Posodobitve pouka v gimnazijski praksi

MATEMATIKA

dr. Amalija Žakelj
mag. Simona Pustavrh
mag. Samo Repolusk
Silva Kmetič
mag. Mateja Sirnik
Romana Bohak Farič
Irena Rauter Repija
Jasna Kos
Simona Vreš
Helena Kapus
mag. Alojz Grahor
dr. Marjan Jerman
Darka Hvastja
Katja Novak
mag. Mirjam Bon Klanjšček
Nives Mihelič Erbežnik

Posodobitve pouka v gimnazijski praksi

Matematika

Uredili:	**Silva Kmetič, mag. Mateja Sirnik**
Avtorji:	**dr. Amalija Žakelj, mag. Simona Pustavrh, mag. Samo Repolusk, Silva Kmetič, mag. Mateja Sirnik, Romana Bohak Farič, Irena Rauter Repija, Jasna Kos, Simona Vreš, Helena Kapus, mag. Alojz Grahor, dr. Marjan Jerman, Darka Hvastja, Katja Novak, mag. Mirjam Bon Klanjšček, Nives Mihelič Erbežnik**
Strokovni pregled:	**dr. Dušan Pagon, Sabina Kumer**
Jezikovni pregled:	**Božislava Čož**
Izdal in založil:	**Zavod RS za šolstvo**
Predstavnik:	**mag. Gregor Mohorčič**
Urednica zbirke:	**Alenka Štrukelj**
Oblikovanje:	**Irena Hlede**
Postavitev in tisk:	**Littera Picta, d. o. o.**
Naklada:	**450 izvodov**

Prva izdaja, prvi natis

Ljubljana, 2010

Publikacija je brezplačna.

Zahvaljujemo se Slovenskemu etnografskemu muzeju za uporabo slikovnega gradiva, ki smo ga uporabili za grafično opremo publikacije.

Zbirka Posodobitev pouka v gimnazijski praksi je nastala v sklopu projekta Posodobitev gimnazije – Posodobitev učnih načrtov, ki sta ga vodili dr. Amalija Žakelj, vodja projekta, in mag. Marjeta Borstner, namestnica.

Izid publikacije sta sofinancirala Evropski socialni sklad Evropske unije in Ministrstvo za šolstvo in šport RS.

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

REPUBLIKA SLOVENIJA | MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

© Zavod Republike Slovenije za šolstvo, 2010

Vse pravice pridržane. Brez založnikovega pisnega dovoljenja gradiva ni dovoljeno reproducirati, kopirati ali drugače razširjati. Ta prepoved se nanaša na mehanske (fotokopiranje) in elektronske (snemanje in prepisovanje na karšen koli pomnilniški medij) oblike reprodukcije, razen delov, kjer je to posebej označeno.

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana
37.091.3:51(082)

POSODOBITVE pouka v gimnazijski praksi. Matematika / Amalija Žakelj ... [et al.]. - 1. izd., 1. natis. - Ljubljana : Zavod RS za šolstvo, 2010
ISBN 978-961-234-908-0
1. Žakelj, Amalija
253120512

VSEBINA

PREDGOVOR 9

UVOD 11

1 Raznovrstnost pristopov k učenju in poučevanju matematike 15
(Amalija Žakelj)

1.1 Značilnosti posodobljenega učnega načrta za matematiko 17

1.2 Načrtovanje učnega procesa 26

1.3 Strategije pouka – metode učenja in poučevanja 30
1.3.1 Poučevanje z razlago 30
1.3.2 Izkustveno učenje 31
1.3.3 Strukturirano učenje in poučevanje 33
1.3.4 Učenje z odkrivanjem in raziskovalni pouk 35
1.3.4.1 Vodeno odkrivanje – raziskovanje 35
1.3.4.2 Samostojno odkrivanje 42
1.3.4.3 Raziskovanje in medpredmetno povezovanje –pot do kompleksnih znanj 45

1.4 Matematična pismenost in vloga kompetenc pri njenem razvoju 49
1.4.1 Matematična pismenost 49
1.4.2 Vloga kompetenc pri razvoju matematične pismenosti 51

1.5 Problemska znanja in reševanje problemov 53
1.5.1 Problemska znanja 53
1.5.2 Matematizacija in osmišljanje matematičnih vsebin 58
1.5.3 Empirične preiskave - pot do kompleksnih znanj 62

1.6 Matematično modeliranje kot didaktični pristop 63

1.7 Viri in literatura 76

2 Matematično modeliranje 79

2.1 Primeri različnih pristopov pri matematičnemu modeliranju 81
(Samo Repolusk)
2.1.1 Primeri nalog 82

2.2 Razvoj in spremljanje procesa modeliranja *(Silva Kmetič)* 90

2.3 Teorija v praksi: Spreminjanje dolžine dneva *(Mateja Sirnik)* 103

2.4 Primeri iz prakse 110
2.4.1 Modeliranje z linearno funkcijo 110
2.4.1.1 Gorenje sveče *(Mirjam Bon Klanjšček)* 110
2.4.1.2 Markove priprave na maraton. Poraba goriva *(Simona Vreš)* 114
2.4.1.3 Poševni stolp v Pisi *(Katja Novak)* 120
2.4.2 Modeliranje z eksponentno funkcijo 124
2.4.2.1 Tekaški treningi *(Jasna Kos)* 124
2.4.2.2 Skodelica kave *(Katja Novak)* 130
2.4.2.3 Naravno čiščenje onesnaženega jezera *(Helena Kapus)* 134
2.4.2.4 Upadanje svetlobnega toka *(Jasna Kos)* 142

2.4.3 Modeliranje z logaritemsko funkcijo 147
2.4.3.1 Naravno čiščenje jezera *(Alojz Grahor)* 147
2.4.4 Modeliranje z logistično funkcijo 151
2.4.4.1 Primeri naravnih rasti *(Simona Pustavrh, Darka Hvastja)* 151
2.4.5 Modeliranje s sinusno funkcijo 158
2.4.5.1 Temperatura zraka v Novem mestu *(Simona Pustavrh)* 158
2.4.5.2 Vreme *(Jasna Kos)* 163
2.4.6 Modeliranje s kvadratno funkcijo 167
2.4.6.1 Uta psa Lorda *(Irena Rauter Repija)* 167
2.4.6.2 Goreči šotor *(Irena Rauter Repija, Mateja Sirnik)* 175
2.4.6.3 Pleskanje stene *(Irena Rauter Repija)* 183
2.4.7 Uporaba in preverjanje modela 188
2.4.7.1 Plačilo porabe plina *(Romana Bohak Farič)* 188
2.4.8 Modeliranje z normalno krivuljo 194
2.4.8.1 Analiza rezultatov mature iz matematike *(Jasna Kos)* 194
2.4.9 Vhodno-izhodni matematični model ekonomije *(Marjan Jerman)* 197
2.4.10 Modeliranje z različnimi funkcijami 203
2.4.10.1 Gojitev fižola v izbranih pogojih *(Nives Mihelič Erbežnik)* 203
2.5 Naloge iz modeliranja 209
2.6 Naloge za preverjanje delnih ciljev 218

3 Statistika 227
3.1 Od obdelave podatkov v osnovni šoli do statistike v srednji šoli 229
(Amalija Žakelj)
3.1.1 Uvod 229
3.1.2 Informacijska, statistična in podatkovna pismenost 229
3.1.3 Obdelava podatkov v osnovni šoli 233
3.1.4 Kaj pripomore obdelava podatkov k učenju in poučevanju matematike in matematičnemu znanju 236
3.1.5 Empirična preiskovanja – pot do kompleksnih znanj 241
3.1.6 Primera empirične preiskave 245
3.1.7 Statistika v gimnaziji 250
3.1.8 Zaključek 251
3.1.9 Literatura 252
3.2 Primeri dobre prakse s teorijo 253
3.2.1 Osnovni pojmi statistike *(Simona Pustavrh)* 253
3.2.2 Urejanje in prikazovanje podatkov *(Simona Pustavrh)* 263
3.2.3 Srednje vrednosti *(Simona Pustavrh)* 271
3.2.4 Razpršenost podatkov *(Simona Pustavrh)* 280
3.2.5 Uporaba aritmetične sredine in standardnega odklona 288
3.2.5.1 Analiza ustreznosti polnjenja embalaže za mazila *(Romana Bohak Farič)* 288
3.2.6 Kvartili in škatla z brki *(Simona Pustavrh)* 291
3.2.7 Uporaba srednjih vrednosti 299
3.2.7.1 Izbira zdravila *(Romana Bohak Farič)* 299
3.2.8 Odnos in povezanost spremenljivk *(Simona Pustavrh)* 302
3.3 Primer statistične naloge *(Simona Pustavrh)* 311

VSEBINA ZGOŠČENKE

Čoln
- Coln.gsp
- Coln.grf

Spreminjanje dolžine dneva
- Dolzina_dneva.grf
- Dolzina_dneva.ggb

Gorenje sveče
- UL_Gorenje_svece.doc(x)
- DN_Vpis_dijakov.doc(x)
- RUL_Gorenje_svece.doc(x)

Markove priprave na maraton
- UL_Markove_priprave.doc(x)
- RUL_Markove_priprave.doc(x)

Poraba goriva
- UL_Poraba_goriva.doc(x)
- RUL_Poraba_goriva.doc(x)

Poševni stolp v Pisi
- UL_Stolp_pisa.doc(x)
- RUL_Stolp_pisa.doc(x)
- Stolp_pisa.grf

Tekaški treningi
- UL_Tekaski_trening_1.doc(x)
- UL_Tekaski_trening_2.doc(x)
- RUL_Drugi_ucitelj.doc
- DN_Rast_prebivalstva.doc(x)
- DN_Gauss.doc(x)

Skodelica kave
- UL_Skodelica_kave.doc(x)
- Meritve_temperature.xls(x)
- RUL_Skodelica_kave.doc(x)
- Kava_ohlajanje.grf

Naravno čiščenje onesnaženega jezera
- UL_Jezero.doc(x)
- RUL_Jezero.doc(x)
- Model_brezdotoka.xls(x)
- Model_dotok.xls

Naravno čiščenje jezera
- UL_Jezero.doc(x)
- RUL_Jezero.doc(x)

Modeliranje z logistično funkcijo
- UL_Modeliranje_naravne_rasti.doc(x)
- RUL_Modeliranje_naravne_rasti.doc(x)

Temperatura zraka v Novem mestu

- UL_Temperatura_NM.doc(x)
- RUL_Temperatura_NM.doc(x)
- Temperatura_NM.grf
- Temperatura_NM.xls
- UL_domaca_naloga_TEMPERATURA_NM.doc(x)
- RUL_domaca_naloga_TEMPERATURA_NM.doc(x)

Vreme

- UL_Vreme.doc(x)
- RUL_Vreme.doc(x)
- Navodila_za_delo_z_graficnim_racunalom.doc(x)
- Podatki_Kredarica_Maribor.xls(x)

Uta psa Lorda

- UL_Empiricno_graph.doc(x)
- Uporaba_tehnologije_navodila.doc(x)
- Uta_2_moznost.xls(x)
- Uta_Dinamicna_simulacija.ggb

Goreči šotor

- UL_Goreci_sotor.doc(x)
- Goreci_sotor.grf
- Goreci_sotor_analiza_s_tabelo.ggb
- DN_Klop.doc(x)
- Klop_konstrukcija.ggb
- Klop_raziskovanje_s_pravokotnico.ggb

Pleskanje stene

- UL_Stena.doc(x)
- Stena.xls(x)
- DN_Zoga.doc(x)
- Zoga.xls(x)

Plačilo porabe plina

- UL_Poraba_plina.doc(x)
- RUL_Poraba_plina.doc(x)

Normalna porazdelitev

- UL_Normalna_porazdelitev.doc(x)
- RUL_Normalna_porazdelitev.doc(x)
- Navodila_za_TI_84.doc(x)

Naloge iz modeliranja

- Naloge.doc(x)
- Resitve.doc(x)

Naloge za doseganje delnih ciljev

- Naloge_delni_cilji.doc(x)
- Resitve_naloge_delni_cilji.doc(x)

Vdihavanje helija (samo na zgoščenki)

- Helij_in_spreminjanje_glasu.doc(x)

Naftovod (samo na zgoščenki)
- Naftovod.doc(x)

Namakalni kanali (samo na zgoščenki)
- UL_Zleb.doc(x)
- RUL_Zleb.doc(x)
- Opis_gradiva_zleb.doc(x)

Statistika

Osnovni pojmi statistike
- UL_Osnovni_pojmi_statistike.doc(x)
- RUL_Osnovni_pojmi_statistike.doc(x)

Urejanje in prikazovanje podatkov
- UL_Urejanje_in_prikazovanje_podatkov.doc(x)
- RUL_Urejanje_in_prikazovanje_podatkov.doc(x)
- Grupiranje_podatkov_Excel.doc(x)

Srednje vrednosti
- UL_Srednje_vrednosti.doc(x)
- RUL_Srednje_vrednosti.doc(x)

Razpršenost podatkov
- UL_Razprsenost_podatkov.doc(x)
- RUL_Razprsenost_podatkov.doc(x)

Uporaba aritmetične sredine in standardnega odklona
- UL_Mazila.doc(x)
- RUL_Mazila.doc(x)
- R_Mazila.xls(x)

Škatla z brki
- UL_Kvartili_in_skatla_z_brki.doc(x)
- RUL_Kvartili_in_skatla_z_brki.doc(x)
- Navodila_za_kvartile_in_sk_brki_Excel.doc(x)

Uporaba srednjih vrednosti
- UL_Zdravila.doc(x)
- RUL_Zdravila.doc(x)
- 01_zdravila.ggb
- 02_zdravila.ggb

Odnos in povezanost spremenljivk
- UL_Odnos_in_povezanost_spremenljivk.doc(x)
- RUL_Odnos_in_povezanost_spremenljivk.doc(x)

Shema priprave na pouk
- Shema.doc(x)

Legenda:

Dovoljeno kopiranje in reproduciranje gradiv za potrebe pouka.

Gradivo je dostopno na priloženi zgoščenki.

Predgovor

Silva Kmetič, Mateja Sirnik

Delo je nastalo v sklopu projektov Posodobitev gimnazije in Usposabljanje učiteljev za uvajanje posodobitev gimnazijskih programov 2008–2010. Pri nastanku priročnika so sodelovali člani Predmetne razvojne skupine za matematiko in mentorski učitelji na Zavodu RS za šolstvo.

V sklopu projekta je bilo organiziranih več izobraževanj za učitelje matematike s sloganom Strokovni razvoj učiteljev z učitelji. Učitelji so se seznanili z novostmi v učnem načrtu, druga strokovna srečanja pa smo pripravili na osnovi želja učiteljev, zbranih z anketo. Na vrhu seznama želja so bile že izpeljane teme: obdelava podatkov in statistika, uporaba IKT pri pouku matematike, matematično modeliranje ter preverjanje in ocenjevanje kompleksnih znanj.

To delo je nekakšna sinteza izobraževanj, s poudarkom na obravnavi matematičnega modeliranja in statistike. V teoretičnemu prispevku o pouku matematike z naslovom Raznovrstnost pristopov k učenju in poučevanju matematike so tudi primeri za pouk kot ilustracija za pedagoške pojme: kompetence, matematična in druge pismenosti, medpredmetno povezovanje in kroskurikularnost, problemska znanja, načrtovanje pouka z didaktičnega vidika in z elementi strategij poučevanja in učenja ... Nato se seznanimo s pojmi matematično modeliranje in matematični model ter z različnimi pristopi k matematičnemu modeliranju. Posebna aplikacija modeliranja je samostojno poglavje o pouku statistike, ki poveže nove pojme z že usvojenimi v osnovnošolskem izobraževanju. Srečamo se tudi z novimi besedami in terminološkimi izzivi za 'nove' pojme z vidika matematične stroke, uporabe IKT-tehnologije in didaktike. Teorija je ponazorjena z dovolj primeri za lažji prenos zamisli v prakso.

S tem delom smo želeli strniti izsledke projekta v koristno in trajno popotnico delu v razredu, kot pomoč, izhodišče, izziv ...

Veseli bomo povratnih informacij, novih zamisli in vsakega dosežka, ki bo prerasel to delo.

Uvod

Silva Kmetič

Bistvo predmeta matematika je v povezanosti in soodvisnosti pojmov. Z vidika te lastnosti je predmet težak ali pa preprost in zanimiv, odvisno, kako se ga učimo. Ker je učenje tudi posledica poučevanja, so v posodobljenem učnem načrtu za matematiko poleg vsebinskih ciljev tudi splošni cilji in kompetence ter primeri dejavnosti za njihov razvoj.

