

»1 cm na sliki je 1 m v moji sobi. Soba torej meri 6 m x 4 m. Pohištvo oziroma predmeti so v resnici nekoliko manjši. Fizične objekte sem nadomestila z različnimi liki. Narisala sem tako, da sem izmerila predmet in meritev pretvorila v cm in prečtala dve mesti. Ostalo je mersko število, katero sem uporabila pri načrtovanju tlorisa.«

- f) Narisana slika in ob sliki zapisi:

$$\begin{aligned} a &= 400 \text{ cm} = 4 \text{ m} \\ b &= 300 \text{ cm} = 3 \text{ m} \\ \hline 400 : 50 &= 8 \\ 300 : 50 &= 6 \end{aligned}$$



1:50

LEGENDA:

A = omara (100x60)

B = postelja (200x100)

— = vrata (90)

C = miza (180x80)

--- = okno (90)

Slika 2: Izdelek učenca 9. razreda

Predstavitev težav

V devetem razredu je samo osem učencev. Vsi so predstavili svojo rešitev, kar pomeni, da so nalogo razumeli in z razumevanjem niso imeli težav. Ugotovil sem, da so učenci, ki imajo občasno težave pri matematiki, našli podoben model, torej dolžino in širino izmerjeno v metrih, pretvorili v centimetre in dobljeno meritev delili s 100, ali so zapisali, da je »1 cm na sliki 1 m v moji sobi«. Drugi pa so ponudili zahtevnejša razmišljanja oziroma modele, npr.: razmerje

1 : 50. Iz izdelkov je razvidno, da so nekateri učenci narisali samo tloris prazne sobe, nekateri pa so se potrudili in umestili tudi pohištvo. Iz rešitev ni bilo mogoče trditi, da so sposobnejši učenci naredili več.

Ugotavljanje veljavnosti modela

Po predstavitvi rešitev smo se vsi strinjali, da je naloga manj zahtevna, in z njo niso imeli težav, ker so znanje povezali s tehniko in tehnologijo in tako nalogo uspešno rešili. Morda je bilo zaradi preračunane dolžine nekaj težav z umeščanjem pohištva, oken in vrati na sliko. Učenka, ki je zapisala, da je pohištvo malce manjše v resnici, je svojo sliko pojasnila. Ugotovila je, da bi bili določeni deli na sliki premajhni, težko bi jih narisala, zato je pri pohištvu in drugih delih malce spremenila podatke. Merila pa ni spreminjala, ker bi morala potem vse podatke spremeniti.

Refleksija

Refleksija učencev

Vsi učenci so predstavili svoj model, zato so bili z nalogo zelo zadovoljni. Dobili so potrditev, da je vsak predstavljen model pričakovan. Na osnovi povratne informacije v razredu so lahko svoje odgovore pri domači nalogi nadgradili oziroma dopolnili. Uporabljali so lahko žepno računalno, kar jim je bilo v veliko pomoč, zato so imeli več časa za razmišljanje in razvijanje svoje ideje.

Refleksija učitelja

Učenci devetega razreda so podali šest različnih modelov, kako narisati tloris. Učenka je narisala pravokotnik in ob njem napisala: »Upoštevala sem merilo svoje sobe«. Neki učenec je narisal samo tloris sobe, torej pravokotnik in ob njem zapisano dolžino in širino v metrih. Narisano je bilo z enakim merskim številom, vendar z drugo mersko enoto. Merila ni bilo zapisanega. Pri drugem učencu sem opazil narisane pravokotnike in kvadrat ter v njih zapisano ime pohištva. Ob sliki je bilo zapisano 1:10. Na vprašanje, koliko dolgo ima sobo, mi je pojasnil, da je storil napako pri zapisu merila, moralo bi pisati 1:100, kar naj bi pomenilo 100 cm v sobi, 1 cm na sliki. Trije učenci so narisali podobno sliko, kot je opisan v primeru d). Ena učenka je samo narisala sliko v primeru e), ena pa sliko v primeru f). Iz naštetega je razvidno, da so vsi učenci razumeli, kaj naj bi narisali. V večini primerov je pravilno narisano, le odgovori oziroma opisi so bili zelo skromni.

Iz rezultatov bi lahko sklepal, da morda premalo poudarjam: še enkrat preberi nalogi, kaj naloga zahteva, katere odgovore zapišeš, skratka, bolj bi moral razvijati to odgovornost do natančnega izdelka in kritičen odnos učencev do odgovorov.

Nalogo so reševali tudi učenci sedmega in osmega razreda. Tudi pri njihovih izdelkih sem ugotovil podobne težave. Premalo natančen odgovor in premalo so kritični do svojih odgovorov. Prvi del naloge je bil pričakovano rešen, odgovori na vprašanja pa so bili skromni ali jih sploh ni bilo.

Z opazovanjem njihovega dela in predstavitvijo rezultatov lahko trdim, da se poleg učnih in procesnih ciljev:

- raziskujejo, razumejo in interpretirajo različne življenjske situacije;
- modelirajo življenjske situacije; oblikujejo formulo, ki prikazuje dano situacijo;

- interpretirajo matematične modele;
- ugotavljajo veljavnost modela;
- lahko razvijajo tudi:
 - uporabo žepnega računalja;
 - kritičen odnos do dobljenega rezultata;
 - interpretacijo dobljenega rezultata;
 - natančnost odgovorov.

Z delom in rezultati sem bil zadovoljen. Take in podobne naloge bomo še reševali in z njimi razvijali spretnosti in veščine, ki jih učenci potrebujejo pri reševanju podobnih nalog.

4.3.2 Število čistilk

Katja Kmetec, Osnovna šola Brinje, Grosuplje

Avtor	Katja Kmetec
Šola	Osnovna šola Brinje, Grosuplje
Učna tema	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Učni sklop	Modeliranje
Razred	9. (3. raven zahtevnosti)
Potreben čas za izpeljavo	dve šolski uri
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • raziskujejo, razumejo in interpretirajo različne življenjske situacije, • modelirajo življenjske situacije; oblikujejo formulo, ki prikazuje dano situacijo, • interpretirajo matematične modele, • ugotavljajo veljavnost modela, • razmišljajo o modelu in njegovih rezultatih.
Standardi	Učenec/učenka: • življenjske situacije prikaže z modeli, • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja.
Oblike in metode dela	• delo v dvojicah
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• učni list, • predstavitev v PowerPointu, • Čistilka Fata. Radio 1. Dostopno na: http://www.genspot.com/video-37493/cistilka-fata.aspx (14. 11. 2012).
Potrebno predznanje	• izrazi, • medsebojna odvisnost količin
Dejavnosti učencev	• viharjenje možganov, • razgovor, • zapiski, • utemeljevanje
Faze učnega procesa	1. Uvod: predstavitev problemske situacije 2. Osrednji del: A reševanje problema, B predstavitev rešitev, C ugotavljanje veljavnosti modela 3. Sklep: razmišljanje o modelu in njegovih rezultatih
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Z učenci smo prvič izvajali takšno modeliranje. Učenci so izrazili veliko zanimanje za tovrstno delo. Kot učiteljica menim, da se je na takšne ure seveda treba dobro pripraviti, vendar pa je razplet ure popolnoma nepričakovan. Ni namreč mogoče vnaprej predvideti, do kakšnih ugotovitev bodo prišli posamezni učenci. Med delom so me presenetile precejšnje razlike v matematičnem znanju učencev, pa čeprav v homogeni skupini učencev tretje ravni zahtevnosti. Takšne razlike se pri običajnih urah ne izkažejo.

	Menim, da bi bile za tovrstne dejavnosti (ki jih izvajamo v šoli) zelo dobrodošle blok ure.
Možnosti za razširitev problema*	Uporaba njihovih lastnih formul pri obravnavi učnega sklopa. Preoblikovanje formul in obrazcev (izražanje želene spremenljivke, računanje, najmanj/največ koliko učencev bi moralo biti na šoli, če želimo zaposliti zeleno število čistilk).
Domače delo	Dokončati delo, ki so ga začeli v šoli, priprava predstavitev.
Prilagoditve za učence z učnimi težavami	Pri sestavi formule upoštevanje le enega dejavnika hkrati.

Uvod

Koliko čistilk potrebujemo na eni šoli? Se da to matematično izračunati? Kako?

Z opisanim primerom sem želela učencem pokazati uporabnost matematike v vsakdanjem življenju. Učenci so se postavili v vlogo ravnatelja in s tem dobili moč po postavitvi lastnega modela, modela, po katerem bodo izračunali, koliko čistilk potrebujejo na svoji šoli. Imeli so popolno »svobodo« pri tem, katere dejavnike bodo upoštevali in na kakšen način. Ker pa je svoboda vedno povezana tudi z odgovornostjo, so morali svoj model predstaviti, ga zagovarjati pred sošolci in nazadnje tudi pred čistilkami, ga preizkusiti in razmisliti, ali je ustrezen glede na različne kriterije.

Nalogo so reševali učenci tretje ravni zahtevnosti devetega razreda, torej učno zelo dobri učenci.

Izvedba v razredu

Uvod

Ogledali smo si posnetek čistilke Fate (iz oddaje TV Dober dan), ki je učence nagovorila v njej značilnem šalivem slogu. Sledil je pogovor o snažilkah na naši šoli: koliko snažilk je zaposlenih na naši šoli, koliko ur dnevno delajo in kaj vse pospravijo v tem času. Izkazalo se je, da učenci o tem ne vedo prav ničesar.

Vsak od njih si je nato zamislil, da je ravnatelj neke šole. Koliko čistilk bi zaposlil na svoji šoli? Od česa bi bilo to odvisno?

Sledila je nevihta idej, pri kateri so učenci navedli naslednje dejavnike, ki po njihovem vplivajo na to, koliko čistilk potrebujemo:

- talna površina šole;
- število učencev;
- vzgoja učencev (t. j., ali znajo pospraviti za sabo ali ne, kako zelo onesnažujejo šolo ipd.);
- »sposobnosti čistilk«, t. j.: ažurnost, gibčnost, delavnost; sposobnosti v povezavi z zdravstvenim stanjem in s starostjo čistilk;
- denar, ki ga ima šola na razpolago za plače vseh čistilk in povprečna plača ene čistilke;

- pripomočki, ki jih imajo snažilke na voljo za čiščenje (v primeru sodobne – strojne – opreme potrebujemo manj čistilk, kot če imajo na voljo le klasične pripomočke za čiščenje).

Učence sem nato usmerila, naj si izmed zgoraj naštetih dejavnikov izberejo dva ali tri kriterije, ki so po njihovem mnenju najpomembnejši za odločitev, koliko čistilk potrebujemo.

Osrednji del

Reševanje problema

Sledilo je samostojno delo v dvojicah oz. v skupinah po tri. Učenci so skušali najti formulo, s pomočjo katere bi lahko izračunali, koliko čistilk potrebujemo na (poljubni) šoli. Med delom sem spremljala dogajanje v posameznih skupinah. Izkazalo se je torej:

- Nekateri učence je zelo motilo, da niso poznali resničnih podatkov (kvadratura talne površine naše šole, koliko m² lahko počisti ena čistilka ...), medtem ko so drugi brez težav namesto konkretnih podatkov uporabili spremenljivke.
- Učenci so formulo skušali sestaviti tako, da so vzeli dva ali tri kriterije ter izračunali aritmetično sredino števila čistilk, ki bi jih dobili po posameznem kriteriju. Nekateri so imeli pri tem težave. Kot formulo so vzeli aritmetično sredino talne površine, števila učencev in denarja. Skupaj smo se pogovorili o tako dobljenih formulah. Učenci so sami ugotovili napako in jo tudi popravili.
- Pri tvorbi formule so nekateri učenci menili, da ima posamezni kriterij večjo težo kot preostali. Tega niso znali upoštevati v formuli. V tem primeru sem jim pomagala z napotki, kako lahko to matematično preprosto rešimo.
- Ob koncu dela sem učence pozvala, naj sami preizkusijo svoje formule in preverijo, ali dajo smiselni rezultat.
- Učenci so večino dela opravili v šoli. Za domačo nalogo so dokončali nalogo in se pripravili na predstavitev svojih rešitev.

Predstavitve rešitev

Učenci so nalogo vzeli zelo resno in odgovorno. Prihodnjo šolsko uro so z veseljem in suvereno predstavili svoje rešitve, obenem pa jih je zelo zanimalo, kakšne formule so sestavili učenci drugih skupin.

Učenci so sestavili naslednje formule:

$$1. \text{ število čistilk} = \frac{\text{talna površina [m}^2\text{]}}{500 \text{ m}^2}$$

$$2. \text{ število čistilk} = \frac{1}{4} \left(\frac{\text{talna površina [m}^2\text{]}}{800 \text{ m}^2} + \frac{\text{talna površina [m}^2\text{]}}{800 \text{ m}^2} + \frac{\text{število učencev}}{100} + \frac{\text{razpoložljivi znesek}}{\text{povprečna plača čistilke}} \right)$$

Opomba: Količnik med talno površino in 800 m² je namerno dvakrat upoštevan, ker so učenci menili, da je ta kriterij najpomembnejši in so mu dali večjo težo kot drugim kriterijem.

$$3. \text{ število čistilk} = \frac{p : y + a : b + z : x}{3}, \text{ pri čemer je:}$$

p – talna površina šole, izražena v m^2 ;

y – povprečne sposobnosti čistilke, tj., kolikšno površino je sposobna počistiti ob upoštevanju korekcijskih faktorjev v smislu zdravja in razpoložljive tehnologije;

a – denar, ki je na voljo;

b – plača;

z – število učencev šole;

x – število učencev, ki jih lahko obvladuje ena čistilka;

Namesto formule sta učenca sestavila nekakšen algoritem izračuna števila čistilk: najprej izračunamo »teritorij«, ki ga »zapaca« en učenec šole. Tega dobimo tako, da celotno površino šole delimo s številom vseh učencev šole. Potem se odločimo, koliko takšnih »teritorijev« lahko obvladuje ena čistilka. Izračunamo, koliko čistilk potrebujemo za obvladovanje vseh tako dobljenih teritorijev.

Učencem sem svetovala, naj upoštevajo le merljive dejavnike. Kako bodo npr. izmerili sposobnosti čistilk? Na takšna vprašanja so imeli premišljene odgovore, kot npr.: sposobnosti lahko dobimo tako, da vzamemo njihovo povprečno oceno športne vzgoje v osnovni šoli (ta naj bi dokazovala fizične sposobnosti), število poškodb in bolniških (zdravstveno stanje) ipd.

Ugotavljanje veljavnosti modela

Učenci so morali nato svoje formule preizkusiti. Vanje so vstavili podatke za našo šolo, in sicer:

- talna površina je $5205 m^2$,
- število učencev matične šole (brez OŠPP) je 511,
- snažilk nismo spraševali o njihovi plači, zato smo v vseh formulah ta del izpustili.

Dobljeni rezultati so prikazani v preglednici 1.

Preglednica 1: Preizkus formul, ki so jih sestavili učenci

Formula	Rezultat, zaokrožen na celo število
1. število čistilk = $\frac{\text{talna površina } [m^2]}{500 m^2}$	10 čistilk
2. število čistilk = $\frac{1}{3} \left(\frac{\text{talna površina } [m^2]}{800 m^2} + \frac{\text{talna površina } [m]}{800 m^2} + \frac{\text{število učencev}}{100} \right)$	6 čistilk
3. število čistilk = $\frac{1}{2} \left(\frac{\text{talna površina } [m^2]}{900 m^2} + \frac{\text{število učencev}}{86} \right)$	6 čistilk
4. »Teritorij«, ki ga »zapaca« en učenec šole: $10,19 m^2$. 1 čistilka lahko obvladuje približno 79 takih teritorijev (805 kvadratnih metrov, na katerih se nahaja cca. 79 učencev). 6,47 čistilk lahko obvladuje 511 takih teritorijev (s skupno površino 5205 kvadratnih metrov ter 511 učenci).	6 čistilk

Sklep: Razmišljanje o modelu in njegovih rezultatih

O modelih smo razmišljali z več različnih vidikov:

- »življenjskosti« modela: ali so dobljeni rezultati življenjski? Učence sem pozvala, naj razmislijo, koliko časa sami pospravljajo svojo sobo. Bi bili sposobni v osmih urah temeljito pospraviti 900 m²?
- Enostavnosti modela: verjetno ravnatelj neke šole nima časa računati povprečne ocene snažilke pri športni vzgoji in računati števila njenih bolniških dopustov. Kateri model je najbolj ustrezen v tem smislu, da ni preveč kompliciran in da nam da kljub temu dovolj dober rezultat?

Kot zanimivost smo si ogledali, kaj o številu čistilk na osnovni šoli pravi 21. člen Pravilnika o standardih in normativih za izvajanje programa osnovne šole.

Po pravilniku naši šoli pripada $(511 : 86 + 5205 : 900) : 2 = 5,862597 =$ (zaokroženo na najbližjo četrtno celote) 6 čistilk. Učenci so takoj ugotovili, da je rezultat, zaokrožen navzgor na najbližjo četrtno, lahko tudi število, ki ni celo (npr. 5,75), kar se jim je zdelo izredno neživljensko.

Zato so dopolnili svoje formule z navodilom, naj se rezultat zaokroži po matematičnih pravilih zaokroževanja na celo število.

Še k refleksiji z vidika učitelja

Učenci so se prvič srečali z modeliranjem. Pokazala se je velika motiviranost za delo. Učencem je bilo zelo všeč, da se lahko sami odločajo o tem, kaj upoštevati in kako. Pri tem pa so kmalu ugotovili, da še tako dobre ideje ne zadoščajo brez ustreznega matematičnega znanja. Čeprav so nalogo izvajali učenci tretje ravni zahtevnosti, torej relativno homogena skupina učno zelo dobrih učencev, so se pri delu pokazale velike razlike v matematičnem znanju, predvsem na višjih taksonomskih stopnjah: v razumevanju formul, uporabi matematičnega znanja v novi situaciji, interpretaciji rezultatov.

Pri predstavitvi modelov so morali učenci odgovarjati na kritična vprašanja sošolcev in učiteljice, pozneje tudi snažilk. Pri argumentiranju, pojasnjevanju in utemeljevanju je bilo razvidno, da so bili cilji učne ure doseženi, v nekaterih primerih celo preseženi.

Izdelke učencev bomo uporabili tudi pri obravnavi obračanja formul in obrazcev, kjer bodo učenci iz formule izražali želeno spremenljivko in računali želene podatke ob dani vrednosti drugih spremenljivk.

Učni uri sta bili všeč tako učencem kot tudi učiteljici. Poleg zapisanih ciljev pa smo uresničili še enega – vzgojni cilj: učenci so dobili povsem drugačen vpogled v delo čistilk. Zamislili so se nad tem, koliko dela morajo opraviti vsak dan. Prej se jim je to zdelo nekaj povsem samoumevnega, po vseh izračunih pa so ugotovili, da je delo čistilk vredno vsega spoštovanja.

Literatura in viri

- 1 *Magajna, Z. (2012). Matematično modeliranje v osnovni šoli. Interno gradivo.*
- 2 *Pravilnik o standardih in normativih za izvajanje programa osnovne šole. 21. člen. Uradni list RS, št. 57/2007.*

Priloga



Učni list: Koliko snažilk potrebuje ena šola?

4.3.3 Površina človeškega telesa

Katja Kmetec, Osnovna šola Brinje, Grosuplje

Avtor	Katja Kmetec
Šola	Osnovna šola Brinje, Grosuplje
Učna tema	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Učni sklop	Modeliranje
Razred	9. (3. raven zahtevnosti)
Potreben čas za izpeljavo	dve šolski uri
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • raziskujejo, razumejo in interpretirajo različne življenjske situacije, • modelirajo življenjske situacije; oblikujejo formulo, ki prikazuje dano situacijo, • interpretirajo matematične modele, • ugotavljajo veljavnost modela, • razmišljajo o modelu in njegovih rezultatih.
Standardi	Učenec/učenka: • življenjske situacije prikaže z modeli, • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja.
Oblike in metode dela	delo v skupinah
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• merilni trak, • PowerPoint predstavitev, • merilni trak, • prenosni računalniki (4), • Geometry and measure. Teachmaths in thinking. Dostopno na: http://www.teachmaths-inthinking.co.uk/geometry-and-measure/activities.htm (15. 3. 2012). • Body surface Area calculator for medication doses. Halls. Dostopno na: http://www.halls.md/body-surface-area/bsa.htm (15. 3. 2012).
Potrebno predznanje	• geometrijska telesa – računanje površine
Dejavnosti učencev	• računanje površine posameznikov, • posploševanje, • iskanje modela
Faze učnega procesa	1. Uvod: predstavitev problemske situacije 2. Osrednji del: A reševanje problema, B predstavitev rešitev, C ugotavljanje veljavnosti modela 3. Sklep: razmišljanje o modelu in njegovih rezultatih
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Učenci imajo zelo radi praktično delo, zato so se naloge lotili z veseljem. Naloga se jim je zdela bistveno bolj življenjska kot običajne naloge o geometrijskih telesih, ki jih najdejo v učbenikih, hkrati pa ne povsem življenjska, saj dobljeni model terja precej časa.

Opombe, dodatna opazanja, posebnosti	Idejo sem dobila na spletnem naslovu http://www.teachmaths-inthinking.co.uk/geometry-and-measure/activities.htm . Ker so učenci v občutljivih letih, je nekaterim nerodno sodelovati pri takšnih meritvah.
Možnosti za razširitev problema*	Iskanje poenostavitve modela: iskanje formule, po kateri bi lahko izračunali površino telesa le z upoštevanjem dveh ali največ treh izmerjenih dolžin. Medpredmetna povezava z likovno vzgojo: razmerja pri človeškem telesu; ker so deli človeškega telesa v razmerju, bi lahko dolžine izrazili z eno samo spremenljivko. Prav tako bi lahko računali tudi prostornino človeškega telesa in dobljeni rezultat primerjali s prostornino, ki bi jo učenci izmerili eksperimentalno (koliko vode izpodrine njihovo telo), medpredmetna povezava s fiziko. Lahko bi ugotavljali, koga bo prej zeblo: otroka ali očeta (odvisno od razmerja med prostornino in površino). Učence, katerih površino smo računali, bi lahko projicirali in narisali njihov dvodimenzionalni obris. Nato bi lahko ugotavljali, kakšno je razmerje med površino človeškega telesa in površino dobljene projekcije (kot je npr. razmerje pri krogli $4\pi r^2$ (površina krogle) : πr^2 (površina preseka - kroga) = 4.
Domače delo	Priprava predstavitve ugotovitev.
Prilagoditve za učence z učnimi težavami	Učno šibkejši učenci bi lahko dobili učni list z že narejeno preglednico in nekaj usmeritvami.

Uvod

Pri obravnavi sestavljenih geometrijskih teles učenci običajno računajo površino ali prostornino nekih izmišljenih teles, sestavljenih iz prizem, piramid, krogel ... Takšne naloge učencem – vsaj po mojih izkušnjah – niso zanimive in jih ne marajo reševati. Učitelji si pogosto prizadevamo najti naloge, ki bi bile čim bolj življenjske, in jih tako približati našim učencem. Tako jim pri obravnavi sestavljenih teles postrežemo s primeri v smislu, koliko barve bi morali kupiti, če bi želeli prepleškati pročelje neke hiše ipd. Izkaže se, da naši učenci nimajo veliko izkušenj in opravka s tovrstnimi opravili. Čeprav primeri izhajajo iz vsakdanjega življenja, so njim povsem neznani in enako abstraktni kot naloge o telesih, ki jih sestavimo iz krogel, prizem in piramid.

Obstaja pa sestavljeno telo, s katerim imamo dnevno opravka prav vsi in ki nam je vedno dostopno za kakršne koli meritve. To je človeško telo. Brez kakršnih koli posebnih navodil in usmeritev sem učencem dala naslednji izziv: izračunati površino lastnega telesa.

Izvedba v razredu

Uvod: predstavitev problemske situacije

Učencem sem pojasnila, da nam znanje o površini človeškega telesa lahko pride zelo prav: tako v tekstilni industriji kot v medicini. Pri medicini nam ta podatek še posebej pride prav pri kemoterapiji.

Na vprašanje, od česa je odvisna površina človeškega telesa, so odgovorili:

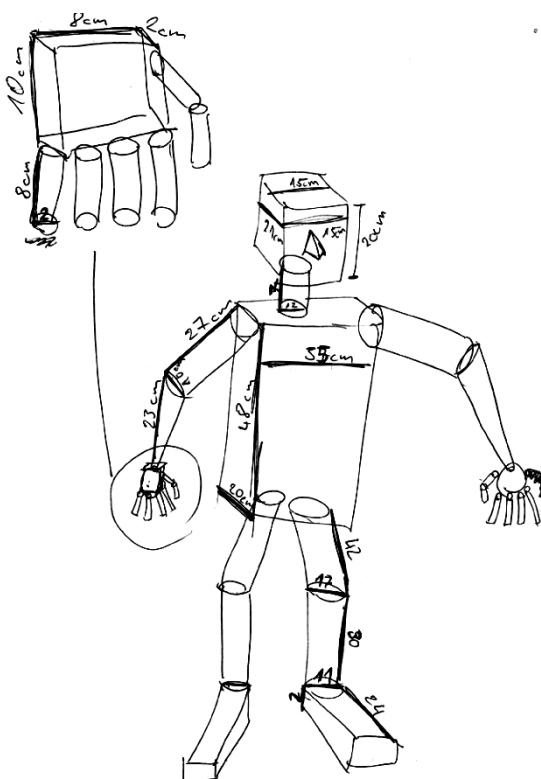
- od višine,
- od tega, kako debel oz. suh je človek,
- od oblike telesa,
- od starosti.

Kako bi določili površino človeka? Učenci so podali predlog: človeka bi »razdelili na več delov«, nato pa bi za vsak del posebej poiskali najboljši približek v nekem geometrijskem telesu. Izmerili bi potrebne podatke za izračun delnih površin telesa ter nato izračunali vsoto vseh delnih površin in dobili celotno površino telesa. Izkazalo se je, da učenci nimajo predstave o tem, približno kolikšna je površina človeškega telesa, zato smo ta podatek poiskali na medmrežju.

Osrednji del

Reševanje problema – modeliranje

Učenci so se razdelili v skupine po štiri. V vsaki skupini so poiskali prostovoljca, ki so mu določili površino. Prostovoljca so si najprej dodobra ogledali, ga v mislih razdelili na več delov in se odločili, katerim geometrijskih telesom so njegovi sestavni deli najbolj podobni. Na sliki 1 je razvidna delovna skica ene od skupin.



Slika 1: Delovna skica – učenec Jernej, obravnavan kot matematični objekt. (avtor izdelka: učenec 9. razreda)

Glava je bila v nekaterih primerih valj, v nekaterih kocka, v nekaterih pa krogla – odvisno od posameznika. Vrat so učenci obravnavali kot valj, trup kot valj ali kot kvader, roki in nogi sta bili valja ali stožca, dlani in stopala pa so učenci obravnavali kot kvadra.

Pri vsakem delu človeškega telesa so učenci izmerili podatke, potrebne za izračun njegove površine. Podatke so vpisovali v preglednico 1.

Preglednica 1: Preglednica za zbiranje izmerjenih podatkov

Del telesa	geometrijsko telo	dimenzije	površina
glava			
vrat			
trup			
roki			
nogi			
dlani			
stopala			

Učenci so nato izračunali površine posameznikov tako, da so sešteli delne površine.

Vsaka skupina je imela na voljo svoj prenosni računalnik, ki ga je lahko uporabila pri reševanju naloge, morala pa ga je uporabiti pri pripravi predstavitve.

Predstavitev rešitev

Naslednjo šolsko uro so skupine predstavile svoje delo. Postopek dela, meritve, težave, ki so se pojavljale in ugotovitve so prikazale preko PP-predstavitve. Pri tem se je izkazalo, da so nekatere skupine telo razdelile na veliko zelo majhnih delov, druge pa na manj večjih delov. Odstopanja med dobljenimi površinami so bila zelo velika, rezultati so se gibali od $1,2 \text{ m}^2$ do 5 m^2 . Res je, da so se tudi posamezniki, katerim smo določali površino, precej razlikovali med seboj v velikosti in drugih dimenzijah, torej tudi v površini. Vendar pa to ni bil glavni vzrok tako velikih odstopanj; odstopanja so bila predvsem posledica merskih, v nekaterih primerih pa tudi računskih napak.

Ugotavljanje veljavnosti modela, korekcija modela

Dobljeno površino posameznikov (v nadaljevanju imenovano $P_{\text{določena}}$) smo primerjali z medicinskimi izračuni (v nadaljevanju imenovano $P_{\text{medicinska}}$). Na spletnem naslovu <http://www.halls.md/body-surface-area/bsa.htm> namreč obstaja računalno za izračun površine človeškega telesa po formulah, kot jih uporabljajo v medicini.

Pri nekaterih skupinah je bila precejšnja razlika med $P_{\text{določena}}$ in $P_{\text{medicinska}}$. Izkazalo se je, da so najslabše rezultate dobile tiste skupine, ki so se dela lotile najbolj natančno – tiste, ki so telo razdelile na največ manjših delov. Učenci so sami ugotovili, da k temu pripomorejo merske napake. Nekatere skupine so pozabile odšteti osnovne ploskve posameznih teles in zaradi tega dobile prevelik rezultat.