Celostno učenje je rdeča nit posodobljenega učnega načrta za matematiko. Vtkano je v splošne cilje in kompetence predmeta, v naravoslovno-matematične zmožnosti za razvoj kompleksnega mišljenja, v procesna znanja, v dejavnosti za razvoj medpredmetnih povezav in v dejavnosti za razvoj kompetenc. Matematično modeliranje, novost v učnem načrtu, je primer celostnega učenja.

V priročniku je največ strani namenjenih prav modeliranju, ki po eni strani pomeni razvoj problemskih znanj, je torej reševanje problemskih situacij, po drugi pa bogati vsebinska znanja, predvsem na področju pojma funkcija, povezuje različna vsebinska področja matematike, vključuje kontekste drugih področij (naravoslovna in družboslovna) in se povezuje s področjem obdelave podatkov in statistike. Praksa je tudi pokazala, da se pri modeliranju težko izognemo uporabi različne tehnologije, kot so računala, od numeričnih in grafičnih, do različnih računalniških programov.

Matematično modeliranje je proces, ki ustvari približni opis ali posnetek (imitacijo) neke realne situacije - matematični model. Če so vsebine matematičnega modeliranja ustrezno izbrane, lahko spodbujajo veselje do matematike, so priložnosti za nova vprašanja in iskanje odgovorov nanje. Matematiko odkrivamo v svojem okolju, modeliranje pa je pravzaprav reševanje opaženih realnih problemov. Z modeliranjem matematika preseže zaprtost predmeta in pojmovanje o suhoparnosti matematike kot učenja z reševanjem številnih računskih nalog. Matematično modeliranje je lahko za dijaka in učitelja izziv ter vir notranjega zadovoljstva.

Med pričakovanimi učnimi dosežki je v Posodobljenem učnem načrtu za matematiko zapisano *»v problemih dijak prepozna in predstavi, katera elementarna funkcija lahko modelira problem«*, kar se razvija v prepletanju s procesnimi cilji oziroma problemskimi znanji vsa štiri leta. Modeliranje omogoča povezovanje znanj znotraj predmeta in je priložnost za osmišljanje matematičnih vsebin s primeri iz realnega življenja. Kakovost procesa zagotavlja sodelovanje različnih predmetnih strokovnjakov.

Z vidika vsebinskih ciljev se pri predmetu bogati pojem funkcije, ker v realističnih primerih zahteva obravnavo na smiselnem definicijskem območju in zalogi vrednosti. Prav tako se dopolnjujejo pojmi, kot so spremenljivka, definicijsko območje in zaloga vrednosti, predpis, koordinatni sistem, graf funkcije ... Dijaki se ukvarjajo z različnimi predstavitvami pojma funkcija, na osnovi katerih sklepajo, interpretirajo, kritično vrednotijo, napovedujejo, se odločajo ...

Učitelj matematike vidi v postavljenih realnih problemih predvsem matematiko, zato se pogosto preveč osredotoča na matematični del obravnave, pa še ta je velikokrat prehitro izpeljan, torej s premislekom učitelja, in ne dijaka. Naj v naš šolski

prostor matematično modeliranje **ne vnese** nove tipske naloge, ki jo bodo dijaki abstrahirali v štiri korake: vnesi meritve v koordinatni sistem, poišči funkcijo, ki se točkam najbolje prilega, poišči nekaj vrednosti z intervala meritev (interpoliraj), poišči nekaj vrednosti zunaj intervala meritev (ekstrapoliraj). Matematično modeliranje je treba razumeti in učiti kot proces razmišljanja, ki spodbuja dijake k divergentnemu mišljenju, vživljanju v realno situacijo, k dvomu o rezultatih in postopkih, dokazovanju in zavračanju, razlagi, kritičnemu presojanju podatkov, privzetkov, poenostavitev, rezultatov in postopka ...

Naslednja past pri izpeljavi pouka je pogostejša uporaba enega pristopa, npr. empiričnega, ki je eden od možnih, pogost, ker se da hitro poenostaviti v seznam prej opisanih korakov. Pri učenju matematičnega modeliranja naj ne izostanejo drugi pristopi, kot sta npr. **teoretični** in **simulacijski**. Teh ni mogoče abstrahirati v okvir rutinskih nalog, ampak razvijata različne miselne strategije reševanja problemov in metakognitivna znanja v procesu načrtnega reševanja problemov. Zato je treba matematično modeliranje razumeti in načrtovati kot problemske situacije, v sklopu katerih razvijamo strategije reševanja problemov, med njimi tudi pojem dokaza in proces dokazovanja.

Za razvoj produktivnega znanja dijakov sta zelo pomembna faza načrtovanja in celostni pogled učitelja na pripravo dejavnosti, ki sledijo iz pričakovanega dosežka. Ta je najprej izhodišče, na koncu pa rezultat pouka in učenja. Didaktični priročnik je zamišljen kot podpora celostnemu videnju v pouk vključenih vsebin.

Didaktični priročnik je razdeljen na tri obsežnejša poglavja, teoretični didaktični uvod, matematično modeliranje in statistiko. V vseh sklopih se teorija dopolnjuje z zgledi, modeliranju in statistiki pa sledijo primeri iz prakse. V teoretični uvod je vključen povzetek novosti iz posodobljenega učnega načrta za matematiko, tako da lahko preverimo, kako smo razumeli posodobljeni učni načrt, za tem so napotki za načrtovanje pouka in nekatere metode poučevanja s poudarkom na raziskovanju in reševanju problemov.

Priročniku so dodane še naloge in problemska izhodišča ter primeri nalog za preverjanje doseganja delnih ciljev. Na priloženi zgoščenki so učni listi, shranjeni v obliki pdf in v doc(x), ki jih učitelj lahko preoblikuje glede na lastne potrebe in svoj pristop k pouku predmeta. Priložene so rešitve za večino primerov ter nekaj didaktičnih e-predlog (*.grf, *.ggb, *.gsp ali *.xls(x)).

S preizkušenimi primeri dobre prakse smo želeli zajeti različne realne probleme, različne pristope modeliranja in reševanja problemov ter pokriti različne matematične vsebine. V reševanje so vključeni različni računalniški programi in računala z osnovnimi napotki za uporabo. Spopadli smo se s terminološkimi problemi in problemi uporabe različnih definicij predvsem pri statistiki, na kar opozarjamo bralca v sprotnih opombah. Omenimo, da je uporaba IKT-tehnologije omejena na računala, grafična in simbolna, ter na računalniške programe, ki so pretežno odprtokodni. Namensko razviti licenčni programi za pouk matematike kot so Sketchpad, TinkerPlots, Fathom, Autograph ..., ki omogočajo premišljen in didaktično podprt način uporabe pri pouku, so v senci nakupov fizične opreme.

Vsako učno gradivo je opisano tako, da je bralec seznanjen z bistvenimi cilji in potrebnim dijakovim predznanjem, torej s pogoji za uporabo gradiva. Rešitve, ki so v besedilni obliki, v licenčnih ali v odprtokodnih programih, ilustrirajo razmišljanje avtorjev. Koristijo lahko tudi priložene datoteke s podatki oziroma meritvami.

Nekatere datoteke so namenjene eksperimentiranju, druge preverjanju rezultatov, tretje pa so didaktična predloga, kot je npr. pripravljen koordinatni sistem za eksperimentiranje ali simulacijo problema. Nekatere vstavljene slike so aktivne, kar pomeni, da jih z dvoklikom odpremo (aktiviramo) v ustreznem programu. Zato lahko vidimo podrobnosti o izdelanem dokumentu in ga spreminjamo.

Vsaka učna situacija vključuje večino značilnih korakov modeliranja: postavitev problema, napoved ali predvidevanje rešitve, zbiranje podatkov (iskanje podatkov, merjenje količin in beleženje), razvrščanje ali urejanje podatkov, prikazovanje podatkov, interpretiranje rešitve v jeziku konteksta in v matematičnem jeziku, vrednotenje rezultatov in procesa, interpretacijo v jeziku konteksta in v jeziku matematike, razgovor o predpostavkah in poenostavitvah ter nova raziskovalna vprašanja.

Didaktični priročnik poskuša učiteljem pomagati pri uvajanju novosti posodobljenega učnega načrta v pouk in pri premagovanju morebitnih ovir na tej poti.

Raznovrstnost pristopov k učenju in poučevanju matematike

Amalija Žakelj

1.1 Značilnosti posodobljenega učnega načrta za matematiko

Posodobljeni učni načrt za matematiko za gimnazijo (2008) vsebuje kakovostne didaktične in vsebinske posodobitve pouka matematike. Novosti posodobljenega učnega načrta so:

- aktualizacija vsebin in didaktičnih pristopov,
- učnociljni pristop iz leta 1998 je nadgrajen s procesno-razvojnim pristopom,
- uporaba IKT kot možnost za razvoj matematičnega znanja ter kot podpora pri učenju in poučevanju,
- razvoj kompetenc,
- cilji kroskurikularnih vsebin,
- cilji za razvoj funkcionalne pismenosti posameznika,
- medpredmetne povezave kot poti do kompleksnih znanj in pričakovanih rezultatov,
- pričakovani rezultati, ki temeljijo na učnociljnem in procesno-razvojnem pristopu,
- odprtost in izbirnost učnega načrta je mogoča na ravni posebnih in splošnih znanj ter v opredelitvi ciljev in vsebin, ki so postavljeni na ravni gimnazijskega izobraževanja, in ne po posameznih letnikih,
- novi so tudi poudarki v metodičnih pristopih obravnave posameznih vsebin (npr. obrestno-obrestni račun, amortizacijski načrt, statistična naloga, preiskovanja, modeliranje ...).

Učni cilji

Učni načrt navaja delitev znanja na *splošna znanja (SZ)* in *posebna znanja (PZ)*. *Splošna znanja* so opredeljena kot tista, ki so potrebna za splošno izobrazbo in so namenjena vsem učencem, zato jih mora učitelj obvezno obravnavati. *Posebna znanja* opredeljujejo dodatna ali poglobljena znanja, ki jih učitelj obravnava glede na zmožnosti in zanimanje učencev ter glede na strokovne zahteve gimnazijskega programa. Cilji in vsebine so zapisani na ravni gimnazijskega izobraževanja in ne po posameznih letnikih.

V učnem načrtu so tudi izbirne vsebine (I), ki presegajo splošno raven gimnazijskega matematičnega znanja in jih razvijamo samo pri posameznikih in razredih, ki kažejo poseben matematični interes. Obravnavamo jih samo v primeru, ko nam realizacija učnega procesa časovno dopušča tako poglobljen pristop, ki naj ne bo le informativne narave.

S **splošnimi cilji** je opredeljen namen učenja in poučevanja matematike (Učni načrt za matematiko 2008: 6). Učenci se pri pouku matematike učijo razvijati matematično mišljenje: abstraktno-logično mišljenje in geometrijske predstave; spoznavati zgradbo matematičnih teorij in spoznati temeljne standarde matematičnega

sklepanja; prepoznavati vprašanja, na katera matematika lahko ponudi odgovor; spoznavati pomen matematike kot univerzalnega jezika in orodja; izražati se v matematičnem jeziku ustno, pisno ali v drugih izraznih oblikah; uporabiti matematiko v kontekstih in povezovati znanje znotraj matematike in tudi širše (medpredmetno); postavljati ključna vprašanja, ki izhajajo iz življenjskih situacij ali pa so vezana na raziskovanje matematičnih problemov; spoznavati matematiko kot proces, razvijati kreativnost in ustvarjalnost ter zaupati v lastne matematične sposobnosti; spoznavati in uporabljati različne informacijsko-komunikacijske tehnologije (IKT) kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov; presojati, kdaj je smiselno uporabiti določeno informacijsko-komunikacijsko tehnologijo in razviti kritični odnos do informacij na spletu.

V učnem načrtu so zapisana tudi **procesna znanja**, ki so tesno povezana z matematičnim, vendar so bolj splošna, prenosljiva tudi na druga področja. To so predvsem znanja, ki omogočajo uporabo specifičnih znanj, npr.: razvoj bralnih strategij, ustno in pisno izražanje, načrtovanje raziskovalnih nalog, uporabo informacijsko-komunikacijskih tehnologij, abstraktno razmišljanje, analitično reševanje problemov, pristope pri uporabi matematike v vsakdanjem življenju, sprejemanje odločitev, konstruktivno obvladovanje čustev, samospoštovanje in spoštovanje do soljudi, sodelovanje v skupini oz. timu.

Kompetence

Kompetence so v učnem načrtu za matematiko za gimnazijo zapisane v poglavju *2 Splošni cilji/kompetence* (Učni načrt za matematiko 2008: 6) in v poglavju *5.2 Dejavnosti za razvoj kompetence* (Učni načrt za matematiko 2008: 42).

Učni načrt za matematiko (2008) vključuje na smiselni ravni vseh osem kompetenc (Poročilo Evropskega parlamenta in Sveta Evropske unije z dne 18. 12. 2006, Uradni list EU, št. 394/10), čeprav je seveda najbolj poudarjena matematična kompetenca, ki je še podrobneje razčlenjena. Poleg matematične kompetence so v učnem načrtu zapisane tudi druge kompetence, z navedenimi dejavnostmi.

Matematična kompetenca je sposobnost uporabe matematičnega načina razmišljanja za reševanje različnih matematičnih in interdisciplinarnih problemov, sposobnost doživljanja matematike kot kulturne vrednote ter sposobnost doživljanja in interpretacije sveta. Pri tem je pomembno, da so intuitivni procesi reševanja podkrepljeni s pravili logike (razmišljanje in izpeljevanje zaključkov, argumentiranje, oblikovanje modelov, formuliranje in reševanje problemov).

Matematična kompetenca vključuje (Učni načrt za matematiko 2008: 6):

- poznavanje, razumevanje in uporabo matematičnih pojmov in povezave med njimi ter izvajanje in uporabo postopkov;
- sklepanje, posploševanje, abstrahiranje in reflektiranje na konkretni in splošni ravni;
- razumevanje in uporabo matematičnega jezika (branje, pisanje in sporočanje matematičnih besedil, iskanje in upravljanje matematičnih virov);
- zbiranje, urejanje, strukturiranje, analiziranje, predstavljanje podatkov

ter interpretiranje in vrednotenje podatkov oz. rezultatov;

- sprejemanje in doživljanje matematike kot uporabnega orodja in kulturne vrednote;
- uporabo informacijsko-komunikacijske tehnologije pri usvajanju novih matematičnih pojmov, izvajanju matematičnih postopkov, preiskovanju in reševanju matematičnih problemov in uporabi v naravoslovju;
- raziskovanje in reševanje problemov.

Kot v nekaterih učnih načrtih naravoslovnih predmetov je tudi v učnem načrtu za matematiko zapisana **naravoslovno-matematična kompetenca** za razvoj zmožnosti kompleksnega mišljenja in razdeljena na področja: iskanje, obdelava in vrednotenje podatkov iz različnih virov; uporaba osnovne strokovne terminologije pri opisovanju pojavov, procesov in zakonitosti; odnosna in odločitvena zmožnost (Učni načrt za matematiko 2008: 7).

Kompetenca **sporazumevanje v maternem jeziku/slovenščini** je razčlenjena na: slušno razumevanje, govorno sporočanje, bralno razumevanje in pisno sporočanje; učenci v povezavi s slovenščino ob branju matematičnega teksta (npr. besedilni problemi, učenje iz učbenika) razvijajo bralne strategije (prelet, postavitev vprašanja, branje, ponovni pregled, poročanje), bralne sposobnosti, odnos do branja, zanimanje za branje; skrb za razvijanje strokovne terminologije.

Kompetenco **sporazumevanje v tujih jezikih** učenci razvijajo tako, da npr. predstavijo (ustno, pisno) osnovni matematični tekst v enem tujem jeziku.

Kompetenco **učenje učenja** učenci razvijajo tako, da npr. načrtujejo lastni proces učenja: se spremljajo in usmerjajo v procesu učenja ter evalvirajo lastni učni proces; samonadzirajo sebe pri delu; reflektirajo lastno znanje, sodelujejo v pogovorih o ocenjevanju znanja; razvijajo odgovornost za lastno znanje, razvijajo delovne navade, metakognitivna znanja. K učinkovitemu usmerjanju lastnega učenja, učinkovitemu upravljanju časa in načrtovanju lastnega učnega procesa lahko veliko pripomore kompetenca učenje učenja in njeno zavedanje. Kako poteka proces učenja, kako se učiti pri posameznem predmetu, bi morali opredeliti tudi učitelji predmeta, in ne le šolski svetovalni delavci (Pečjak S., 2004, VIZ).

Samoiniciativnost in podjetnost: učenci se pri pouku matematike učijo ustvarjalnosti, dajanja pobud, sprejemanja odločitev in podajanja ocen tveganja (projekti). Za razvijanje osebnostnih kvalitet (socialnost, samospoštovanje, medsebojne vrednote, obvladovanje čustev) sodelujejo pri skupinskem delu in sodelovalnem učenju, v timih (npr. projekti); v sodelovanju z drugimi razvijajo lastnosti, kot so obvladovanje čustev, odgovornost, samospoštovanje, integriteta (poštenost in odkritost).

Digitalna kompetenca je še posebej opredeljena v poglavju *6.1 Informacijsko-komunikacijska tehnologija*. V tem poglavju je zapisano, da se uporaba tehnologije zahteva in pričakuje pri nadaljnjem študiju, v vseh poklicih in na vseh delovnih mestih ter je tudi sestavni del vsakdanjega življenja. Zato mora šola usposobiti učence za njeno uporabo. Pouk matematike usposablja predvsem za uporabo tehnologije pri spopadanju z matematičnimi problemi in posredno tudi za uporabo v vsakdanjem življenju.

- IKT odpira veliko možnosti za učinkovitejši razvoj matematičnega znanja učenca in omogoča različne pristope k poučevanju in učenju (npr.

raziskovanje in reševanje matematičnih ter avtentičnih problemov).

- IKT omogoča hitro in nepristransko povratno informacijo. To lahko opogumlja učence, da sami predvidevajo, razvijajo svoje zamisli, jih testirajo in jih spreminjajo, popravljajo oziroma izboljšujejo.
- IKT lahko kompenzira različne učne in grafomotorične primanjkljaje učencev ter ponuja dodatne možnosti učenja v ustreznem spoznavnem stilu posameznika.

Kroskurikularne teme

Cilji kroskurikularnih tem, kot so informacijsko-komunikacijska tehnologija, okoljska vzgoja, vzgoja za zdravje (npr. matematika v športu), poklicna orientacija, vzgoja potrošnika, prometna vzgoja, knjižnično-informacijska znanja (delo z viri) idr., so vključeni posredno v cilje in pričakovane rezultate in pri reševanju statistične naloge (npr. varovanje zdravja, vzgoja potrošnika, podjetnost).

Pričakovani rezultati

Pričakovani rezultati temeljijo na učnociljnem in procesno-razvojnem pristopu in izhajajo iz zapisanih ciljev, vsebin in kompetenc. Zapisani so splošno, kar pomeni, da jih bodo učenci dosegli v različnem obsegu in na različnih taksonomskih stopnjah. Pričakujemo, da bodo učenci pri pouku matematike med izobraževanjem in po končanem srednjem šolanju obvladali temeljna matematična znanja pa tudi veščine oz. tiste spretnosti, ki so potrebne za ustvarjalnost, kreativnost in učinkovito uporabo (matematičnega) znanja ter bodo razvili zaupanje v lastne matematične sposobnosti in sprejemali matematiko kot kulturno vrednoto. Pričakujemo tudi, da bodo razvili kompetence, ki vodijo k sposobnostim za vseživljenjsko učenje.

Medpredmetno povezovanje – poti do kompleksnih znanj in pričakovanih rezultatov

Med načeli in cilji posodabljanja učnih načrtov (Smernice, 2007) sta tudi povezovanje predmetov in disciplin ter holistični pristop učenja in poučevanja. Martin-Kneip, Fiege in Soodak (1995) opredeljujejo medpredmetno povezovanje kot primer holističnega učenja in poučevanja, ki kaže realen interaktiven svet, njegovo kompleksnost, odpravlja meje med posameznimi disciplinami in podpira načelo, da je vse znanje povezano. Medpredmetno povezovanje ne pomeni le razvijanja konceptualnega povezovanja (povezovanje sorodnih pojmov pri različnih predmetih), ampak razvija pri učencih tudi generične veščine, ki so neodvisne od vsebine in so uporabne v različnih okoliščinah (npr. kritično mišljenje, obdelava podatkov, uporaba IKT ...).

Dejavnosti, povezane z medpredmetnim povezovanjem, vodijo k doseganju kompleksnih znanj in h kompleksnim pričakovanim rezultatom. Medpredmetne povezave uresničujemo in izvajamo na različnih ravneh in z različnimi cilji:

a) *Na ravni vsebin:* obravnava oz. reševanje interdisciplinarnih problemov. Pri teh dejavnostih uporabljamo specifična znanja posameznih disciplin in tudi generične veščine in spretnosti, ki predstavljajo aplikacijo specifič-

nega znanja na avtentične probleme.

b) *Na ravni procesnih znanj:* učenje in uporaba procesnih znanj (npr. iskanje virov, oblikovanje poročila ali miselnega vzorca, govorni nastop, delo v skupini ...).

c) *Na konceptualni ravni:* obravnava pojmov iz različnih predmetnih perspektiv z namenom poglabljanja in razumevanja (npr. naravna rast pri biologiji v povezavi z eksponentno funkcijo pri matematiki, eksponentno pojemanje v povezavi z upadanjem vrednosti dobrin na trgu idr.). Primeri naj bodo kot pomembni *zgledi*, ki so namenjeni razumevanju matematike in osmišljanju matematičnih vsebin.

Pri tovrstnih dejavnostih učenci pridobivajo izkušnje in se učijo matematike ter tudi generičnih znanj, ki naj bi se v končni fazi kazala kot **kompleksni pričakovani rezultati**, kot npr.:

Učenci:

- prepoznajo vlogo in pomen matematike in drugih disciplin v realnih situacijah in se učijo matematiziranja;
- uporabljajo matematiko v matematičnih kontekstih in v realnih situacijah;
- modelirajo, primerjajo modele in rezultate različnih modelov in interpretirajo njihove rešitve z vidika matematike in realnih situacij idr.

Didaktični vidiki medpredmetnega povezovanja iz perspektive matematike:

- obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv;
- prepoznati matematični kontekst v realnih situacijah in modelirati;
- reševati interdisciplinarne probleme in matematizirati;
- razvijati uporabo IKT kot možnosti za razvoj matematičnega znanja ter kot podporo pri učenju in poučevanju;
- razvijati generične veščine in spretnosti.

Predlogi medpredmetnih povezav iz perspektive obravnave matematičnih pojmov iz različnih predmetnih perspektiv so v učnem načrtu za matematiko zapisani v poglavju *3 Cilji in vsebine – Didaktična priporočila* (Učni načrt za matematiko 2008: 8–34). V tabeli 1 povzemamo nekatere od teh predlogov ter dodajamo didaktične vidike medpredmetnega povezovanja.

Tabela 1: Predlagane teme za medpredmetno povezovanje z izhodiščno temo pri matematiki

Izhodiščna tema pri matematiki	Vsebina za medpredmetno obravnavo	Didaktični vidiki predmetnih povezav Dejavnosti
Osnove logike	Izjavni račun Vključeni predmeti: matematika, slovenščina, filozofija	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv Veljavnost izjav lahko formalno preverimo z uporabo pravil sklepanja in s predstavitvami z množicami in operacijami med njimi.
Naravna in cela števila	Praštevila Dvojiški številski sestav Vključena predmeta: matematika, informatika	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv Obravnavo praštevil povežemo z uporabo IKT (npr. uporaba spleta pri iskanju trenutno največjega praštevila). Učenci lahko samostojno raziščejo pomen dvojiškega sestava v povezavi z informatiko.
Racionalna števila	Procentni račun, kemijsko računanje Vključeni predmeti: matematika, fizika, kemija	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv Obravnavo procentnega računa načrtujemo medpredmetno, lahko pri projektni nalogi.
Realna števila	Absolutna in relativna napaka Vključena predmeta: matematika, fizika	• prepoznati matematični kontekst v realnih situacijah Navajamo primere uporabe absolutne vrednosti v vsakdanjem življenju. Obravnavo absolutne in relativne napake načrtujemo v povezavi s fiziko in obdelavo podatkov.
Algebrski izrazi, enačbe in neenačbe	Računanje z enotami Enakomerno in enakomerno pospešeno gibanje Vključeni predmeti: matematika, fizika, kemija	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv Izbiramo primere enačb iz fizike (enakomerno in enakomerno pospešeno gibanje) in kemije.

Izhodiščna tema pri matematiki	Vsebina za medpredmetno obravnavo	Didaktični vidiki predmetnih povezav Dejavnosti
Potence in koreni	Poiščemo primere uporabe potenc v fiziki in kemiji (pretvarjanje enot) Vključeni predmeti: matematika, fizika, kemija	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv Rešujemo iracionalne enačbe s kvadratnim in kubičnim korenom, pri čemer je bolj kot na zahtevnosti zgledov poudarek na prepoznavanju (ne)ekvivalentnosti enačb in posledični potrebi po preizkusu ali pisanju določilnih pogojev.
Geometrija v ravnini in prostoru	Raziskovanje odnosov med geometrijskimi pojmi, kot so znamenite točke trikotnika. Transformacije, vzorci: simetrija v naravi, zlati rez, slikovna zaporedja z geometrijskimi vzorci, ornamenti idr. Vključeni predmeti: matematika, informatika, umetnostna zgodovina	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv • prepoznati matematični kontekst v realnih situacijah • razviti prostorsko vizualizacijo • uporaba programov za dinamično geometrijo Priporočamo, da učenci samostojno preiskujejo in raziskujejo. Pri reševanju geometrijskih problemov in tudi pri drugih problemih razvijamo uporabo matematike v matematičnih kontekstih in v primerih iz realnega življenja ter navajamo uporabo osnovnih strategij (izdelava skice, analiza odnosov, vključevanje pojmov iz ravninske geometrije in geometrije teles ...).
Vektorji v ravnini in prostoru	Razstavljanje sil, skalarni produkt pri definiciji dela... Vključena predmeta: matematika, fizika	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv Priporočljiva je uporaba računalniških programov za dinamično geometrijo in e-gradiva. Obravnavo vektorskega produkta je priporočljivo izpeljati v tehničnih in naravoslovnih programih in poudariti geometrijsko in fizikalno interpretacijo (npr. navor, sila na vodnik v magnetnem polju, sila na nabite delce v magnetnem polju).

Izhodiščna tema pri matematiki	Vsebina za medpredmetno obravnavo	Didaktični vidiki predmetnih povezav Dejavnosti
Funkcije	Obravnavo linearne funkcije in enačb povežemo z obravnavo pojmov v fiziki (enakomerno in enakomerno pospešeno gibanje). Učenci/učenke raziskujejo premike, raztege in zrcaljenja grafov funkcij z uporabo primernih računalniških programov. Vključeni predmeti: matematika, fizika, informatika	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv Učenci/učenke raziskujejo premike, raztege in zrcaljenja grafov funkcij z uporabo primernih računalniških programov ali e-gradiva. Razumevanje pojma limite in zveznosti lahko podkrepimo z uporabo dinamičnih programov in tabeliranjem (IKT). Z medpredmetnimi povezavami (fizika, kemija, biologija) osmislimo pojem spremenljivke, funkcijske odnose in prikazovanje spremenljivk ter odnosov.
Potenčna funkcija	Gravitacijska sila, Stefanov zakon, plinska enačba ... Vključena predmeta: matematika, fizika	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv • prepoznati matematični, fizikalni kontekst v realnih situacijah
Kvadratna funkcija	Enakomerno pospešeno gibanje Zakon o vplivu koncentracij Vključeni predmeti: matematika, fizika, kemija, informatika	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv • prepoznati matematični, fizikalni kontekst v realnih situacijah Z uporabo IKT lahko obravnavamo vsebino: risanje grafov, pomen konstant v posameznih oblikah enačb, medsebojna lega premice in parabole, modeliranje s kvadratno funkcijo.
Eksponentna funkcija	Rast populacije Modeliranje z eksponentno funkcijo (določiti prilagoditveno funkcijo) Vključena predmeta: matematika, biologija	• prepoznati matematični kontekst v realnih situacijah • reševati interdisciplinarne probleme in matematizirati
Logaritemska funkcija	Merjenje pH-vrednosti vodnih raztopin Potresna jakost, zvočna jakost Vključeni predmeti: matematika, kemija, fizika	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv Z uporabo IKT raziščemo lastnosti logaritemske funkcije.

Izhodiščna tema pri matematiki	Vsebina za medpredmetno obravnavo	Didaktični vidiki predmetnih povezav Dejavnosti
Polinomske funkcije	Modeliranje primerov iz vsakdanjega življenja	• prepoznati matematični kontekst v realnih situacijah • reševati interdisciplinarne probleme in matematizirati
Kotne funkcije	Nihanje, valovanje Vključeni predmeti: matematika, fizika, informatika	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv Z uporabo IKT raziščemo vrednosti kotnih funkcij na enotski krožnici in rišemo grafe.
Stožnice	Kroženje, optika, gibanje nebesnih teles, tir nabitih delcev v električnem in magnetnem polju ... Vključeni predmeti: matematika, fizika, zgodovina	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv Matematično preiskovanje z uporabo IKT.
Zaporedja in vrste	Fibonaccijevo zaporedje Amortizacijski načrt Računalniške preglednice Vključeni predmeti: matematika, umetnostna zgodovina, informatika	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv • prepoznati matematični kontekst v realnih situacijah • opazovati numerične, slikovne, algebrske vzorce, ugotavljati pravilnosti, zakonitosti in posploševati
Diferencialni račun	Premo in krivo gibanje Vključena predmeta: matematika, fizika	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv
Integralski račun	Medpredmetna povezava s fiziko (npr. pot, delo) Vključeni predmeti: matematika, fizika, informatika	• obravnavati matematične pojme iz različnih predmetnih perspektiv Pri vpeljavi določenega integrala priporočamo uporabo IKT.
Kombinatorika	Uvajamo primere iz vsakdanje življenjske prakse (loto, športna napoved, karte, igralni avtomati, Morsejeva abeceda). Z namenom boljšega razumevanja pojme obravnavamo iz različnih predmetnih perspektiv: npr. matematike in biologije (dedovanje, populacijska genetika). Vključeni predmeti: matematika, biologija, fizika	• prepoznati matematični kontekst v realnih situacijah • reševati interdisciplinarne probleme in matematizirati Uporabljamo interaktivne programe in žepna računala.

1.2 Načrtovanje učnega procesa

Potek učnega procesa

Dobro načrtovanje učnega procesa je pogoj za uspešno izpeljavo pouka. Če je premišljeno in dovolj konkretno, učitelju olajša izpeljavo učnega procesa, učencem pa ustvari razmere za doseganje pričakovanih rezultatov.

Pri načrtovanju in izpeljavi učnega procesa je dobro biti pozoren na nekatere faze poteka dela v razredu. Opisane so v nadaljevanju in povzete v predlagani shemi: Elementi priprave na pouk (tematsko načrtovanje, načrtovanje učne enote).

1. Poznavanje in razumevanje že obravnavanih pojmov, dejstev, vsebin

Pri načrtovanju opredelimo pristope učenja in poučevanja, s katerimi bomo preverili poznavanje in razumevanje že obravnavnih pojmov, dejstev, vsebin, ki se navezujejo na novo vsebino.

V ta namen oblikujemo naloge, vprašanja, dejavnosti, s katerim bomo preverili razumevanje pojmov in vsebin ter učence motivirali za učenje.

Določimo bistveno vprašanje učne ure oz. učnega sklopa. Dobro je, da to naredimo skupaj z učenci.

2. Osrednji del učnega procesa

Pri vpeljavi novih vsebin poskrbimo, da novo snov smiselno (z vprašanji, aktivnostjo, izzivi nalogami ...) navežemo na predznanje. Vprašanja postavljamo v povezavi z matematičnim predznanjem, ki se navezuje na novo vsebino in tudi na druga nematematična področja.

Kje se bodo po vašem predvidevanju pojavile morebitne težave: v predznanju ali pri obravnavi snovi?

Predvideni ukrepi za doseganje ciljev ob morebitnih težavah (npr. prilagojeni didaktični pristopi, didaktično gradivo idr.).

a) Uvid v smiselnost učenja novih vsebin

S premišljenimi vprašanji, izzivi in aktivnostmi poskrbimo, da dobijo učenci *uvid v smiselnost učenja novih vsebin* (zakaj je potrebno in smiselno vpeljati nove pojme).

b) Navezovanje na predznanje

S primerno izbranimi dejavnostmi, nalogami ali izzivi izpeljemo prehod od že znanega k novemu (npr. od pojma funkcija k pojmu realna funkcija).

- Opredelimo naloge, vprašanja in dejavnosti, s katerimi bomo ***preverili razumevanje predhodnih pojmov***, ki se navezujejo na nove pojme oz. vsebino.

- Opredelimo naloge, vprašanja in dejavnosti, s katerimi bomo poskrbeli, da bodo učenci dobili uvid v smiselnost učenja novih vsebin (zakaj je potrebno in smiselno vpeljati nove pojme).
- Opredelimo naloge, vprašanja in dejavnosti, ki preverjajo usvojeno novo znanje, poskrbimo za povezovanje znanj in mogoče aplikacije z drugimi predmetnimi področji.