Ob upoštevanju nastalih napak in sugestiji skupine, ki je dobila najbolj točen rezultat, so učenci oblikovali skupni model, kako izračunati površino človeškega telesa, ki je prikazan v preglednici 2. Preglednica prikazuje, kateri so »vhodni podatki«, ki jih moramo izmeriti, ter kako izračunati delne in celotno površino telesa.

Preglednica 2: Preglednica za zbiranje izmerjenih podatkov

Del telesa	geometrijsko telo	dimenzije	površina
glava	krogla	$r =$	$P_1 = 4\pi r^2$
vrat	valj brez osnovnih ploskev	obseg vratu je = $v_{\text{vratu}} =$	$P_2 = \text{obseg vratu} \cdot v$
trup	valj brez osnovnih ploskev	obseg pasu je = $v_{\text{trupa}} =$	$P_3 = \text{obseg pasu} \cdot v$
2 x roka (od rame do dlani)	stožec brez osnovne ploskve	$r_{\text{rame}} =$ dolžina roke (dr) = (merjeno od rame do konice prstov)	$P_4 = 2\pi r d_r$
2 x noga	stožec brez osnovne ploskve	$r_{\text{noge}} =$ dolžina noge (dn) = (merjeno od kolka do začetka stopala)	$P_5 = 2\pi r d_n$
2 x stopalo	kvader	povprečna širina stopala ($\bar{s}$) = dolžina stopala (d) = višina stopala (v) =	$P_6 = 4(\bar{s}d + \bar{s}v + dv)$
Celotno telo	/		$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$

Sklep: razmišljanje o modelu in njegovih rezultatih

Učenci so menili, da je dobljeni model sicer veljaven, vendar pa je njegova uporaba zelo zamudna, za zdravstvene namene torej žal neuporabna. Smiselno bi bilo oblikovati boljši model, ki bi vseboval manj vhodnih podatkov, in to takih, ki so zdravnikom vedno na razpolago (npr. višina in teža).

Refleksija z vidika učitelja

S prikazanim primerom sem želela doseči, da bi učenci svoje matematično znanje uporabili v neki novi situaciji, ki bi jim bila všeč, ki bi se jim zdela življenjska in bi jih zaradi tega tudi pritegnila.

Geometrijsko modeliranje človeškega telesa je učence zelo pritegnilo. Všeč jim je bilo predvsem to, da je šlo za praktično delo, ki je bilo v primerjavi z običajnimi urami bolj razgibano. Samo modeliranje ni bilo posebno zahtevno. Učenci so brez težav našli ustrezne matematične modele za posamezne dele človeškega telesa, izmerili potrebne podatke in izračunali površine. Napaka, ki se je pojavila pri nekaterih skupinah, je bila ta, da so učenci pozabili odšteti osnovno ploskev (osnovni ploskvi) posameznega telesa, sicer pa so pri računanju površine pokazali dobro znanje. Izkazalo se je tudi, da učenci nimajo dobre predstave o tem, kolikšna naj bi sploh bila površina človeškega telesa.

Nalogo, ki je bila učencem všeč, bi lahko povezali tudi s cilji drugih predmetov (likovna vzgoja: razmerja človeškega telesa, fizika: določanje površine in prostornine nepravilnih teles, biologija: človeška koža, človeško telo, koga na mrazu prej zebe in zakaj), lahko pa bi jo tudi matematično še bolj nadgradili, npr.: poišči matematični model računanja površine, ki bi terjal čim manjše število spremenljivk (vhodnih podatkov); razišči, ali obstaja kakšna povezava med površino geometrijskega telesa in površino njegovega osnega preseka pri različnih geometrijskih telesih in tudi pri človeškem telesu.

Možnosti je ogromno. Glede na izkazano zavzetost in motivacijo učencev za tovrstne dejavnosti menim, da bodo učenci zelo veseli, če bomo učitelji preizkusili katero od njih.

Literatura in viri

- 1 Magajna, Z. (2012). *Matematično modeliranje v osnovni šoli. Interno gradivo.*
- 2 *Geometry and measure. Teachmaths in thinking. Dostopno na: <http://www.teachmaths-inthinking.co.uk/geometry-and-measure/activities.htm> (15. 3. 2012).*

4.3.4 Zbiranje papirja

Boštjan Repovž, Osnovna šola Krmelj

Avtor	Boštjan Repovž
Šola	Osnovna šola Krmelj
Učna tema	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Učni sklop	Modeliranje
Razred	9.
Potreben čas za izpeljavo	1 šolska ura
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • raziskujejo, razumejo in interpretirajo različne življenjske situacije, • modelirajo življenjske situacije; oblikujejo formulo, ki prikazuje dano situacijo, • interpretirajo matematične modele, • ugotavljajo veljavnost modela, • razmišljajo o modelu in njegovih rezultatih.
Standardi	Učenec/učenka: • življenjske situacije prikaže z modeli, • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja.
Oblike in metode dela	• individualno delo
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• merilni trak, • predstavitev v PowerPointu, • delovni list
Potrebno predznanje	Učenec/učenka zna: • izluščiti ustrezne podatke iz besedila, jih povezati in z njimi operirati, • sistematično zapisovati rezultate, • računati z realnimi števili.
Dejavnosti učencev	• reševanje problemske naloge, • posploševanje, • iskanje modela
Faze učnega procesa	1. Uvod: predstavitev problemske situacije in nakazana pot reševanja 2. Izvedba v razredu: reševanje problema 3. Sklep: razmišljanje o modelu in njegovih rezultatih
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Učenci radi rešujejo naloge, ki so nekoliko drugačne od običajnih. Naloga se jim je zdela življenjska, ker so tudi sami vneti zbiralci odpadnega papirja in so se s podobno situacijo tudi sami srečali. Pokazali so veliko zavzetost, kako bi denar, ki so ga dobili od prodaje odpadnega papirja, razdelili med vse razrede, ki so sodelovali v zbiralni akciji.

Opombe, dodatna opazanja, posebnosti	Z nalogami me je seznanila pedagoška svetovalka Zavoda RS za šolstvo. Z veseljem sem sprejel povabilo k sodelovanju o preskušanju reševanja naloge v razredu.
Možnosti za razširitev problema	Postavili bi podobne situacije iz vsakdanjega življenja in iskali modele, ki bi jih pripeljali do rešitev.
Prilagoditve za učence z učnimi težavami	Naloga je bila primerna za vse učence. Če bi se pojavile težave pri razumevanju besedila, bi učenca s pogovorom vodili do razumevanja oziroma bi besedilo razčlenili.

Uvod

V uvodu sem učencem predstavil rešeno nalogo v povezavi z modeliranjem, ki sem jo sam pripravil. Učencem sem predstavil dva modela, ob katerih smo se pogovorili o uporabljenih predpostavkah, o možnih načinih reševanja in o končnem oblikovanju modela ter njegovi interpretaciji oziroma realnosti rešitve. Predstavil sem jim moja pričakovanja oziroma kaj od njih pričakujem.

Izvedba v razredu

Učencem sem razdelil delovni list z novo nalogo. Skupaj smo se pogovorili o njej. Med razgovorom so učenci izkazali razumevanje prebranega, zato sem sklenil, da ni treba dodatno razčlenjevati besedila naloge. V nadaljevanju sem jih usmeril k reševanju.

Naloga

Učenci so zbirali stari papir in prejeli sponzorsko nagrado v višini 1000 evrov. Predlagaj, kako naj si razdelijo denar.⁶

V preglednici so podatki o količini zbranega papirja in številu učencev v posameznih razredih.

Razred	Število učencev	Količina zbranega papirja [kg]
6. a	23	56
6. b	25	112
7. a	21	89
7. b	22	95
8. a	26	151
8. b	23	82
9. a	19	78
9. b	21	91

Predstavitev rešitev z analizo

Vsi učenci devetega razreda so nalogo reševali samostojno in nato ustno predstavili svoje rešitve. Navajam vse različne modele, ki so jih zapisali učenci. Podobne modele sem združil.

Rešitve

- a) Najprej je bila izračunana skupna količina zbranega papirja, nato znesek, ki ga dobi vsak razred za kg zbranega papirja ($1000 \text{ €} : 754 \text{ kg} = 1,326 \text{ €/kg}$) in znesek na učenca.
Nihče izmed učencev ni zapisal splošne formule.

Razred	Število učencev	Količina zbranega papirja [kg]	Znesek na razred [€]	Znesek na učenca [€]
6. a	23	56	74,256	3,228
6. b	25	112	148,512	5,94
7. a	21	89	118,014	5,619
7. b	22	95	125,97	5,725
8. a	26	151	200,732	5,725
8. b	23	82	108,732	4,727
9. a	19	78	103,428	5,443
9. b	21	91	120,666	5,746

- b) Učenka je predstavila zanimivo razmišljanje, in sicer:
Vsak razred, ki ima vsaj 20 učencev, naj dobi 100 €. 9. a razred dobi 90 €, ker jih ni 20, zato sem za enega učenca odštela 10 €. Vsak učenec nad 20 učencev v razredu dobi 10 €. Tako bi dobili:

$100 + (x - 20) \cdot 10$, x = število učencev v razredu.

Razred	Število učencev	Količina zbranega papirja [kg]	Znesek [€]
6. a	23	56	130
6. b	25	112	150
7. a	21	89	110
7. b	22	95	120
8. a	26	151	160
8. b	23	82	130
9. a	19	78	90
9. b	21	91	110

- c) Nagrada 1000 € je razdeljena na osem razredov, tako da vsak razred dobi enako:

$$1000 \text{ €} : 8 = 125 \text{ €}.$$

- d) Izračunana je bila povprečna količina zbranega papirja na učenca v posameznem razredu. Povprečne vrednosti so bile seštete in vsota je bila delitelj nagrade. Dobljeni količnik je zmnožen s povprečno vrednostjo, zmnožek pa je višina nagrade. Splošne formule ni bilo zapisane.

Razred	Število učencev	Količina zbranega papirja [kg]	Povprečna zbrana količina papirja na učenca [kg/uč.]	Znesek za razred [€]
6. a	23	56	$56 : 23 = 2,4$	$2,4 \cdot 30 = 72$
6. b	25	112	$112 : 25 = 4,5$	$4,5 \cdot 30 = 135$
7. a	21	89	$89 : 21 = 4,3$	$4,3 \cdot 30 = 129$
7. b	22	95	$95 : 22 = 4,3$	$4,3 \cdot 30 = 129$
8. a	26	151	$151 : 26 = 5,8$	$5,8 \cdot 30 = 174$
8. b	23	82	$82 : 23 = 3,6$	$3,6 \cdot 30 = 108$
9. a	19	78	$78 : 19 = 4,1$	$4,1 \cdot 30 = 123$
9. b	21	91	$91 : 21 = 4,3$	$4,3 \cdot 30 = 129$
			$1000 : 3,3 = 30$	

- e) Učenec je predstavil tudi predlog, da bi upoštevali količino zbranega papirja in število učencev. Nagrado 1000 € je delil z vsoto števila učencev in količino zbranega papirja. Dobljeni količnik je pomnožil z vsoto učencev in količino zbranega papirja za posamezni razred.

$$\text{Količnik } 1000 : (180 + 754) = 1,071$$

Razred	Število učencev	Količina zbranega papirja [kg]	Število učencev in količina zbranega papirja	Znesek na razred
6. a	23	56	$56 + 23 = 79$	$1,071 \cdot 79 = 84,609$
6. b	25	112	$112 + 25 = 137$	$1,071 \cdot 137 = 146,727$
7. a	21	89	$89 + 21 = 110$	$1,071 \cdot 110 = 117,810$
7. b	22	95	$95 + 22 = 119$	$1,071 \cdot 119 = 127,449$
8. a	26	151	$151 + 26 = 177$	$1,071 \cdot 177 = 189,567$
8. b	23	82	$82 + 23 = 105$	$1,071 \cdot 105 = 112,455$
9. a	19	78	$78 + 19 = 97$	$1,071 \cdot 97 = 103,887$
9. b	21	91	$91 + 21 = 112$	$1,071 \cdot 112 = 119,552$

Predstavljena rešitev ni požela navdušenja med sošolci, saj nekako niso razumeli, kako lahko različni količini med seboj združuješ in potem interpretiraš tako postopek kot tudi model. Model se je pojavil, zaznali smo ga, vendar smo se pogovorili, da vse povprek ni smiselno združevati in operirati s podatki, pridobljenimi na tak način.

V devetem razredu je samo osem učencev. Vsi so predstavili svojo rešitev, kar pomeni, da so nalogo razumeli in z razumevanjem niso imeli težav. Ugotovil sem, da so učenci, ki imajo občasno težave pri matematiki, našli podoben model: nagrado so delili s številom oddelkov in ponudili odgovor 125 €. Drugi pa so ponudili zahtevnejša razmišljanja oziroma modele.

Predstavitev težav

Pri pregledu izdelkov učencev sem ugotovil, da so imeli nekaj težav. Opazil sem, da imajo težave pri zapisovanju korakov, vmesnih rezultatov in tudi podatkov, ki so jih dobili pri računanju in so jih uporabili v nadaljevanju. Največkrat je zapisano nekaj števil, težko pa je razbrati, zakaj in od kje so. Po razmisleku in poskušanju vživeti se v razmišljanje učenca, sem hitro ugotovil, kako so prišli do rezultatov.

Ugotavljanje ustreznosti modela

Po predstavitvi rešitev so me spraševali: »Kaj je bolj prav ali katera rešitev je prava?« Do odgovora smo prišli z razmislekom oziroma s pogovorom. Usmeril sem jih v predstavljene rešitve in jih spodbudil k interpretaciji rešitev. Vsak učenec je poskusil razložiti rešitev sosedu. Strinjali so se, da je vsaka rešitev ustrezala zahtevi naloge in da je težko odgovoriti, kateri model je najboljši. Nagrado je vsak razdelil na svoj način. Skušal jo je najbolje razdeliti, vendar se je pojavilo vprašanje, katera delitev je najbolj poštena. Razvil se je zanimiv pogovor. Bilo je veliko idej, kako bi še lahko razdelili nagrado, vendar niso imele strokovne osnove, zato tudi niso zapisane. Nekaj pomislekov je bilo izraženih v zvez s pojmom pravične razdelitve. Pojavila so se vprašanja: Ali so prinesli vsi učenci enako količino papirja? Ali imajo vsi učenci enake pogoje za zbiranje? Ali pomeni pravično tudi vsem oziroma vsak enako – isto? Nekatera dejstva, ki bi jih morali upoštevati, so bila utemeljena in argumentirana. Na primer: Ali imajo vsi enake možnosti – pogoje zbiranja? Učenec je pojasnil, da se v njegovi bližini vsa gospodinjstva ogrevajo na trda goriva in da papir porabijo za kurjavo, zato nima možnosti prinesiti odpadnega papirja.

Refleksija

Refleksija učenca

Učenci so bili s svojim delom zadovoljni, saj so vsi predstavili svoj model. Dobili so potrditev, da je vsak predstavljen model pričakovan, ni pa nujno, da je najboljši oziroma smiseln. Na podlagi povratne informacije so lahko pozneje svoje odgovore nadgradili oziroma dopolnili. Uporabljali so lahko žepno računalno, kar jim je bilo v veliko pomoč, zato so imeli več časa za razmišljanje in razvijanje svoje ideje.

Refleksija učitelja

Učenci devetega razreda so podali pet različnih modelov, kako razdeliti nagrado. Kot sem že omenil, so trije učenci podali odgovor 125 €, drugi pa so razvijali svoje modele. Zanimalo me je, zakaj. Ker sem želel dobiti odgovor, sem to nalogo preizkusil še v šestem, sedmem in osmem razredu. Rezultati so bili presenetljivi. V šestem razredu je večina učencev podala odgovor 125 €, ker so 1000 € delili z 8. To je bilo razmeroma enostavno, saj se je deljenje izšlo. Trije učenci pa so dopisali pomislek, ali je taka delitev pravična, saj niso vsi zbrali enake količine papirja in tudi v vsakem razredu ni enakega števila učencev. Pri enem učencu sem poleg prej omenjenega odgovora zasledil tudi količnik 1,326, ki ga je dobil tako, da je nagrado

delil s količino zbranega papirja. Nadaljevanja pa ni bilo, kar je verjetno povezano z znanjem o decimalnih številih. V sedmem razredu je bil le odgovor 125 €. Nihče ni prikazal še kakšne poti. Učenci osmega razreda so reševali zelo podobno kot učenci devetega razreda, le odgovorov 125 € je bilo nekoliko več, in to pri učencih, ki imajo občasne težave.

Iz rezultatov bi lahko sklepal, da je zahtevnost reševanja takih problemov oziroma iskanje modelov močno povezano z razvojno stopnjo učenca in usvojenostjo matematičnega znanja. V osmem in devetem razredu učenci dobro poznajo števila in računske operacije z njimi, zato jim to ni delalo težav. Tudi raven razmišljanja, ki je močno povezana z matematiko, se v višjih razredih obogati. Učenci že znajo kritično razmišljati o rezultatih in jih interpretirati.

Z opazovanjem njihovega dela in predstavitvijo rezultatov lahko trdim, da poleg učnih in procesnih ciljev, ki so:

- raziskujejo, razumejo in interpretirajo različne življenjske situacije,
- modelirajo življenjske situacije; oblikujejo formulo, ki prikazuje dano situacijo,
- interpretirajo matematične modele,
- ugotavljajo veljavnost modela,

učenci razvijajo tudi:

- uporabo žepnega računalnika,
- kritičen odnos do dobljenega rezultata,
- interpretacijo dobljenega rezultata,
- reševanje besedilnih problemov (branje z razumevanjem).

Z delom in rezultati sem bil zadovoljen. Take in podobne naloge bomo še reševali in z njimi razvijali spretnosti in veščine, ki jih učenci potrebujejo pri reševanju besedilnih problemov.

4.3.5 Najuspešnejša država na olimpijskih igrah

Jožef Senekovič, Osnovna šola Bojana Iliča, Maribor

Avtor	Jože Senekovič
Šola	Osnovna šola Bojana Iliča, Maribor
Učna tema	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Učni sklop	Modeliranje
Razred	9.
Potreben čas za izpeljavo	tri ure
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • raziskujejo, razumejo in interpretirajo različne življenjske situacije in povezujejo znanja različnih predmetnih področij in matematičnih vsebin (npr. nakup hiše, iskanje informacij na medmrežju, časovni pasovi idr.), • rešijo indirektne besedilne naloge, • modelirajo abstraktne (življenjske) situacije ali procese (oblikujejo algebrski izraz, formulo, enačbo, prikaz itd., ki prikazuje dano situacijo), • interpretirajo matematične modele, • ugotavljajo veljavnost modela, • razmišljajo o modelu in njegovih rezultatih.
Standardi	Učenec/učenka: • pozna in uporablja načine zbiranja, strukturiranja in predstavljanja podatkov, • kritično se opredeli do interpretiranih podatkov, • življenjske situacije prikaže z modeli, • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja, • uporablja informacijsko-komunikacijsko tehnologijo pri reševanju problemov, • kritično vrednoti informacije na spletu in drugje, • kritično reflektira lastno znanje (učenje učenja).
Oblike in metode dela	• individualno delo ali • delo v dvojicah
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• dostop do spletnih strani in drugih virov, • spletna učilnica
Potrebno predznanje	• zbiranje podatkov, • urejanje podatkov, • uporaba spleta

Dejavnosti učencev	• viharjenje možganov, • diskusija, • zapiski, • utemeljevanje
Faze učnega procesa	1. Predstavitve problemske situacije. Individualni razmisleki ali delo v dvojicah. 2. Predstavitve ugotovitev. 3. Oblikovanje skupin, razdelitev nalog. 4. Priprava kriterijev za izbrano temo. 5. Razdelitev nalog v skupini. Izdelava naloge. 6. Predstavitve ugotovitev.
Opombe, dodatna opažanja, posebnosti	V prvi uri sem želel motivirati učence k čim širšemu razmisleku. Končni cilj ni bil dejansko razvrščanje, zbiranje konkretnih podatkov, ampak razumevanje izhodiščnih kriterijev. Zato je bilo delo usmerjeno v iskanje vprašanj in diskusijo. Učenci so zapisane kriterije morali utemeljiti. Učenci so na začetku imeli v mislih le en kriterij, to je število osvojenih medalj. Vendar je bil hitro dosežen preskok (ali samo zlatih, ali vseh ...). Sledil je pogovor, katere kriterije bi izbrali in z njimi določili najuspešnejše države na poljubnih olimpijskih igrah. Glede na pomanjkanje izkušenj tako učencev kot učitelja, je bil pojem modeliranja omejen zgolj na pristop k reševanju problema (iskanju najboljše možnosti ...). V izbranih primerih učenci ne pridejo do pojma matematičnega modela, kjer model zapišemo simbolno ... Vendar je bila učencem zelo zanimiva možnost odprtih odgovorov. Ne iščemo, kaj je prav, ampak zakaj je prav.
Možnosti za razširitev problema	Za vsako izbrano področje izbrati nekaj zapisanih kriterijev in preveriti, ali jih lahko uporabimo tudi v nekoliko spremenjenih situacijah, drugačnih okoliščinah.
Domače delo	Zbiranje podatkov

Predstavitve problemske situacije

V prvi šolski uri sem učence seznanil s problemsko situacijo. Postavil sem jim naslednje vprašanje:

»Katera država je bila najuspešnejša na OL v Pekingu?«

Učence sem z vprašanjem spodbudil k razmisleku o najuspešnejši državi na letnih olimpijskih igrah. Učenci so v zvezek zapisali kriterije, ki bi lahko opisali ali opredelili uspešnost posameznih držav na olimpijskih igrah. O zapisanih kriterijih so med seboj diskutirali in iskali razloge za in proti. Sam sem učence spodbujal k čim širšemu razmisleku, kaj lahko vpliva na uspešnost države. Po 10 minutah so kriterije zapisali na tablo.

Predstavitve ugotovitev

V isti šolski uri smo nadaljevali s predstavitvijo ugotovitev.

Učenci so zapisane kriterije predstavili in utemeljili. Zapisali so naslednje kriterije (v oklepajih navajam nekatere utemeljitve):

- *število vseh medalj* (skupno število medalj prikaže kakovost športnih dosežkov na tekmovanju);
- *število medalj glede na žlahtnost* (največ so vredne zlate medalje, saj tudi na uradnih straneh Ol za najuspešnejše navajajo države z največ zlatimi medaljami, ne pa z največ osvojenimi medaljami);
- *vsi dosežki tekmovalcev neke države (4. mesta ...)* (Tudi dosežki pod 3. mestom so pomembni; nekaterim športnikom do medalje ni veliko zmanjkalo);
- *število medalj na prebivalca države* (lahko ima ZDA največ medalj, ampak ima tudi zelo veliko prebivalcev in s tem športnikov);
- *število medalj na površino države* (učenci menijo, da je velikost države pomembna, ker daje več možnosti za razvoj športa);
- *število medalj glede na BDP* (bogatejše države lahko v šport vložijo bistveno več denarja kot države z manj denarja);
- *število medalj glede na število udeležencev posamezne države* (lahko je število tekmovalcev majhno, pa večina osvoji medaljo; taka država je prav gotovo zelo uspešna);
- *dosežene medalje glede na spol* (nekatero države imajo razvitejšo žensko/moške športne discipline),
- *dosežene medalje glede na individualno/skupinsko športno disciplino* (nekatero države so v skupinskih športnih zelo uspešne, v individualnih pa ne);
- *število ujetih na dopingu po posamezni državi* (doping bi lahko uspešnost države znižal, saj je prepovedan);
- *število fer plej igralcev* (pomen fer pleja je v pozitivnem odnosu do športa in sotekmovalec; lahko bi pomenil pozitiven prispevek k uspešnosti države),
- *napredek države po številu medalj glede na pretekle olimpijske igre* (glede na izbrani kriterij bi opazovali, ali je država uspešnejša, kot je bila na prejšnjih igrah).

Sledila je diskusija o opredelitvi najuspešnejše države. Ker nismo imeli konkretnih podatkov o državah, se je razprava nadaljevala o smiselnosti posameznih kriterijev.

Učenci so ugotovili, da glede na izbrane kriterije ne morejo za najuspešnejšo državo izbrati vedno ene in iste države. V diskusiji sem poudaril ugotovitev, da je rezultat razmisleka odvisen od izbranih kriterijev.

Učence sem povprašal, kaj menijo, kateri odgovor o najuspešnejši državi je bolj pravilen, in kako bi odgovor utemeljili.

Učenci so opredelili, kje in kako bi zbirali podatke, ki bi podkrepili izbrane kriterije. Opisali so možne predstavitve in prikaze. Ugotovili so, da je odgovor na vprašanje odvisen od samega vprašanja. Vsak odgovor, ki je dovolj dobro utemeljen, je pravilen.

Nadaljevanje naloge

Učencem sem postavil vprašanje, ali opisani postopek (izbrani kriteriji) velja samo za ugotavljanje uspešnosti držav na olimpijskih igrah v Pekingu. Pričakovano so učenci odgovorili, da

bi lahko kriterije in premisleke uspešno uporabili pri drugih primerih, tudi za zimske olimpijske igre. Na koncu sem učencem spregovoril o namenu takega pristopa k zbiranju podatkov. Tako izdelamo neke vrste model ugotavljanja uspešnosti držav.

Ker je bila v tem letu olimpijada v Londonu, sem jih pozval, naj veljavnost modela preizkusijo za razvrščanje držav na olimpijskih igrah v Londonu, seveda po končani olimpijadi.

Oblikovanje skupin in razdelitev nalog

Na začetku druge ure so se učenci razdelili v skupine po tri ali štiri (heterogene skupine). Razvrstitev so opravili samostojno. Nato sem vsaki skupini učencev dodelil in predstavil vprašanje. Razdeljena vprašanja so bila:

1. Katera nogometna reprezentanca ima večje možnosti za osvojitve prvega mesta na EP 2012?
2. Kako iz Maribora v Piran?
3. Katere slovenske mesto je najboljše za življenje?
4. Kateri šolski predmet je na šoli najbolj priljubljen?

Učence sem seznanil z nalogami, ki so jih morali opraviti za vsako vprašanje:

- izbrati kriterije, po katerih bodo opravili primerjave,
- se dogovoriti o podatkih, ki jih bodo potrebovali in kako jih bodo pridobili,
- se dogovoriti o razdelitvi dela,
- se dogovoriti o načinu predstavitve.

Učenci naj bi izbrali kriterije tako, da bi lahko izdelali model. Veljavnost modela naj bi preverili na podobnih življenjskih situacijah.

Priprava kriterijev, oblikovanje modela

Učenci so z viharjenjem možganov po skupinah zapisali mogoče kriterije. Učencem sem bil v pomoč pri kritični presoji zapisanih kriterijev. Učencem sem pomagal pri dogovorih o iskanju potrebnih podatkov za podkrepitev kriterijev in pripravo predstavitev (kje iskati podatke, možni izračuni, kaj predstaviti ...). Dogovorili smo se o času in načinu izdelave naloge. Čas za izdelavo naloge je bil 10 dni. Naloge so naložili kot predstavitve v spletno učilnico.

Zbiranje podatkov, priprava izračunov, prikazov in predstavitev je potekala v okviru skupine izven pouka. Lahko so uporabljali šolsko računalniško učilnico. V vsem razpoložljivem času sem bil učencem na voljo tako v šoli kot v spletni učilnici. Omenim naj, da učenci niso zahtevali dodatnih pojasnil.

Predstavitev ugotovitev

Prva skupina, ki je iskala nogometno reprezentanco z največ možnostmi, da zmaga na EP, je zapisala naslednje kriterije:

- *Katera država ima do zdaj največ zmag?*

- *Položaj na lestvici mednarodne nogometne zveze.*
- *Poškodbe ključnih igralcev (koliko ključnih igralcev ne bo igralo).*
- *Rezultati tekem v bližnji preteklosti (kvalifikacije – število zmag, porazov).*
- *Denarna podpora države (BDP).*
- *Menjavanje trenerja (koliko trenerjev v 4-letnem ciklu se je izmenjalo).*
- *Glede na žreb skupin (medsebojna srečanja v zadnjih štirih letih in število zmag s tekmeci v skupini).*
- *Vrednost ekipe glede na pogodbe igralcev v klubih.*

Ob vsakem kriteriju so morali razmisliti, ali bodo znali pridobiti podatke, s katerimi bodo lahko primerjali posamezne države. Kriterije so zapisale tudi preostale skupine.

Primer zbiranja podatkov za nalogo

Učenci so podatke pridobili s spletnih strani, pisnih virov (revije, knjige, objave klubov ...). Pripravili so podatke, s katerimi so podkrepili in utemeljili svoje odločitve. Pripravljene predstavitve so naložili v spletno učilnico.

Poglejmo nekaj primerov.

Zapisali so države z največ zmagami na evropskih prvenstvih (EP) (preglednica 1).