3. Preverjanje doseganja pričakovanih rezultatov

a) Opredelimo naloge/vprašanja, s katerimi bomo preverili, ali so učenci dosegli pričakovane rezultate.

b) Preverimo, ali smo načrtovane cilje ure/sklopa dosegli (sklepna ponovitev).

4. Refleksija

Ob koncu učnega procesa opravimo refleksijo (pogled nazaj) na dejavnosti, potek dela, odnose, pričakovanja, dosežene rezultate idr.

Refleksijo izpeljejo učenci, učitelji, skupaj ali/in posamezno.

REFLEKSIJA (usmerjanje zavesti na lastne misli in sebe)
Refleksija učitelja (nekaj namigov):
• Kako vem, da smo odgovorili na bistveno vprašanje, ki smo ga postavili na začetku učnega procesa (ure/sklopa)?
• Kako vem, da je bil učni proces uspešen/neuspešen?
• Kako vem, da so učenci usvojili načrtovane cilje, pričakovane rezultate?
• Zaradi katerih razlogov učenci niso usvojili pričakovanih rezultatov?
• Se je izbrani didaktični pristop pri tej vsebini izkazal za uspešnega?
• Česa nam ni uspelo narediti?
• Kaj je bilo tako dobro/slabo, da bi pri naslednji ponovitvi naredil/a enako/drugače?
• Vtisi in opažanja po izpeljavi
Refleksija učenca (nekaj namigov):
• Česa sem se naučil/a?
• V čem je uporabnost pridobljenega znanja?
• Kje sem bil najbolj uspešen/a?
• Česa mi ni uspelo narediti?
• Vzroki za težave (ker še ne znam, se še nismo učili, sem pozabil/a, nisem razumel/a, ker je bilo prezahtevno, nisem bil/a motiviran/a, vsebina zame ni smiselna ...)
• Kaj moram izboljšati?
• Tudi v prihodnje želim delati v skupini, v parih, posamezno ..., ker ...
Refleksija o delovanju v (pri) skupini/paru/timu/sodelovalnem učenju/individualnem delu ... (ustrezno podčrtaj ali dopiši)
• Opiši delovanje v (pri) skupini/paru/timu/sodelovalnem učenju/individualnem delu ...
• Opiši svojo vlogo v (pri) skupini/paru/timu/sodelovalnem učenju/individualnem delu ...
• Opiši svoj prispevek v skupini.

Shema: Elementi priprave na pouk (tematsko načrtovanje, načrtovanje učne enote)

Tema:	
Enota:	
Predvideni čas izpeljave:	

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

Učni cilji (splošni, procesni in vsebinski) ***(opredelitev bistvenega vprašanja):***	Dijaki/dijakinje:	
Kompetence *(ustrezno označi)*:	K1 - sporazumevanje v slovenščini	K5 - učenje učenja
	K2 - sporazumevanje v tujih jezikih	K6 - socialne in državljanske kompetence
	K3 - matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji	K7 - samoiniciativnost in podjetnost
	K4 - digitalna pismenost	K8 - kulturna zavest in izražanje
Potrebno predznanje in izkušnje:	Dijaki/dijakinje:	
Pričakovani dosežki/ rezultati:	Dijaki/dijakinje:	
Strategije pouka *(metode učenja in poučevanja):**		
Učne oblike:***		
Potek učnega procesa *(strategije poučevanja in učenja, dejavnosti** za učence in učitelja/e, faze učnega procesa …)*	Faze dela:	
Potrebna programska oprema:		

Opombe:

* *poučevanje z razlago, izkustveno učenje, strukturirano učenje in poučevanje, učenje z odkrivanjem (vodeno, samostojno), raziskovalni pouk, problemsko učenje, projektno delo idr.*

** *glej Primeri dejavnosti*

*** *glej Učne oblike*

Primeri dejavnosti *(nekaj namigov)*:

- uporaba in izdelovanje modelov,
- iskanje analogij,
- navajanje/iskanje primerov in nasprotnih primerov,
- samostojno reševanje odprtih problemov,
- eksperimentiranje,
- meritve v učilnici ali v naravi,
- zbiranje podatkov,
- reflektiranje geometrijskih znanj ob uporabi geometrijskih modelov,
- predstavitev pojmov z diagrami, z modeli, risbami,
- ocenjevanje,
- približno računanje,
- samostojno iskanje virov,
- iskanje podobnosti, razlik ter povezav med pojmi in dejstvi,
- dialog (dialog je pomemben za ubeseditev zamisli, vpogled v razmišljanje sošolca, urjenje v komuniciranju, preverjanje lastnega razumevanja)[1].

Učne oblike: sodelovalno učenje in poučevanje, skupinsko delo, timsko delo, delo v parih, individualno delo, skupinske diskusije idr.

Smiselno izbrane učne oblike pripomorejo k uresničevanju ciljev učnega procesa in so le sredstvo, s katerim uresničujemo postavljene cilje. Tako kot npr. le frontalni pouk ali raziskovalni pouk didaktično nista vedno primerna, moramo tudi učne oblike načrtovati po zastavljenih ciljih.

Strategije pouka: razlaga, izkustveno učenje, učenje z odkrivanjem (vodeno, samostojno), raziskovalni pouk, problemsko učenje, projektno delo idr.

[1] *Oblike dialoga so lahko različne: predstavitev izdelkov, postavljanje vprašanj, utemeljevanje, diskusije, izmenjava mnenj, postavljanje ugotovitev …*

1.3 Strategije pouka – metode učenja in poučevanja

Sodobna družba učiteljem postavlja vedno nove izzive, kot so obvladovanje informacijsko-komunikacijske tehnologije, skrb za osebe s posebnimi potrebami, integracija, diferenciacija, individualizacija, oblikovanje multikulturnega okolja, medpredmetno povezovanje ipd., posledično pa se tako spreminjajo tudi vloga in naloge učitelja. Učitelj naj bi pri učencih razvijal visoko stopnjo kognitivnih sposobnosti, fleksibilnost, intelektualno radovednost, motivacijo za učenje ter jim pomagal razvijati socialne spretnosti in tudi psihološke moči, ki jih učenci potrebujejo, da bi obvladovali težavne in stresne situacije. Strategije pouka, ki omogočajo uresničevanje vseh teh ciljev, so različne. Učitelj jih izbere glede na cilje učnega procesa in jih, če je le mogoče, prilagodi razredu, skupini, posamezniku.

1.3.1 Poučevanje z razlago

Ausbel (Woolfolk, 2002) je oblikoval model poučevanja z razlago, s katerim spodbujamo smiselno učenje, ne pa učenja na pamet. Razlaga pomeni pojasnjevanje ali nadgrajevanje zamisli in dejstev. Pri tem pristopu učitelj predstavi vsebino in gradivo v organizirani obliki in v takem zaporedju, da učenci prejmejo najbolj koristno gradivo kar najbolj učinkovito. Ausbel (prav tam) je v nasprotju z Brunerjem prepričan, da bi moralo učenje potekati deduktivno, od splošnega k specifičnemu, od pravila k posameznim primerom. Pri tem pristopu se uporablja deduktivno sklepanje.

Optimalno učenje nastopi, kadar se učenčeve sheme in učno gradivo ujemajo. Da bi bilo to ujemanje čim bolj verjetno, se učna ura po Ausbelovi teoriji vedno začne z vnaprejšnjimi organizatorji. To pomeni uvod v odnos ali pojem višjega reda, ki je dovolj širok, da zajame vse informacije, ki so na vrsti za tem. Njihova funkcija je poskrbeti za podporo novim informacijam. Organizatorji so lahko primerjalni ali opisovalni.

- **Primerjalni prikličejo v delovni spomin že obstoječe sheme.** Primer: pri uvajanju pojma obratno sorazmerni količini **prikličemo v delovni spomin** povezave s pojmom odvisni in neodvisni količini ter s premo sorazmernimi količinami.
- **Opisovalni organizatorji zajemajo novo znanje**, ki ga bodo učenci morali razumeti pri prihajajočih informacijah. Vsebuje lahko opis nadrejenega pojma (npr. pojem *odvisni količini* je nadrejen pojmu *obratno sorazmerni količini*). Organizator mora nakazovati osnovne odnose med pojmi in izrazi, ki bodo uporabljeni. Konkretni modeli, diagrami, analogije so lahko zelo dobri organizatorji.

Naslednji korak pri Ausbelovi metodi je predstavitev vsebine v pomenu podobnosti in razlik z uporabo specifičnih primerov. Pri učenju vsakega novega pojma mora učenec videti podobnosti in razlike med novim pojmom in tem, kar že ve. Pri učenju z razlago je koristno, da učence prosimo, naj sami navedejo podobnosti in razlike. Skupaj s primerjavo so ustrezni specifični primeri. Poučevanje z razlago je razvojno primernejše za starejše učence v višjih razredih osnovne šole ali starejše učence v srednji šoli.

Poučevanje z razlago lahko dopolnimo z razgovorom

Pri razgovoru vsi učenci slišijo različno razmišljanje sošolcev. Pri takšni obliki ima učitelj pregled nad dogajanjem, vodi delo. Učenje in poučevanje je sorazmerno strukturirano. Dobra stran je v tem, da učitelj natančno ve, kam mora pripeljati učence, in jih preusmeri, če so zašli.

Slabost razgovora je, da morda odgovarjajo le nekateri učenci, drugi so tiho. Nekateri se ne izpostavljajo radi, imajo slabo samopodobo, jih je strah, ali pa zares ne sledijo pouku.

1.3.2 Izkustveno učenje

Realistični pristop izhaja iz predpostavke od prakse k teoriji (Korthagen, 1999), tradicionalni pristop pa od teorije k praksi. Pri tem pristopu se zmanjša prepad med teorijo in prakso oz. ga proces izobraževanja ne ustvarja, kot je to značilno za tradicionalistični pristop. Proces učenja/poučevanja se začne s situacijskim znanjem in se razvije v interakcijo učenca s problemsko situacijo; konkretna učna situacija ostane referenčna točka učnega procesa.

Izkustveno učenje vključuje:

- opazovanje (reflektiranje znanj),
- aktivnost, ki vključuje katero koli dejavnost: npr. predstavitev pojmov z modeli, diagrami, iskanje primerov in protiprimerov, eksperimentiranje.

Oglejmo si primer VOTLI KVADRI. Naloga zahteva sposobnosti in spretnosti, kot je prostorska vizualizacija, ki je bistvenega pomena za matematično pismenost.

Primer: VOTLI KVADRI (prirejeno po PISA 2006)

Naloga:

Z lepljenjem kock dimenzije 1 cm x 1 cm x 1 cm želimo narediti kvader, dolg m cm, širok n cm in visok s cm (m, n, s so naravna števila, $m \geq 3$, $n \geq 3$, $s \geq 3$), ki bo od zunaj zaprt z vseh strani, v notranjosti pa bo votel. Najmanj koliko kock dimenzije 1 cm x 1 cm x 1cm moramo uporabiti, da bo v notranjosti bloka nastal največji mogoči votli prostor.

Pri deduktivnem pristopu bi nalogo najprej rešili na splošni ravni, nato pa bi dobljeno formulo uporabili z analiziranjem posameznih primerov. Pri induktivnem pristopu, ki je značilen za izkustveno učenje, je pristop ravno obraten. Najprej problem rešimo na konkretni ravni, pri izbranih dimenzijah kvadra, nato je na vrsti posplošitev.

Pri izkustvenem pristopu bodo učenci takšne in podobne probleme reševali najprej induktivno, z opazovanjem primerov, tudi s konkretnimi modeli, slikami in skicami, za konkretno izbrane dimenzije kvadra, npr.:

Z lepljenjem kock dimenzije 1 cm x 1 cm x 1 cm želimo narediti kvader, dolg 3 cm, širok 3 cm in visok 4 cm, ki bo od zunaj zaprt z vseh strani, v notranjosti pa bo votel. Najmanj koliko kock dimenzije 1 cm x 1 cm x 1 cm moramo uporabiti, da bo v notranjosti bloka nastal največji mogoči votli prostor.

Izdelamo tabelo za različne situacije.

Tabela: Minimalno število kock za izdelavo VOTLEGA KVADRA (za *m, n, s* izbiramo naravna števila večja ali enaka 3)

m	*n*	*s*	minimalno št. kock
3	3	**3**	**26**
3	3	**4**	**34**
3	**4**	**4**	**44**
5	**4**	**4**	**68**
.....			
m	***m***	***m***	***m·n·s – (m – 2) · (n – 2) · (s – 2)***

V drugi fazi bodo učenci problem rešili na splošni ravni. Pomagali si bodo lahko tudi z izkušnjami, ki so si jih pridobili, ko so reševali problem za konkretno izbrane dimenzije votlega kvadra. Seveda bodo učenci razmišljali različno. Ena možnost je, da učenec začne z maksimalnim številom kock, ki bi jih potreboval, če bi bil kvader poln, torej $m \cdot n \cdot s$ kock. Nato odšteje maksimalno število kock iz sredine. Ker je blok dolg m kock, jih odvzame $(m - 2)$, ker je širok n, jih odvzame $(n - 2)$, in ker je visok s, jih odvzame $(s - 2)$.

Minimalno število kock za izdelavo »VOTLEGA KVADRA« je:

$m \cdot n \cdot s - (m - 2) \cdot (n - 2) \cdot (s - 2)$

Izkustveno učenje, induktivno učenje, opazovanje primerov, delo s konkretnim materialom, je zlasti primerno za učence, ki probleme rešujejo na osnovi celostnega vtisa (Žakelj, 2003). Ne glede na metode učenja in poučevanja pri pouku stremimo k dejavnemu učenju, ki vodi do interakcije med konkretno in miselno dejavnostjo.

Tudi izziv ŠKATLA, ki ga navajamo kot primer odprtega problema (Iz danega kartona naredimo škatlo. Razišči njeno prostornino.), bomo pri izkustvenem učenju v prvi fazi raziskovali na primeru konkretnega modela, z dano dimenzijo kartona, šele v drugi fazi bomo o problemu razmišljali splošno.

1.3.3 Strukturirano učenje in poučevanje

Vodeno učenje in poučevanje sta strukturirana in vključujeta jasno organizacijo informacij in jasno zaporedje korakov. Primerna sta za učence, ki rešujejo probleme na podlagi celostnega vtisa in težko samostojno ločijo del od celote. V razredu jih prepoznamo po pasivnem pristopu k učenju (manj zapisujejo, izpisujejo, podčrtavajo), imajo manjšo sposobnost za organiziranje in strukturiranje učnega gradiva, teže izločajo pomembne podatke iz besedila, delajo z metodo poskus – napaka, težave imajo s prevajanjem besedilnih problemov v matematične formule. Seveda je treba tudi te učence k dejavnemu učenju spodbujati. Ritem dela prilagodimo njihovemu zanimanju in sposobnostim.

Smernice pri uporabi strukturiranega učenja

- Uporabljamo vnaprej pripravljeno gradivo za učence.

  Uvod v premo sorazmerje; pripravimo gradivo, naloge, pri katerih učenci analizirajo odnose med odvisnimi količinami.

- Uporabimo številne primere.

  Učenci poiščejo primere odvisnih in neodvisnih količin iz vsakdanjega življenja.

- Usmerimo se na podobnosti in razlike.

  Raziskujejo in poiščejo lastnosti odvisnih in neodvisnih količin.

Primer: Vpeljava pojma odstotek pri strukturiranem/vodenem učenju (Žakelj, 2003)

V tabeli so prikazani zneski mesečnih obresti za različne zneske vloženega denarja. Jure, Maja, Ana in Luka so vložili denar v različne banke. Za svoje prihranke so dobili po mesecu dni tolikšne obresti:

	Vloženi denar (EUR): d	Zneski enomesečnih obresti: o
Jure	4000	40
Maja	5000	50
Ana	3000	30
Luka	2700	27

Razmislili bomo, v kateri banki je najugodneje varčevati. Ali ima katera od bank prednost pred drugo? Ali so pogoji varčevanja povsod enaki? Razmisli in odgovori na vprašanja.

• Ali so bili vloženi zneski, ki so jih vložili Jure, Maja, Ana in Luka, enaki?

Odgovor: _____

• Ali so enomesečne obresti, ki so jih dobili Jure, Maja, Ana in Luka, po vrednosti enake?

Odgovor: _____

• Razmisli, od česa vse je lahko odvisna višina obresti. Navedi nekaj vzrokov.

Odgovor: _____

• Izračunaj količnike med obrestmi in vloženimi zneski (o/d) in jih zapiši v tabelo.

Primerjaj količnike med sabo po velikosti. Kaj opaziš?

Ugotovitev: Smiselno je primerjati razmerja med obrestmi in vloženimi zneski. V vseh primerih je razmerje med obrestmi in vloženim zneskom 1:100. Ulomek 1/100 kot del celote lahko zapišemo tudi v obliki odstotka.

Primer: Reševanje problemov pri strukturiranem/vodenem učenju

Dano je zaporedje 2, 6, 12, 20, 30 ... Razmisli o zakonitosti, ki velja za člene tega zaporedja. Ugotovi pravilo in dopolni zaporedje.

Zapiši člene zaporedja kot produkt dveh faktorjev. Opazuj povezavo med faktorji in indeksom člena zaporedja.

Odgovor:

$a_1 = 2 = \mathbf{1} \cdot 2$

$a_2 = 6 = \mathbf{2} \cdot 3$

$a_3 = 12 = \mathbf{3} \cdot 4$

$a_4 = 20 = \mathbf{4} \cdot 5$

$a_5 = 30 = \mathbf{5} \cdot 6$

.....

Opazuj produkte. Ali opaziš povezavo med indeksom in faktorjem v produktu?

Odgovor: $a_n = n \cdot (n+1)$

1.3.4 Učenje z odkrivanjem – raziskovalni pouk

Bruner (v Marentič Požarnik, 2000, str. 83) se je zavzemal za to, da bi čim več pouka potekalo v obliki odkrivanja. To je utemeljil s trditvijo, da je tako pridobljeno znanje trajnejše in uporabnejše v novih situacijah, učenci so bolj motivirani, razvijeta se samostojnost in kritičnost, poleg vsebine se učenci naučijo tudi metod reševanja problemov.

Raziskovalno učenje (poučevanje) omogoča učencem spoznavanje *vsebine in procesa hkrati.* Poleg vsebine se učijo, kako reševati probleme, vrednotiti rešitve in kritično razmišljati.

Učenje z odkrivanjem je učinkovito, če imajo učenci za to določeno znanje o problemu in vedo, katere strategije uporabiti pri reševanju danega problema. Metode odkrivanja lahko od učencev, šibkejših po znanju, zahtevajo preveč, ker jim primanjkuje vsebinskega predznanja in spretnosti reševanja problemov.

Po navadi ločujemo med samostojnim in vodenim odkrivanjem, pri katerem učitelj poskrbi za delno usmerjanje.

1.3.4.1 Vodeno odkrivanje – raziskovanje

Pri vodenem odkrivanju naj bi učenci sami ali v skupini dosegli določeno ugotovitev, pri pogoju, da imajo navodila, okvirno začrtano pot raziskovanja. Navodila so lahko napisana ali podana ustno. Pri vodenem odkrivanju naj bi bili vsi učenci aktivni (delajo sami, v paru, skupinah ...), v nasprotju s pogovorom, ko se lahko zgodi, da odgovarjajo le nekateri učenci, drugi so tiho: vsi naenkrat ne morejo govoriti, nekateri se ne izpostavljajo radi, jih je strah, ali pa zares ne sledijo pouku. Aktivnost vodenega odkrivanja je lahko tudi krajša.

Stopnjo vodenosti ustrezno prilagodimo razmeram v razredu. Samostojno učenje oz. vodeno odkrivanje je primerno za učence, ki so analitični in so sposobni sami izluščiti posamezne dele od celote in jih organizirati. Spoznamo jih po dejavnem pristopu k učenju (več zapisujejo, izpisujejo, podčrtavajo), imajo večjo sposobnost za organiziranje in strukturiranje učnega gradiva, laže izločijo pomembne pojme iz besedila, sistematično rešujejo probleme, imajo manj težav s prevajanjem besedilnih problemov v matematične formule. Za te učence, ki so sposobni sami organizirati informacije in sami načrtujejo korake v procesu reševanja, je pomembno, da imajo priložnost za samostojno učenje oz. vodeno odkrivanje, zlasti zato, da ne zatremo njihovih zamisli, ustvarjalnosti, ampak spodbujamo njihovo inovativnost in motivacijo za učenje (Gagne, 1985).

Čeprav so pri tem pristopu učenci precej samostojni, je učiteljeva vloga še vedno zelo pomembna (vodi pogovor, razpravo). Med učence, ki so primerni za učenje z odkrivanjem, zagotovo spadajo tudi nadarjeni učenci. Te lahko prepoznamo po nekaterih naslednjih lastnostih (Kavaš, B. 2002):

Učne značilnosti: hitro spoznajo načela, na katerih temeljijo stvari, mislijo jasno in natančno, kritično presojajo podatke in dokaze, hitro si zapomnijo dejstva, iščejo skupne značilnosti in razlike, hitro analizirajo različno vsebino in probleme.

Motivacija: prizadevajo si, da bi nalogo vedno rešili, radi delajo neodvisno, določenim problemom se popolnoma predajo, ob rutinskih nalogah se dolgočasijo, če pa jih naloga zanima, ne potrebujejo nobene zunanje motivacije.

Ustvarjalnost: veliko sprašujejo o različnih stvareh, svoje mnenje jasno izrazijo, pri reševanju problemov tudi tvegajo, imajo veliko zamisli in problemskih rešitev.

Smernice pri uporabi vodenega odkrivanja

Pri uvajanju pojmov predstavimo primere in nasprotne primere ter tako učencem pomagamo videti povezave med pojmi.

1. **Učni proces začnemo z izzivom**, pri strukturiranim učenju in poučevanju pa učencem pripravimo gradivo, razdelano po fazah učenja.

   Pojem odvisne količine ponazorimo s primeri: cena za kilogram moke in število plačanih kilogramov moke.

   Napačno trditev Lika z enakim obsegom imata enako ploščino ovržemo s primerom dveh likov z enakim obsegom in različno ploščino.

2. **Postavimo vprašanja in pustimo učencem čas, da poskušajo nanje odgovoriti.**

   Raziščite odnos med obsegom in polmerom kroga.

   Prvih nekaj odgovorov ne komentiramo. Počakamo na dodatne zamisli.

   Če učenci z odkrivanjem preveč zaidejo, jih začnemo usmerjati z vprašanji.

3. **Učence spodbujamo k sklepanju in oblikovanju sklepov.**

Seveda ne pričakujemo, da bi učenci sami odkrili temeljne matematične resnice. S pristopi pri odkrivanju ali vodenem odkrivanju damo učencem priložnost, da o novem pojmu razmišljajo, povezujejo znanje, ki ga imajo, in tako novo znanje bolj dejavno, z lastnim razmišljanjem, vključijo v mrežo svojega znanja. Sposobnost za povezovanje znanja oz. navezovanje na mrežo znanja je ključ do trajnejšega znanja, večja možnost, da pridobljenega znanja ne bomo pozabili.

Primer: Reševanje problemov pri vodenem odkrivanju

Učenci samostojno ali z delno pomočjo učitelja določijo oz. poiščejo strategije reševanja, ugotovitve, utemeljitev.

Dana so zaporedja števil.

a) 4, 8, 12, 16, 20 ...

b) 2, 6, 12, 20, 30 ...

c) 4, 10, 16, 22 ...

d) 11, 12, 14, 18, 26, 38, 62 ....

Razmisli o pravilu, s katerim bi lahko definirali splošni člen danih zaporedij. Dopolni zaporedja.

Navadno v začetni fazi učencem ne damo preveč natančnih navodil. Dodatna vprašanja jim postavimo glede na njihove potrebe in odzive.

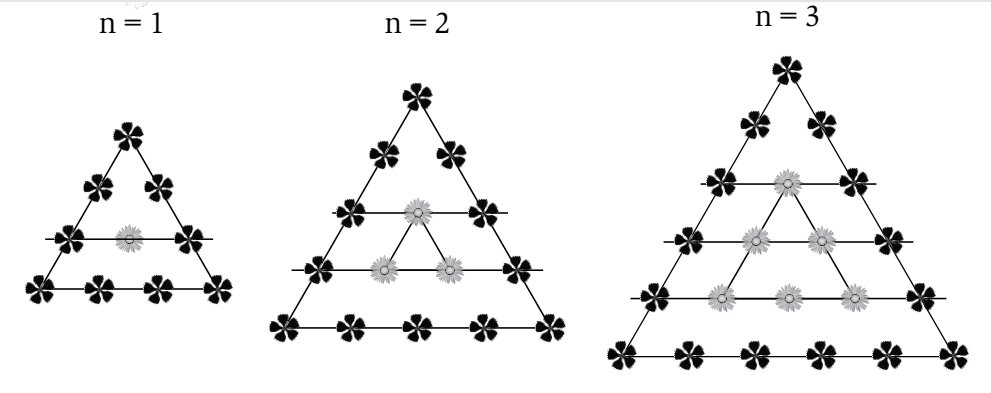
Ne glede na to, ali so učenci delali samostojno ali vodeno, je pomembno, da skupaj oblikujemo sklepe ter se o ugotovitvah pogovorimo.

Reševanje problemov z vodenim odkrivanjem

Primer: CVETLICE

Ana je na domačem vrtu nasadila cvetlice, kot prikazuje slika. Gredice so trikotne oblike, vse stranice so enako dolge. Na sredo je posadila marjetice, okrog njih pa vijolice. Na risbi lahko vidiš razporeditev marjetic in vijolic.

Razmisli, kako se z večanjem trikotniških gredic (z večanjem števila vrst marjetic v trikotniški gredici) spreminja število marjetic in vijolic.



n – število vrst marjetic v trikotni gredici
– marjetice
– vijolice

Pri vodenem odkrivanju postavljamo vprašanja postopoma, tako da pridemo do rešitve po korakih.

1. vprašanje

Opazuj sliko, ugotovi, kako se z večanjem gredic spreminja število marjetic oz. vijolic v posamezni gredici, in izpolni tabelo.

Tabela: Število marjetic in vijolic v trikotniških gredicah

Število vrst marjetic v trikotniški gredici – n	Št. marjetic - $f(n)$	Št. vijolic - $g(n)$
1	1	9
2	3	12
3	6	15
4	10	18
5	15	21
6	21	24
7	28	27
8	36	30
.....		
n		

Opazuj zaporedje števila marjetic in vijolic. Bi lahko napovedal pravilo, po katerem se veča število marjetic oziroma vijolic? Kaj opaziš?

2. vprašanje

Poišči modelni funkciji f in g z analitičnim pristopom ugotavljanja polinomske zveze med količinama, z metodo končnih razlik. V tabelo vpiši za obe funkciji f in g: $\Delta f(n) = f(n + 1) - f(n)$, $\Delta^2 f(n) = \Delta f(n + 1) - \Delta f(n)$, ... in $\Delta g(n) = g(n + 1) - g(n)$ ...

Tabela: Število marjetic in vijolic v trikotniških gredicah

Št. vrst marjetic v trikotniški gredici – n	Št. marjetic $f(n)$	$\Delta f(n)$	$\Delta^2 f(n)$	Št. vijolic $g(n)$	$\Delta g(n)$
1	1	2	1	9	3
2	3	3	1	12	3
3	6	4	1	15	3
4	10	5	1	18	3
5	15	6	1	21	3
6	21	7	1	24	3
7	28	8	1	27	3
8	36			30	
.....					
n					

Kaj lahko sklepaš o funkcijah f in g ? Kaj velja za $\Delta^2 f(n)$ *in za* $\Delta g(n)$*?*

$\Delta^2 f(n) = 1$, *za vsak n*

$\Delta g(n) = 3$, *za vsak n*

Torej je prva modelska funkcija *f* kvadratna, druga modelska funkcija *g* pa linearna, kar pomeni, da lahko podatke modeliramo s kvadratno funkcijo *f* in linearno funkcijo *g*.

Z upoštevanjem podatkov v tabeli dobimo kvadratno in linearno rast:

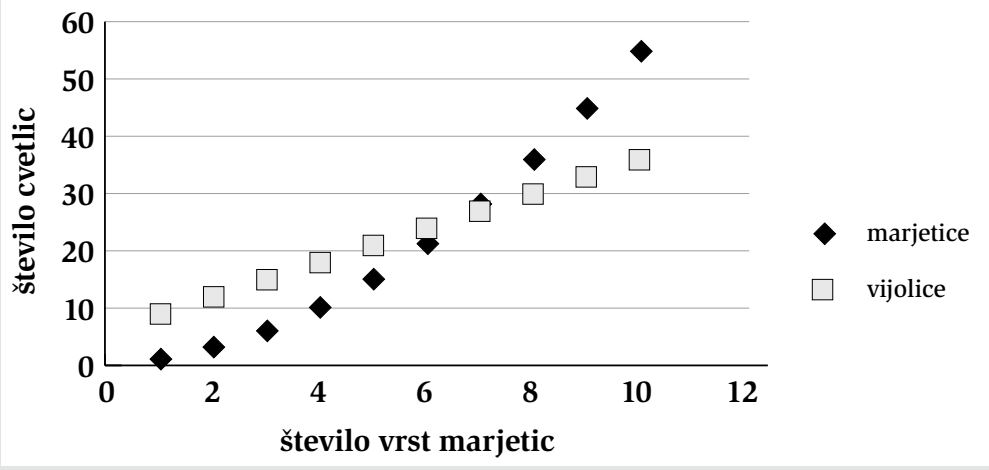
$f(n) = n(n + 1)/2$ (kvadratna rast)

$g(n) = 3(n + 1) + 3$ (linearna rast)

3. vprašanje

V isti koordinatni sistem nariši:

- *graf funkcije f: spreminjanje števila marjetic v odvisnosti od števila vrst marjetic v gredici;*
- *graf funkcije g: spreminjanje števila vijolic v odvisnosti od števila vrst marjetic v gredici.*



Graf: Število marjetic in vijolic v odvisnosti od števila vrst marjetic

Pri katerih velikostih trikotniških gredic je število posajenih marjetic manjše od števila vijolic?

Razmisli, ali obstaja trikotniška gredica, pri kateri bi bilo število marjetic enako številu vijolic?

Ana povečuje velikost trikotniške gredice (veča število vrst marjetic). Kaj se hitreje povečuje: število vijolic ali število marjetic. Odgovor utemelji.

4. vprašanje – razširitev problema

Ana sama vzgaja vijolice na domačem vrtu. Pri oblikovanju trikotniških gredic mora tako kupiti samo marjetice. Vrtnarija RAST odkupuje sadike vijolic in marjetic po 1 EUR, prodaja pa jih po 1,2 EUR za sadiko. Ana namerava prodati 25 vijolic. Kako velika je največja mogoča trikotniška gredica, ki jo lahko naredi Ana, če z denarjem od prodaje vijolic v celoti plača nakup marjetic za to gredico?

Pri vodenem reševanju problemov lahko učence vodimo v razmišljanju z namigi. Lahko jim svetujemo, naj naredijo tabelo, v kateri bi pregledno prikazali različne situacije. Lahko pa za izračun uporabijo modelni funkciji.

Tabela: Število marjetic in vijolic v trikotniških gredicah ter vrednosti sadik v EUR

Vrste z marjeticami v trikotniški gredici – n	Št. marjetic	Št. vijolic	Cena marjetic (v EUR)	Zaslužek od prodanih vijolic (v EUR)
1	1	9	1,20	9
2	3	12	3,60	12
3	6	15	7,20	15
4	10	18	12,00	18
5	15	21	18,00	21
6	21	24	25,20	24
7	28	27	33,60	27
8	36	30	43,20	30
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$n(n+1)/2$	$3(n+1)-3$	$1{,}2 \cdot n(n+1)/2$	$3(n+1)-3$

Rešitev:

Za 25 prodanih vijolic dobi Ana 25 EUR.

$x = 25/1{,}2 = 20{,}3$

Za 25 EUR lahko Ana kupi 20 marjetic, kar pomeni, da lahko naredi gredico, ki ima največ 5 vrst.

Posplošitev

Ana namerava prodati s vijolic. Kako velika je lahko največja mogoča trikotniška gredica, ki bi jo lahko naredila Ana, da bi z denarjem ob prodaji vijolic lahko v celoti plačala nakup marjetic za to gredico?

Rešitev:

Zveza med številom vijolic (s) in številom vrst (n) v trikotniški gredici: $\boldsymbol{n(n+1)/2 = 5s/6}$

Nalogo je mogoče zasnovati tudi takole:

Ana ima na zalogi 50 vijolic. Koliko največ vrst n ima lahko gredica, ki bi jo naredila Ana, če mora marjetice kupiti z denarjem, ki ga dobi ob prodaji vijolic, preostale vijolice pa porabi za gredice?

Pri vodenem reševanju problemov učence usmerjamo v razmišljanju. Lahko jim svetujemo, da naredijo tabelo, v kateri bi pregledno prikazali različne situacije. Lahko pa za izračun uporabijo modelne funkcije.