Preglednica 1: države z največ zmagami na evropskih prvenstvih

Država	Število zmag
Nemčija	3
Španija	2
Francija	2
Nizozemska	1
Danska	1
Italija	1

Zapisali so bruto državni proračun (BDP) posamezne države, sodelujoče na EP (preglednica 2):

Preglednica 2: BDP posamezne države, sodelujoče na EP

Država	BDP (milijard USD)
Nemčija	2522
Rusija	1,727
Irska	167,75

Država	BDP (milijard USD)
Italija	1880
Francija	1871
Švedska	4500
Grčija	261,018
Hrvaška	66,708
Anglija	2200
Danska	5212,6
Portugalska	217
Norveška	213,6
Španija	1364
Češka	236,536
Poljska	546,543
Ukrajina	289,739

Zapisi so število poškodovanih igralcev, ki so igrali v kvalifikacijah, ne bodo pa igrali na EP. Prav tako so zapisali, kako pogosto prihaja do menjav trenerja ekipe.

Opis situacije

V tretji uri (po 10 dneh, ki so jih imeli na razpolago za pripravo) so učenci predstavili naloge. Vsaka skupina je predstavila temo, izbrane kriterije, kako so zbirali podatke in jih uporabili. Izdelali so prikaze (stolpčne, tortne ...), preglednice ali opise. Do konkretnih modelov učenci žal niso prišli. Tako za njih kot zame je bilo to prvo srečanje s pojmom modeliranja.

Ugotovitve prve skupine so pokazale, da je napoved ekipe za zmago precej zahtevna in odvisna od izbranega kriterija. Učenci so ugotovili, da je veliko ekip, ki so si po nekaterih kriterijih zelo podobne. Prav tako je nekatere kriterije težko kvalitativno opredeliti (npr. menjave trenerja, poškodbe igralcev – kateri igralci so ključni igralci ...). Učenci so podatke posameznega kriterija prikazali zgolj v opisni obliki. Tako so oblikovali samo mnenja o možnostih za zmago posamezne ekipe. Niso imeli kvalitativnega orodja, s katerim bi preverili veljavnost svojih ugotovitev, na katerem izmed prejšnjih prvenstev. V uporabnem modelu bi uporabljene kriterije opisali z izrazom, izračunom kakšnega koeficienta ali kaj podobnega. Izbrane kriterije bi morali točkovati oziroma številčno opredeliti. Točkovali bi lahko dosedanje uvrstitve na evropskih prvenstvih (ne samo zmage). Da ključni igralci ne igrajo (poškodbe), bi lahko vrednotili z negativnimi točkami. S točkami bi lahko ovrednotil stalnost trenerja ekipe. Države bi razvrstili glede na BDP in točkovali glede na zasedeno mesto. Vsota točk za posamezno državo bi lahko bila merilo za oceno uspešnosti na evropskem prvenstvu.

V predstavitev preostalih skupin smo prav tako ugotovili, da učenci izbranih kriterijev niso opisali z matematičnim jezikom (izraz, graf, odvisnost ...), ampak so se zadovoljili samo z opisnimi primerjav. Tako so pri primerjanju prevoznih možnosti iz Maribora v Piran učenci primerjali raz-

lična prevozna sredstva, ceno prevoza, porabljeno gorivo ... Opazovanje je bilo preveč široko zastavljeno, s slabo izbranimi kriteriji. Pri iskanju podatkov so pokazali veliko domiselnosti, saj so zbrali podatke taksislužb, tudi o možnih letalskih prevozih so se pozanimali. V diskusiji smo ugotovili, da bi se morda pri delu morali postaviti v vlogo avtobusnega prevoznika, ki načrtuje redno progo iz Maribora v Piran. Pri tem bi raziskali kriterije, ki vplivajo na ceno vozovnice (npr. poraba goriva, plačilo voznika, cestnina, število potnikov ...).

Skupina, ki je obravnavala, katero slovensko mesto je najboljše za življenje, je ugotovila odvisnost tudi od subjektivnih meril. Učenci so izbrali tri mesta v različnih regijah, kar že pogojuje različne odločitve (ob morju ...). Ugotovili so, da ta kriterij ne more biti uporaben za splošne ugotovitve. So pa izbirali za posamezna mesta podatke, kot so: število brezposelnih, količina odpadkov na prebivalca, zdravstvena oskrba ... Tudi za to skupino smo ugotovili, da bi bilo treba število kriterijev omejiti. Predvsem pa izbrati take, ki omogočajo izračun konkretne vrednosti, ki jih lahko primerjamo. Izbranim kriterijem bi pripisali številčne vrednosti. Vsota točk za posamezno mesto bi opredelila kakovost življenja v posameznem mestu.

Skupina, ki je želela opredeliti kriterije za najbolj priljubljen šolski predmet, se je preveč opirala na izvedeno anketo in mnenja učencev. Ugotovili so, da ocene ne vplivajo preveč na priljubljenost predmetov. Na priljubljenost najbolj vpliva osebnost učitelja in tudi vsebine predmeta. Sama tema tako ni bila najbolj primerno izbrana.

Refleksija

V okviru obdelave podatkov sem želel učence seznaniti z osnovami modeliranja. Tudi sam izkušenj z modeliranjem v razredu nisem imel. S predstavljenim primerom sem želel učence seznaniti z nekoliko drugačnim pristopom obravnave življenjskega problema. Zelo pomemben je vidik soočanja mnenj in argumentiranja lastnih idej. Učenci so bili v začetni fazi precej predvidljivi, ko smo se pogovarjali o najuspešnejših državah na olimpijskih igrah. Potrebna je bila moja spodbuda, da so začeli razmišljati še o čem drugem, razen o osvojenih medaljah.

V naslednjem izvajanju bom učence moral pripeljati dalje od zapisa in opisa izbranih kriterijev. Učence je treba povprašati, na kateri način bi ugotovili najuspešnejšo državo glede osvojenih medalj, ker se medalje med seboj razlikujejo. Najugodnejša možnost je točkovanje medalj, pa tudi drugih razvrstitev. Tako bi lahko za zlato medaljo državi pripisali 10 točk, za srebrno 8 točk, bronasto 6 točk, za ostale razvrstitve seveda manj. Razvrstitev držav bi opravili glede na vsoto točk posamezne države. Tak model bi bil enostaven in uporaben.

Zelo pomembno je namreč, da znajo podatke poiskati in nato vključiti v neki algebrski izraz ali formulo ali grafični prikaz, ki je bistvo modela. Ker te izkušnje učenci niso dobili, je tudi niso mogli v svojem delu uporabiti ali razviti. Recimo, da bi opazovali število doseženih medalj glede na BDP. Poiskali bi konkretne podatke, izračunali delež, ki bi bil primerljiv za vse države.

Naslednja težava, ki sem jo zaznal, je seveda izbira tem za delo v skupinah. Brez izkušenj o modeliranju sem prehitro izbral teme, ki niso najbolj primerne, oziroma bi jih moral nekoliko spremeniti. Najbolj primerna tema je oblikovanje modela, po katerem bi napovedali ekipo z največ možnostmi za uspeh. Glede na ugotovljene pomanjkljivosti menim, da je uspešna možnost, če se učenci postavijo v neko vlogo. V tej vlogi nato pripravijo splošen model. Tako so lahko v vlogi nogometnega novinarja, ki zbira podatke in pripravi napoved o zmagovalcu prvenstva.

Glede na pomanjkanje izkušenj učencev s takimi nalogami, mora učitelj spremljati učence pri delu. Za učinkovito spremljavo je bolje, da vsi učenci začnejo konkretno delo na eni vsebini.

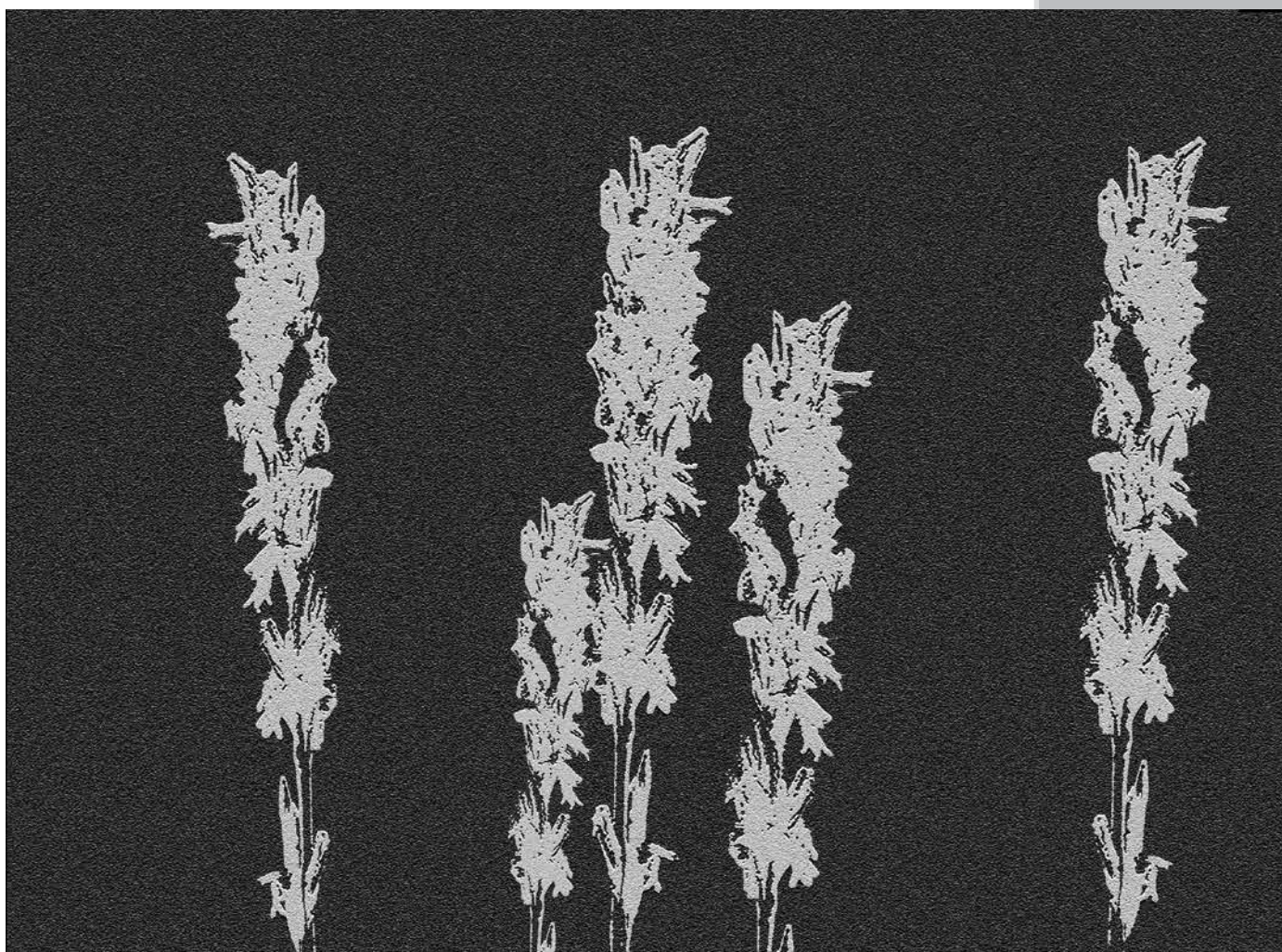
Tako si lahko tudi med seboj pomagajo in se dopolnjujejo. Spremljava je lažja in učinkovitejša kot pri vsebinsko različnih nalogah. Razumevanje učitelj preveri tudi z vprašanji, ki jih postavijo učenci. V fazi predstavitve naj bi večina učencev izkazala razumevanje ob pripravljenem gradivu.

Učencem je sodelovalno delo zanimivo. Radi komunicirajo med sabo, izmenjujejo mnenja, znanja. Predvsem se dopolnjujejo, saj so uspešni na različnih področjih. Učencem so bile zanimive ugotovitve, da lahko na isto vprašanje odgovorimo z različnimi odgovori, odvisno od izbranega kriterija. Sam sem ugotovil, da bom moral znanje o modeliranju dopolniti, če bom želel doseči vse zastavljene cilje.

Viri

- 1 Buchter, A., Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- 2 Magajna, Z. (2012). *Modeliranje v OŠ. Interno predavanje PRS (4. 4. 2012)*.

Ocenjevanje



5.1 Preverjanje matematičnega znanja s pisnimi preizkusi

Dr. Zlatan Magajna, Pedagoška fakulteta Ljubljana

Uvod

Ugotavljanje matematičnega znanja je neločljivi del poučevanja matematike. Tako kot moramo pri vsakem delovnem procesu, naj bo to kuhanje ali pilotiranje letala, z različnimi instrumenti in dejanji nadzirati stanje, da lahko pravočasno ukrepamo in uspešno zaključimo nalogo, tako moramo tudi pri učnem procesu neprestano ugotavljati znanje učencev in že med učnim procesom ugotoviti neustrezna razumevanja ter pravočasno ukrepati. Znanje pa ugotavljamo tudi po končanem učnem procesu, npr. po zaključeni obravnavi kake vsebine, ob zaključku ocenjevalnega obdobja ali ob zaključku šolanja. Ob takih priložnostih želimo ugotoviti, kako dobro so obravnavane vsebine usvojili posamezni učenci. Gre torej za dva različna namena ugotavljanja znanja, ki jima pravimo *formativno* in *sumativno* ugotavljanje znanja (Marentič Požarnik, 2000: 262).

Matematično znanje učencev včasih ugotavljamo neformalno, torej mimogrede, npr. ob pogovoru med razlago, ob diskusiji, ob pogledu na učenčev zvezek, med obhodom po razredu. Redno pa je treba posegati tudi po formalnih postopkih ugotavljanja znanja – tako ugotavljanje znanja je načrtovano in izvedeno s posebej pripravljenimi instrumenti. Učitelj matematike v ta namen uporablja številne instrumente, od pisnih preizkusov do preiskovalnih nalog, od ustnega spraševanja do portfolija. V pričujočem sestavku se bomo omejili zgolj na *pisne preizkuse*, ki so zagotovo najbolj razširjen način ugotavljanja matematičnega znanja.

Ugotavljanje znanja s pisnim preizkusom (prav tako pa tudi z drugimi instrumenti) lahko načrtuje in izvaja učitelj matematike ali pa zunanje inštitucije. V prvem primeru govorimo o *notranjem* ugotavljanju znanja, v drugem primeru pa o *zunanjem* (Marentič Požarnik, 2000: 263). Prednost notranjega ugotavljanja znanja je predvsem prilagodljivost najrazličnejšim okoliščinam. Pri tovrstnem ugotavljanju znanja sicer dobimo kolikor toliko zanesljivo razvrstitev učencev (glede na izkazano znanje) v posameznem razredu, tako dobljene ocene pa ne omogočajo verodostojne primerjave o znanju učencev v različnih razredih ali celo šolah. Po drugi strani pa so zunanja preverjanja znanja izvedena v nadzorovanih okoliščinah, tako da so dosežki med posameznimi razredi, šolami ali celo šolskimi sistemi objektivno primerljivi. Pomanjkljivost zunanjih preverjanj pa je (ne)upoštevanje posebnosti posameznih učencev, razredov, šolskega okolja oz. šolskih sistemov. To je zato treba imeti pred očmi ob vsaki analizi rezultatov zunanjega preverjanja.

Notranja in zunanja preverjanja pa se ne razlikujejo le po stopnji prilagodljivosti. Učiteljevi preizkusi navadno zajemajo ožje vsebinsko področje, medtem ko zunanja preverjanja običajno ugotavljajo znanje, pridobljeno v daljšem časovnem obdobju. V tem smislu je pri notranjih preverjanjih predvidljivost večja kot pri zunanjih. Pri učiteljevem preizkusu učenci dokaj dobro vedo, kakšne naloge (glede vsebine in načina zastavljenosti) lahko pričakujejo. Zunanja preverjanja so praviloma skrbno načrtovana, predvsem v smislu merske ustreznosti (Sagadin, 1993: 73). Preizkuse znanja za zunanje preverjanje praviloma izdelujejo skupine strokovnjakov dalj časa (mesece ali leta), pogosto so preizkusi pilotsko preverjeni in moderirani. Po drugi strani pa učiteljevi pisni preizkusi, ki so namenjeni notranjemu ugotavljanju znanja, nastanejo v

krajšem obdobju (nekaj ur ali dni). Učitelji za preizkus izberejo nekaj nalog ,po občutku', seveda so pri izbiri nalog pomembne učiteljeve izkušnje. Na naših šolah zasledimo pogosto prakso, da si učitelji medsebojno pregledujejo preizkuse ali pa jih celo skupaj sestavljajo, kar nedvomno pripomore k večji kakovosti preizkusov.

V prispevku se bomo spoprijeli z nekaj značilnimi težavami, s katerimi se srečujejo učitelji matematike pri izdelavi in izvedbi pisnih preizkusov. Kot prvo naj omenimo pogosto spreminjanje predpisov, ki vplivajo na postopke ugotavljanja znanja in samo ocenjevanje (ocenjevalne lestvice, številsko in opisno ocenjevanje, ugotavljanje znanja v homogenih oz. heterogenih razredih ipd.). Težavo predstavljata tudi uravnavanje zahtevnosti preizkusa in uskladiitev s standardi učnega načrta, posebej če so na posamezni šoli med učnimi skupinami razlike v zahtevnosti obravnave. Kot tretjo težavo naj omenimo utemeljevanje primernosti preizkusa oz. ocene, pridobljene s preizkusom. V zvezi s tem se učitelji ukvarjajo predvsem z objektivnostjo instrumenta, pri tem pa zanemarjajo še pomembnejši vidik, to je veljavnost pisnega preizkusa. Zato se bomo v sestavku ukvarjali predvsem s problematiko veljavnosti preizkusov. Pokazali bomo postopek izdelave pisnega preizkusa z mrežnim diagramom, ki omogoča izdelavo veljavnih in ustrezno dokumentiranih preizkusov, tako da nimamo težav pri utemeljevanju primernosti preizkusa. Učitelj, ki razume ozadje veljavnosti preizkusov, se zagotovo lažje znajde ob spremembah v šolski zakonodaji, povezani s preverjanjem in ocenjevanjem. Predstavljeni postopek je razmeroma kompleksen, zato si pri njegovi izvedbi pomagamo z računalniškim programom. Postopek in program sta bila razvita na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani za potrebe izobraževanja bodočih učiteljev matematike. Menimo, da sta zanimiva tudi za učitelje matematike na naših šolah.

Veljavnost

Veljavnost, ta najpomembnejša značilnost preizkusov znanja, je v resnici kompleksna karakteristika, ki zajema več vidikov veljavnosti (Nitko, 1996: 36). Na tem mestu se bomo zadovoljili z opombo, da je skupni imenovalac raznih vidikov veljavnosti stopnja usklajenosti med namenom izvedbe preizkusa (oz. uporabo ugotovitev preizkusa) in tem, kar preizkus dejansko ugotavlja. Pri pisnih preizkusih iz matematike se lahko iz več razlogov že pri posameznih nalogah in pri preizkusu kot celoti izkaže, da naloga oz. preizkus ne ugotavlja tistega znanja, ki ga je učitelj nameraval ugotavljati. Običajno se učitelj tega niti ne zaveda.

Veljavnost pisnega preizkusa je lahko omejena že zaradi izbire preverjanih vsebin. Izkušen učitelj zna presoditi, kateri cilji, povezani z dano vsebino, so ključni za razumevanje oz. za nadaljnje usvajanje znanja, in to upošteva pri izbiri nalog. Do težav z veljavnostjo pa pride, če o poznavanju celotnega obravnavanega sklopa sklepamo zgolj iz preverjanja manj pomembnih vsebinskih delov. Do podobnega pojava lahko pride tudi glede taksonomskih kategorij. Učitelj, denimo, ni pozoren na vključevanje v preizkus vseh taksonomskih kategorij in lahko se zgodi, da v sestavljenem pisnem preizkusu, na primer, ni sledu o problemskih znanjih. Pri pisnih preizkusih iz matematike se nemalokrat zgodi, da učenci s šibkim znanjem ne morejo izkazati svojega znanja, ker so vsi preprosti deli preizkusa vključeni v večje in zahtevnejše enote. Veljavnost je tudi ogrožena, če je preizkus zelo obsežen in učitelj sklepa, da učenci niso usvojili znanj, ki jih zaradi pomanjkanja časa niso mogli izkazati.

Veljavnost preizkusa je lahko ogrožena, kadar učitelj zmotno predvideva, katere elemente ali vidike znanja ugotavljajo posamezne naloge preizkusa. Ponazorimo to s primerom. Denimo, da namišljeni učitelj ob ali po obravnavi premega sorazmerja vključi v pisni preizkus nalogo:

Učenci OŠ Naklo so pogozdili hrib s 1400 sadikami, pri čemer se jih 350 ni prijelo. Učenci OŠ Litija pa so zasadili 200 dreves manj kot učenci OŠ Naklo, posušilo pa se jih je 300. Katera šola je imela večji uspeh pri pogozdovanju?

Ali je naloga veljavna oz. v kolikšni meri je naloga veljavna, je odvisno predvsem od tega, katere učne cilje in katere vidike znanja želi učitelj z nalogo preveriti oz. kako interpretira rešitve naloge.

Preglednica 1: Primeri ogrožanja veljavnosti naloge

Učiteljev namen	Zakaj je veljavnost lahko ogrožena?	Možen ukrep za izboljšanje veljavnosti
Ali učenci razumejo odnos premega sorazmerja?	Učenec razume odnos premega sorazmerja, a se ne more prebiti skozi besedilo in naloge ne reši.	Spremeniti nalogo, tako da bo besedilo preprostejše in jo bo lahko rešil učenec, ki razume odnos premega sorazmerja, tudi če še ne obvlada postopkov reševanja premega sorazmerja.
	Učenec razume odnos premega sorazmerja, a nalogi računsko ni kos in je ne reši.	
Ali je učenec usvojil postopek reševanja premega sorazmerja?	Učenec je usvojil postopek, a se ne more prebiti skozi besedilo in naloge ne reši.	Poenostaviti nalogo, tako da bo besedilo preprostejše in situacija preglednejša in neposredno rešljiva z obravnavanimi postopki.
	Učenec je usvojil postopek, a nalogi zaradi njene kompleksnosti ni kos in je ne reši.	
Ali zna učenec povezati pojav iz vsakdanjega življenja z odnosom premega sorazmerja?	Pri omenjeni situaciji gre bolj za primerjanje velikosti deležev kot pa za odnos premega sorazmerja. Če učenec pravilno reši nalogo s primerjanjem deležev, še ne pomeni, da zna pojave povezati z odnosom premega sorazmerja.	Če učenci »vedo«, da morajo pri nalogi izkazati znanje premega sorazmerja, zadeva ni problematična. Sicer pa je bolje, da na to opozorimo z dodatnim navodilom. Najbolje pa je, da nalogo ustrezno spremenimo. Z nalogo ni nič narobe, če sprejmemo rešitev, ki temelji na primerjavi velikosti ulomkov oz. deležev. Seveda pa s tem nismo preverili povezovanja pojavov iz vsakdanjega življenja z odnosom premega sorazmerja.
	Učenec ni dovolj dobro seznanjen s pojavom, ne pozna uporabljenih izrazov ali pa si jih razlaga drugače kot učitelj (npr. kaj je ‚sušenje‘ in kaj ‚prijetje‘ sadike), zato naloge ne reši.	
	Učenec je predobro seznanjen s pojavom (podatkov je premalo, saj je uspešnost pogozdovanja odvisna od vrste sadik, terena ipd.) in zato naloge ne reši.	

Učiteljev namen	Zakaj je veljavnost lahko ogrožena?	Možen ukrep za izboljšanje veljavnosti
Ali zna učenec brati z razumevanjem?	Učenec zna brati z razumevanjem, ne razume pa obravnavane vsebine, zato naloge ne reši.	Z dodatnimi vprašanji (ali kako drugače) eksplicitno preverimo razumevanje prebranega.
Ali zna učenec kritično uporabiti znanje o premem sorazmerju v kompleksni situaciji, ki je opisana z zahtevnejšim besedilom?	Naloga je primerna.	

Kot je poudarjeno v analizi (preglednica 1), je veljavnost posameznih nalog pri učiteljevem pisnem preizkusu ogrožena, kadar učitelj neprimerno interpretira informacije iz učenčeve rešitve. Res je, da mora učenec, zato da naloge lahko reši, nekaj razumeti v besedilu, nekaj razumeti o obravnavani matematični vsebini, nekaj znati izračunati ipd. Vendar – če naloge ne reši, še ne pomeni, da slabo bere, ne razume vsebine in ni usvojil potrebnih postopkov. Pomeni le, da se ni znašel v povezanem kompleksu znanj.

O veljavnosti posamezne naloge lahko torej govorimo le, če je poznan namen naloge. Namen naloge se mora seveda odražati tudi v točkovanju naloge. Če pri načrtovanju pisnega preizkusa izhajamo iz nalog in ne razdelamo namena naloge, veljavnost preizkusa težje nadziramo in je zato hitreje ogrožena.

Mrežni diagram

Mrežni diagram je pripomoček, ki omogoča preglednejšo izdelavo pisnega preizkusa. Z njim lahko tudi nadziramo njegovo veljavnost in zahtevnost. Mrežni diagram je v bistvu preglednica, ki za posamezno nalogo pisnega preizkusa (ali del naloge, če je naloga razčlenjena) opisuje značilnosti, ki jih želimo nadzirati. Preglednica 2 prikazuje poenostavljeno shemo mrežnega diagrama. Naslovna vrstica vsebuje obravnavane značilnosti nalog. V nadaljnje vrstice za vsako nalogo oz. del naloge zapišemo obravnavane značilnosti te naloge. Celotna preglednica pokaže zastopanost učnih ciljev, področja spremljanja znanja ter predvideno zahtevnost preizkusa.

Mrežni diagram služi več namenom. Predvsem je to pripomoček pri načrtovanju preizkusa. Kot bomo videli, je najbolje, če mrežni diagram (ali vsaj njegov osnutek) izdelamo, preden sestavljamo naloge.

Mrežni diagram omogoča kakovostnejšo analizo rezultatov preizkusa, saj ob ustreznih postopkih zvemo, koliko so doseženi posamezni cilji ali elementi spremljanja na ravni posameznika ali celega razreda.

Končno lahko mrežni diagram, kot del dokumentacije pisnega preizkusa, uporabimo pri utemeljevanju ustreznosti posameznih nalog, pri utemeljevanju ustreznosti preizkusa v celoti in pri utemeljevanju načina ocenjevanja preizkusa.

Preglednica 2: Poenostavljena shema mrežnega diagrama

Št. naloge	Cilji/Standardi	Področja spremljanja	Zahtevnost	Minimalnost standarda	Št. točk

V nadaljevanju podajamo kratek opis značilnosti nalog, ki jih zajema mrežni diagram.

Učni cilji posameznega učnega sklopa se nanašajo na učni načrt matematike oz. na cilje v učiteljevih pripravah na pouk. Povsem običajno je, da pri ugotavljanju znanja te cilje učitelj nekoliko prikroji, jih združuje. Seveda pri preizkusu ne moremo preverjati vseh učnih ciljev, zato vnaprej izberemo ključne in se usmerimo nanje. Pri načrtovanju preverjanih ciljev upoštevamo tako cilje, ki se navezujejo neposredno na obravnavano vsebino, pa tudi cilje, ki prežemajo ves učni načrt in so v učnem načrtu uvrščeni pod sklop „druge vsebine“: povezovanje matematičnih vsebin, razvijanje bralne pismenosti, vzorci, reševanje matematičnih problemov, utemeljevanje.

Področja spremljanja so tisti vidiki znanja, na katere želimo biti še posebej pozorni pri preverjanju in ocenjevanju. Poleg taksonomskih stopenj, ki so učiteljem dobro poznane (pri nas uporabljamo varianto iz raziskav NAEP iz prejšnjega desetletja, NAEP, 1995), spremljamo tudi elemente znanja, ki smo jim nemara dotlej pripisovali premajhen pomen in so šibke točke matematičnega znanja naših učencev. Spremljamo tudi uvajanje raznih novosti učnega načrta, ki jih sicer zlahka prezremo. V opisanem modelu tako v okviru taksonomskih stopenj še posebej zasledujemo predstavitev matematičnih pojmov (kot del konceptualnih znanj), utemeljevanje trditev (kot del problemskih znanj) ter bralno pismenost.

Zahtevnost posamezne naloge je v učiteljevem pisnem preizkusu relativna v smislu, da jo učitelj določi glede na raven zahtevanega oz. pričakovanega znanja pri pouku matematike. Pri predvidevanju zahtevnosti si učitelj pomaga z lastnimi izkušnjami, mnenji svojih kolegov, rezultatov Nacionalnih preverjanj znanja, pa tudi z informacijami v učnih gradivih in v učnem načrtu. Naloge ocenimo kot lahke, srednje zahtevne ali zahtevne glede na to, ali predvidevamo, da jih bo rešilo nad 80 odstotkov učencev, nad 50 odstotkov učencev oz. manj kot tretjina učencev (heterogenega razreda).