Tabela: Število marjetic in vijolic v trikotniških gredicah ter vrednosti sadik v EUR

Vrste z marjeticami v trikotniški gredici – n	Št. marjetic v gredici	Št. vijolic v gredici	Cena marjetic (v EUR)	Zaslužek od prodanih vijolic (v EUR)	Št. prodanih vijolic
1	1	9	1,20	41	41
2	3	12	3,60	38	38
3	6	15	7,20	35	35
4	10	18	12,00	32	32
5	15	21	18,00	29	29
6	21	24	25,20	26	26
7	28	27	33,60	23	23
8	36	30	43,20	30	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$n(n+1)/2$	$3(n+1) - 3$	$1{,}2 \cdot n(n+1)/2$	$3(n+1) - 3$	$50 - 3 \cdot (n+1) - 3$

Rešitev:

Gredica s 6 vrstami.

(Pri 50 vijolicah mora Ana prodati 26 vijolic, da lahko za dobljeni denar kupi 21 marjetic. Z njimi lahko naredi gredico s 6 vrsticami, v kateri je 24 vijolic.)

Nadaljnja razširitev problema

Nadaljujemo lahko s spreminjanjem števila vzgojenih vijolic do poslošitve. Npr.: Ana ima na zalogi s vijolic. Koliko je največja mogoča gredica (koliko vrst n ima ta gredica), ki jo lahko naredi Ana, če mora marjetice kupiti z denarjem, ki ga dobi ob prodaji vijolic, preostale vijolice pa porabi za gredice.

Didaktični vidik

Nalogo lahko rešimo tudi po induktivni poti (tako bi jo lahko rešili tudi v osnovni šoli). Modelno funkcijo bi napovedali z opazovanjem točk v tabeli. Ugotovitve induktivne poti utemeljimo npr. z analitičnim pristopom, kar smo predhodno pokazali.

Prednosti modeliranja:

- z uporabo modela lahko ugotavljamo rezultate pri poljubnem spreminjanju podatkov,
- priložnost za učenje posploševanja, oblikovanje predpostavk.

1.3.4.2 Samostojno odkrivanje

Pri samostojnem odkrivanju naj bi pred učence postavili izziv, problemsko situacijo in jim pustili, da sami raziskujejo, identificirajo problem in se odločijo za smer raziskovanja.

Didaktični vidiki raziskovalnega učenja posegajo na področje procesnih znanj in tudi učenja matematičnih pojmov in struktur.

Učenci se učijo strategij reševanja problemov in si tako pridobivajo izkušnje, s katerimi gradijo pojmovne predstave. Posamezne pojme spoznavajo učenci v kontekstu problemske situacije, v povezavi z drugimi vsebinami, kar pomeni, da z različnimi reprezentacijami pojmov, ki jih reševanje problemov zahteva, gradijo pojmovne predstave.

Za naloge iz učbenika ali pri preverjanju znanja v šoli učenci pogosto vedo, kateri postopek reševanja morajo uporabiti. Pri reševanju resničnih, življenjskih problemov navadno nimajo na voljo dobro znanih postopkov in metod. Takšne vrste nalog so povezane z diskretno matematiko.

Pri odprtih problemih izhajamo iz problemske situacije, ki je dana kot izziv. Odprti problemi ne določajo vnaprej ciljev raziskovanja, niti poti reševanja, vprašanja niso eksplicitno postavljena, zaradi odprtosti odpirajo priložnosti za samostojno odločanje in učenje različnih strategij reševanja problemov. Poleg učenja matematike se učenci učijo tudi procesnih znanj, uvida v problemsko situacijo, postavljanja smiselnih vprašanj in utemeljevanja ugotovitev.

Najprej je potreben uvid v *problemsko situacijo*, za tem so na vrsti faze, kot so:

- *postavljanje vprašanja,*
- *načrtovanje preiskave,*
- *zbiranje podatkov,*
- *analiziranje podatkov,*
- *interpretacija rezultatov,*
- *predstavitev.*

Za učenje z odkrivanjem, samostojno ali vodeno, so zelo primerni odprti problemi.

Pri samostojnem odkrivanju bi PRIMER CVETLIC zastavili odprto.

Primer: CVETLICE

Ana je v vrtu naredila trikotne gredice, kot prikazuje slika na strani 38. Na sredi je posadila marjetice, okrog pa vijolice. Na risbi lahko vidiš razporeditev marjetic in vijolic.

Razišči število marjetic in vijolic pri različnih velikostih gredic.

Pri odprtih problemih vprašanja niso natančno postavljena. Učenec jih mora sam. Spodbujamo jih, da jih postavijo čim več in da so različna. Vsako pokaže raven učenčevega zanimanja za obravnavano snov. Tudi različni pristopi pri reševanju in rešitve, ki jih najdejo učenci, učitelju omogočajo vpogled v raven in kakovost doseženega znanja.

- *Kako se spreminja število marjetic in vijolic, če večamo velikost gredice?*
- *Predlagamo, da problemsko situacijo še razširijo, iz česar bodo na vrsti različna raziskovalna vprašanja.*

Primer: ŠKATLA

Iz danega kartona naredimo škatlo. Razišči njeno prostornino.

Tudi izziv ŠKATLA ni oblikovan z neposrednim vprašanjem, temveč je treba vprašanje oz. cilj raziskovanja šele postaviti. Zato je potreben uvid v problemsko situacijo: kaj je sploh mogoče in smiselno raziskovati.

Postavimo si lahko več vprašanj oz. ciljev, kaj bomo preiskovali:

- *Kakšne oblike je karton?*
- *Kako velik karton imamo?*
- *Imamo na primer pravokotni karton 40 cm x 60 cm. Pri kateri obliki škatle bo njena prostornina največja?*
- *Posplošitev za karton, ki je širok m cm in dolg n cm: Pri kateri obliki škatle bo njena prostornina največja?*
- *Ali je lahko prostornina škatle nič? Kaj to pomeni z matematičnega vidika in z vidika življenjske situacije?*
- *Pri katerih pogojih bo prostornina najmanjša?*

Izziva VOTLI KVADRI in ŠKATLA zahtevata sposobnosti in spretnosti, kot je prostorska vizualizacija, ki je ključnega pomena za matematično pismenost.

Kadar rešujemo odprte probleme pri pouku, spodbujamo, da učenci postavijo čim več vprašanj. Pogovorimo se, na katera vprašanja bomo zmogli in vedeli odgovo-

riti. Izberemo eno ali nekaj vprašanj, na katera bomo poiskali odgovore. Zgled odprtega problema je tudi naloga v primeru TRIKOTNIKI, ki pa je v nasprotju s prejšnjim primerom predvsem matematični problem. Didaktična moč takšne naloge je predvsem v izgrajevanju matematičnih pojmov. Pri raziskovanju učenci trikotnike predstavijo na konkretni ravni (izdelovanje modelov), slikovni ravni (risanje slik), simbolni ravni (zapis ploščine) in na koncu na abstraktni ravni. Didaktični pristopi, ki učence spodbujajo k različnim predstavitvam, ustvarjajo zanje večje možnosti, da si dopolnijo oz. zgradijo pravilne pojmovne predstave, kot bi jih imeli, če bi dani problem reševali npr. le na simbolni ravni: *izračunaj ploščino trikotnika pri danih podatkih ali izračunaj višino na stranico pri danih podatkih ipd*. Dejavnosti pri reševanju takšnega izziva so samostojno iskanje pristopov pri reševanju problema, opazovanje in ugotavljanje odnosa med geometrijskimi elementi v ravnini, risanje skic, slik, opazovanje, merjenje, analiziranje dane situacije in povezovanje podatkov (Žakelj 2003: 47).

Naloga: TRIKOTNIKI

Razišči trikotnike s ploščino 15 cm^2.

Ker je naloga zastavljena odprto, zahteva najprej prepoznati problem in oblikovati vprašanje: *Koliko je različnih trikotnikov s ploščino 15 cm^2?* Takoj je na vrsti ugotovitev, da vprašanje ni dobro ali vsaj ne natančno. Kaj pomeni, da sta trikotnika različna? Vprašanje moramo oblikovati natančneje, npr.: *Koliko je različnih, med sabo neskladnih trikotnikov s ploščino 15 cm^2?*

Na vrsti je reševanje, pri katerem imajo učenci več svobode, različne možnosti matematičnega raziskovanja.

V nasprotju z vprašanji odprtega tipa vprašanja zaprtega tipa od reševalca pričakujejo konkreten odgovor. *Pri zaprtih problemih je* vprašanje natančno postavljeno, tako da sta cilj reševanja oz. rešitev natančno določena oz. pričakovana vnaprej, v ospredju je uporaba matematičnega znanja.

Takšni sta nalogi SMUČKE in POPUST.

Naloga: SMUČKE

Trgovina Smučke prodaja domače in uvožene smuči. V trgovini visi oglas: Prodajamo domače in uvožene smuči, cene so različne, povprečna cena je 300 EUR.

Katera od navedenih trditev je glede na oglas zagotovo pravilna?

A. Večina smuči stane od 200 do 400 EUR.

B. Polovica smuči stane manj kot 300 EUR, polovica smuči pa več kot 300 EUR.

C. Vsaj ene smuči stanejo 300 EUR.

D. Nekaj smuči stane manj kot 300 EUR.

Izziv kaže matematično znanje, preverja uporabo in razumevanje pojma aritmetična sredina v situaciji, ki je večplastna. Kljub navidezni realni situaciji, je ta predvsem matematična. Naloga preverja predvsem matematične pojme in je kot takšna namenjena izgrajevanju matematičnega znanja. Cilji naloge so: interpretirati predpostavke in povezave, razumeti in uporabiti pojem aritmetične sredine, sklepati in utemeljevati.

Za preverjanje razumevanja pojmov in odnosov med njimi, osnova, delež, odstotek pri procentnem računu, je zelo dobra naloga POPUST.

Naloga: POPUST

Oglas na vratih trgovine: Znižane cene do 20 %. Samo 2 % davek na prodajno ceno, ki ga plačate ob nakupu.

Ciril je šel v trgovino z omenjenim oglasom kupit jopič, katerega redna cena je 50 EUR, vendar je zdaj znižan za 20 %. V trgovini imajo 2 % prodajni davek, ki ga kupec plača pri nakupu. Prodajalec je ceni jopiča najprej dodal 2 % davek, nato pa odštel 20 %. Ciril se s tem ni strinjal. Hotel je, da bi prodajalec najprej znižal ceno jopiča za 20 % in nato prištel 2 % davek. Ali je v ceni razlika? Odgovor utemelji.

Reševanje naloge zahteva miselne računske operacije (količinsko razmišljanje je pomembno za matematično pismenost). Morebitne napačne odgovore, kot npr. *V ceni je razlika. Ciril je upravičeno ugovarjal,* izkoristimo, da razčistimo nerazumevanje matematičnih pojmov.

Reflektiranje matematičnih znanj je pri učenju matematike vedno nekoliko navzoče. Dodatno pa lahko reflektiranje spodbujajo še različne aktivnosti, ki so ciljno usmerjene v določene vsebine: opazovanje, izdelovanje, uporaba geometrijskih modelov; eksperimentiranje, meritve v učilnici ali naravi; zbiranje, urejanje, analiziranje, predstavitev in interpretiranje podatkov; predstavitev pojmov z diagrami, modeli, risbami; ocenjevanje; približno računanje; samostojno iskanje virov; iskanje podobnosti; argumentiranje ipd. Vse te aktivnosti, ki so na prvi pogled med sabo različne, imajo skupno lastnost, da ob izpeljavi spontano sprožijo matematične procese in povzročijo matematično reflektiranje.

1.3.4.3 Raziskovanje in medpredmetno povezovanje – pot do kompleksnih znanj

Različni pristopi reševanja in rešitve učitelju omogočajo vpogled v raven in kakovost doseženega znanja učenca. Ob reševanju problema Indonezija se učenci učijo raziskovanja in iskanja izvirnih matematičnih pristopov za predstavitev realne situacije in uporabe orodij za obdelavo podatkov.

Naloga: INDONEZIJA (PISA 2006: 72)

V tabeli je prikazano nekaj podatkov o indonezijski populaciji in njeni porazdelitvi po otokih. Eden glavnih izzivov Indonezije je neenakomerna porazdelitev populacije po otokih. Na različne načine grafično predstavi neenakomerno porazdelitev indonezijske populacije.

Tabela: Porazdelitev populacije po otokih Indonezije in velikost posameznih otokov

Regija	Velikost območja (km^2)	% celotnega območja	Populacija l. 1980 (v mil.)	% celotne populacije
JAVA/MADURA	132.187	6,95	91,281	61,87
SUMATRA	473.606	24,86	27,981	18,99
KALIMANTAN (BORNEO)	539.460	28,32	6,721	4,56
SULAWESI (CELEBES)	189.216	9,98	10,377	7,014
BALI	5.561	0,30	2,470	1,68
IRIAN JAYA	421.981	22,16	1,145	0,77
OSTALA OBMOČJA	683.018	35,80	7,409	5,02
SKUPAJ	1.905.569	100	147,384	100

Načini predstavitve dane situacije kažejo tudi matematično razmišljanje in znanje reševalca. Z rešitvijo učenec predstavi tudi globino uvida v dano situaciji. Oglejmo si Markovo in Janino rešitev.

a) Rešitev učenca Marka

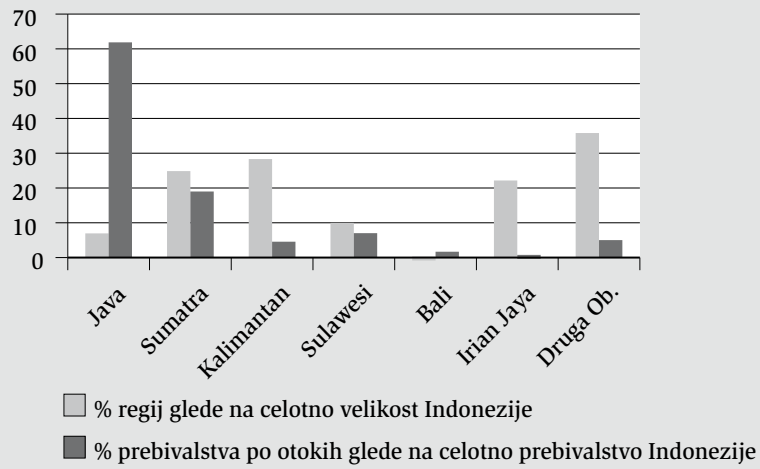


Diagram 1: Odstotki populacije in odstotki velikosti regij po otokih Indonezije

Marko je s stolpčnim prikazom predstavil odstotke velikosti območij otokov glede na celotno površino in odstotke prebivalstva po otokih glede na celotno prebivalstvo. S stolpčnim prikazom je »neposredno« predstavil numerične podatke iz tabele, brez dodatnih analiz ali preračunavanja danih podatkov. Predstavil je to, kar je v tabeli zelo razvidno, da živi na Javi, ki pomeni manj kot 7 % celotnega območja, skoraj 62 % populacije, in podobno za druge otoke. Povezal je dano situacijo v tabeli z znanjem o prikazovanju podatkov.

b) Rešitev učenke Jane

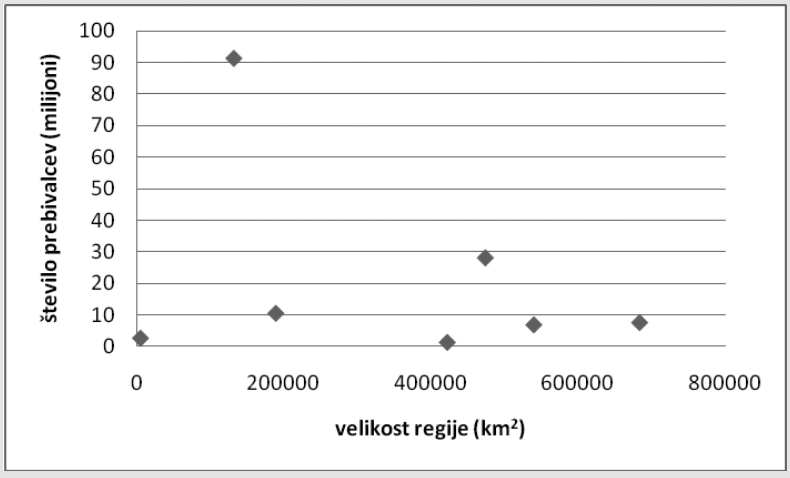


Diagram 2: Število prebivalcev po otokih (v mil.) glede na velikost regij (km²).

Iz Janine predstavitve je razvidno, da je o neenakomerni poseljenosti razmišljala nekoliko drugače kot Marko. Izziv je povezala **s prikazom odnosa** med velikostjo otokov in številom prebivalstva. Z razsevnim diagramom je prikazala, da seveda med njima ni preme sorazmernosti, kar z drugimi besedami pomeni neenakomerno poseljenost.