Standardi znanja opisujejo raven učenčevih dosežkov. V obstoječem učnem načrtu so natančneje razdelani le minimalni standardi znanja, to je raven usvojenosti, ki je pogoj za uspešno učenje novih znanj. Zato mora učitelj pri svojem preizkusu tovrstna znanja še posebej skrbno preveriti. Minimalni standardi, kot so zapisani v učnem načrtu, so omejeni na res najnujnejša znanja, zato ni nič narobe, če učitelj po presoji, da vsi učenci v razredu zmorejo več, nabor minimalnih standardov „razširi“. V učnem načrtu so zapisani tudi standardi VIO, ki pa so tako splošni, da jih težko uporabimo pri učiteljevem pisnem preizkusu.

Izdelava pisnega preizkusa

Opisali bomo strategijo izdelave pisnega preizkusa, ki omogoča izdelavo primerno veljavnih preizkusov in temelji na uporabi mrežnega diagrama. Kot smo videli, z mrežnim diagramom hkrati nadziramo veliko parametrov. To pa je vse prej kot enostavno, zato si pomagamo z raču-

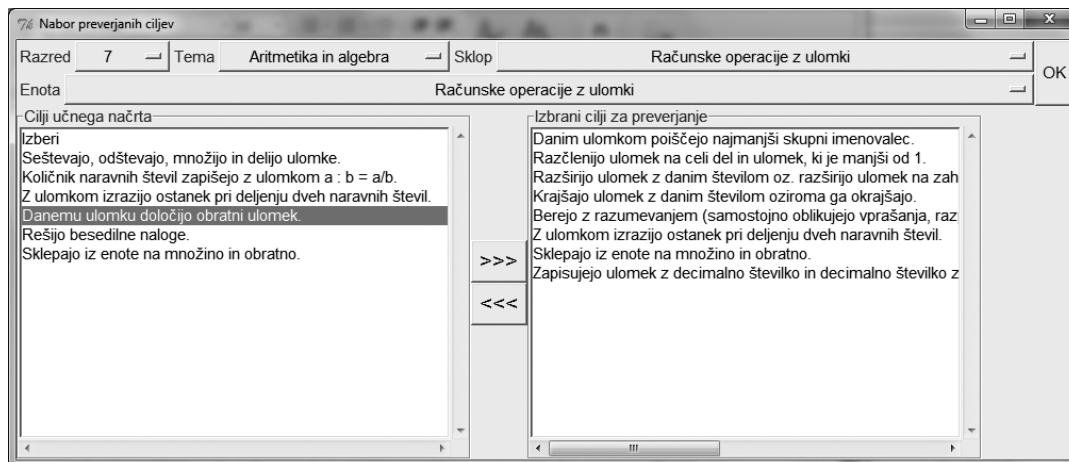
nalniškim programom, ki skrbi za tehnične detajle, tako da se učitelj lahko posveti vsebinskim vprašanjem.

1. korak: Odločitev o parametrih preverjanja

Najprej določimo, kolikšen delež točk preizkusa naj se nanaša na posamezne taksonomske in druge kategorije. Torej: kolikšen delež točk naj bo povezanih z razumevanjem, kolikšen delež z usvojenostjo postopkov in kolikšen delež s problemskimi znanji. Nadalje se odločimo o deležu točk, ki se nanašajo na lahke, srednje in zahtevne naloge. Razmerje med točkami, ki se nanašajo na lahke, srednje in zahtevne naloge, izraža predvideno zahtevnost preizkusa. Predvidimo tudi delež točk, ki se nanašajo na minimalne standarde in druga področja spremljanja. Poudarimo naj, da gre le za okvirne deleže. Če smo npr. predvideli 30-odstotni delež točk, ki se nanašajo na taksonomsko raven razumevanje, je lahko na koncu ta delež 25- ali pa 35-odstotni. Vsekakor pa ni v redu, če znaša 0 odstotkov. Vsi omenjeni načrtovani deleži se od testa do testa le izjemoma spreminjajo.

2. korak: Izбира preverjanih ciljev

O izbiri preverjanih ciljev smo govorili v prejšnjem razdelku. Da je izbira lažja, so v program vneseni že vsi učni cilji matematike za zadnje štiri razrede devetletke. Učni cilji so urejeni po razredih, temah, sklopih in učnih enotah, tako da uporabnik le izbira učne cilje, ki jih želi preverjati (slika 1). V nadaljevanju je mogoče izbiro spremeniti, posamezne cilje pa kombinirati, spremeniti ali dodati nove cilje.



Slika 1: Izbiranje preverjanih ciljev.

3. korak: Izdelava načrta preizkusa

V naslednjem koraku izdelamo mrežni diagram. Najprej napravimo osnutek, tako da za posamezno nalogo predvidimo, katere od predhodno izbranih ciljev naj bi preverjala, odločimo se tudi o predvideni taksonomski stopnji, zahtevnosti naloge (ali dela naloge, če je razčlenjena), predvidenem številu točk in o drugih parametrih naloge (slika 2). Program sproti vodi evidenco o tem, kateri od izbranih ciljev še niso zastopani v nalogah ter o zastopanosti posameznih taksonomskih in drugih kategorij. Prikazane informacije so v veliko pomoč pri izdelavi načrta, ki zadošča predvidenim okvirom. Vse izbire in odločitve je mogoče v nadaljnjih korakih dodelati oz. spremeniti.

74 Toplevel

Opis Preizkus o ulomkih. 7. razred

Ok	Nal. abc	Cilj	Standard	Točk	Min.	Branje	Taksonomsko področje	Zahtevnost
☒	1 a	Opredelijo pojem ulomka in ga upodobijo na številski premici ali kot del lika,	Ponazorijo ulomek kot del celote.	2	☒	☐	Razumevanje-predstavitve	Lahka
☒	1 b	Opredelijo pojem ulomka in ga upodobijo na številski premici ali kot del lika,	Ponazorijo ulomek kot del celote.	2	☒	☐	Razumevanje-predstavitve	Srednja
☒	1 c	Opredelijo pojem ulomka in ga upodobijo na številski premici ali kot del lika,	Prepoznajo okrajšani ulomek in ponazorijo ulomek kot del celote.	2	☐	☐	Razumevanje-drugo	Težka
☒	2 a	Razširijo ulomek z danim številom oz. razširijo ulomek na zahtevani imenov.	Uloomek krajšajo in razširijo z danim številom.	4	☒	☐	Postopki	Lahka
☒	2 b	Razširijo ulomek z danim številom oz. razširijo ulomek na zahtevani imenov.	Pojasnijo razliko med okrajšanim in krajšanim ulomkom.	2	☒	☐	Razumevanje-drugo	Srednja
☒	2 c	Razširijo ulomek z danim številom oz. razširijo ulomek na zahtevani imenov.	Razširijo ulomek z danim številom oz. razširijo ulomek na zahtevani imenov.	2	☐	☐	Postopki	Srednja
☒	3	Seštevajo, odštevajo, množijo in delijo ulomke,	Seštevajo, odštevajo, množijo in delijo ulomke,	3	☒	☐	Postopki	Lahka
☒	4	Rešijo besedilne naloge,	Besedilni opis računske operacije spremenijo v simbolični zapis in obratno.	3	☒	☒	Postopki	Lahka
☒	5	Sklepajo iz enote na množino in obratno,	Pravilno izvedejo vse računske postopke z ulomki pri reševanju besedilne	3	☐	☒	Problemsko-utemeljevanje	Težka

Min. %vse %min	Branje %vse %min	Taksonomsko področje %vse %min	Zahtevnost %vse %min
Nemimal 30 0	BranjeNe 73 56	Razumevanje-predstavitve 17 17	Lahka 52 52
Minimal 69 69	BranjeDa 26 13	Razumevanje-drugo 17 8	Srednja 26 17
		Postopki 52 43	Težka 21 0
		Problemsko-utemeljevanje 13 0	
		Problemsko-drugo 0 0	

Razvrsti OK

Slika 2: Izdelava mrežnega diagrama.

4. korak: Izbira in prilagoditev nalog

V tem koraku sestavimo naloge, ki ustrezajo značilnostim iz mrežnega diagrama. Čeprav se zdi na prvi pogled sestavljanje nalog, ki ustrezajo toliko značilnostim, zelo zahtevno, pa se izkaže, da ni tako. Preverjani cilj in vnaprej določene značilnosti, če smo le malo izkušeni, naravnost povedo, kakšna naj bo naloga. Lahko pa tudi izhajamo iz nalog iz raznih gradiv, ki vsaj približno ustrezajo želenim značilnostim, in naloge nekoliko spremenimo. Najpogostejše je treba nalogo uskladiti s predvideno taksonomsko stopnjo ali z zahtevano težavnostjo (Magajna, 2004).

Uskladitev taksonomske ravni dosežemo s preoblikovanjem naloge. V veliko pomoč so nam elementi znanja na posamezni ravni (Žakelj, Magajna, 2003). Ponazorimo to na preprostem primeru. Denimo, da se preverjani cilj nanaša na razširjanje ulomkov. Če želimo preverjati razumevanje, bomo sestavili nalogo, kjer naj učenec prepozna razširjanje, navede ali poišče primer oz. protiprimer razširjanja, ponazori razširjanje, razloži razliko med razširjanjem in množenjem, pojasni odnos med razširjanjem in krajšanjem. Če gre za postopek, bo verjetno naloga zahtevala izvedbo razširjanja v preprostem kontekstu (npr. razširitev danega ulomka z danim številom) ali pa v kompleksnem kontekstu (npr. razširjanje ulomka v izrazu ali pa v povezavi z besedilno nalogo). Če pa gre za problemsko znanje, bomo nalogo zastavili tako, da ne bo razvidno, da se naloga nanaša na razširjanje ulomkov, ali pa tako, da bo naloga zahtevala določeno analiziranje situacije, neko strategijo reševanja, ugotavljanje zakonitosti ali pa utemeljevanje trditve, stališča, zakonitosti. Zelo preprost primer problemske naloge bi povprašal, s katerim številom je treba razširiti dani ulomek, da dobimo drugi dani ulomek. V zahtevnejši nalogi naj bi, na primer, učenec pojasnil, zakaj danega ulomka ni mogoče razširiti na imenovalce

1000, in utemeljeno trditev posplošil, ali pa naj bi poiskal taki števili a in b , da bo $a/20$ enako $b/12$.

Praviloma tudi ni težav pri uravnavanju zahtevnosti naloge. To dosežemo s spreminjanjem stopnje kompleksnosti, abstraktnosti oz. problemskosti naloge. Razumljivo postane naloga zahtevnejša, če vsebuje več podatkov, ki jih je nemara treba med seboj kombinirati. Z dodajanjem oz. odzemanjem elementov abstraktnosti in splošnosti nalogo seveda otežimo oz. poenostavimo. Enako velja za elemente problemskosti.

Slika 3: Sestavljanje naloge.

Slika 3 prikazuje obrazec za vpis opisa naloge in točkovanje naloge. Kot vidimo, so prikazani vsi parametri naloge, kar olajša njeno sestavljanje. Če želimo, lahko kateri koli parameter naloge tudi spremenimo.

5. korak: Pregled preizkusa in dokumentiranje preizkusa

Med izdelavo preizkusa je mogoče spreminjati parametre, ki smo jih na začetku vpisali v mrežni diagram. Zato pred koncem še enkrat pregledamo mrežni diagram in preverimo, ali parametri celotnega preizkusa ustrezajo na začetku načrtanemu okviru. Če je treba, izvedemo potrebne spremembe. Program nato izpiše celotno dokumentacijo preizkusa (načrt in točkovnik), podatke pa lahko shranimo in jih uporabimo kot izhodišče za kak bodoči preizkus, ki bo preverjal podobno vsebino.

Sklep

V prispevku smo predstavili metodologijo izdelave pisnega preizkusa, ki omogoča izdelavo veljavnih preizkusov matematičnega znanja. Bistvo predstavljene metodologije je, da pri izdelavi preizkusa ne izhajamo iz nalog, temveč iz učnih ciljev, ki naj bi jih preverjali, ter iz zahtev o zastopanosti taksonomskih in drugih kategorij v nalogah preizkusa. To omogoča kakovostnejšo povratno informacijo učencem, saj se zavedamo, kaj točno smo želeli s preizkusom preveriti, in učencem na primeren način sporočimo, kakšno je njihovo znanje, kje so njihove močne in šibke strani. Model omogoča tudi argumentirano razpravo o primernosti preizkusa. Razpravljamo lahko o tem, ali je mrežni diagram primeren in ali posamezne naloge ustrezajo parametrom iz mrežnega diagrama. Ustreznost naloge je treba presojeti iz vsaj treh vidikov:

- ali je zastavljena naloga usklajena s cilji in drugimi parametri iz mrežnega diagrama;
- ali učenci primerno razumejo, katero znanje je treba v nalogi izkazati;
- ali točkovanje naloge primerno odraža zahteve iz mrežnega diagrama.

S tem, ko sestavljamo naloge, ki ustrezajo vnaprej določenim zahtevam, izostrimo občutek o tem, ali neka naloga res preverja to, kar želimo preverjati. Namesto da razbiramo raznolika znanja iz nepreglednega klopčiča zahtev od nekje prevzetih nalog, se učimo zastavljati vprašanja in naloge, povezane z učnimi cilji, taksonomskimi ravnmi in drugimi parametri, katerih doseženost želimo preveriti. Izdelava preizkusa po tem modelu zahteva poglobljen razmislek o učnih ciljih, o nevrvalgičnih točkah znanja naših učencev, o številnih vidikih matematičnega znanja. To se mora odražati pri poučevanju. In prav ta povratni vpliv – torej priložnost izboljšanja poučevanja – je po našem mnenju najpomembnejši vidik dobrega ugotavljanja znanja pri notranjem ugotavljanju znanja. Kot rečeno, sta bila predstavljena metodologija in program za načrtovanje preizkusov izdelana predvsem za potrebe izobraževanja bodočih učiteljev matematike. Odveč je pripomniti, da je izdelava pisnega preizkusa po predstavljeni metodologiji časovno zahtevna, kar je nemara prevelika cena za izdelavo oz. načrtovanje preizkusov pri „sprotnem delu“ učitelja. Če pa vsaj občasna izdelava preizkusov po tej metodologiji pripomore k izboljšanju poučevanja, potem cena ni prevelika.

Literatura in viri

- 1 Magajna, Z. (2004). *Ugotavljanje matematičnega znanja s pisnimi preskusi. Matematika v šoli*, 11, str. 84-99.
- 2 Magajna, Z., Kmetec, K. (2012). *Uporaba IKT za izdelavo mersko kvalitetnih preizkusov iz matematike. V: Bačnik, A. (ur.) Mednarodna multikonferenca Splet izobraževanja in raziskovanja z IKT (Kranjska Gora). Ljubljana: Miška, str. 992-999.*
- 3 Marentič Požarnik, B. (2000). *Psihologija učenja in pouka. Ljubljana: DZS.*
- 4 NAEP (1997). *Technical Report of the NAEP 1996 State Assessment Program in Mathematics. Washington: National Center For Education Statistics.*
- 5 Nitko, A. (1996). *Educational Assessment of Students. New Jersey: Prentice Hall.*
- 6 Rutar Ilc, Z. (2004). *Preverjanje in ocenjevanje v učnociljnem pristopu. Sodobna pedagogika*, 55 (1), str. 24-38.
- 7 Sagadin, J. (1993). *Poglavja iz metodologije pedagoškega raziskovanja. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo in šport.*
- 8 Žakelj, A., et al. (2011). *Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (1. 12. 2011).*
- 9 Žakelj, A., Magajna, Z. (2003). *Preverjanje in ocenjevanje znanja v devetletni osnovni šoli: matematika. Vzgoja in izobraževanje* 34 (2), str. 20-27.

5.1.1 Sestava pisnega preizkusa v šestem razredu

Marija Magdič, Osnovna šola Turnišče

Avtor	Marija Magdič
Šola	Osnovna šola Turnišče
Učna tema	Aritmetika in algebra
Učni sklop	Racionalna števila. Računske operacije in njihove lastnosti.
Razred	6.
Potreben čas za izpeljavo	dve šolski uri (ena ura pisni preizkus, ena ura analiza in poprava preizkusa)
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Preveriti, ali so učenci usvojili cilje iz vsebin Decimalna števila in Računske operacije z njimi (podrobnejši cilji so zapisani v mrežnem diagramu).
Minimalni standardi	Učenec/učenka:
Standardi	- desetiški ulomek zapiše z decimalno številko in obratno, - dano decimalno število upodobi na številski premici, - primerja decimalna števila in računa z njimi (do tri decimalna mesta), - izračuna vrednost številskega izraza, - desetiški ulomek zapiše z decimalnim zapisom, - zanesljivo uporablja računske operacije s števili v decimalnem zapisu, - oblikuje vzorce in številska zaporedja in jih nadaljuje, - reši matematične probleme in probleme iz vsakdanjega življenja, - pri reševanju (besedilnih) problemov uporablja različne bralne strategije ter kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih.
Oblike in metode dela	individualna
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	preizkus znanja
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Sestava pisnega preizkusa je bila časovno zamudnejša in zahtevnejša od sestave običajnega preizkusa. Več časa sem porabila predvsem za izdelavo mrežnega diagrama in pripravo primernih nalog, ki posamezni cilj preverjajo na izbrani taksonomski ravni in so primerne težavnosti. Učenci so preizkus reševali brez posebnih težav. Nekaj učencev, ki so bili pri delu počasnejši ali pa so se kakšne naloge lotili nespretno, so za reševanje porabili več časa, zato jim je zmanjkalo časa za zadnjo nalogo.

Uvod

Po predelanem učnem sklopu o decimalnih številih in računskih operacijah z njimi sem preverila in ocenila znanje učencev s pisnim preizkusom znanja. Pri sami zgradbi preizkusa sem upoštevala priporočila Predmetne razvojne skupine za matematiko.

Osnova pri sestavi preizkusa je bil učni načrt, kjer sem si najprej izbrala cilje in standarde, ki sem jih želela preveriti v skladu s tem, kar se je dogajalo pri pouku. Med cilje in standarde učnega sklopa o decimalnih številih in računskih operacijah z njimi sem vključila nekaj ciljev, ki so navedeni pod temo Druge vsebine.

Trudila sem se, da bi s primerno zastopanostjo nalog na vseh taksonomskih stopnjah pokrila izbrane učne cilje, ki sem jih želela preveriti. V okviru taksonomskih stopenj sem bila posebej pozorna na to, kako učenci obvladajo predstavitve matematičnih pojmov kot del konceptualnih znanj, kako so vešči v utemeljevanju ter bralno pismenost. Nekaj idej za naloge sem dobila ob prebiranju nalog TIMSS-a (12. naloga) in PISE (13. naloga).

Pisanje in analiza preizkusa

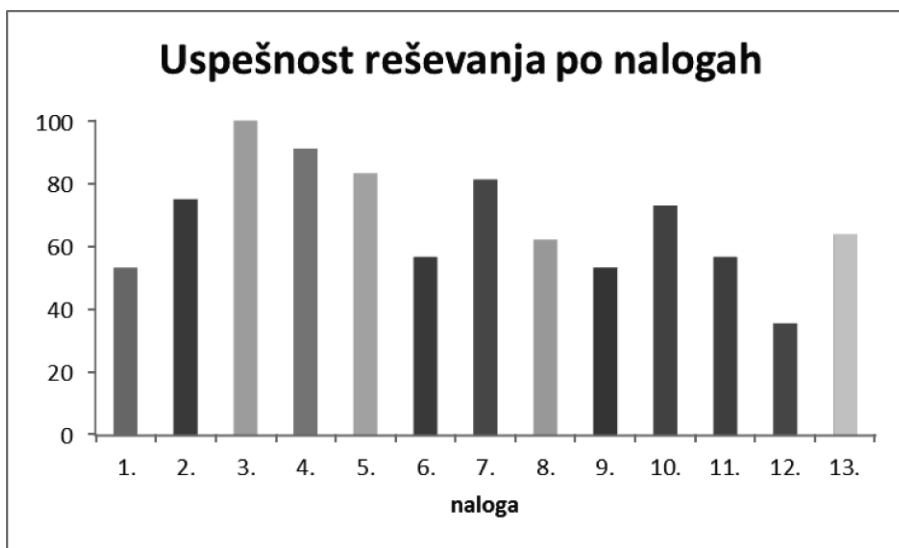
Učenci so odpisali preizkus znanja v eni šolski uri. V naslednji učni uri smo opravili analizo preizkusa znanja in popravo. Pisni preizkus znanja je pisalo 15 učencev šestega razreda. Povprečen dosežek je bil 68-odstotni.

Pregled uspešnosti reševanja po nalogah

Uspešnost reševanja posamezne naloge je prikazana v spodnji preglednici in diagramu.

Preglednica 1: Pregled uspešnosti po nalogah

Naloga	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Uspešnost reševanja v %	53,3	75	100	91,1	83,3	56,7	81,3	62,2	53,3	73,0	56,7	35,6	64,0



Graf 1: Uspešnost reševanja po nalogah.

Najuspešneje reševane naloge

Najuspešneje reševana naloga je bila naloga 3, kjer je bilo treba odčitati oziroma ponazoriti decimalno število na pozicijskem računalu. Uspešni so bili tudi pri ponazoritvi decimalnih števil na številski premici (naloga 4), primerjanju decimalnih števil po velikosti (naloga 5). Menim, da so bili pri teh nalogah uspešni predvsem zato, ker gre za osnovna konceptualna znanja. Ta znanja so manj zahtevna. Ker se obravnavajo na začetku sklopa o decimalnih številih, smo jih tudi dalj časa utrjevali.

Uspešno so reševali tudi besedilno nalogo s preprosto realistično situacijo (naloga 7), kar kaže na to, da imajo z opisano situacijo nekaj izkušenj, jim ni bila tuja. Dosežek pri tej nalogi me je pozitivno presenetil.

Slabše rešene naloge

Slabše rešena naloga je bila naloga 1, ki je preverjala pojem desetiških ulomkov, česar nisem pričakovala. Vsi so prepoznali desetiške ulomke, ki imajo v imenovalcu desetiško enoto, večina pa jih je pozabila na ulomek $\frac{1}{2}$.

Naloga 6, ki je preverjala prepoznavanje pravila v številskem zaporedju in opis pravila, je bila tudi slabše rešena. Učenci so pravilno dopolnili zaporedje (13 učencev od 15), težave pa so se pojavile pri natančnem opisu pravila.

Zapiši manjkajoče člene zaporedja.

2,4; 2,7; 3,0; 3,3 ; 3,6 ; 3,9 ;

Opiši, kako dobimo vsak naslednji člen zaporedja.

Vsak naslednji člen je za tri večji od prejšnjega.

/2t

Slika 1: Nenatančen opis pravila v zaporedju: Učenec je zapisal, da je vsak naslednji člen večji za tri, in ne za tri desetine. (avtor izdelka: učenec 6. razreda)

Slabo so rešili tudi nalogo 9, ki je vsebovala preprost problem z življenjsko situacijo.

Najslabše pa so reševali nalogo 12, kjer so v navidezno enostavni situaciji naleteli na težave.

Pri pregledu in analizi učenčevih izdelkov pa je treba izpostaviti še problem deljenja. Učenci obvladajo postopek deljenja, zanesljivo ga izvedejo z enomestnim deliteljem, a so pri delu počasnejši. Če pa se pojavijo večja števila in še decimalke, so pri računanju zelo počasni in nezanesljivi. Temu problemu bo treba posvetiti več pozornosti po celi vertikalni.

Pregled dosežkov glede na taksonomsko stopnjo nalog in nekatera področja spremljanja

Iz analize je vidno, da so učenci reševali najuspešneje naloge, ki so preverjale poznavanje in razumevanje pojmov – osnovna konceptualna znanja o decimalnih številih (80 odstotkov), pri zanesljivem obvladovanju postopkov so bili manj uspešni (64 odstotkov), najmanj uspešni pa so bili pri reševanju problemskih nalog (51 odstotkov).

Uspešnost pri nalogah, ki so preverjale bralno pismenost, je bila 61-odstotna, pri nalogah, ki so preverjale predstavitve 81-odstotna in pri nalogah razumevanja 69-odstotna.

Refleksija učitelja

Čeprav sem pri sestavi želela upoštevati vsa priporočila, se je ob analizi učenčevih izdelkov izkazalo, da nisem bila dovolj pozorna pri izbiri nalog za preverjanje določenega cilja. Kot neustrezno izbrana naloga za preverjanje zastavljenega cilja se je izkazala naloga 9, saj so učenci pri reševanju ubrali strategijo, pri kateri niso pokazali znanja, ki sem ga želela preveriti. Ker je šlo v tej nalogi za preprost matematični problem, sem pričakovala, da bodo učenci nalogo reševali z deljenjem, vendar je to računsko operacijo uporabila le tretjina učencev. Drugi pa so pri reševanju uporabili druge strategije – nalogo so reševali s poskušanjem – množenjem, ali pa so pri reševanju uporabili seštevanje ali odštevanje. Izkušnja, ki si jo velja zapomniti.

Računanje:

$$\begin{array}{r} 1,25 \cdot 10 \\ \hline 125 \\ + 000 \\ \hline 1250 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,25 \cdot 12 \\ \hline 125 \\ - 125 \\ \hline 250 \\ 1500 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,25 \cdot 13 \\ \hline 125 \\ - 125 \\ \hline 375 \\ 1625 \end{array}$$

Odgovor: Ne. Zmanjšala mi 25 cm

/3t

Slika 2: Primer rešene naloge z množenjem

Računanje:

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ + 1,25 \\ + 1,25 \\ + 1,25 \\ \hline 5,00 \end{array} \quad 3 \cdot 5 = 15 \text{ m} \quad \begin{array}{r} 15 \\ + 1,25 \\ \hline 16,25 \end{array}$$

Odgovor: Ne, nemareš razrezati na enake dele da nič ne ostane

/3t

Slika 3: Primer rešene naloge s seštevanjem in sklepanjem. (avtor izdelka: učenec 6. razreda)

Največ težav sem imela pri področju spremljanja bralne pismenosti, saj to lahko pojmujejo na različne načine.

Sama sestava preizkusa, kjer je bilo treba upoštevati več vidikov, je bila zahtevna in zamudnejša kot sestava običajnega preizkusa.

Prednost takega preizkusa vidim predvsem v tem, da smo bolj osredotočeni na vključevanje različnih področij spremljanja – taksonomij, in primerno zastopanost težavnosti nalog, na kar prej sama nisem bila toliko pozorna.

Ob takem preizkusu znanja pa dobimo tudi kakovostnejšo povratno informacijo o znanju in vrsti znanja učencev. Vse to pa nam je vodilo pri nadaljnjem delu z učenci.

Literatura in viri

- 1 Japelj Pavešič, B. (ur.) (2012). *Matematične naloge raziskave TIMSS: mednarodna raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja*. Ljubljana: Pedagoški inštitut.
- 2 Magajna, Z. (2004). *Ugotavljanje matematičnega znanja s pisnimi preizkusi*. Matematika v šoli, 11, str. 84–99.
- 3 Repež, M., Drobnič Vidic, A., Štraus, M. (prir. in ur.) (2008). *PISA 2006: Izhodišča merjenja matematične pismenosti v raziskavi PISA 2006*. Ljubljana: Nacionalni center PISA, Pedagoški inštitut.
- 4 Žakelj, A. et al. (2011). *Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt*. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (1. 12. 2011).

Priloge



Priloga 1: Mrežni diagram

Priloga 2: Preizkus znanja o decimalnih številih

Priloga 3: Točkovnik

5.1.2 Pisni preizkus za osmi razred

Katja Kmetec, Osnovna šola Brinje, Grosuplje

Avtor	Katja Kmetec
Šola	Osnovna šola Brinje, Grosuplje
Učna tema	Aritmetika in algebra
Učni sklop	Realna števila, računske operacije in njihove lastnosti – pisni preizkus znanja
Razred	8.
Potreben čas za izpeljavo	ena šolska ura (+ del druge šolske ure: evalvacija dosežkov)
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke pri reševanju nalog pisnega preizkusa pokažejo doseganje naslednjih ciljev: • celo (racionalno) število preberejo in upodobijo na številski premici (realni osi), • ugotovijo, kateri množici števil pripada dano število, • ločijo med množicami N, Z, Q, R in razumejo odnos med njimi, • racionalnemu številu določijo absolutno, nasprotno in obratno vrednost, • uredijo števila po velikosti, • oblikujejo ali nadaljujejo dano zaporedje v množici celih števil, • seštevajo in odštevajo racionalna števila, • izračunajo zmnožek celih (racionalnih) števil, • delijo celi oz. racionalni števili, • izračunajo vrednost številskega izraza, • rešijo indirektno besedilne naloge.
Standardi	Učenec/učenka: • uporablja cela in racionalna števila v življenjskih situacijah, • poišče nasprotno in obratno vrednost števila, • primerja in ureja cela števila, • izračuna vrednost številskega izraza s celimi in racionalnimi števili, • upošteva prednost računskih operacij v izrazu, • reši matematični problem in problem z življenjsko situacijo, • ima razvite številske predstave in pozna odnose med številske množicami, • pozna in uporablja lastnosti številske množice in računskih zakonov, • pri reševanju besedilnih nalog uporablja bralne strategije in besedilno nalogo opiše z matematičnim jezikom, • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja.
Oblike in metode dela	• metoda pisnih del
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• pisni preizkus znanja, • računalniški program za sestavo pisnega preizkusa znanja dr. Zlatana Magajne

Refleksija (z vidika učitelja, učen- ca)

Sestava pisnega preizkusa znanja po vseh predpisanih korakih in z upoštevanjem vseh zelenih parametrov se je izkazala kot precej zahtevna in bolj zamudna v primerjavi z običajno sestavo pisnega preizkusa znanja. Učencem se je pisni preizkus znanja zdel težji kot običajni pisni preizkusi znanja, predvsem zaradi nalog, ki so preverjale bralno pismenost. Njihovi dosežki so bili nekoliko nižji od dosežkov pri običajnem pisnem preizkusu znanja. Pri tem se je izkazalo, da so učenci boljši v reševanju tistih tipov nalog, ki jih pogosteje rešujemo pri pouku, in slabši pri tistih, ki jih pri pouku redko srečajo.

Uvod

Priprava pisnega preizkusa znanja je stalna praksa učiteljev, pa vendar: ali so naši testi vedno veljavni, objektivni, zanesljivi? Nam dajo zares kakovostne informacije o tem, kakšno je znanje naših učencev, kje so njihova močna in kje šibka področja, kakšne so usmeritve za nadaljnje delo v razredu?

Po predelanem in utrjenem učnem sklopu Racionalna števila in računske operacije sem znanje učencev osmem razreda preverila s pisnim preizkusom znanja. Pri njegovi sestavi sem pazila, da je bil mersko ustrezen, in se še posebej osredotočila na področja spremljanja.

Sestava pisnega preizkusa znanja

Pisni preizkus sem sestavljala s pomočjo mrežnega diagrama po modelu, ki ga je predlagala Predmetna razvojna skupina za matematiko ZRSŠ in ki namenja posebno pozornost področjem spremljanja. Ta so – poleg taksonomskih stopenj, ki so učiteljem že dobro poznana – še bralna pismenost, utemeljevanje in predstavitev.

Upoštevanje vseh kriterijev, ki jih je treba doseči za sestavo kakovostnega pisnega preizkusa znanja – od ciljev, standardov ... do ustreznega razmerja težavnosti, taksonomskih stopenj, primerne deleža nalog, ki preverjajo minimalne standarde znanja, bralno pismenost, utemeljevanje in predstavitev – se je izkazalo kot zahtevno in tudi dolgotrajno delo. V veliko pomoč pri sestavi pisnega preizkusa znanja mi je bil računalniški program za sestavo pisnega preizkusa znanja avtorja dr. Zlatana Magajne, ki je bil predstavljen na Siriktu 2012 (dostopno na: <http://www.sirikt.si/index.php?id=1769>). Program učitelja vodi in usmerja pri sestavi pisnega preizkusa znanja po naslednjih korakih:

- izbira učnih ciljev, ki jih želimo preverjati,
- načrtovanje pisnega preizkusa – izdelava mrežnega diagrama,
- sestava nalog, ki ustrezajo določenim zahtevam, ki smo jih določili sami v okviru mrežnega diagrama,
- analiza nalog in njihova dodelava.

Tako je nastal pisni preizkus znanja Racionalna števila, ki je priložen (priloga 1), priloženo pa je tudi poročilo o pisnem preizkusu (narejeno s pomočjo računalniškega programa – priloga 2), iz katerega je razvidna analiza po posameznih kriterijih. Vse učiteljice, ki poučujemo matematiko v osmem razredu, smo nastali pisni preizkus znanja rešile in pri tem merile čas. Ker ta pri nobeni ni presegal 15 minut, smo menile, da pisni preizkus znanja časovno ni preobsežen.

Izvedba v razredu

Reševanje pisnega preizkusa znanja

Pisni preizkus znanja so pisali učenci vseh skupin osmega razreda kot preverjanje znanja po predelanem in utrjenem učnem sklopu Racionalna števila in računske operacije z njimi. Ob koncu šolske ure smo učiteljice učence prosile, naj označijo, katere naloge so se jim zdele težke in katere zanimive. Nekateri učenci so ob koncu pisanja povedali, da se jim je pisni preizkus zdel daljši kot sicer in da jim je primanjkovalo časa.

Analiza dosežkov

Naslednjo šolsko uro smo naredili popravo in analizo pisnega preverjanja znanja. Dosežki učencev so bili v splošnem nekoliko nižji kot pri drugih preverjanjih znanja. Poprečni dosežek je bil 55,24-odstotni, najnižji dosežek 14-odstotni (ena učenka), najvišji 91-odstotni (2 učenca). Izvedena je bila natančna analiza po ciljnih posamezne naloge. V nadaljevanju navajam le glavne ugotovitve.

Najbolje, najslabše reševane naloge

Učenci so najbolje reševali naslednje naloge: 2a (100 %), 2b (96 %), 5b (96 %), 1ade (88 %), 7a (84 %), 6c (82 %), 2c, 5c, 6ab (vse 80 %), torej naloge, ki preverjajo obdelavo podatkov, preprostih postopkov, razumevanje odnosov med števili in množicami.

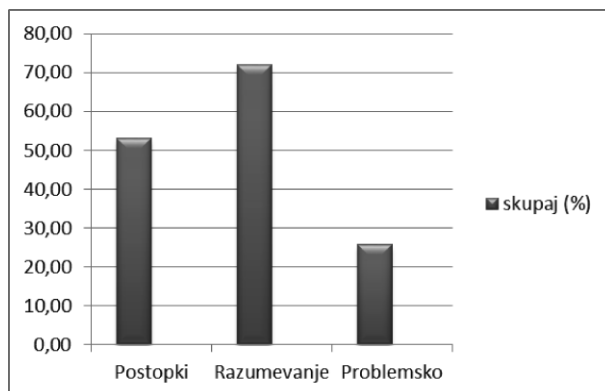
Najslabše so se odrezali pri nalogah: 5f (13 %), 5e (20 %), 8a (31 %), 10 (31 %), 8b (33 %), 7c (36 %), 4d in 9b (oboje 40 %), torej pri problemskih nalogah, kompleksnih postopkih, bralni pismenosti.

Uspešnost reševanja glede na taksonomsko stopnjo

Pri pregledu uspešnosti reševanja po taksonomskih stopnjah se je izkazalo:

- učenci so najslabše reševali problemske naloge,
- učenci so se najbolje odrezali pri nalogah, ki preverjajo konceptualno znanje.

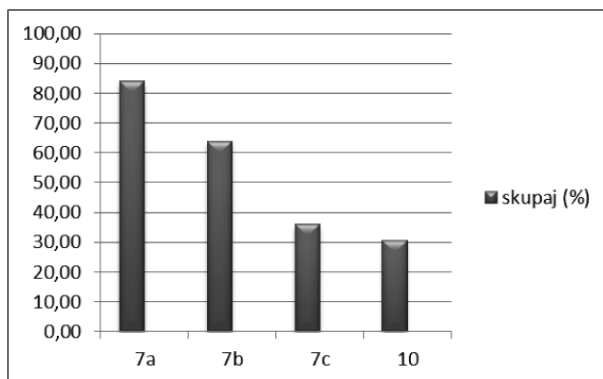
Oboje je vidno na grafu 1.



Graf 1: Uspešnost reševanja nalog glede na taksonomsko stopnjo.

Uspešnost reševanja nalog, ki preverjajo bralno pismenost

Graf 2 prikazuje uspešnost učencev pri reševanju nalog, ki preverjajo bralno pismenost:



Graf 2: Uspešnost reševanja nalog, ki preverjajo bralno pismenost.

Iz grafa 2 je razvidno, da je uspešnost reševanja nalog, ki preverjajo bralno pismenost, odvisna tudi od drugih dejavnikov, npr. od zahtevnosti naloge.

Evalvacija in usmeritve

Pri sestavi pisnega preizkusa znanja sem imela naslednje **težave**:

- Število minimalnih standardov, ki so opredeljeni v učnem načrtu za matematiko, je majhno. Zato sem imela težave pri doseganju ustreznega razmerja med minimalnimi in drugimi standardi znanja (naloge, ki preverjajo minimalne standarde, naj bi predstavljale približno 60 odstotkov vseh nalog).
- Bralna pismenost je pojem, ki se v zadnjem času zelo pogosto v rabi v šolstvu, pa vendar se zdi, da si vsak od učiteljev predstavlja nekoliko po svoje, kaj natanko se skriva pod tem.

Učenci pri reševanju pisnega preizkusa znanja niso imeli kakšnih posebnih težav. Ugotovili pa so, da je preizkus nekoliko drugačen kot sicer. Razliko so pojasnili tako:

- »Vsebuje več besedila.«
- »Je bolj obsežen.«
- »Več moraš misliti in se bolj skoncentrirati na reševanje.«

Prav zaradi večje količine besedila so učenci porabili več časa že za samo branje navodil, kar pojasnjuje, zakaj se je zdel pisni preizkus učencem obsežnejši kot sicer.

Izpostavili so nekaj nalog, ki so se jim zdele težke, in nekaj nalog, ki so se jim zdele zanimive. Kot zanimive so označili tiste naloge, ki so bile kakor koli povezane z življenjskimi situacijami (7, 10), nekateri pa tudi problemske naloge. Kot težko nalogo so izpostavili nalogo 5e.

Učence vseh skupin so tokrat zelo zanimali dosežki in analiza dosežkov. Kot že omenjeno, so bili dosežki tega preverjanja znanja nekoliko nižji kot običajno. Vzroke za ta odstopanja vidim predvsem v naslednjem:

- Točkovanje je bilo nekoliko drugačno kot običajno; točke so bile podeljene za pokazano doseganje ciljev nalog, in ne za delne korake (pri nekaterih nalogah je bilo zaradi tega točkovanje za učence manj ugodno kot sicer).
- Test je bil zahtevnejši kot običajno, ker je vseboval več nalog višjih taksonomskih ravni.
- V njem se je pojavilo nekaj nalog, kakršnih pri pouku nismo posebej vadili.

Učiteljice smo ugotovile, da so naši učenci boljši pri reševanju tistih nalog, ki so jih vajeni in ki jim pri pouku namenjamo dovolj pozornosti, in obratno: pri nalogah, ki jih ne rešujemo pogosto (npr. nalogah, ki preverjajo bralno pismenost), so učenci slabši, kot bi lahko bili. Presenetila nas je neuspešnost reševanja nalog 3 (50 odstotkov) in 7c (36 odstotkov). Obe nalogi sta zelo enostavni, pa čeprav podani z besedilom. Dosežki učencev pri teh nalogah nam povedo, da moramo odslej v pouk nujno vključevati podobne naloge in izboljšati bralno pismenost učencev.

Sestava mersko ustreznega pisnega preizkusa, ki zares upošteva vse potrebne kriterije, je zahtevno delo, ki terja precej časa, prav tako pa tudi analiza in interpretacija rezultatov. Pa vendar s tem učitelji marsikaj pridobimo. Glavna **prednost**, ki jo vidim, je gotovo kakovostna povratna informacija in s tem posredno usmeritve, čemu moramo pri pouku posvečati več pozornosti, da bo ta še kakovostnejši in znanje še boljše.

Literatura in viri

- 1 Magajna, Z. (2004). *Ugotavljanje matematičnega znanja s pisnimi preskusi. Matematika v šoli*, 11, str. 84–99.
- 2 Magajna, Z., Žakelj, A. (2005). *Preverjanje in ocenjevanje s pisnimi preizkusi pri matematiki v osmem razredu devetletne osnovne šole*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 3 Žakelj, A., et al. (2011). *Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt*. Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (1. 12. 2011).

Priloge



Priloga 1: Pisni preizkus znanja

Priloga 2: Poročilo o pisnem preizkusu znanja iz matematike

Priloga 3: Povzetek mrežnega diagrama

Priloga 4: Točkovnik

5.2 Naloge na različnih zahtevnostnih ravneh

Jerneja Bone, Zavod RS za šolstvo

5.2.1 Standardi znanja in cilji

Standardi znanja po vzgojno-izobraževalnih obdobjih

Standardi znanja so v PUN opredeljeni po posameznih vzgojno-izobraževalnih obdobjih. V PUN preberemo, da so zapisani standardi povezani s temeljnim znanjem, ki naj bi ga posamezni učenec dosegel ob zaključku vsakega od treh vzgojno-izobraževalnih obdobjih. Tako zapisani standardi znanja omogočajo učitelju, da izbira čas obravnave in dinamiko dela v razredu glede na njegove okoliščine, hkrati pa omogočajo učencem, da med posameznimi razredi napredujejo v skladu s svojimi zmožnostmi in do konca posameznega VIO dosežejo standard VIO.

Minimalni standardi

Prav tako v PUN preberemo, da minimalni standardi znanja opredeljujejo znanja, ki so potrebna za napredovanje v naslednji razred. Učenec, ki jih doseže, je pozitivno ocenjen. To upoštevamo, če nastopi situacija za ponavljanje razreda.

V prvem in drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju so minimalni standardi zapisani v stolpcih, ki niso ločeni s črto. To nakazuje, da je razred doseganja teh ciljev le okviren.

V tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju so minimalni standardi zapisani v stolpcih, ki so ločeni s črto. To nakazuje, da je razred doseganja teh standardov določen.

Preverjanje usvojenosti ciljev in standardov

Učni cilji, h katerim štejemo splošne in operativne cilje, zapisane v PUN, opisujejo, kaj želimo učence naučiti v okviru pouka matematike. Zapisani cilji v PUN so namenjeni predvsem pouku, učenju, poučevanju in vodijo v usvajanje bistvenih matematičnih pojmov in vsebin (PUN, str. 8).

Učitelj na različne načine preverja doseganje posameznih standardov znanj in usvojenost posameznih ciljev. Ker so v PUN za posamezni razred zapisani samo minimalni standardi znanja, naj bi učitelj sam opredelil višje stopnje usvojenosti znanja, in sicer z višanjem taksonomske ravni (pa tudi z višanjem kompleksnosti, abstraktnosti).

5.2.2 Model stopnjevanja težavnosti nalog, ki preverjajo isti cilj

Velikokrat se učitelji sprašujemo, kako oblikovati in pripraviti naloge, ki preverjajo isti cilj, in so različnih težavnosti. Zato v nadaljevanju predstavimo model stopnjevanja težavnosti nalog, ki preverjajo isti cilj.

Predpostavimo, da želimo pripraviti naloge, ki preverjajo cilje iz določenega sklopa učnega načrta. V vsak sklop učnega načrta smiselno vključujemo različne poudarke PUN: besedilne

naloge, vzorce, zaporedja, odprte in zaprte probleme ..., ki so zapisani v sklopu Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami. Za oba sklopa izpišemo standarde tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja, katerih doseganje pri učencih preverjamo z usvojenostjo znanja obeh sklopov. To smo prikazali s prvim (zgornjim) delom preglednice 1. Tak zapis nam pomaga, da smo pozorni na standarde znanja tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja iz obeh sklopov.

V drugem (spodnjem) delu preglednice 1 smo v prvi stolpec zapisali cilje, ki so zapisani v učnem načrtu za posamezni sklop, in cilje, ki jih uresničujemo iz sklopa Matematični problemi in problemi z življenjsko situacijo in se smiselno vključujejo v določen sklop učenega načrta.

V drugi stolpec smo vzporedno s cilji zapisali tiste minimalne standarde znanja, katerih usvojenost pri učencih preverjamo.

V tretjem stolpcu so naloge, kjer učenci pokažejo osnovno matematično znanje. S pravilno rešeno nalogo učenci pokažejo usvojenost zapisnega cilja (minimalnega standarda) v prvem oz. drugem stolpcu. Pri reševanju izkazujejo poznavanje pojmov ali dejstev, izvajanje preprostih postopkov, obvladovanje različnih prikazov.

V četrtem stolpcu so take naloge, kjer učenci pokažejo obvladovanje izvajanja rutinskih postopkov in uporabljajo ustrezne strategije reševanja v znanih situacijah. To nakazuje na uporabo matematičnega znanja, izkazovanje razumevanja, analiziranja in preiskovanja, sporočanja.

V petem stolpcu so naloge najtežje, učenci uporabljajo ustrezne strategije pri reševanju kompleksnih problemov. Učenci z rešitvijo take naloge pokažejo, da je njihovo znanje zelo široko: znajo rešiti nerutinske probleme, povezujejo znanja različnih vsebinskih področij, posplošujejo, utemeljujejo ...

V kateri stolpec je naloga uvrščena, je odvisno tudi od dogajanja v razredu, pri pouku: kaj smo z učenci že delali, kako jim je učitelj podajal snov, kaj in kako se je vsebina obravnavala, kakšne in katere naloge so reševali ... Zaradi vsega naštetega lahko npr. z nalogo, predstavljeno v četrtem stolpcu, preverjamo nekatere elemente, ki jih preverjamo z nalogami v petem stolpcu.

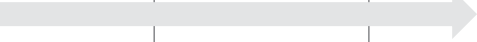
Naloge se od tretjega do petega stolpca stopnjujejo po težavnosti, čeprav preverjajo isti cilj in doseganje istega minimalnega standarda. Naloge prehajajo od manjše abstrakcije, kompleksnosti in problemskosti do nalog, kjer so uporabljene vse večja abstrakcija, kompleksnost in problemskost.

SKLOP:	Standardi znanja tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja
Vsebina:	• ... • ...
SKLOP:	Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami
Vsebina:	Učenec/učenka: • razvije učinkovite bralne strategije za nadaljnje učenje in izobraževanje (sporazumevanje v maternem jeziku); • v skladu z vsebinami osnovnošolske matematike razvije matematično in nematematično terminologijo (sporazumevanje v maternem jeziku); • matematični jezik uporablja pri sporazumevanju; • pri reševanju besedilnih nalog uporablja bralne strategije in besedilno nalogo opiše z matematičnim jezikom; • pri reševanju (besedilnih) problemov kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih; • življenjske situacije prikaže z modeli; • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja; • ...
Vzorci	

Preglednica 1: Model stopnjevanja nalog, ki preverjajo isti cilj

PRIMERI NALOG:

Vsebina: ...

Cilji	Minimalni standard	Učenci pokažejo osnovno matematično znanje	Učenci izvajajo rutinske postopke in uporabljajo ustrezne strategije reševanja v znanih situacijah	Učenci uporabljajo ustrezne strategije pri reševanju kompleksnih problemov
Učenci/učenke:	Učenec/učenka:			
• ...	• ...	Naloga:  <i>manjša abstrakcija, kompleksnost, problemskost</i>	Naloga:	Naloga: <i>večja abstrakcija, kompleksnost, problemskost</i>
		<i> vključena vsa področja spremljanja </i>		
		<i> vključujemo poudarke učnega načrta (npr. besedilne naloge, vzorce) </i>		

5.2.3 Področja spremljanja⁶

Na različna področja spremljanja moramo biti pozorni pri vseh fazah pouka. V našem primeru smo izbrali le nekatere elemente spremljanja. Pri pripravi nalog smo prednost dali šestim področjem spremljanja, za katera smo menili, da jih je treba posebej spremljati. Lahko izberemo druga področja spremljanja, tista, ki se nam zdijo v danem časovnem obdobju prioriteta, tista, za katera smo ugotovili, da jih moramo posebej razvijati pri učencih, ker so nam tako pokazale raziskave in analize, ali ker smo vključeni v različne projekte (bralna pismenost). Področja spremljanja se pri posamezni nalogi med sabo prepletajo in težko rečemo, da je pri eni nalogi vključeno samo eno področje spremljanja. Vsako področje spremljanja smo označili s posebno oznako, zato da bo med nalogami lažje zaznati, katero področje spremljanja smo izpostavili. Različna področja spremljanja predstavljamo v nadaljevanju.

Povezovanje znanj iz različnih vsebin matematike (↔ (puščici v obe smeri))

Povezovanje znanj matematike razumemo kot vsebinsko povezovanje znanj matematike tako po horizontali kot po vertikali. Povezovanje po horizontali pomeni, da povezujemo znanja iz vsebin matematike znotraj istega razreda, npr.: povezujemo znanja sedmega razreda iz vsebine prikazov (PUN, str. 57–58) in razširjanja, krajšanja, primerjanja in urejanja ulomkov (PUN, str. 47–48). Povezovanje po vertikali pomeni, da povezujemo znanja iz vsebin matematike med posameznimi razredi, npr.: povezujemo znanja o računskih operacijah in njihovih lastnostih pri decimalnih številih iz šestega razreda (PUN, str. 31) z znanji o računskih operacijah in njihovih lastnostih pri ulomkih iz sedmega razreda (PUN, str. 49).

Primer naloge ↔

Dano je zaporedje: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

Zapiši še nekaj naslednjih členov.

Opiši to zaporedje.

Kako bi zapisal splošni člen?

Zgornja naloga je primer horizontalnega povezovanja znanj znotraj sedmega razreda, in sicer znanja iz vsebine Številski izrazi, Vzorci (PUN, str. 51) in znanja iz vsebine Vzorci (iz sklopa Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami, PUN, str. 59–60).

Sporočanje (👄 (usta))

Sporočanje razumemo kot različne vrste pisnega in ustnega sporočanja⁷. K ustnemu in pisnemu sporočanju uvrščamo opisovanje postopkov in dejstev, razlaganje in pojasnjevanje

⁶ Več o področjih spremljanja v Žakelj, A. (2012). Od preverjanja do ocenjevanja znanja. V: Žakelj, A., Borstner, M. (ur.) Razvijanje in vrednotenje znanja, Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

⁷ O sporočanju kot področju spremljanja več izvemo iz prispevka Žakelj, A., in Magajna, Z. Preverjanje in ocenjevanje znanja v devetletni osnovni šoli (V: Vzgoja in izobraževanje, let. 34, št. 2 (2003), str. 20–27).

strategij reševanja, zapis ugotovitev. Pri sporočanju smo pozorni na pravilno uporabo matematične terminologije in simbolike. Če želimo in pričakujemo od učencev pravilno uporabo matematične terminologije in simbolike, se moramo zavedati, da moramo kot učitelji tudi sami uporabljati pri pouku pravilno terminologijo in simboliko.

Primer naloge

Številski izraz $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ = pretvori v besedilo.

Z zgornjo nalogo preverjamo, ali učenec razume pomen zapisanega številskega izraza, ki ga v nadaljevanju zapiše z besedami. Pri tem smo pozorni na pravilno uporabo matematične terminologije.

Reševanje problemov (? (vprašaj))

Vključevanje reševanja problemov v vse učne sklope je eden izmed ciljev posodobljenega učnega načrta. Zato smo v vseh fazah pouka in še posebej pri preverjanju in ocenjevanju pozorni na naloge, ki so za učence nove, drugačne naloge, ki jih predhodno še niso reševali in jim predstavljajo problem ali izziv, kjer morajo sami najti strategijo reševanja. Učencem taka naloga predstavlja izziv, učitelj v fazi preverjanja in ocenjevanja ugotavlja, kako uspešni so učenci pri reševanju tovrstnih nalog.

Primer naloge ?

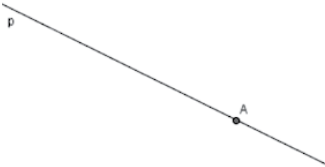
Poišči vsaj pet ulomkov, ki so med ulomkoma $\frac{5}{3}$ in $\frac{5}{7}$.

Predpostavimo, da take naloge učenci pred preverjanjem oz. ocenjevanjem še niso reševali. Zato je taka naloga za učence problemska: razumeti morajo problemsko situacijo, izbrati strategijo reševanja, uporabiti matematično znanje različnih vsebin in zapisati odgovor.

Predstavitve ((ppt-prezentacija)

Pri pouku matematike je zelo pomembno, da učencem matematični pojem predstavimo z različnimi reprezentacijami. V nadaljevanju učnega procesa te različne reprezentacije tudi uporabljamo. Pri različni predstavitvi pojmov mislimo na slikovno, simbolno, grafično ... predstavitve (grafi, prikazi, skice ...). Različne predstavitve pomagajo učencu k boljšemu razumevanju pojma.

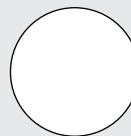
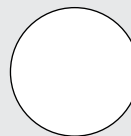
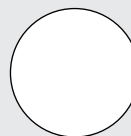
Navedimo primer: Pri matematiki lahko isti pojem predstavimo:

Grafično	Simbolno	Besedni zapis
	$A \in p$	Točka A leži na premici p . ali Točka A je na premici p .

Vsi trije zapisi so pomembni, ker sodijo h konceptualnemu geometrijskemu znanju o premici in točki.

Primer naloge :

1. korak: Pobarvaj polovico kroga.
Predstavi na sliki in zapiši, kolikšen del kroga je pobarvan.
2. korak: Pobarvaj polovico od ostanka kroga.
Predstavi na sliki in zapiši, kolikšen del kroga je pobarvan.
3. korak: Še enkrat ponovi postopek.
Predstavi na sliki in zapiši, kolikšen del kroga je pobarvan po tretjem barvanju.



Predstavljena naloga zahteva predstavitev delov celote grafično: na geometrijskem liku (krogu), simbolno: z zapisom ulomka in z besednim opisom: kar je v navodilu naloge.

Utemeljevanje ((oblaček))

Ob ugotovitvah⁸, da naši učenci slabše utemeljujejo, smo temu področju spremljanja dali poseben poudarek, čeprav bi ga lahko uvrstili k sporočanju. Utemeljevanje je lahko ustno ali pisno. Utemeljujemo odgovore, rešitve.

Pomembno je, da učence navajamo na utemeljevanje že med preostalimi fazami pouka (uvažanje, ponavljanje, utrjevanje). Pri tem smo pozorni na pravilno uporabo matematične terminologije in simbolike. Z utemeljevanjem in dokazovanjem pri učencih razvijamo tudi kritično mišljenje.

Primer naloge :

Reši enačbo: $\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\right) \cdot x = \frac{7}{15}$. Utemelji, zakaj je tvoj rešitev ustrezna.

V predstavljeni nalogi mora učenec najprej rešiti enačbo. Ko enačbo reši, utemelji, zakaj je njegova rešitev ustrezna. To lahko naredi tako, da naredi preizkus in s tem dokaže, da sta leva in desna stran enačbe enaki. Lahko tudi ubesedi svojo utemeljitev. Dopustiti moramo različne poti utemeljevanja, ki jih izberejo učenci.

Postopek ((roka, ki piše))

Področje spremljanja, ki je največkrat preverjano in spremljano, je izvajanje tako rutinskih kot nerutinskih postopkov.

Primer naloge :

Izračunaj vrednost izraza $2,5 - x + 3\frac{1}{2}$, če je $x = \frac{3}{4}$.

V predstavljeni nalogi učenec izkazuje obvladovanje rutinskih postopkov pri izračunavanju vrednosti številskega izraza, v katerem nastopajo decimalna števila in ulomki.

5.2.4 Predstavitev priloge

V naslednjem poglavju so zapisane naloge, ki preverjajo cilje iz petih sklopov, povezanih z ulomki v sedmem razredu:

- racionalna števila,
- računske operacije z ulomki,
- računske operacije in njihove lastnosti,
- izrazi,
- enačbe in neenačbe.

V vse sklope smo smiselno vključevali cilje in vsebine iz sklopa matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami. V prvi stolpec smo zapisali le cilje, ki so zapisani v PUN pri posameznem sklopu, in smiselne cilje iz sklopa matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami.

Naloge so ilustrativne in odražajo načrtovanje in izvajanje pouka. Vsak učitelj mora najprej načrtovati in izvajati pouk tako, da v vse faze pouka sistematično uvaja različna področja spremljanja in rešuje naloge različnih težavnosti.

Z ilustrativnimi primeri nalog različnih težavnosti, ki so prikazane v prilogi, ponazorimo doseganje različnih ciljev in poudarimo novosti in pomembne poudarke PUN.

5.2.5 Vključevanje nalog različnih težavnosti v vse faze pouka

Naloge različnih težavnosti moramo smiselno vključevati v vse faze pouka, ne samo v zaključni fazi pouka: preverjanje in ocenjevanje. Pri ugotavljanju predznanja tovrstne naloge učitelju pomagajo, kaj učenci še (že) znajo in česa ne. Pri usvajanju novih vsebin reševanje takih nalog učitelju odgovori na vprašanje, kako dobro učenci razumejo obravnavano vsebino. Pri ponavljanju in utrjevanju lahko podamo učencu dobro povratno informacijo o tem, kaj se še mora naučiti, kaj že zna, ter hkrati s tem, kje in kako se bo lahko še naučil in zapolnil ugotovljen primanjkljaj znanja.

Literatura in viri

- 1 Žakelj, A., et al. (2011). *Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo*, Dostopno na: http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (3. 11. 2012).
- 2 Žakelj, A. (2012). *Od preverjanja do ocenjevanja znanja*. V: Žakelj, A., Borstner, M. (2012), *Razvijanje in vrednotenje znanja*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 3 Žakelj, A. (2003). *Kako poučevati matematiko? Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 4 Žakelj, A., Magajna, Z. (2003). *Preverjanje in ocenjevanje znanja v devetletni osnovni šoli: matematika*. *Vzgoja in izobraževanje, letnik 34, št. 2, str. 20–27*.
- 5 Magajna Z., Kmetec K., Bone J. (2011). *Delovno gradivo za pripravo regijskih posvetov ob uvajanju posodobljenih učnih načrtov*.
- 6 RIC (2011). *Letno poročilo o izvedbi nacionalnega preverjanja znanja v šolskem letu 2010/2011*. Ljubljana: Državni izpitni center. Dostopno na: http://www.ric.si/preverjanje_znanja/statisticni_podatki/ (8. 11. 2012).