Različni pristopi reševanja in rešitve učitelju omogočajo vpogled v raven in kakovost doseženega znanja učenca. Izziv o neenakomerni poseljenosti je zelo lepo izhodišče tudi za povezovanje z drugimi predmetnimi področji, npr. z geografijo ali zgodovino (kako je bilo v preteklosti), s podnebnimi spremembami ipd. Razširitev problema pa ne omogoča le reflektiranja matematičnih znanj, temveč tudi učenje veščine kritičnega iskanja, razumevanja, vrednotenja in uporabe podatkov pri reševanju problemov. Reševanje problema pripomore k razvoju posameznika pri kritičnem presojanju podatkovnih virov predstavljenih vsebin v znanosti, izobraževanju in vsakdanjem življenju.

Podatki v nalogi INDONEZIJA so že zbrani in učencem podani. Lahko pa bi naredili korak nazaj, k samostojnemu zbiranju in iskanju podatkov.

Če gre za probleme, pri katerih zbiramo tudi podatke, pomeni, da pri učencih razvijamo tako imenovano podatkovno pismenost *(http://sl.wikipedia.org/wiki/Podatkovna_pismenost)*.

Podatkovna pismenost je veščina kritičnega iskanja, razumevanja, vrednotenja in uporabe podatkov pri reševanju problemov. Pripomore k učinkovitejšemu delovanju posameznika na različnih področjih, kjer je potrebno kritično presojanje podatkovnih osnov predstavljenih vsebin v znanosti, izobraževanju in vsakdanjem življenju.

Pri podatkovni pismenosti gre za sposobnost pridobivanja, vrednotenja in uporabe podatkov iz različnih virov, zmožnost, ki vodi k ugovorom do avtoriziranega znanja in uveljavlja kritičnost in drugačno mišljenje.

Prvi korak pri reševanju tovrstnih problemov je prepoznati in opredeliti problem tako, da bo nakazana rešitev z uporabo podatkov. Temelj za prepoznanje potrebe po določenih podatkih je zmožnost domnevanja vnaprej in predvidevanja, predpostavljanja, s kakšnimi podatki in kako bi bil problem rešljiv.

Naslednji korak je razgledanost po obstoječih podatkovnih virih glede vrste podatkov in načinov iskanja ter dostopa do njih. Arhivi podatkov so – podobno kot knjižnice za splošne informacije – eden od naslovov, kamor se lahko obrnemo. Producenti podatkov, kot so statistični uradi, mednarodne organizacije (npr. ILO), znanstveni inštituti in agencije ter drugi, velikokrat z večjimi ali manjšimi omejitvami omogočajo dostop in uporabo njihovih podatkov.

Naslednji pogoj za njihovo uporabo je ovrednotenje podatkov. Večina teh je namreč skonstruiranih s postopkom zbiranja, navadno z inštrumenti. Kadar je na voljo več virov podatkov, lahko izberemo enega najustreznejšega ali kombiniramo več virov hkrati, npr. v multimetodskem pristopu. Uporabe znanj o obdelavi podatkov se v šoli lahko učimo z empiričnimi preiskavami.

1.4 Matematična pismenost in vloga kompetenc pri njenem razvoju

1.4.1 Matematična pismenost

Predmet matematika je eden temeljnih splošnoizobraževalnih predmetov, ki proučuje abstraktne strukture in tudi tiste, ki izhajajo iz realnega sveta. Pri pouku matematike naj bi razvijali formalno matematično znanje in matematično mišljenje pa tudi matematično pismenost. Tudi v učnem načrtu za matematiko (2008) je zapisano, da si učenci pri pouku matematike oblikujejo osnovne matematične pojme in strukture, kritično mišljenje, miselne procese, sposobnost za ustvarjalno dejavnost, formalna znanja in spretnosti ter spoznajo tudi praktično uporabnost matematike, ki je tesneje povezana z matematično pismenostjo.

Matematična pismenost pomeni upoštevanje matematičnih principov pri razlagi oziroma razumevanju pojavov v naravi in družbi. Omogoča lažje sporazumevanje – formule, modeli, grafični prikazi ipd. imajo univerzalno uporabno vrednost. Pojem matematična pismenost vključuje tudi sposobnost natančnega izražanja, razlikovanja med različnimi trditvami (npr. domneva, dejstvo, dokaz), kar omogoča lažje oblikovanje lastnega stališča in presojanje stališč in trditev drugih ljudi.

Matematična pismenost temelji na matematičnem znanju in zaživi v naravnem in socialnem okolju. Posameznik jo razvija vse življenje. Razvijanje komponent matematične pismenosti omogoča reševanje problemov z življenjskimi situacijami, ki zahtevajo sposobnost uporabe šolskega znanja in spretnost v manj strukturiranem kontekstu, kot je šolska situacija. Reševalci se morajo odločati o tem, katere informacije in znanje so v dani problemski situaciji pomembni in kako naj jih smiselno uporabijo.

Glede na definicijo matematične pismenosti v raziskavi PISA 2006 matematične vsebine predstavljajo predvsem obseg tistih matematičnih vsebin, ki naj bi se jih učenci naučili za življenje, nekoliko pa se razlikujejo od matematičnih vsebin, značilnih za učne načrte. Lahko bi rekli, da so problemi z začetnim oblikovanim nematematičnim kontekstom, ki vplivajo na rešitev in njeno interpretacijo, za vrednotenje matematične pismenosti ključni. Matematično pismenost razvijamo s holističnim pristopom učenja in poučevanja: z raziskovalno dejavnostjo, reševanjem problemov iz vsakdanjega življenja, vključevanjem aktualnih vsebin in sodobnih tehnologij, povezovanjem znanja v predmetu in med predmeti ipd.

Čeprav je pridobivanje specifičnega znanja pri šolskem učenju pomembno, je uporaba tega znanja odvisna od pridobitve širših znanj in spretnosti. V naravoslovju je specifično znanje, ki je vezano na poznavanje podatkov, imen rastlin in živali manj pomembno kot razumevanje širših pojmov ali struktur, kot so poraba energije ali varovanje zdravja. Pri branju so čedalje pomembnejši spretnost interpretacije pisnega gradiva, uporaba prebrane vsebine in kakovost besedila. Kadar gre za *vsakdanje situacije*, je pri matematiki pomembnejše, da posameznik zna sklepati in razumeti odnose oziroma odvisnosti, kot da zna rešiti tipične naloge iz učbenika. Prav tako so nekatere splošnejše spretnosti nujne za razvoj in poznejšo uporabo znanja, kot npr. prilagodljivost, fleksibilnost, reševanje problemov, uporaba informacijskih tehnologij ipd. Govorimo o »pismenosti« v širšem pomenu besede.

Z razvojem družbe in z vstopom sodobne tehnologije v vsakdanje življenje posameznika se pojem pismenosti razširja. Zdaj že govorimo o bralni, naravoslovni,

podatkovni, družboslovni, glasbeni, matematični pismenosti itd. Kot zmožnost in družbena praksa se pismenost pridobiva in razvija. Pridobljeno znanje in spretnosti ter razvite sposobnosti omogočajo posamezniku uspešno in ustvarjalno osebnostno rast ter odgovorno delovanje v poklicnem in družbenem življenju.

V raziskavi PISA 2006 je matematična pismenost definirana kot posameznikova sposobnost prepoznavanja in razumevanja vloge, ki jo ima matematika v svetu, sposobnost postavljanja dobro utemeljenih odločitev in sposobnost uporabe in vpletenosti matematike na načine, ki izpolnjujejo potrebe posameznikovega življenja kot konstruktivnega in razmišljujočega posameznika (Repež M., Drobnič A., Straus M. 2008: 13).

Definicija matematične pismenosti opredeljuje splošna načela. Natančneje določajo področje matematične pismenosti v raziskavi PISA 2006 tri komponente (Repež M., Drobnič A., Straus M. 2008: 29): *situacija ali kontekst*, v katerem je problem postavljen, *matematična vsebina*, ki je potrebna za rešitev problema, *kompetence*, ki jih mora imeti reševalec, da poveže resnični svet, v katerem je problem, z matematiko, ki omogoča njegovo rešitev.

Glede na didaktično razsežnost, ki jo problemi upoštevajo, lahko probleme delimo na tiste, ki (Žakelj 2004: 102):

- osmišljajo matematično vsebino in ponujajo priložnost matematiziranja,
- omogočajo reflektiranje matematičnih znanj,
- razvijajo procesna znanja oz. različne strategije pri reševanju problemov.

V tabeli z navedbo komponent matematične pismenosti, definirane v raziskavi PISA 2006, in didaktičnih vidikov reševanja problemov predstavljamo možnosti za razvoj matematične pismenosti z reševanjem problemov.

Tabela: Didaktični vidiki reševanja problemov in komponente matematične pismenosti PISA 2006

Didaktični vidiki reševanja problemov	Komponente matematične pismenosti (PISA 2006)
Reflektiranje matematičnih znanj (uporaba matematičnih znanj pri reševanju problemov)	Matematična vsebina
Procesna znanja, potrebna za reševanje problemov.	Razredi kompetenc: reproduciranje, povezovanje in reflektiranje
Osmišljanje matematičnih znanj z **matematiziranjem** (problemi z realnimi življenjskimi situacijami)	Situacija: osebna, izobraževalna, poklicna, javna oziroma širše družbena ali znanstvena

Reševanje problemov je povezano *z reflektiranjem matematičnih znanj, ki temelji na poznavanju in uporabi matematičnih vsebin v novih situacijah*, z obvladovanjem *procesnih znanj*, katerih raven uporabe opišemo s *kompetenčnimi razredi* ter s sposobnostjo *matematizacije* v izbrani *situaciji* (npr. osebne, javne idr.). Reše-

vanje problemov z življenjskimi situacijami zahteva sposobnost uporabe šolskega znanja in spretnosti v manj strukturiranem kontekstu, kot je šolska situacija. Reševalci se morajo odločati o tem, katere informacije in znanje so v dani problemski situaciji pomembni in kako naj jih smiselno uporabijo.

1.4.2 Vloga kompetenc pri razvoju matematične pismenosti

V šolskih kurikulih je predmet matematika eden temeljnih splošnoizobraževalnih predmetov v šoli. Matematika je opredeljena kot znanost in umetnost, ki razkriva lepoto in ozadje procesov v naravi. Pri pouku matematike si učenci oblikujejo osnovne matematične pojme in strukture, formalna znanja in spretnosti ter spoznajo tudi praktično uporabnost matematike, ki je tesneje povezana z matematično pismenostjo. Za učence je pomembno oboje: na eni strani jim pridobljeno matematično znanje in zmožnosti, ki jih razvijejo, dajejo stabilno oporo pri mišljenju in odločanju v vsakdanjih življenjskih situacijah in pri učenju preostalih predmetov, po drugi strani pa je temeljno matematično znanje pomembno za nadaljnje izobraževanje.

Tudi iz razlogov, da se čedalje pogosteje v šoli in zunaj nje srečujemo s problemskimi situacijami, katerih reševanje zahteva obvladovanje širših kompetenc, se tudi pri didaktiki matematike čedalje pogosteje govori o *uporabi matematike v realnih življenjskih situacijah*. Učni načrti so se v preteklosti manj posvečali splošnejšim kompetencam, navadno predvsem vsebinam, informacijam in tehnikam, ki jih mora posameznik usvojiti. Posodobljeni učni načrti (2008) za osnovno šolo in gimnazijo, ki jih je določil strokovni svet leta 2008, navajajo tudi splošne kompetence, potrebne za učinkovito uporabo znanja.

Komponente pismenosti oz. matematične pismenosti se v učnih načrtih za osnovno šolo in gimnazijo ter srednje poklicno in strokovno izobraževanje, ki so bili posodobljeni po letu 2006, večinoma odslikavajo v kompetencah. Pogosto v opredelitvah matematične pismenosti in matematične kompetence najdemo zapisane podobne poudarke, zlasti kadar gre za raven uporabe matematičnega znanja na ravni vsakdanjih situacij.

V priporočilih Evropskega parlamenta in Sveta EU (Ur.l. EU, 30.12.2006) je matematična kompetenca opredeljena kot sposobnost usvojitev in uporabe matematičnega načina razmišljanja za reševanje številnih težav v vsakdanjem življenju. Pri usvojitvi temeljnih tehnik računanja so poudarjeni postopek, dejavnosti in znanje. Matematična kompetenca – v različnem obsegu – vključuje sposobnost in pripravljenost za uporabo matematičnih načinov razmišljanja (logično in prostorsko razmišljanje) in predstavljanje (formule, modeli, konstrukcije, grafi in preglednice).

Opredelitev pojma kompetenca je v literaturi sicer različna, s čimer se ukvarjajo različne stroke, npr. filozofija, psihologija, sociologija, antropologija, ekonomija; pri njihovi opredelitvi pa lahko izhajamo iz nekaterih temeljnih ugotovitev, ki poudarjajo njihovo kompleksnost in soodvisnost več različnih dejavnikov. Weinert (2001: 50) meni, da kompetenca na splošno vključuje kompleksen sistem ne samo znanja in spretnosti, ampak tudi strategij in rutine, ki so potrebne za uporabo tega znanja in spretnosti, prav tako pa tudi ustrezna čustva in stališča ter učinkovito samoregulacijo teh kompetenc. Če bi strnili, bi lahko rekli, da pojem kompetence

pove, kaj naj bi posameznik znal ter kaj res obvlada v teoriji in kaj je sposoben narediti v praksi (Razdevšek Pučko 2004: 52–74).

Pojem kompetenca združuje vse, kar posamezniku omogoča, da kakovostno živi in dela v informacijski družbi: njegovo znanje, veščine, stališča. Vse, kar se nauči s formalnim, neformalnim in priložnostnim učenjem za svoj osebnostni razvoj, življenje z drugimi ljudmi, lažjo zaposljivost, vključenost v družbeno življenje in aktivno državljanstvo. Poleg tradicionalnih znanj so potrebna vedno nova znanja in veščine, zato je potrebno kompetence neprestano dograjevati z vseživljenjskim učenjem (*http://www.inti.si/index.php?option=com_content*).

V posodobljenem učnem načrtu za matematiko za osnovno šolo (Učni načrt za matematiko 2009: 5) in tudi v posodobljenem učnem načrtu za matematiko za gimnazijo (Učni načrt za matematiko 2008: 6–7) je matematična kompetenca opredeljena kot sposobnost uporabe matematičnega načina razmišljanja za reševanje matematičnih in interdisciplinarnih problemov. Iz didaktičnega vidika so lahko problemi, ki so ozko matematični ali širši, postavljeni v šolski ali zunajšolski kontekst (npr. poklicni), med drugim tudi priložnosti za preverjanje razumevanja matematičnih pojmov in postopkov, in delujejo na učenje motivacijsko.

V učnem načrtu za matematiko za gimnazijo (Učni načrt za matematiko 2008) je matematična kompetenca opredeljena kot sposobnost uporabe matematičnega načina razmišljanja za reševanje različnih matematičnih in interdisciplinarnih problemov, sposobnost doživljanja matematike kot kulturne vrednote ter sposobnost doživljanja in interpretacije sveta.

Podobno navaja učni načrt za matematiko za osnovno šolo (Učni načrt za matematiko 2008). Matematična kompetenca je sposobnost uporabe matematičnega načina razmišljanja za reševanje različnih matematičnih problemov in tistih iz vsakdanjega življenja. Učitelji z izbiranjem primernih dejavnosti poskrbijo, da so v procese reševanja vključeni razmišljanje, sklepanje, izpeljevanje sklepov in drugo.

Matematična kompetenca vključuje temeljno poznavanje števil, merskih enot in struktur, odnosov in povezav, osnovnih postopkov, matematičnih simbolov in predstavitev v matematičnem jeziku, razumevanje matematičnih pojmov in zavedanje vprašanj, na katera lahko matematika ponudi odgovor. Učenci se pri pouku matematike naučijo predvsem osnovnih znanj, spretnosti in odnosov, ki pa jih pri nadaljnjem izobraževanju seveda še nadgradijo in poglobijo.

V povezavi z naravoslovnimi predmeti je v obeh omenjenih učnih načrtih zapisana tudi naravoslovno-matematična kompetenca za razvoj kompleksnega mišljenja: iskanje, obdelava in vrednotenje podatkov iz različnih virov: zmožnost presoje, kdaj je informacija potrebna; načrtno spoznavanje načinov iskanja, obdelave in vrednotenja podatkov; načrtno opazovanje, zapisovanje in uporaba opažanj/meritev kot vira podatkov; razvijanje razumevanja in uporabe simbolnih/grafičnih zapisov; uporaba IKT za zbiranje, shranjevanje, iskanje in predstavljanje informacij.

1.5 Problemska znanja in reševanje problemov

Učiteljevo poslanstvo ni le prenašanje matematičnih vednosti, ampak vzbujanje in spodbujanje zanimanja, radovednosti in spoznavnih potreb. Didaktiki matematike in učitelji matematike čedalje pogosteje oblikujejo naloge, ki pri učencu vzbudijo zanimanje za matematiko in so jih sposobni tudi doživeti, saj bodo le tako lahko pokazali zanimanje za njihovo reševanje.