Priloge

Primeri nalog na različnih zahtevnostnih ravneh (dr. Zlatan Magajna, Katja Kmetec, Jerneja Bone):



Priloga 1: Racionalna števila



Priloga 2: Računske operacije z ulomki (s primeri nalog)

Priloga 3: Računske operacije in njihove lastnosti (s primeri nalog)

Priloga 4: Izrazi (s primeri nalog)

Priloga 5: Enačbe in neenačbe (s primeri nalog)

5.3 Primeri nalog na različnih zahtevnostnih ravneh

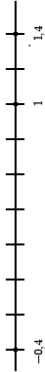
Dr. Zlatan Magajna, Pedagoška fakulteta Ljubljana

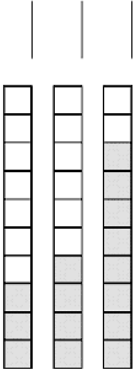
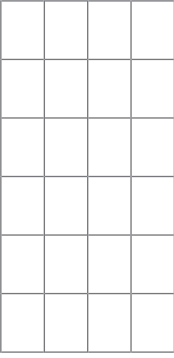
Katja Kmetec, Osnovna šola Brinje Grosuplje

Jerneja Bone, Zavod RS za šolstvo

Sklop: Racionalna števila Vsebina: Razširjanje in krajšanje ulomkov Primerjanje ulomkov ($<$, $>$, $=$) Urejanje ulomkov	Standardi znanja tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja Učenec/učenka: • ima razvite številске predstave in pozna odnose med številskimi množicami; • pozna in uporablja lastnosti številskih množic in računskih zakonov.
Sklop: Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami Vsebina: Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami (odprti, zaprti) Vzorci	• razvije učinkovite bralne strategije za nadaljnje učenje in izobraževanje (sporazumevanje v maternem jeziku); • v skladu z vsebinami osnovnošolske matematike razvije matematično in nematematično terminologijo (sporazumevanje v maternem jeziku); • matematični jezik uporablja pri sporazumevanju; • pri reševanju besedilnih nalog uporablja bralne strategije in besedilno nalogo opiše z matematičnim jezikom; • pri reševanju (besedilnih) problemov kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih; • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja.

Vsebina: Razširjanje in krašanje ulomkov ($<$, $>$, $=$), urejanje ulomkov

Cilji Učenci/učenke:	Minimalni standardi Učenec/učenka:	Učenci pokažejo osnovno matematično znanje.	Učenci izvajajo rutinske postopke in uporabljajo ustrezne strategije reševanja v znanih situacijah.	Učenci uporabljajo ustrezne strategije pri reševanju kompleksnih problemov.
opredelijo pojem ulomka in ga upodobijo na številski premici ali kot del lika;	primerja ulomke po velikosti; ulomek krajša in razširi z danim številom, ulomka razširi na skupni imenovalec;	Naloga:  kateri ulomki so označeni z velikimi črkami? 	Naloga:  (NPZ 2009, naloga 2, vir: RIC) Na številski premici sta prikazani števili $\otimes$ in $\heartsuit$.  Zapiši števili: $\otimes$: _____ $\heartsuit$: _____	Naloga:  Črka B označuje število $1\frac{1}{4}$. Označi s C $1\frac{1}{6}$. Nariši število, ki leži na številskem poltraku natanko med ulomkoma $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$. Pojasni postopek reševanja.
			Naloga:  (NPZ 2010, naloga 2, vir: RIC) Označi in zapiši na številski premici slike števil: 0; 0,8 in $\frac{6}{5}$. 	

Cilji Učenci/učenke:	Minimalni standardi Učenec/učenka:	Učenci pokažejo osnovno matematično znanje.	Učenci izvajajo rutinske postopke in uporabljajo ustrezne strategije reševanja v znanih situacijah.	Učenci uporabljajo ustrezne strategije pri reševanju kompleksnih problemov.
			Naloga: ,  (NPZ 2008, naloga 2, vir: R/C) Pravokotnik je razdeljen na enako velike dele. Na črte ob slikah zapiši z ulomkom, kolikšen del pravokotnika je osenčen. Izbiraš lahko med naslednjimi ulomki: 	
ugotovijo, kateri ulomek je predstavljen z danim grafičnim prikazom;		Naloga: ,  (NPZ 2008, naloga 2, vir: R/C) Pravokotnik je razdeljen na enako velike dele. Na črte ob slikah zapiši z ulomkom, kolikšen del pravokotnika je osenčen. Izbiraš lahko med naslednjimi ulomki: $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{6}{8}, \frac{10}{3}$ 	Naloga: ,  Pobarvaj $\frac{15}{20}$ lika. 	Naloga: , ? Jan je najprej pojedel četrtno čokolade. Naslednji dan je pojedel polovico ostanka in nato še tretjino novega ostanka. Kolikšen del celotne čokolade mu je ostal? Pomagaj si z grafičnim prikazom. Naloga: , ? Miha je pojedel $\frac{1}{3}$ od $\frac{1}{4}$ čokolade. Kolikšen del celotne čokolade je pojedel? Pojasni. Pomagaj si z grafičnim prikazom.

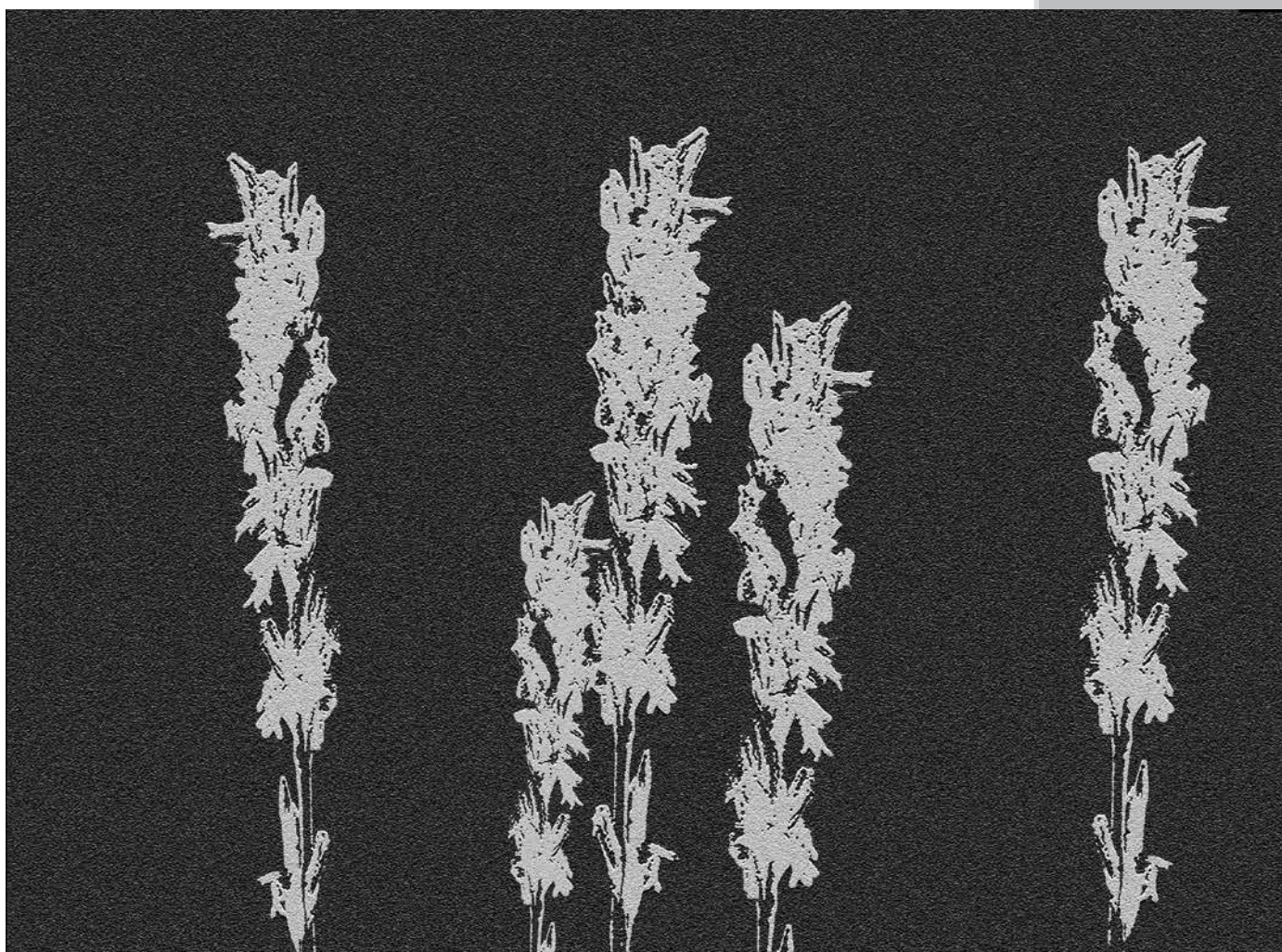
Cilji Učenci/učenke:	Minimalni standardi Učenec/učenka:	Učenci pokažejo osnovno matematično znanje.	Učenci izvajajo rutinske postopke in uporabljajo ustrezne strategije reševanja v znanih situacijah.	Učenci uporabljajo ustrezne strategije pri reševanju kompleksnih problemov.
		Naloga:  Krog razdelimo na enake dele. Kolikšen del lika je osenčen? Zapiši z ulomkom. 		
razširijo ulomek z danim številom oz. razširijo ulomek na zahtevani imenovalec oz. števec; krajšajo ulomek z danim številom oziroma ga okrajšajo;		Naloga:  Krajšaj ulomek $\frac{12}{36}$ z 12. Razširi ulomek $\frac{1}{2}$ s 5. Ulomek $\frac{3}{4}$ razširi na imenovalec 20. Ulomek $\frac{3}{4}$ razširi na števec 21. Vsakokrat pojasni postopek, kako to naredimo. Naloga:  Dan je ulomek $\frac{1}{3}$. Kaj se zgodi z vrednostjo ulomka, če njegov števec in imenovalec pomnožimo s 3? Pojasni.		

Cilji	Minimalni standardi	Učenci pokažejo osnovno matematično znanje.	Učenci izvajajo rutinske postopke in uporabljajo ustrezne strategije reševanja v znanih situacijah.	Učenci uporabljajo ustrezne strategije pri reševanju kompleksnih problemov.
Učenci/učenke: primerjajo ulomke z enakimi in različnimi imenovalci ter jih uredijo po velikosti; danim ulomkom poiščejo najmanjši skupni imenovalec; ugotovijo, med katerima naravnima številoma leži dani ulomek; razčlenijo ulomek na celi del in ulomek, ki je manjši od 1; zapišejo ulomek $\frac{n}{1}$ kot n, ulomek primerjajo s številom 1;	Učenec/učenka: ulomek zapiše kot celi del in ulomek, ki je manjši od ena ter obratno,	Naloga: Razvrsti dana števila po velikosti. Začni z najmanjšim številom. a) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}$ b) 0,7 0,574 0,75 Naloga: Zapiši ulomek, ki je manjši od $\frac{5}{9}$. Naloga: $\frac{15}{11}$ zapiši s celim delom in ulomkom, manjšim od 1.	Naloga: Uloške uređi po velikosti. Začni z najmanjšim. $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{80}{100}, \frac{16}{100}$ Naloga: Dano je zaporedje naravnih števil: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Med katerimi členi zaporedja se nahajajo naslednji ulomki: $\frac{12}{7}, \frac{32}{5}, \frac{18}{5}$. Kateri od teh ulomkov se nahaja med številoma 3 in 4. Utemelji.	Naloga: ? Poišči vsaj pet ulomkov, ki so med ulomkoma $\frac{5}{3}$ in $\frac{5}{7}$. Naloga: ? Za katera števila bo dani ulomek $\frac{32}{x}$ naravno število? Pojasni. Naloga: ? S sklepanjem reši enačbo: $\frac{x+3}{2} = 20$ Pojasni način reševanja.
rešijo odprte in zaprte probleme, razčlenijo problemsko situacijo in postavljajo raziskovalna vprašanja;	reši matematični problem in problem z življenjsko situacijo.	Naloga: Andrej, Blaž in Cene so jedli pice enakih velikosti. Andrej je pojedel $\frac{1}{4}$ pice, Blaž $\frac{3}{16}$ pice, Cene pa $\frac{9}{8}$ pice. Kdo je pojedel največ in kdo najmanj pice? Je kdo od njih pojedel več kot eno pico? Kako to veš?	Naloga: V 9. a so učence vprašali, katere plesne najraje plešejo. Vsak je lahko izbral en ples. Njihove izbire prikazuje diagram spodaj. Angleški valček je izbralo 7 učencev.	Naloga: Podjetje »Vesela matematika« prodaja šolam računalna. Računalna so štirih barv: rdeča, modra, zelena in siva. Da bi ustreglo željam učencev, je podjetje naredilo anketno. Naključno so izbrali 50 učencev in jih vprašali, katero barvo računalna si želijo. Odgovore učencev prikazuje preglednica:

Cilji	Minimalni standardi	Učenci pokažejo osnovno matematično znanje.	Učenci izvajajo rutinske postopke in uporabljajo ustrezne strategije reševanja v znanih situacijah.	Učenci uporabljajo ustrezne strategije pri reševanju kompleksnih problemov.																								
Učenci/učenke:	Učenec/učenka:		Izbrani plesi – delež učencev <table><tr><th>Ples</th><th>Delež (%)</th></tr><tr><td>Angličanski valček</td><td>15</td></tr><tr><td>Dvojčasti valček</td><td>25</td></tr><tr><td>Polka</td><td>15</td></tr><tr><td>Samba</td><td>15</td></tr><tr><td>Suro</td><td>15</td></tr><tr><td>Suro</td><td>15</td></tr></table> Za kateri ples se je odločila četrtnina učencev? Koliko učencev je v 9. a oddelku? Naloga: ?, ⇄ (TIMSS 2003) Učitelj in zdravnik imata vsak po 45 knjig. $\frac{4}{5}$ učiteljevih knjig je romanov in $\frac{2}{3}$ zdravnikovih knjig je romanov. Koliko romanov ima učitelj več kot zdravnik?	Ples	Delež (%)	Angličanski valček	15	Dvojčasti valček	25	Polka	15	Samba	15	Suro	15	Suro	15	<table><tr><th>Barva</th><th>Rdeča</th><th>Modra</th><th>Zelena</th><th>Siva</th></tr><tr><td>Št. uč.</td><td>16</td><td>20</td><td>5</td><td>9</td></tr></table> a) Kolikšen delež učencev je izbral rdečo barvo računal? b) Šola je naročila 400 računal. Koliko modrih računal bo podjetje dostavilo šoli, če upoštevajo želje učencev?	Barva	Rdeča	Modra	Zelena	Siva	Št. uč.	16	20	5	9
Ples	Delež (%)																											
Angličanski valček	15																											
Dvojčasti valček	25																											
Polka	15																											
Samba	15																											
Suro	15																											
Suro	15																											
Barva	Rdeča	Modra	Zelena	Siva																								
Št. uč.	16	20	5	9																								

Cilji	Minimalni standardi	Učenci pokažejo osnovno matematično znanje.	Učenci izvajajo rutinske postopke in uporabljajo ustrezne strategije reševanja v znanih situacijah.	Učenci uporabljajo ustrezne strategije pri reševanju kompleksnih problemov.
Učenci/učenke: raziskujejo in samostojno oblikujejo vzorce; opazujejo in prepoznajo pravilo v vzorcu in vzorec nadaljujejo.	Učenec/učenka:	Naloga:  1. <i>korak:</i> Pobarvaj polovico kroga. Predstavi na sliki in zapiši, kolikšen del kroga je pobarvan. 2. <i>korak:</i> Pobarvaj polovico od ostanka kroga. Predstavi na sliki in zapiši, kolikšen del kroga je pobarvan. 3. <i>korak:</i> Še enkrat ponovi postopek. Predstavi na sliki in zapiši, kolikšen del kroga je pobarvan po tretjem barvanju.	Naloga:  Spodnji trije liki so razdeljeni v majhne med seboj skladne trikotnike. Na vsakem liku je pobarvan natanko 1 trikotnik. lik 1 lik 2 lik 3 Zaporedje nadaljujemo do 6. lika. Kolikšen del lika bo pobarvan? Z besedami opiši, kako dobimo vsak naslednji lik v tem vzorcu.	Naloga:  Spodnji trije liki so razdeljeni v majhne med seboj skladne trikotnike. Na vsakem liku je pobarvan natanko 1 trikotnik. lik 1 lik 2 lik 3 Zaporedje likov nadaljujemo do 50. lika. Opiši pot, po kateri bi določil, kolikšen del 50. lika je pobarvan, ne da bi risal in preštel trikotnike.

Vrednotenje in samovrednotenje znanja pri matematiki



6.1 Spremljanje in samovrednotenje znanja učencev pri matematiki na razredni stopnji

Vesna Vršič, Zavod RS za šolstvo

6.1.1 Alternativni načini preverjanja in ocenjevanja

Primeri prakse na področju preverjanja in ocenjevanja znanja kažejo, da si strokovni delavci prizadevajo, da v učni proces vnašajo tudi alternativne načine preverjanja in ocenjevanja, ki omogočajo učencem dejavno vključevanje. S tem želijo spodbuditi učence k soustvarjanju učnega procesa, razvijati notranjo motivacijo za učenje, povečati lastno odgovornost in odnos do šolskega dela ter znanja.

Ob sodobnem konceptu poučevanja in učenja se spreminjata tudi preverjanje in ocenjevanje. Pri vzgojno-izobraževalnem procesu se sistematično izvajajo spremljanje napredka učencev, evalvacija in samoevalvacija učenja ter vrednotenje in samovrednotenje znanja. Učitelja ne zanimata le količina in kakovost predelane snovi, ampak posameznikov napredek, zato sproti spremljanje, preverjanje in evidentiranje dosežkov posameznega učenca postajajo sestavni del učnega procesa (Pačnik, 2008: 262).

Vrednotenje in samovrednotenje

Učence je treba postopoma vpeljati v proces vrednotenja in samovrednotenja. Vrednotenje pojmuje kot nadpomenko za preverjanje in ocenjevanje. Pri samovrednotenju gre za dejavno vlogo učencev oziroma prevzemanje te vloge. Namen samovrednotenja je izboljšati učenje, motivacijo in na ta način tudi učne dosežke. Pogoj za uspešno samovrednotenje je, da učenci poznajo in razumejo cilje, ki jih morajo z učenjem doseči. S tem se izboljša tudi proces učenja, saj ozavešajo, kaj morajo narediti, da bodo svoje znanje izboljšali (Penca Palčič, 2008: 96). Pri samoocenjevanju mora učenec že vnaprej poznati kriterije, da na podlagi njih presoja o lastnem znanju.

V pedagoški teoriji strokovnjaki ločijo več vrst vrednotenj. V praksi je najbolj zastopano vrednotenje učenja oziroma Assessment of Learning, ki ga izvajamo ob koncu zaključenega sklopa (sumativno preverjanje). Sodobne usmeritve težijo k vrednotenju v podporo učenja oziroma Assessment for Learning, s pomočjo katerega ugotavljamo učenčeva močna in šibka področja, kateri načini učenja učencu najbolj pomagajo pri usvajanju znanja, kako odpraviti vrzeli v znanju itd. Sem uvrščamo diagnostično in formativno preverjanje (Sentočnik, 2012). Namen formativnega preverjanja je vplivati na učence, da bi izboljšali svoje dosežke, omogočiti vpogled v trenutno stanje učenčevega znanja, da usmerjamo učence v procesu učenja, jih spodbujamo in pomagamo, da napredujejo po svojih zmožnostih. Razdevšek Pučko (2004: 127) navaja zapis P. Broadfoot: *»Da bi bilo preverjanje znanja formativno, mora biti pogosto, individualizirano, naravnano na specifične cilje in mora ponujati realno povratno informacijo, ki učence vodi k prizadevanjem za izboljšanje.«* Preverjanje znanja izpolni formativno vlogo šele takrat, ko učencu ponudi kakovostno povratno informacijo, ki ga seznani z doseženim, ga opozori na pomanjkljivosti in mu ponudi pot za odpravo teh pomanjkljivosti (prav tam). Z opredelitvijo kompetenc, zlasti kompetence učenje učenja, pa vse bolj prihaja do izraza še vrednotenje kot sestavni del učenja oziroma Assessment as Learning, kjer se učenci

vključujejo v sodelovanje pri oblikovanju učnih ciljev in kriterijev ter se jim omogoča nadzor nad procesom lastnega učenja (Sentočnik, 2012). V učnem procesu tak način vrednotenja podpirata evalvacija in refleksija. Usmerjanje učencev k refleksiji pomeni spodbujanje razmišljanja o tem, kaj in kako delaš, kaj si delal oziroma kaj si nameraval narediti, kako si se ob tem počutil, kako ocenjuješ svoje dosežke. Učenci tako spoznavajo razliko med procesom in dosežkom (Pačnik, 2008: 264). Pri vrednotenju in samovrednotenju učenci ne presojujejo zgolj usvojenega/doseženega znanja na postavljenih kriterijih, temveč tudi sam proces učenja. Ob tem ozaveščajo lastna močna in šibka področja, odkrivajo vrzeli v znanju in načine lastnega učenja, ki so jih uporabljali in ki so bili zanje najučinkovitejši.

Spremljanje učenčevega napredka

Spremljanje pojmuje kot način zbiranja informacij in uporabe le-teh za ovrednotenje učenčevega napredka ter načrtovanje vzgojno-izobraževalnega procesa (Walsh, 2002: 70). Da bo učitelj v učnem procesu lahko spremljal učence, mora delo učencev organizirati tako, da bodo učenci samostojno izvajali dejavnosti, kjer bodo imeli možnost izkazati tako vsebinska kot procesna znanja, njihov način in odnos do dela, samoiniciativnost, odgovornost do dela itd. Tradicionalno spremljanje temelji na uporabi pisnih nalog, npr. delovnih lističev, sodobne smernice pa uvajajo reševanje avtentičnih nalog, kjer se učenec preizkusi v reševanju problemov, ki se zgledujejo po realističnih izzivih in izhajajo iz konteksta vsakdanjega življenja, ki so učencem blizu in znani. Učitelj ugotovitve spremlja, dokumentira v obliki anekdotskih zapisov, poročila, mape izdelkov učenca (portfolia), fotoalbuma, avdioposnetkov itd. Ob koncu dejavnosti učitelju daje uvid v delo učencev tudi njihovo lastno razmišljanje, zato naj se pouk ne bi končal brez refleksije dela in evalvacije oziroma samoevalvacije. Spremljanje učencev omogoča odkrivanje učencev s posebnimi potrebami in učnimi težavami, ki jim je treba zagotoviti dodatno podporo in prilagoditve, ter nadarjenih učencev, za katere je treba zagotoviti ustrezne pogoje za njihov napredek. Končni namen spremljanja je usposabljanje učencev za samovrednotenje.

6.1.2 Namen procesa vrednotenja in samovrednotenja znanja v praksi

Z aplikativnim primerom želimo učiteljem predstaviti mogočo obliko vrednotenja in samovrednotenja. Učenci v drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju imajo že dovolj izkušenj z različnimi oblikami dela (delo v dvojicah, skupinsko delo, sodelovalno učenje), zmožni so se samoiniciativno organizirati in razdeliti delo, samostojno delati po zapisanih navodilih, vztrajati pri delu daljši čas, biti odgovorni ter kritični oziroma samokritični do lastnega dela in dela drugih. Učitelji vodijo učence skozi učni proces ob različnih dejavnostih, kjer so učenci čim bolj miselno dejavni in si gradijo znanje na lastnih izkušnjah, usvajajo tako osnovna, konceptualna in proceduralna znanja ter rešujejo probleme. Tudi naloge in dejavnosti za preverjanje naj bi bile pripravljene na podoben način.

V nadaljevanju bomo predstavili primer vrednotenja in samovrednotenja ob učnem sklopu Merjenje dolžine, mase in prostornine v četrtem razredu, kjer bi sledili izhodiščnim ciljem: alternativnim načinom preverjanja in ocenjevanja. Pri delu spodbujamo dejavno vključevanje učencev v vrednotenje in samovrednotenje ob presojanju dosežkov glede na zastavljene cilje pouka in kriterije vrednotenja nalog, razvijamo notranjo motivacijo za učenje in ob refleksiji in evalvaciji skušamo povečati odgovornost učencev do šolskega dela in znanja.

Pri vzgojno-izobraževalnem procesu bi sledili naslednjim korakom:

- učenci sodelujejo pri oblikovanju ciljev učnega sklopa merjenje (dolžine, mase in prostornine), ki je nadgradnja vsebine iz prvega vzgojno-izobraževalnega obdobja (ob uporabi strategije VŽN);
- učitelj vodi učence skozi proces učenja ob različnih praktičnih in miselnih dejavnostih, pri čemer učenci iščejo različne poti in strategije do pravilnih rešitev;
- učitelj spremlja delo posameznih učencev in spodbuja dejavno vključevanje učencev v samopresojo procesa izgrajevanja znanja (z opazovanjem, ob razgovoru o načinu njihovega dela in izbire strategij ter o napredku njihovega znanja, z beleženjem ugotovitev);
- učitelj učencem poda sprotno individualno povratno informacijo, kjer jim pove, katera znanja že dobro obvladajo, katera še morajo izpopolniti in kako naj se lotijo dela, da bodo svoje znanje nadgradili oziroma odpravili vrzeli;
- vzgojno-izobraževalni proces učitelj sproti usmerja in prilagaja glede na usvojenost zastavljenih ciljev;
- po vsaki širši vsebini se izvedeta evalvacija in refleksija;
- ob zaključku obravnavanega učnega sklopa učitelj pripravi dejavnosti, s katerimi bo preveril doseganje ciljev in s tem ponudil učencem možnost za samovrednotenje;
- presojo o lastnih dosežkih učenci beležijo na list za samovrednotenje, kjer je ob ciljnih dejavnosti predstavljena skala, na kateri bodo učenci označili svojo presojo o doseganju ciljev za vse tri vsebine (dolžina, masa, prostornina);
- učenci ustno podajo samooceno o doseganju znanja sklopa.

6.1.3 Delo učencev po postajah in samopreverjanje

Za samovrednotenje (samopreverjanje) znanja pripravi učitelj (lahko predlagajo tudi učenci) dejavnosti glede na vse tri vsebine: merjenje dolžine, merjenje mase in merjenje prostornine. Za posamezno vsebino pripravi dejavnosti na postaji, tako da so v razredu oblikovane najmanj tri postaje. Če je v razredu več učencev, je smiselno, da se pripravi tudi več postaj (šest), da se pri delu učenci ne motijo in da ne čakajo na potrebne pripomočke.

Dejavnosti po postajah so razdeljene na naloge in pripravljene tako, da preverjajo enake cilje, vendar ob različnih vsebinah (dolžina, masa, prostornina).

Načrtovani cilji za preverjanje in samovrednotenje so:

Učenec:

- pozna standardne merske enote za merjenje dolžine, mase in prostornine;
- oceni dolžino in maso predmeta ter prostornino tekočin;
- meri z izbranim merskim instrumentom ter meritev izrazi z merskim številom in s standardno mersko enoto za merjenje dolžine, mase in prostornine;
- pretvarja med dvema sosednjima enotama, mnogoimenske količine v enoimenske in obratno;
- primerja količine in jih ureja po velikosti;

- računa s količinami za merjenje dolžine, mase in prostornine;
- razume problemsko situacijo in išče več rešitev matematičnega problema.

Vsaka postaja ima pripravljene tri dejavnosti, ki sledijo (z manjšimi odstopanji) naslednjim znamenjem: postopek izvedbe merjenja in zapis meritve z merskim številom in mersko enoto, pretvarjanje in računanje s količinami, reševanje problemov.

Po posameznih postajah sledijo znanja po naslednjih dejavnostih:

Postaja A – Merjenje dolžine

1. dejavnost: Ocena in merjenje dolžin
2. dejavnost: Poznavanje merskih enot in pretvarjanje
3. dejavnost: Računanje s količinami in reševanje problemske situacije

Postaja B – Merjenje mase

1. dejavnost: Ocena, merjenje mase in računanje s količinami
2. dejavnost: Poznavanje merskih enot, pretvarjanje in računanje s količinami
3. dejavnost: Reševanje problemske situacije

Postaja C – Merjenje prostornine

1. dejavnost: Ocena, merjenje prostornine in računanje s količinami
2. dejavnost: Poznavanje merskih enot, pretvarjanje in računanje s količinami
3. dejavnost: Reševanje problemske situacije

Na vsaki postaji so učencem na voljo:

- pripomočki za merjenje in merilni instrumenti,
- delovni list z navodili za delo in opisi dejavnosti in nalog (za vso skupino),
- učni listi za delo posameznega člana skupine (učenca),
- list za samovrednotenje za posameznega člana skupine (učenca).

Učenci se razdelijo v skupine po štiri. Skupine se dogovorijo za vrstni red dela na posamezni postaji, čas dela skupine na posamezni postaji ni določen. Skupina se na posamezni postaji zadrži tako dolgo, dokler dela ne opravi vsak član skupine. Vsaka skupina določi svojega vodjo, ki ima nalogo, da prebere navodila za reševanje posameznih nalog vsem članom skupine in skrbi za to, da delo na postaji končajo vsi člani njegove skupine. Vsak učenec izvaja posamezne naloge ob svojih primerih in izpolnjuje učni list z nalogami ter list za samovrednotenje.

Po opravljenih dejavnostih na posamezni postaji sledi preverjanje rešitev nalog. Ker naloge dopuščajo izbiro pri izvajanju meritev in spodbujajo, da se meritve izrazijo na različne načine, je priporočljivo, da pri preverjanju rešitev sodeluje tudi učitelj. Učenci si pri preverjanju rešitev pomagajo z delovnim listom rešitev.

V nadaljevanju predstavljamo delovne liste, ki so na voljo učencem po posameznih postajah. Cilji, ki so zapisani ob nalogah, učencem pomagajo pri izpolnjevanju lista za samovrednotenje.

Navodilo za delo na postaji A**Merjenje dolžine**

Pripomočki:

- različni merilni instrumenti za merjenje dolžine: ravnilo s šablono, šiviljski meter, metrska palica ali trak,
- svinčnik,
- predmeti v učilnici: miza, stol, omara, police, vrata, ogledalo,
- šolske potrebščine: delovni zvezek, nalivno pero, torba, zvezek,
- trakovi različnih dolžin (didaktični komplet).

1. dejavnost**Naloga 1:**

Cilj: Oceniti in meriti z izbranim merilnim instrumentom ter meritev izraziti z merskim številom in ustrezno mersko enoto.

- Izberi si štiri predmete ali šolske potrebščine, katerim boš izmeril dolžino, širino, višino ali debelino. Izbrane predmete vpiši v preglednico.
Oceni dolžino, širino, višino ali debelino izbranih predmetov in oceno zapiši v preglednico. Količino izrazi z merskim številom in mersko enoto.
- Izberi si merilni instrument in natančno izmeri dolžino, širino, višino ali debelino izbranih predmetov. Meritve zapiši v preglednico.

Naloga 2:

Cilj: Primerjati in urediti meritve po danem kriteriju.

- Uredi izmerjene dolžine predmetov iz naloge 1 od najdaljše do najkrajše. Ureditve zapiši na učni list.

2. dejavnost**Naloga 1:**

Cilj: Poznati standardne merske enote.

- Zapiši predmete, katerih dolžino (širino ali višino) si izrazil v centimetrih.
- Zapiši merske enote, ki so večje od centimetra, in merske enote, ki so manjše od centimetra.

Naloga 2:

Cilj: Pretvarjati količine.

- V preglednico vpiši meritve predmetov iz naloge 1 v 1. dejavnosti, ki si jih izrazil v centimetrih. Zapisane meritve pretvori v decimetre in milimetre.

Naloga 3:

- a) Pretvori enoimenske količine v mnogoimenske in obratno.

3. dejavnost

Naloga 1:

Cilj: Računati s količinami.

Maja in Martin sta učenca 4. razreda. Maja je visoka 137 cm, Martin pa 1 m 41 cm.

- a) Izmeri in zapiši svojo telesno višino.
- b) Primerjaj svojo telesno višino s telesno višino Maje in Martina. Uredi telesne višine po velikosti. Začni z najvišjo. Zapiši na učni list.
- c) Ugotovi razliko med najvišjo in najnižjo telesno višino Maje, Martina in tebe.

Naloga 2:

Cilj: Rešiti problem z več možnimi rešitvami.

- a) Iz škatle izberi trakove, katerih skupna dolžina je 3 dm. Nariši izbrane trakove in označi njihove dolžine.
- b) Zapiši še vsaj tri možnosti različnih dolžin trakov, katerih skupna dolžina je 3 dm. Rešitve prikaži v obliki računov.

Navodilo za delo na postaji B

Merjenje mase

Pripomočki:

- različni predmeti: lesena kocka, igrače, šolski pripomočki ...
- tehtnice,
- različne uteži,
- embalaža posameznih živil: pralni prašek, kava, riž, sladkor v prahu.

1. dejavnost

Naloga 1:

Cilj: Meriti z izbranim merilnim instrumentom ter meritev izraziti z merskim številom in ustrezno mersko enoto.

- Poišči štiri predmete, katerih masa je večja od lesene kocke. Zapiši jih na učni list.
- Stehtaj vsak izbran predmet. Maso predmeta izrazi z merskim številom in mersko enoto. Maso zapiši v preglednico na učni list.

Naloga 2:

Cilj: Primerjati in urejati meritve po danem kriterij.

- Primerjaj maso predmetov in jih uredi od najlažjega do najtežjega.

Naloga 3:

Cilj: Računati s količinami.

- Stehtaj maso lesene kocke. Meritev zapiši na učni list.
- Ugotovi, za koliko je masa posameznih predmetov večja od mase kocke.

2. dejavnost

Naloga 1:

Cilj: Poznati in ločiti standardne merske enote.

- Zapiši mersko enoto, s katero si izrazil maso predmetov.
- Zapiši vse merske enote za merjenje mase, ki jih poznaš.

Naloga 2:

Cilj: Pretvarjati količine.

- Pretvori maso predmetov, ki si jih tehtal pri nalogi 1 v 1. dejavnosti, v dekagrame.
- Martin je tehtal športne rekvizite. Njihovo maso je prikazal na plakatu. Pretvori maso posameznih športnih rekvizitov.

Cilj: Računati s količinami.

- a) Ugotovi, kolikšna je razlika med najlažjim in najtežjim prikazanim športnim rekvizitom.

3. dejavnost

Naloga 1:

Cilj: Rešiti problemsko nalogo.

Mama je v trgovini kupila vrečko pralnega praška, tri kave, škatlo riža in dva zavoja sladkorja v prahu.

- a) Na embalaži artiklov poišči zapisano količino in jo prepisi v preglednico na učnem listu.
- b) Ugotovi, kolikšna je skupna masa vseh artiklov, ki jih je mama kupila v trgovini.

Navodilo za delo na postaji C**Merjenje tekočin**

Pripomočki:

- pladenj za vsakega člana skupine,
- posode različnih prostornin, napolnjene s tekočino (vodo): kozarci, plastični lončki, stekleničke, dozirne posodice,
- merilni valji (decilitrski) za vsakega člana skupine.

1. dejavnost**Naloga 1:**

Cilj: Oceniti in meriti z izbranim merilnim instrumentom ter meritev izraziti z merskim številom in ustrezno mersko enoto.

- Izberi si pladenj s štirimi posodami, ki so napolnjene z vodo. Oceni količino vode v posamezni posodi. Oceno zapiši v preglednico tako, da boš količino izrazil z merskim številom in mersko enoto.
- Z merilnim valjem natančno izmeri količino vode v posamezni posodi in količino zapiši v preglednico.

Naloga 2:

Cilj: Primerjati in urejati meritve po danem kriteriju.

- Uredi količino vode, dobljene s pomočjo meritev pri nalogi 1, po velikosti od največje do najmanjše prostornine. Ureditev zapiši na učni list.

Naloga 3:

Cilj: Računati s količinami.

- Ugotovi količino vode v vseh posodah skupaj.
- Predstavlja si, da vso vodo zliješ v steklenico, katere prostornina je 3 l. Koliko vode bi manjkalo, da bi bila steklenica polna?

2. dejavnost**Naloga 1:**

Cilj: Poznati in ločiti standardne merske enote.

- Zapiši osnovno mersko enoto za merjenje tekočin.
- Zapiši merske enote, ki so večje od decilitra.
- Zapiši največjo mersko enoto za merjenje tekočin.

Naloga 2:

Cilj: Pretvarjati količine.

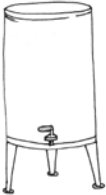
- a) Na polici v trgovini so zloženi različni sokovi. Pretvori izražene količine sokov.

3. dejavnost

Naloga 1:

Cilj: Rešiti problemsko nalogo z več možnimi rešitvami.

Oče je kupil od soseda vinogradnika 230 l vina. Vino želi natočiti v posode različnih prostornin. Spodnja preglednica prikazuje število posameznih posod in njihovo prostornino.

Število posod	1	1	2	2	3	10
Posode						
Prostornina	1 hl	50 l	25 l	15 l	10 l	10 dl

Poišči vsaj tri različne načine uporabe posod, v katere bi lahko oče prelil vso količino vina. Možne rešitve zapiši v obliki računov na učni list.

6.1.4 Samovrednotenje

Učenci ob reševanju nalog sproti izpolnjujejo list za samovrednotenje, na katerem so zapisani cilji, ki jih preverjamo. Ob ciljih so zapisane vsebine (dolžina, masa, prostornina) in prikazana skala, na kateri učenci označijo svojo presojo o doseganju cilja.

Cilji so zapisani enako kot na delovnih listih na posamezni postaji, vendar ne vedno po določenem vrstnem redu.

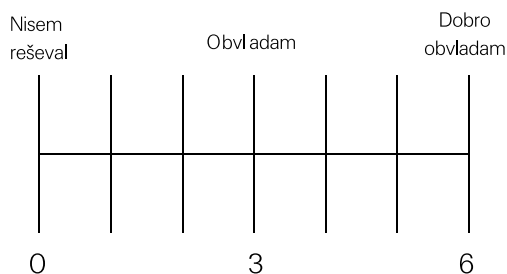
Na listu za samovrednotenje so zapisani naslednji cilji:

- oceniti in meriti z izbranim merilnim instrumentom ter meritev izraziti z merskim številom in ustrezno mersko enoto,
- primerjati in urediti meritve po danem kriteriju,
- poznati in ločiti standardne merske enote,
- pretvarjati količine,

- računati s količinami,
- rešiti problemsko nalogo z več možnimi rešitvami.

Glede na obliko zapisa odstopata prvi in zadnji cilj pri vsebini masa, kjer učenci mase ne ocenjujejo in ne rešujejo problema z več možnimi rešitvami, temveč rešijo problem z eno ustrezno rešitvijo.

Svojo presojo o doseganju posameznega cilja učenci označijo na lestvici, nato preverijo rešitve in ob koncu dejavnosti podajo refleksijo o svoji samooceni. Na lestvici je kot prvi mejnik (0) označeno kot Nisem reševal, osrednji mejnik (3) je označen kot Obvladam in zadnji mejnik (6) kot Dobro obvladam.



Učitelj lahko učencem še podrobneje opiše posamezne mejnike na lestvici ali pa interpretacijo posameznih mejnikov prepusti učencem.

Možna interpretacija mejnikov na lestvici:

- 0** – nisem reševal, saj mi je naloga pretežka,
- 1** – sem se lotil reševanja, vendar nisem rešil naloge do konca,
- 2** – sem se lotil reševanja, vendar po napačni poti,
- 3** – obvladam postopek reševanja, vendar naredim še več napak (skoraj polovico),
- 4** – obvladam postopek reševanja, vendar naredim posamezno napako (manj kot četrtino),
- 5** – obvladam postopek reševanja in pridem do pravih rešitev,
- 6** – obvladam postopek reševanja in znam poiskati več pravih rešitev naloge.

6.1.5 Sklep

Predstavljen primer samovrednotenja bo dosegel svoj cilj, če bo pouk naravnano tako, da bo učencem dana možnost, da sami gradijo svoje znanje ob izkušenskem učenju, če bo učitelj poudarjal pomen obvladovanja postopka reševanja in iskanja različnih poti do rešitev, in ne zgolj pravilne rešitve. Za praktično izvajanje dejavnosti (meritev) mora učitelj načrtovati več časa in tudi pouk v strnjeni obliki (blok ure). Učence mora vključevati v soustvarjanje procesa, ponuditi jim mora možnost diferenciranega dela in se z njimi pogovarjati o tem, kaj počnejo in zakaj počnejo to na takšen način. Le tako lahko učitelj spozna razmišljanja svojih učencev in jih usmerja pri učenju.

Literatura in viri

- 1 Marentič Požarnik, B. (2004). *Kako bolje uravnnavati mogočen vpliv preverjanja in ocenjevanja*. *Sodobna pedagogika*, let. 55, št. 1, str. 8–16.
- 2 Pačnik, A. (2008). *Spodbujanje učencev prve triade k samovrednotenju in samo-ocenjevanju*. *Sodobna pedagogika*, posebna izdaja, str. 260–271.
- 3 Penca Palčič, M. (2008). *Pouk po centrih dejavnosti*. *Metodički obzornik*, št. 3, str. 91–103. Dostopno na: http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=40733 (4. 11. 2012).
- 4 Razdevšek Pučko, C. (2004). *Formativno preverjanje znanja in vloga povratne informacije*. *Sodobna pedagogika*, let. 55, št. 1, str. 126–140.
- 5 Sentočnik, S. (2012). *Slovensko-angleški pojmovnik na temo vrednotenje*. *Interno gradivo*.
- 6 Šteh, B. (2012). *Stari – novi izzivi preverjanja in ocenjevanja znanja*. V: Šteh, B. (2012), *Preverjanje in ocenjevanje znanja ter vrednotenje dosežkov v vzgoji in izobraževanju*. Zbornik, str. 20–27. Ljubljana: Filozofska fakulteta, Univerza v Ljubljani. Dostopno na: [http://www.pedagogika-andragogika.com/files/file/PAD12/zbornik-pad12\(1\).pdf](http://www.pedagogika-andragogika.com/files/file/PAD12/zbornik-pad12(1).pdf) (10. 11. 2012).
- 7 Žakelj, A., et al. (2011). *Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt*. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (15. 10. 2012).
- 8 Walsh, K. B. (2002). *Na učenca osredotočena metodologija dela v 1. razredu osnovne šole (priredba Tatjana Vonta)*. Ljubljana: Pedagoški inštitut, razvojno-raziskovalni center pedagoških iniciativ Korak za korakom.

Priloge



- Učni list 1: Postaja A – Merjenje dolžin
- Učni list 2: Postaja B – Merjenje mase
- Učni list 3: Postaja C – Merjenje tekočin
- Priloga 4: Samovrednotenje

6.2 Vrednotenje in samovrednotenje znanja pri matematiki

Mag. Mojca Suban, Zavod RS za šolstvo

6.2.1 Uvod

Pri učenju in poučevanju je treba za uspešnost tega procesa posebno pozornost nameniti ugotavljanju in vrednotenju znanja učenca in spremljanju njegovega napredka. Pomemben del tega zajameta preverjanje in ocenjevanje, pri čemer upoštevamo, da je »vrednotenje nadpomenka preverjanju in ocenjevanju znanja, namenjeno pa je presoji značilnosti in kakovosti procesa in produkta učenja in poučevanja. Če posameznik ali institucija vrednoti lasten proces učenja ali poučevanja, govorimo o samovrednotenju.« (Sentočnik, 2012)

Preverjanje in ocenjevanje imata pomembno vlogo pri tem, kako se učenci učijo in kakšno znanje pridobivajo, ter vpliva tudi na učitelje in njihov način poučevanja (Rutar Ilc, 2000). Učinkovito in pravično preverjanje in ocenjevanje znanja bistveno pripomore k trudu za uspešno, učinkovito in otroku naklonjeno šolo (Bucik, 2000).

Strmčnik (2001) navaja, da se s »preverjanjem na podlagi povratnih informacij, pridobljenih po različnih poteh, ugotavlja, ali so učenci dojeli nove učne cilje, in če jih niso, zakaj ne, in sicer zato, da bi se te vrzeli in vzroki takoj ali vsaj čim prej odpravili.«

V teoriji in praksi je pri matematiki prisotnih več različnih načinov za spremljanje in vrednotenje znanja, ki ga je učenec osvojil. Učni načrt za matematiko (2008) za ugotavljanje znanja poleg uveljavljenih oblik (npr. pisne, naloge, ustno spraševanje) predvideva tudi druge oblike: konkretno-miselne dejavnosti, predstavitev seminarskih in projektnih nalog, statistična in matematična raziskava, spremljanje domačih nalog ali vodenje mape učenca (portfolio).

Pri matematiki je največkrat znanje učencev ugotavljajo skozi pisne oblike preverjanja in ocenjevanja, manj je ustnega spraševanja, še manj drugih, prej naštetih oblik. S premišljeno izbiro kombinacije oblike spremljanja učitelj in učenec pripomoreta k učinkovitejšemu učenju in poučevanju.

6.2.2 Kaj pokaže TIMSS 2011?

Zanimive so nekatere ugotovitve iz mednarodne raziskave TIMSS 2011, ki se nanašajo na okoliščine pridobivanja matematičnega znanja in dejavnike, ki na znanje lahko vplivajo. Učitelji so med drugim vprašali, kako pogosto ocenjujejo znanje s preizkusi (osmi razred). Pokazalo se je, da je Slovenija med 42 državami v izjemnem položaju (Japelj Pavešić, Svetlik, Kozina, 2012): učitelji so odgovorili, da 88 % učencev preizkus znanja opravi le nekajkrat na leto, s tem pa so smo se uvrstili popolnoma na dno lestvice po obsegu ocenjevanja znanja (države na lestvici so urejene po deležih učencev, ki opravljajo preizkus znanja vsaj enkrat na 14 dni). Tudi na Finskem in Švedskem imajo majhen delež osmošolcev, ki opravljajo preizkuse znanja na 14 dni, vendar jih več opravlja preizkuse enkrat na mesec. V državah, ki so se uvrstile na vrh lestvice, preberemo, da enkrat na 14 dni opravi preizkus 98 % učencev na Tajvanu, 97 % v Ruski federaciji, 88 % v Ukrajini itn. (Japelj Pavešić, Svetlik, Kozina, 2012: 185). Ni zaslediti,

da bi se znotraj raziskave proučevala korelacija med pogostostjo opravljanja preizkusov znanja in matematičnimi dosežki v raziskavi, zato smo iz radovednosti pogledali rezultate držav z vrha omenjene lestvice. Preberemo, da je Tajvan dosegel tretje mesto s 609 točkami, Ruska federacija šesto mesto s 539 točkami, Ukrajina 20. mesto s 479 točkami itn. (Prav tam, str. 25). Brez podajanja prenatrjenih črno-belih sodb naj tu sklenemo z naslednjo mislijo: argument, da so (delne) ocene dober mehanizem za zagotavljanje sprotnega učenja, je šibak; kakovostno učenje se zagotavlja z aktivnimi oblikami in metodami dela (Rutar Ilc, 2003), prepleteno pa naj bo s skrbno načrtovanim in strateško umeščenim preverjanjem in ocenjevanjem, vključujoč tudi samovrednotenje.

Preberemo lahko tudi to (Japelj Pavešić, Svetlik, Kozina, 2012), da v preizkuse znanja naši učitelji niso vključili ustnega ocenjevanja znanja, pri nas tradicionalne oblike ocenjevanja, druge pa manj ali sploh neznane. V večini držav je ustno spraševanje neformalno, v skupni razpravi v razredu in prispeva k učiteljevi strokovni oceni učenčevega napredka. Naši učitelji so še izpostavili, da jim ustno spraševanje vzame veliko časa in da je obseg preverjanja snovi precej velik zaradi manjše frekvence ocenjevanja posameznega učenca.

6.2.3 Samovrednotenje

Spremljanje učenčevega znanja (pri čemer tu znanje pojmuje v najširšem pomenu in zdaleč presega ozko omejevanje na vsebino) je mogoče izvajati na različne načine in je tudi v funkciji izboljševanja poučevanja. Učenčevo znanje spremlja in ugotavlja učitelj, koristno pa je, da ga vrednoti tudi učenec sam. Omeniti je treba tudi obliko vrstniškega spremljanja. Komljanec (2009) poudarja, da ima učenec boljše priložnosti za raziskovanje in prilagajanje ob (so)vodenju z bogatimi povratnimi informacijami, ki jih prejema od staršev, učiteljev, sošolcev in drugih virov iz okolja ter tako ob podpori samostojno uspešno usmerja lastno učenje. Ko učenec o svojem znanju razmišlja sam, se odgovornost za grajenje lastnega znanja krepi in prenaša nanj.

Samovrednotenje lahko izvajamo v obliki vprašanj (vprašalniki), ki se razlikujejo v stopnji splošnosti. Navajamo nekaj primerov.

Žakelj (2003) predlaga, da učenci lahko po koncu učnega sklopa, pri preverjanju, pri raziskovalnih nalogah ... svoje delo ovrednotijo tako, da napišejo kratko poročilo o poteku dela.

Navajamo primer evalvacijskega lista pri reševanju odprtih primerov (Žakelj, 2003):

Kratek zapis (opis, izveček, povzetek rezultatov):

Kaj sem se pri reševanju naučil/-a?

Kje sem bil najuspešnejši/-a?

Česa nisem uspel/-a narediti?

Vzrok za težave pri raziskovanju problema (npr. problem je bil prezahteven, nisem dobil/-a potrebnih podatkov, nedostopnost virov, težave pri anketiranju ...).

Kaj moram še izboljšati?

Pri raziskovanju podobnih problemov je smiselno delati v skupini, v parih, individualno, ker...

V nadaljevanju opisujemo primer samovrednotenja učencev, ki je rezultiral v oceno lastnega znanja, zato lahko govorimo o samoocenjevanju. Po ustrezni pripravi (uporaba širokega spektra učnih oblik in metod, zagotavljanje kakovostne in takojšnje povratne informacije, navajanje na samoocenjevanje) so se učenci šestega razreda samoocenili po koncu ustnega spraševanja (Ilovar, 2008). V zapisanih refleksijah samoocenjevanja učencev je učiteljica zapisala, da so učenci ugotovili: »Samoocenjevanje jim omogoča realen pogled na lastno znanje in napredek, zagotavlja lastno prepoznavanje močnih in šibkih področij znanja ter jih usmerja k razmišljanju o načinu, s katerimi bi svoja šibka področja lahko nadgradili in s tem neposredno izboljšali tudi svoje rezultate« (Ilovar, 2008). Obenem učiteljica še ugotavlja, da učenci, ki jim samoocenjevanje ni bilo všeč, niso pripravljeni sprejeti odgovornosti za grajenje svojega znanja in iščejo krivdo v krivičnem ocenjevanju, različni težavnosti nalog ...

Učenec lahko vrednoti, v kolikšnem obsegu in globini je usvojil predvidene učne cilje. Ob tem mora razumeti, kaj je pod posameznim ciljem razumljeno. Učencu lahko ponudimo v izpolnjevanje preprosto preglednico, ki vsebuje tristopenjsko lestvico:

Opis učnega cilja	Moje vrednotenje		
	Znam	Delno znam	Ne znam
Cilj			

Za bolj natančno preverjanje ciljev je lahko v preglednici poleg cilja tudi konkretna naloga, ki izhaja iz obravnavanega cilja. Če cilje opremimo z nalogami, je treba posebno pozornost nameniti težavnosti naloge. Nalog naj bo več z različno težavnostjo, razlikujejo naj se po svoji kompleksnosti in taksonomski stopnji.

Opis učnega cilja	Naloga	Moje vrednotenje		
		Znam	Delno znam	Ne znam
Cilj	Naloga			
	Naloga			

Preglednica naj vsebuje tudi prostor za odgovore na vprašanja, npr:

- *Kaj znam zelo dobro?*
- *Kje so moja šibka področja? Česa še ne znam?*
- *Kako se bom naučil tisto, česar še ne znam? Koga bom zaprosil za pomoč? (Vprašal bom učitelja, sošolca, starše, sam ...)*
- *Katere vire bom uporabil? (učbenik, moji zapiski, delovni zvezek, zapiski sošolca, gradiva ...)*
- *Do kdaj se bom naučil, česar ne znam?*

Vprašanja so v pomoč pri izdelavi individualnega načrta učenca za odpravo težav in za dvig kakovosti njegovega znanja s poudarkom na razumevanju.

V nadaljevanju predstavljamo primer preglednice za učni cilj Učenci/učenke določijo delitelje števila.

Opis učnega cilja	Naloga	Moje vrednotenje		
		Znam	Delno znam	Ne znam
Učenci/učenke določijo delitelje števila.	Zapiši, kdaj je število b delitelj števila a .			
	Zapiši delitelje števila 24.			
	Na paradi je sodelovalo več dečkov in več deklic. Vsak otrok je nosil enako število balonov. Skupno število balonov je bilo 30. Razišči, koliko dečkov in koliko deklic bi lahko sodelovalo na paradi.			

Samovrednotenje lahko poteka tudi tako, da učenec pod posameznim ciljem vpiše nalogo, za katero je mnenja, da spada pod konkretni cilj. Nalogo lahko najde v učbeniku, delovnem zvezku, zbirki vaj ali drugem gradivu (vpiše stran in zaporedno številko naloge), lahko pa nalogo sestavi sam. Tudi v tem primeru je smiselno obdržati rubriko Moje vrednotenje, saj učenec lahko vpiše naloge, ki jih ne zna rešiti in mu bodo izziv.

Opis učnega cilja	Naloga, ki po mojem mnenju izhaja iz cilja	Moje vrednotenje		
		Znam	Delno znam	Ne znam
Cilj	Naloga			
	Naloga			

V tem primeru so zapisane naloge tudi v informacijo učitelju, kakšne so predstave in pričakovanja učenca o posameznem cilju. Skupaj z učencem učitelj pregleda odgovore v preglednici in se z učencem pogovori.

Poudariti je treba, da so naloge velikokrat take, da se navezujejo na več različnih ciljev.

6.2.4 Samoregulacija in samovrednotenje s psihološkega vidika

Samoregulacijsko učenje je oblika učenja, ki omogoča razvoj kompetence učenje učenja (Pečjak, 2008). Pri tem gre za mišljenje, čustva in vedenje posameznika, ki so sistematično usmerjeni k doseganju ciljev (Zimmerman, Schunk, 1994, v Pečjak, 2008). Pomembna faza pri procesu samoregulacije je samorefleksija, ki velikokrat sproži potrebo po spremembi oziroma brez te faze je manj verjetno, da se zgodi uvid v potrebo po spremembi. Razlikujemo štiri vrste samoreflektivnih procesov: samovrednotenje, atribucija, lastne reakcije in prilagodljivost (Tomec, Pečjak, Peklaj, 2006).

Za uspešno in učinkovito izvajanje samovrednotenja kot dela samoregulacijskih procesov učenja se zastavlja vprašanje o starosti. Samoregulacija se ne razvije samodejno s starostjo in tudi raziskave o odnosu med samoregulacijo in starostjo prihajajo do različnih izsledkov: nekatere raziskave kažejo, da z razvojem učenci postajajo vse bolj strateški in sposobni in da so starejši učenci učinkovitejši pri samoregulaciji učenja, posamezne študije pa kažejo, da je samoregulativno učenje v večji meri izraženo pri mlajših kot pri starejših mladostnikih (Tomec,

Pečjak, Peklaj, 2006). Poudariti je treba, da je proces razvoja samoregulacijskih veščin dolgotrajen in da nanj vplivajo in ga usmerjajo tako učitelji, starši, vrstniki kot učenec sam.

Motivacija se omenja kot pomemben del procesov samoregulativnega učenja. Povezana je s poznavanjem lastnih strategij motivacije, prepričanju o lastni učinkovitosti, cilji in uspešnostjo (Peklaj, 2000). Da je uspešnost učenja v veliki meri povezana z motivacijo do učenja, slikovito opiše srednješolec: »... Če nisi zbran, naslednjo uro ne moreš vedeti, za kaj gre, zato spet nisi pozoren in spet ne razumeš. Neha te zanimati. Nastane začaran krog nezanimanja in neznanja, iz katerega ne zmoreš več drugače, kot da učitelja prosiš za ponovno razlago od začetka.« (Japelj Pavešič, 2012)

6.2.5 Sklep

Spremljanje znanja posameznega učenca je pomemben proces, ki se odvija v vseh fazah učnega procesa in na različne načine. Učitelj izbere poleg predpisanih oblik (preverjanja in ocenjevanja) po svoji presoji tudi drugačne načine ugotavljanja znanja, vse zato, da bi izboljšali kakovost znanja ter kakovost učenja in poučevanja. Samovrednotenje znanja je ena od oblik, ki poleg svoje prvotne funkcije prispeva tudi k oblikovanju in prevzemanju odgovornosti za lastno znanje učenca ter oblikovanju lastne učne poti.

Literatura in viri

- 1 Bucik, V. (2000). *Zunanji preizkusi znanja, sestavljeni in uporabljeni po standardnih postopkih. Vzgoja in izobraževanje*, 2–3, 31. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 2 Ilovar, T. (2008). *Samoocenjevanje znanja. Didaktika ocenjevanja znanja. Zbornik 2. Mednarodnega posveta v Celju*, str. 139. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 3 Japelj Pavešič, B., Svetlik, K., Kozina, A. (2012): *Znanje matematike in naravoslovja med osnovnošolci v Sloveniji in po svetu. Izsledki raziskave TIMSS 2011*. Ljubljana: Pedagoški inštitut.
- 4 Komljanc, N. (2009). *Formativno spremljanje učenja. Didaktika ocenjevanja znanja. Zbornik 2. Mednarodnega posveta v Celju*, str. 8. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 5 Pečjak, S. (2008). *Pogled na kompetenco učenje učenja: razvoj učne samoregulacije. Gradivo seminarja Razvoj kompetence učenje učenja*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 6 Peklaj, C. (2000). *Samoregulativni mehanizmi pri učenju. Sodobna pedagogika*, 51/117, št. 3.
- 7 Rutar Ilc, Z. (2003). *Pristopi k poučevanju, preverjanju in ocenjevanju. K novi kulturi pouka*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 8 Rutar Ilc, Z. (2000). *Izhodišča nove kulture preverjanja znanja. Vzgoja in izobraževanje*, 2–3, 31. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- 9 Sentočnik, S. (2012). *Mali pojmovnik preverjanja in ocenjevanja*. V: Rutar Ilc, Z. (ur.) (2012), *Ugotavljanje kompleksnih dosežkov*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

- 10 *Strmčnik, F. (2001). Didaktika. Osrednje teoretične teme. Ljubljana: Znanstveni inštitut Filozofske fakultete.*
- 11 *Tomec, E., Pečjak, S., Peklaj, C. (2006). Kognitivni in metakognitivni procesi pri samoregulaciji učenja. Psihološka obzorja. Ljubljana: Društvo psihologov Slovenije.*
- 12 *Žakelj, A. (2003). Kako poučevati matematiko. Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.*
- 13 *Žakelj, A., et al. (2011). Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (10. 10. 2012).*

6.3 Primeri preverjanja s samovrednotenjem

6.3.1 Naravna števila do milijona

Metka Flisar, Osnovna šola Tišina

Avtor	Metka Flisar Koncept sooblikovala Vesna Vršič, višja svetovalka za razredni pouk
Šola	Osnovna šola Tišina
Učna tema	Aritmetika in algebra
Učni sklop Vsebina	Naravna števila Naravna števila do milijona
Razred	5.
Potreben čas za izpeljavo	60 minut
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: - rešujejo nerutinske naloge in preverijo razumevanje ciljev vsebin obravnavanega učnega sklopa, - dobijo vpogled v lastno znanje (napredek, vrzeli) in ustreznost presoje lastnega znanja, - navajajo se na samoregulacijo učenja, - pišejo in berejo števila do milijona, - razlikujejo desetiške enote, - urejajo naravna števila do milijona, - števila zaokrožijo na desetice, stotice, tisočice, desetisočice, stotisočice, - na številski premici predstavijo naravna števila, - opredelijo predhodnik in naslednik števila, - poznajo in razlikujejo liha in soda števila, - nadaljujejo in oblikujejo zaporedja naravnih števil.
Standardi	<i>Standardi znanja</i> Učenec/učenka: - pozna lastnosti in odnose med naravnimi števili in jih uporablja v danih situacijah, - smiselno zaokroži število. <i>Minimalni standardi</i> - šteje, bere, zapiše in primerja števila v množici naravnih števil do milijona.
Oblike in metode dela	- frontalna individualna
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	- delovni listi A, B, C, - učni list A, B, C, - list za samovrednotenje, - Power Point

Potrebno predznanje	• pozna zakonitosti naravnih števil do 10 000
Dejavnosti učencev	• reševanje nalog na učnem listu, • samovrednotenje
Faze učnega procesa	1. Uvodni del 2. Navodila za individualno delo 3. Preverjanje s samovrednotenjem 4. Analiza preverjanja in samovrednotenja
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Učenci so z veliko motiviranostjo reševali naloge in v večini primerov zelo realno ocenili svoje znanje. Posebnih težav z vpisovanjem v preglednico za samovrednotenje niso imeli, saj smo v uvodnem delu ure temeljito razjasnili stopnje, ki označujejo raven znanja. Naloge so se jim zdele zelo zanimive, saj so bile drugače zasnovane, kot so jih bili vajeni pri obravnavi učne snovi in utrjevanju.
Opombe, dodatna opažanja, posebnosti	Izkazalo se je, da učenci radi rešujejo nerutinske naloge, saj so jim nov izziv. Tudi samovrednotenje je uspešen način spodbude in hkrati pokazatelj učencem, da učitelji zaupamo v njihovo presojo in jim damo možnost, da sami vrednotijo lastno znanje.
Prilagoditve za učence z učnimi težavami*	• številski trak, • pozicijsko računalno, • opomnik (desetiške enote)

Opis dejavnosti

Uvodni del

V uvodnem delu so učenci razmišljali, kaj vse so se naučili o številih do milijona.

Na vprašanje, kaj naj bi znali o številih do milijona, so učenci povedali, da jih moramo znati brati, zapisovati, določiti predhodnike, naslednike, zaokroževati ... Tako so že v uvodnem delu ustno oblikovali cilje (znanja), ki smo jih med uro preverili.

Učencem sem povedala, da bomo to uro preverjali raven usvojenega znanja malce drugače, saj bodo svoje znanje tudi samovrednotili.

Navodilo za delo

Učencem sem najprej predstavila delovne liste A, B in C z zapisano matematično situacijo. Matematične situacije se nanašajo na števila do milijona in se med seboj razlikujejo po težavnosti.

Na delovnem listu A je bila predstavljena matematična situacija – zapis števil na tri načine: z enotskimi kockami, na pozicijskem računalu in kot zapis z desetiškimi enotami. Na delovnem listu B je bila matematična situacija predstavljena s pomočjo številskega traku, na katerem so bila določena tri števila, označena s simboli (♥, ☺, ✨). Na enak način je bila predstavljena tudi matematična situacija na delovnem listu C, pri katerem so bila določena števila označena s črkami A, B in C.

Na podlagi matematičnih situacij so bile oblikovane naloge na učnih listih A, B in C.

Naloge so bile manj rutinske in drugače zasnovane, kot so jih bili vajeni reševati učenci, zato smo več pozornosti namenili zapisu in navodilom reševanja.

Posebej temeljito smo analizirali list za samovrednotenje, na katerem je bila prikazana preglednica.

V prvem stolpcu so bila zapisana znanja, ki jih določeno vprašanje ali naloga na učnem listu preverja. V naslednjih treh stolpcih so bile opisane stopnje znanja. Učencem je bila predstavljena tristopenjska lestvica:

- a) obvladam in sem prepričan o pravilnosti rešitve,
- b) obvladam, vendar se pri reševanju še obotavljam,
- c) ne obvladam, moram še vaditi.

Ker so bili učencem ponujeni trije delovni listi (A, B in C), je bil k vsaki stopnji prirejen stolpec za posamezni delovni list.

Učence sem nato spodbudila, da se glede na predstavljene matematične situacije in naloge sami odločijo, kateri učni list bodo najprej reševali. Želeno je, da poskušajo uspešno rešiti vse učne liste. Čas reševanja smo omejili na 40 minut.

Osrednji del

Učenci so individualno reševali naloge in sproti dopolnjevali list za samovrednotenje. Po izteku časa za reševanje je sledilo preverjanje pravilnosti rešenih nalog. Pravilnost reševanja so učenci preverili s pomočjo danih rešitev, zapisanih na posebnem listu z rešitvami. Na podlagi teh preverjenih rešitev so na listu za samovrednotenje presodili, ali je bila njihova presoja lastnega znanja ustrezna ali ne. Učenci so tako dobili povratno informacijo o uspešnosti reševanja in ustreznost presoje o lastnem znanju.

Zaključni del

Opravili smo vrednotenje dela in refleksijo.

Vsak učenec je povedal, koliko delovnih listov je reševal, kateri vrstni red je izbral, kako je bil uspešen pri reševanju in kako je ovrednotil svoje znanje. Učno boljši učenci, ki so za prvo izhodiščno situacijo izbrali delovni list C, so povedali, da jim višja težavnostna stopnja pomeni izziv in hkrati dokazovanje lastnih sposobnosti. Naloge so rešili brez posebnih težav, zato so se lotili še drugih dveh delovnih listov. Preostali učenci so začeli reševati naloge na učnem listu A, dva učenca sta najprej reševala naloge na učnem listu B. Trije učenci so ob predvidenem času rešili vse tri učne liste, samo en učenec pa enega. Večina učencev je bila pri reševanju nalog zelo uspešna, kar se je pokazalo pri pregledu pravilnosti rešitev.

Ob analizi dosežkov se je pokazalo, da je bil zapis ciljev (znanja) ob posamezni nalogi na učnem listu pozitivna odločitev, ki je prinesla dodano vrednost pri izražanju učencev. Učenci so ob poročanju in predstavitvi uspešnosti reševanja povedali, da so naredili napako pri zaokroževanju števil, pri določanju sodih in lihih števil, pri zapisu števila z besedo ..., in ne, da so napačno rešili drugo nalogo, četrto ali peto, kar je bilo običajno pri evalvaciji. To je potrditev, da takšna

oblika zapisa znanj omogoča, da učenci posredno usvajajo matematične pojme, uporabljajo matematično terminologijo in ozaveščajo pomen matematičnih vsebin.

Posebno pozornost sem namenila učencem, ki so napačno prebrali in zapisali število, ki je bilo predstavljeno kot izhodišče oziroma matematična situacija – število. Z njimi sem individualno pregledala vse njihove rešitve. Ugotovili smo, da učenec npr. zna določiti predhodnika in naslednika. Ker pa je napačno razbral število, rešitev ni ustrezala predstavljenim rešitvam, ki so jim bile ponujene na posebnem listu z rešitvami. Učenec je tako dobil informacijo, da obvlada določen matematični proces in da je njegova rešitev (glede na njegov zapis števila) naloge pravilna in da obvlada določeno znanje.

V fazi evalvacije dela so učenci izrazili posebno zadovoljstvo nad načinom samovrednotenja. Po rešitvi določene naloge so namreč morali presoditi o doseganju znanja ob posamezni nalogi. Ta izkušnja je bila zanje nekaj novega, zanimivega, drugačnega.

Večini učencev so bile naloge zelo zanimive, za nekatere bolj, za druge manj zahtevne. Izpostavljeno je bilo, da so jim bile najbolj všeč zato, ker so drugače zasnovane, kot so jih vajeni iz učbenikov in delovnih zvezkov.

Literatura in viri

- 1 Cotič, M. (2002). *Svet matematičnih čudes 5, učbenik in delovni zvezek*. Ljubljana: DZS.
- 2 Žakelj, A., et al. (2011). *Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt*. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljene_UN/UN_matematika.pdf (2. 2. 2012).

Priloge



Priloga 1: Predstavitev delovnih listov A, B, C

Priloga 2: Učni list A

Priloga 3: Učni list B

Priloga 4: Učni list C

Priloga 5: List za samovrednotenje

Priloga 6: Rešitve učnih listov

6.3.2 Trikotnik, štirikotnik, večkotnik – sprotno preverjanje s samovrednotenjem

Metka Flisar, Osnovna šola Tišina

Avtor	Metka Flisar, prof. razrednega pouka Koncept sooblikovala Vesna Vrščič, višja svetovalka za razredni pouk
Šola	Osnovna šola Tišina
Učna tema	Geometrija in merjenje
Učni sklop Vsebina	Liki in telesa Trikotnik, štirikotnik, večkotnik
Razred	5.
Potreben čas za izpeljavo	45 minut
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • rešujejo nerutinske naloge in preverijo razumevanje ciljev vsebin obravnavanega učnega sklopa, • dobijo vpogled v lastno znanje (napredek, vrzeli) in ustreznost presoje lastnega znanja, • navajajo se na samoregulacijo učenja, • razlikujejo like ter opišejo njihove lastnosti, • opišejo, označijo in poimenujejo oglišča ter stranice likov (trikotnik, štirikotnik, večkotnik), • narišejo pravokotnik in kvadrat z upoštevanjem medsebojne lege stranic in skladnosti daljic, • opredelijo obseg lika, • izmerijo in izračunajo obseg lika (brez uporabe formul) kot vsoto dolžin stranic.
Standardi	<i>Standardi znanja</i> • pozna in riše geometrijske elemente, jih imenuje in zapiše s simboli, • opiše odnose med geometrijskimi elementi in jih zapiše s simboli, • pravilno uporablja geometrijsko orodje in merilne instrumente; • opiše lastnosti likov in teles, • oblikuje in opiše simetrične elemente oziroma pojme, • uporablja različne strategije pri reševanju problemov povezanih z obsegom, • pri reševanju (besedilnih) problemov uporablja različne bralne strategije ter kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih. <i>Minimalni standardi</i> • pozna in riše geometrijske elemente z geometrijskim orodjem, • opiše odnose med geometrijskimi elementi, • pozna lastnosti pravokotnika in kvadrata ter ju nariše, • pokaže lego simetrale, • izmeri obseg lika.

Oblike in metode dela	• frontalna, • individualna
Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• delovni listi A, B, • učni list A, B, • list za samovrednotenje, • Power Point
Potrebno predznanje	• pozna lastnosti likov, • pozna geometrijske elemente, • odnose med geometrijskimi elementi in simbolni zapis, • razume pojem obseg, • tloris in zmanjšano merilo
Dejavnosti učencev	• reševanje nalog na učnem listu, • samovrednotenje
Faze učnega procesa	1. Uvodni del 2. Navodila za individualno delo 3. Preverjanje s samovrednotenjem 4. Analiza preverjanja in samovrednotenja
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Učenci so z veliko motiviranostjo reševali naloge in v večini primerov zelo realno ocenili svoje znanje. Naloge so se jim zdele zelo zanimive, saj so zasnovane drugače, kot jih najdemo v našem delovnem zvezku in učbeniku.
Opombe, dodatna opazanja, posebnosti	Učenci radi rešujejo drugačne, nerutinske naloge, saj so jim nov izziv. Samovrednotenje se je izkazalo kot uspešen način spodbude in hkrati pokazatelj učencem, da učitelji zaupamo v njihovo presojo in jim damo možnost, da se sami ocenijo.
Prilagoditve za učence z učnimi težavami	Opomniki: Liki; Geometrijski pojmi in simbolni zapis.

Opis dejavnosti

Uvodni del

Ob preglednici in sliki so učenci ponovili pojme: lik, vzporednost, pravokotnost, obseg in zmanjšano merilo.

Učence sem seznanila s tem, da bomo to uro preverjali raven usvojenega znanja o likih in njihovih lastnostih. Hkrati bodo sami ocenili, kako so usvojili določene cilje oziroma znanja, katerim smo sledili pri obravnavi in utrjevanju snovi.

Navodilo za delo

Učencem sem predstavila izhodiščni situaciji, zapisani na delovnem listu A in B. Obe izhodiščni situaciji se nanašata na učni sklop Liki in telesa. Izhodiščni situaciji sta zasnovani kot problemski (besedilni) nalogi, kjer so morali učenci pokazati razumevanje prebranega besedila, prepoznati ključne podatke za rešitev naloge in odnose med podatki.

Na obeh učnih listih so bili ob nalogah zapisani cilji (znanja), katerim naloge sledijo, in sicer: razlikovanje likov, opisovanje lastnosti likov, načrtovanje pravokotnika in kvadrata ter merjenje in računanje obsega.

Posebej temeljito smo pregledali list za samovrednotenje, na katerem je bila prikazana preglednica.

V prvem stolpcu so bila zapisana znanja, ki jih določeno vprašanje ali naloga na učnem listu preverja. V naslednjih treh stolpcih so bile opisane stopnje znanja. Učencem je bila predstavljena tristopenjska lestvica:

- a) obvladam in sem prepričan v pravilnost rešitve,
- b) obvladam, vendar se pri reševanju še obotavljam,
- c) ne obvladam, moram še vaditi.

Za reševanje sta bila pripravljena dva delovna lista (A in B), zato je bil k vsaki stopnji prirejen stolpec za posamezni delovni list. Učenci so z oznako X označili stopnjo oziroma raven znanja, ki so jo zaznali ob reševanju določene naloge.

Čas reševanja smo omejili na 30 minut.

Osrednji del

Učenci so individualno reševali naloge na učnem listu in sproti dopolnjevali list za samovrednotenje. Vsi so najprej začeli reševati matematično situacijo A, nato pa so vsi reševali situacijo B.

Po izteku časa za reševanje je sledilo preverjanje pravilnosti rešitev.

Pravilnost rešitev so učenci individualno preverili z učnim listom z rešitvami.

Individualno so tudi analizirali list za samovrednotenje in dobili vpogled v ustreznost presoje lastnega znanja.

Zaključni del

Ob zaključku ure smo izvedli vrednotenje dela in refleksijo.

Vsak učenec je povedal, kako uspešen je bil pri reševanju in kako je ocenil svoje znanje.

Vsi učenci so rešili naloge na obeh delovnih listih. Polovica učencev je bila glede na število pravilno rešenih nalog zelo uspešna, eden učenec je bil manj uspešen, saj je delno rešil le dve nalogi na obeh delovnih listih. Posebej zanimive so jim bile izhodiščne situacije na delovnem listu A, saj imamo podobne gredice tudi na našem šolskem dvorišču, le da zanje skrbijo naše čistilke. Učenci so predlagali, da bi lahko zanje poskrbeli sami, kot je to predstavljeno v nalogah. Ob poročanju o doseganju svojega znanja so učenci uporabljali matematično terminologijo, pri tem so jim bili v pomoč zapisani cilji (znanja) ob nalogah. Povedali so, da so imeli največ težav pri pretvarjanju merskih enot, da pa sicer znajo računati obseg. Težave so imeli z računanjem obsega notranjega roba okvirja slike, kar je zahtevala naloga 4. b na učnem listu B. Naloga zahteva višjo raven znanja in v celoti jo je pravilno rešil le en učenec. Ta učenec je ob tabli predstavil svojo pot reševanja. Svoje rešitve in poti reševanja te naloge so predstavili še drugi učenci, ki so jih po analizi dopolnili ali popravili.

Učenci so povedali, da so jim bile naloge všeč, saj so zanimive, življenjske in drugačne, kot so jih vajeni reševati. Tudi način samovrednotenja jim je bil všeč, saj je zahteval, da razmišljajo o doseganju ciljev (znanja) in morebitnih vrzelih v znanju.

Pri poročanju o presoji lastnega znanja so najprej izpostavili svoja močna področja, nato pa še šibka. Kar nekaj učencev je ob tem povedalo, da so napake naredili zato, ker so premalo pozorno prebrali nalogo oziroma izhodiščno situacijo.

V fazi vrednotenja dela smo ugotovili, da je večina učencev pokazala ustrezno raven znanja in da jih je večina zelo realno ovrednotila svoje znanje.

S tremi učenci, med njimi sta bila tudi dva z učnimi težavami, smo vrzeli, ki so se pokazale pri reševanju nalog, odpravili pri dopolnilnem pouku.

Najprej so poskušali razjasniti, zakaj določenih nalog niso niti poskušali reševati. Prišli so do ugotovitve, da matematične situacije niso razumeli (branje z razumevanjem) in da imajo težave z merskimi enotami.

Pri dopolnilnem pouku smo ponovno analizirali vse naloge na delovnem listu A in nato še na delovnem listu B. Posamezno nalogo sem strukturirala in učence vodila pri delu. Nalogo sem prebrala najprej jaz, nato še učenci individualno. Ob drugem branju so podčrtali manj znane pojme, ki smo jih ob nadaljnjih dejavnostih pojasnili. Na geoplošči smo ponazorili situacijo naloge na delovnem listu A. Oblikovali smo pravokotnik, petkotnik in šestkotnik (oblike gredic) in ob tem ponovili lastnosti likov in pojem obseg. Za reševanje nalog na delovnem listu B smo iz kartona oblikovali okvir za sliko kvadratne in pravokotne oblike, da so si lažje predstavljali, kaj pomeni zunanji in notranji rob okvirja slike. Ponovili smo merske enote za merjenje dolžin in njihove pretvornike. Ob vodenem reševanju so bili učenci zmožni rešiti vse naloge. Utrdili so matematične pojme in postopke reševanja, vezane na dani učni sklop, in dobili potrditev, da zmorejo rešiti »težje« naloge.

Literatura in viri

- 1 Žakelj, A., et al. (2011). *Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljene_UN/UN_matematika.pdf (3. 4. 2012).*

Priloge



Priloga 1: Predstavitev delovnih listov A, B

Priloga 2: Učni list A

Priloga 3: Učni list B

Priloga 4: List za samovrednotenje

Priloga 5: Rešitve učnih listov

6.3.3 Seštevanje in odštevanje racionalnih števil

Jožef Senekovič, Osnovna šola Bojana Illica, Maribor

Avtor	Jožef Senekovič
Šola	Osnovna šola Bojana Illica, Maribor
Učna tema	Seštevanje in odštevanje racionalnih števil
Učni sklop	Preverjanje znanja
Razred	8.
Potreben čas za izpeljavo	ena šolska ura
Učni cilji (vsebinski, procesni)	Učenci/učenke: • na številski osi ponazorijo vsoto celih oziroma racionalnih števil, • seštevajo cela števila in poznajo vsoto nasprotnih števil, • prevedejo odštevanje racionalnih števil v seštevanje – in poenostavijo izraz z odpravljanjem oklepajev, • izračunajo vrednost izraza s celimi števili (seštevanje in odštevanje), • seštevajo in odštevajo racionalna števila, • pomnožijo celo oziroma racionalno število z (-1), • pomnožijo celi oziroma racionalni števili, • izračunajo zmnožek celih (racionalnih) števil, • uporabljajo in razumejo dogovor o opuščanju znaka za množenje, • poiščejo danemu celemu oziroma racionalnemu številu obratno vrednost, • delijo celi oziroma racionalni števili.
Standardi	<i>Standardi znanja</i> Učenec/učenka: • ima razvite številske predstave in pozna odnose med številskimi množicami, • pozna in uporablja lastnosti številskih množic in računskih zakonov, • v skladu z vsebinami osnovnošolske matematike razvije matematično in nematematično terminologijo (sporazumevanje v maternem jeziku), • matematični jezik uporablja pri sporazumevanju, • kritično reflektira lastno znanje (učenje učenja); <i>Minimalni standardi</i> • uporablja cela in racionalna števila v življenjskih situacijah, • poišče nasprotno in obratno vrednost števila, • primerja in ureja cela števila.
Oblike in metode dela	• samostojno delo, • individualizacija

Didaktični pripomočki, učna in informacijska tehnologija	• delovni listi, • rešitve v spletni učilnici
Potrebno predznanje	• seštevanje in odštevanje, množenje in deljenje racionalnih števil; • lastnosti racionalnih števil
Dejavnosti učencev	• samostojno reševanje nalog, • uporaba učbenika in drugih gradiv
Faze učnega procesa	1. Razdelitev nalog; osmišljanje dela 2. Samostojno reševanje in opredeljevanje glede uspešnosti reševanja 3. Preverjanje rešitev in analiza odgovorov
Refleksija (z vidika učitelja, učenca)	Učenci vrednotijo kakovost znanja. Pomembna informacija učitelju, da lahko učencem še pravočasno pomaga odpraviti pomanjkljivosti. Učenci so naloge večinoma rešili samostojno.
Domače delo	Samopreverjanje opravijo učenci doma. Tako omogočamo razvoj zaupanja v samostojno delo. Tudi če učencu pomagajo starši ali kdo drug, s tem krepi svoje znanje.
Prilagoditve za učence z učnimi težavami	Povečana pisava. Uporaba računal in drugih pripomočkov. Omogočena uporaba učbenika in e-gradiv (simulacije računskih operacij).

Opis procesa

Učencem sem predstavil delovne liste z nalogami. Rešili bodo 20 različnih nalog. Z vsako nalogo bodo preverili doseganje enega ali več ciljev sklopa. Pojasnim jim, da v fazi reševanja ob vsaki nalogi označijo:

- **Znam brez pomoči** pomeni, da učenec samostojno reši nalogo brez dodatne pomoči.
- **Znam s pomočjo** pomeni, da učenec nalogo reši samostojno, vendar z uporabo ponujene pomoči (zgledi, primeri, naloge v gradivih, starši ...),
- **Ne znam s pomočjo** pomeni, da učenec naloge kljub ponujeni pomoči ne reši.
- **Reši narobe** – po preverjanju pravilnosti rešitev označi polje, če je rešitev bila napačna, čeprav je izbral ZNAM.

V pomoč pri reševanju nalog so navedeni tudi primeri in zgledi iz učbenika, ki ga uporabljamo pri pouku. Kot dodatno pomoč jim priporočim e-gradiva ali katera koli druga gradiva. Pomembno je, da učenci vedo, da lahko pri reševanju poiščejo pomoč. Učencem prav tako predlagam, da ob uporabi pomoči zapišejo, katero pomoč so uporabili (učbenik, delovni zvezek, starši ...).

Učenci naloge (brez rešitev) odnesejo domov. V šoli sem jih seznanil le z navodili. Naloge rešujejo doma. Za reševanje nalog so imeli na voljo pet dni.

Pregled rešitev

Po dogovorjenem času so učenci prinesli rešene naloge v šolo. V spletni učilnici sem pripravil rešitve. Pregled rešitev je potekal frontalno. Ob projekciji rešitev so posamezni učenci utemeljevali reševanje ali postavljali vprašanja. Rešitve sem komentiral, tudi pregledoval po učilnici. Spremljal sem oznake, ki so jih učenci zapisovali ob posameznih nalogah. Po pregledu so učenci po potrebi označili »Rešil narobe«. Ker so rešitve tudi v spletni učilnici, so lahko učenci tudi sami kadar koli dobili dodatno povratno informacijo o pravilnosti rešitev. Učenci so prejeli povratno informacijo o uspešnosti reševanja, predvsem pa o zanesljivosti reševanja. Z označevanjem nalog, kako so jih rešili, so pridobili informacije in usmeritve o nadaljnjem delu. Učenci so nato odrezali del z označenimi odgovori in ga opremili z imenom.

Refleksija

Od 30 učencev (dve heterogeni skupini) je naloge rešilo 24 učencev. Nalog niso rešili učenci, ki nasploh iščejo bližnjice. Najbolj motivirano so naloge reševali učenci z višjimi ocenami. Učenci so imeli nekaj težav z razumevanjem navodil. Naloge so bile namreč nekoliko zahtevnejše. Tako so več težav pri razumevanju imeli učenci, ki že tako imajo težave. Vendar je bil cilj samopreverjanja, da učenci nekoliko bolj sistematično pristopijo k reševanju nalog in reševanje osmislijo ob samostojnem iskanju pomoči. Prav tako je bila pomembna povratna informacija o pravilnosti rešitev.

Po pregledu označenih odgovorov sem ugotovil, da so učenci izbirali vse možnosti. Do svojega znanja so bili kritični in nekaj je bilo izbir, da so rešili narobe, čeprav so najprej menili, da so reševali pravilno. Učenci so v pogovoru poudarili, da je povratna informacija o njihovem znanju boljša kot pri klasičnih domačih nalogah. V klasičnih domačih nalogah bolj ali manj preverjajo posamezne cilje, v tako obsežnem samopreverjanju pa so znanje preverili bolj celostno. Zelo so bili zadovoljni z namigi, kje naj poiščejo pomoč. Izvedeno samopreverjanje ni bila raziskava. Tako tudi ni bilo nobene kontrolne skupine. Zato ne morem trditi, da so bili dosežki preizkusa znanja, ki je sledil samopreverjanju višji, kot če samopreverjanja ne bi opravil. Višji dosežki preizkusa znanja niti niso bili glavni cilj samopreverjanja. Predvsem sem želel učencem ponuditi dodatno izkušnjo, nekoliko bolj sistematičen pristop k vrednotenju lastnega znanja.

Zapise učencev na listkih o reševanju nalog sem pa uporabil tako, da sem vsakemu učencu svetoval, kako naj deluje, da bi izboljšal znanje (kjer so bili odgovori »Ne znam s pomočjo«). Učence sem povabil k dopolnilnem pouku, prav tako so imeli možnost (tako kot vedno) postavljati vprašanja tudi izven rednega pouka. V nekaj naslednjih urah sem pri ustnem ponavljanju načrtno postavljaj vprašanja učencem, ki so izkazali slabše znanje določenih vsebin ali postopkov. Usmeril sem jih na uporabo učbenika, kjer so rešeni zgledi. Naj omenim, da je imela večina učencev občutek, da vendarle lahko in morajo nekaj dodatno narediti, če želijo izboljšati znanje.

Učenci, ki so izbrali »Rešil narobe«, so mi opisali, kako so reševali posamezno nalogo. Večina učencev je že v frontalni predstavitvi rešitev uvidela napako v razmišljanju. Pogovor sem opravil predvsem zato, da bi ugotovil, zakaj so nastale napake. Večina učencev je nalogo rešila brez pomoči. Predvidevali so, da je njihova rešitev pravilna. Napake so naredili predvsem zaradi napačnega razumevanja navodil (navodil niso brali, reševali so po intuiciji, pri branju niso bili pozorni na morebitne pogoje ...). Učenci, ki so izbrali »Rešil narobe«, praviloma nimajo večjih težav z razumevanjem.

Literatura in viri

- 1 Buchter, A., Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- 2 Smogavec, J., Govejšek, C (2008). *Matematika za radovedneže 8, učbenik*. Ljubljana: SLOMA.

Prilogi



Priloga 1: Delovni listi z nalogami

Priloga 2: Rešitve delovnih listov z nalogami

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 30 evenly spaced horizontal grey lines across its entire surface, typical of standard notebook paper. There are no margins, text, or other markings present.

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 30 horizontal blue or grey lines spaced evenly apart, typical of notebook paper. The lines extend across the entire width of the page, leaving small margins at the top and bottom. There are no vertical lines, text, or other markings on the page.

ISBN 978-961-03-0178-3



9 789610 301783