1.5.1 Problemska znanja

O reševanju oziroma raziskovanju problema govorimo takrat, ko (Žakelj, A., Cotič, M., 2004):

- proces reševanja teče samostojno (če na primer uporabimo recept, formulo, znane postopke, je to problem – vaja oziroma rutinski problem);
- je rešitev nova za reševalca, ki zna potem uspešneje reševati nove probleme;
- se pojavi transfer znanja oziroma prenos metode reševanja na druge probleme.

Temeljni elementi problemskega znanja so naslednji:

- postavitev problema (prepoznava problema in njegova formulacija, postavitev smiselnih vprašanj),
- preveritev podatkov (učenec se mora vprašati in nato analizirati, ali ima problem dovolj ali preveč podatkov za rešitev, ali so si podatki nasprotujoči ...),
- strategije reševanja oziroma uporaba nabora naslednjih procesov (Frobisher, 1994):
  - komunikacijskih (pojasnjevanje, govorjenje, strinjanje, spraševanje),
  - operacijskih (zbiranje, urejanje, razvrščanje, spreminjanje),
  - miselnih (razčiščevanje, analiziranje, razumevanje),
  - procesov zapisovanja (risanje, pisanje, izdelovanje različnih diagramov ...),
- uporaba znanja oziroma transfer znanja (razlikujemo tri primere transfera:
  - šolski primer transfera (učenec uporabi usvojeni matematični koncept v drugem kontekstu, lahko tudi pri drugem predmetu),
  - zunajšolski primer transfera (učenec uporablja matematične koncepte v vsakdanjem življenju),
  - analogni transfer (učenec prenaša usvojene koncepte na podobne situacije, tipični odraz te sposobnosti je učenčev medklic: »... ah, to smo že počeli pri ...«),

- miselne veščine, kot so analiza, sinteza, indukcija, dedukcija, interpretacija,
- metakognitivne zmožnosti (učenec presodi, ali smo matematični koncept pravilno uporabili v določenem kontekstu in utemelji svoja stališča in s tem dokaže, da je presegel kognitivni konflikt. Ta učenčeva sposobnost se zelo jasno kaže pri razgovoru, ki ga vodimo v manjših ali večjih skupinah).

Problemsko znanje v širšem pomenu se nanaša na zmožnost povezovanja in uporabe konceptualnega in proceduralnega znanja v novih situacijah. Izraža se z:

- zmožnostjo prepoznavanja in formuliranja problemov v problemski situaciji,
- obravnavanjem zadostnosti in konsistentnosti podatkov,
- uporabo strategij, podatkov, modelov in ustreznih matematičnih orodij pri reševanju matematičnih problemov,
- zmožnostjo izpeljave raznih miselnih veščin (npr. prostorsko, induktivno, deduktivno, statistično, proporcionalno mišljenje) v novih okoliščinah,
- presojo o smiselnosti in ustreznosti rešitve.

Reševanje problemov

Z didaktičnega vidika je namen reševanja problemov širok: reševanje problemov je skoraj vedno tudi priložnost za utrjevanje osnovnih znanj in preverjanje razumevanja pridobljenih znanj, povezovanje snovi z življenjskimi situacijami, učenje strategij reševanja problemov, pridobivanje izkušenj s prenosom znanja.

Reševanje problemov je tesno povezano z branjem, z razumevanjem, obvladovanjem različnih strategij reševanja problemov, s sposobnostjo za priklic matematičnih dejstev iz spomina, z motivacijo za reševanje in drugim.

Branje besedilnih nalog z razumevanjem

Za razvoj bralne pismenosti bi morali skrbeti vsi predmeti. **Bralna pismenost** (Repež M., Straus M. 2005: 7) ni samo sposobnost branja, ki jo pridobimo v otroštvu, temveč se razume kot nenehno rastoči repertoar znanj, sposobnosti in strategij, ki jih pridobivamo vse življenje v različnih življenjskih situacijah in v interakciji z drugimi. Naloge s področja bralne pismenosti ne merijo tega, ali so 15-letniki »tehnično« sposobni nekaj prebrati. Pojem bralna pismenost se navezuje na sposobnost uporabe prebranega besedila v kontekstu različnih situacij, s katerimi se srečujejo 15-letniki v šoli in zunaj nje, ter na njihovo razumevanje in razmišljanje o prebranem.

Iz raziskav je razvidno (Pečjak S., 2001), da se motivacija za branje zmanjša ob prehodu z nižje na višjo stopnjo izobraževanja, zlasti pa upade v adolescenci. Na bralno motivacijo neugodno vplivajo tudi dejavniki šolskega okolja, npr.: preveliki razredi,

velik poudarek na zunanji motivaciji in ocenah, preveč frontalnega pouka. Branje besedilnih matematičnih nalog lahko postane za učence razumljivejše in prijaznejše:

- če jim za začetek ponudimo preproste besedilne naloge, z malo podatki, z vsebino, ki jo bodo ocenili kot zanimivo, smiselno in povezano z njihovimi življenjskimi interesi;
- če vzpostavimo varno ozračje v razredu, tako da ni veliko priložnosti za tveganje za slabe ocene, če učenci vedo in občutijo, da bodo njihove zamisli in ideje sprejete, če imajo možnost za doživljanje uspeha;
- če imajo možnost izražanja v fleksibilno sestavljenih manjših skupinah (razredne diskusije, ure sodelovanja učenja, reševanje problemov, simulacije, igra vlog, bralne in pisne delavnice z različnim ritmom reševanja nalog ...) (Pečjak, Gradišar, 2002).

Obvladovanje različnih strategij reševanja problemov

Pri reševanju problemov je pogosta težava, kako začeti. Katero strategijo uporabiti? Pomagamo si lahko s sistematičnim pristopom:

- Upoštevamo predznanje (Kaj že vem o tem problemu? Kakšne izkušnje že imam, ki bi mi pomagale rešiti problem? Ali poznam specifične algoritme za rešitev problema? Razmislimo o uporabi potencialnega hevrizma).
- Razmislimo o načinu zapisovanja podatkov (tabele, skice, slike, diagrami, seznami).
- Uporabimo (poiščemo, naredimo ...) primerne modele, aplikacije, slike.
- Opazujemo, iščemo povezave.
- Urejamo, razvrščamo podatke (opredelitev kriterija ...).

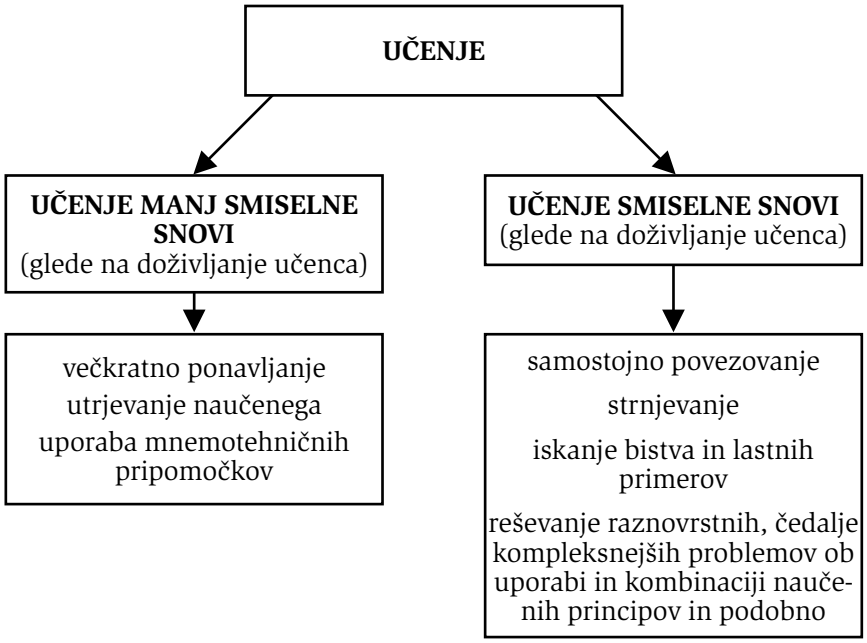
Sposobnost za priklic matematičnih dejstev iz spomina

Schoenfield (1992) je ugotovil, da je reševanje problemov odvisno od zmogljivosti kratkoročnega spomina ali tako imenovanega delovnega spomina; ta je namreč omejen. Dobri matematiki imajo boljše sposobnosti pri uporabi kratkoročnega spomina, ker so njihove enote večje in bolje organizirane. Poznamo številne trditve, da imajo dobri reševalci matematičnih problemov bolj razširjene zmogljivosti delovnega spomina (predstavitev problema, določitev ciljev raziskovanja, konceptualno razumevanje, strategije pri reševanju in učenje veščin) vsaj v odnosu do simbolov in operacij. Zentall (1990) poudarja, da je od sposobnosti za priklic matematičnih dejstev iz spomina odvisno, kako uspešno rešujemo matematične probleme. Pomembno je tudi, da kratkoročnega spomina ne obremenjujemo z računanjem, saj ga lahko tako uporabimo za to, da usmerimo pozornost na problem. Sweller (1989) prav tako trdi, da ima učenec, ki pri reševanju problema uporablja neavtomatizirana pravila, potem premalo kognitivne zmogljivosti za reševanje in razumevanje problema.

Reševanja problemov kot motivacija za učenje

Situacije, ki so za učenca nove in niso vnaprej pričakovane, spodbujajo razvoj matematičnega razmišljanja: ustvarjalno, kritično, analitično in sistemsko mišljenje. Vplivajo na kognitivni razvoj učenca, saj zaradi svoje raznovrstnosti spodbujajo ter omogočajo boljše izgrajevanje pojmovnih predstav, povezovanje in uporabo znanja, omogočajo uvid v osmišljanje matematičnih vsebin, motivirajo zlasti nadarjene učence, so priložnost za matematiziranje, reflektiranje matematičnih znanj in modeliranja.

Kognitivna psihologija ugotavlja, da so mehanizmi učenja v povezavi z doživljanjem učenca pri zapomnjenju manj smiselne snovi drugačni kot pri učenju smiselnih (slika 1).



Slika 1: Učenje smiselne in manj smiselne snovi. *(Vir: Žakelj 2004: 65)*

Če učenec učenje doživlja kot smiselno, pomeni večjo verjetnost, da bo znanje ponotranjil. Problemi, ki izhajajo iz življenjskih izkušenj, so navadno najbolj prepričljivi. Spoznanje ob konkretnem primeru, da je definicija oz. trditev, ki jo obravnavajo pri pouku, uporabna tudi v življenju, učencu olajša uvid v smiselnost formalnega matematičnega znanja. Formule, pravila, zakonitosti, postanejo zanj »naravnejše«, ker imajo svojo aplikacijo v naravi.

Pri raziskovanju in reševanju problemov se učenci učijo povezovati znanje v matematiki in tudi širše (interdisciplinarno), razvijati kreativnost in ustvarjalnost, postavljati ključna raziskovalna vprašanja, ki izhajajo iz življenjskih situacij oz. so vezana na raziskovanje matematičnih problemov, kritično razmišljati o potrebnih in zadostnih podatkih, interpretirati, utemeljiti, argumentirati rešitve, posploševati, abstrahirati, razvijati kritični odnos do rešitev, razvijati kritični odnos do interpretacije rezultatov, razvijati matematično mišljenje: abstraktno-logično mišljenje in geometrijske predstave, izražati se ustno, pisno ali v drugih izraznih oblikah,

dekodirati in prevajati matematične situacije iz naravnega jezika v simbolni jezik, in obratno, interpretirati in uporabljati različne oblike predstavljanja (fizični ali abstraktni modeli, slikovne predstavitve, formule, prikazi, tabele, vzorci, geometrijske konstrukcije idr.), izbrati primerna sredstva in predstavitve za izražanje in sporočanje rešitev.

Če se izzivi vsebinsko navezujejo na učni sklop, jih lahko postavimo na začetku učnega sklopa kot motivacijo oz. uvod v novo vsebino ali na koncu, za preverjanje usvojenosti in razumevanja vsebin. Reševanje problemov je povezano z obvladovanjem specifičnih znanj, pa tudi z motivacijo posameznika in obvladovanjem strategij reševanja problema. Med drugim so pomembni branje z razumevanjem, poznavanje različnih strategij in sposobnost za priklic matematičnih dejstev iz spomina. Problemi navadno niso didaktično pomembni le zaradi enega didaktičnega vidika, vsaka naloga pogosto preverja več ciljev in navadno zajema širšo paleto matematičnih znanj in kompetenc, so pa nekateri vidiki pri posameznih problemih bolj poudarjeni.

Pri pouku oz. pri reševanju problemov učitelj deluje kot spodbujevalec:

- preveri, ali učenci razumejo problem:
  - *ali ločijo pomembne in nepomembne podatke v nalogi,*
  - *se zavedajo možnih omejitev,*
  - *problem naj predstavijo in razložijo;*
- spodbuja poskuse, da bi videli problem iz različnih zornih kotov:
  - *učitelj lahko predlaga določene možnosti, učenci naj navedejo še svoje;*
- učencem pomaga razviti sistematične načine preverjanja strategij reševanja:
  - *ob reševanju problema predstavijo zamisli reševanja problema sošolcem;*
- poučuje različne hevrizme:
  - *učenci naj pojasnijo korake, ki so jih naredili pri reševanju problema,*
  - *pri dokazovanju naj uporabijo retrogradno strategijo;*
- učenci naj sami razmišljajo – rešitev jim učitelj ne servira:
  - *ponudi individualne in tudi skupinske probleme,*
  - *če učenci obtičijo v problemu, se učitelj upre skušnjavi, da bi takoj dal preveč namigov.*

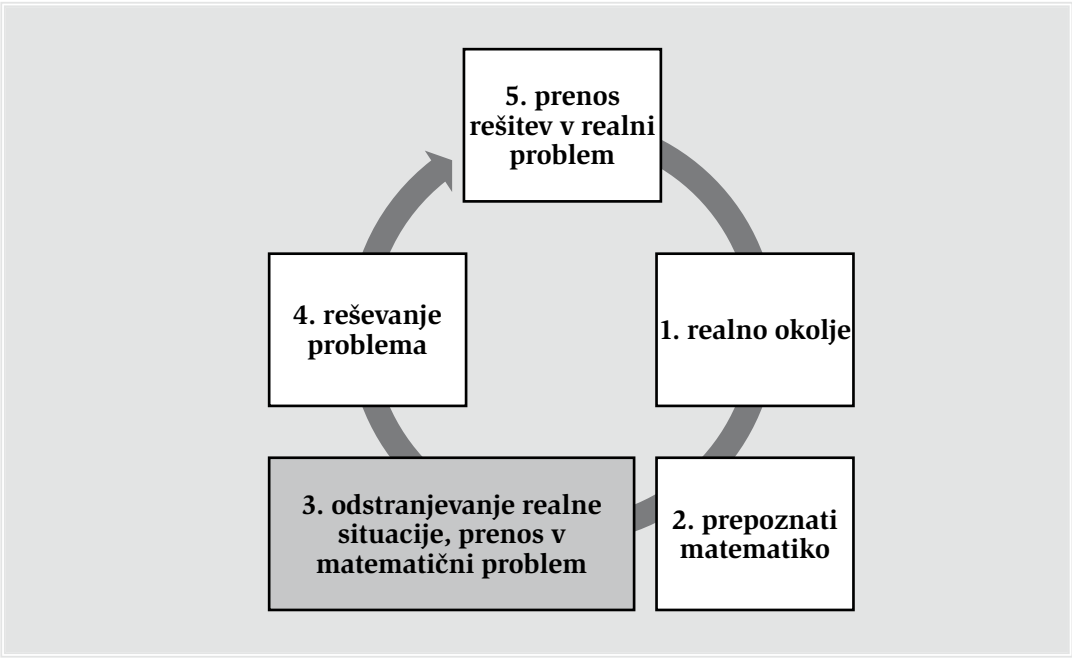
Cilj problemskega pouka predstavlja ob iskanju rešitve problema učenje matematike.

1.5.2 Matematizacija in osmišljanje matematičnih vsebin

Del matematične pismenosti je uporaba matematike kot jezika izražanja določenih lastnosti in odnosov. Proces uporabe matematike imenujemo matematizacija. Ta se dogaja ob reševanju problemov, kadar uvajamo načela matematike v realne kontekste, da bi rešili problem.

V izbrane situacije vnašamo načela in principe matematike. Proces matematizacije lahko predstavimo s petimi koraki (PISA 2006):

1. seznanjanje s problemom, postavljenim v realno okolje,
2. prepoznavanje matematike in matematičnih pojmov v problemu,
3. preoblikovanje problema v matematični problem glede na prepoznane matematične pojme in odstranjevanje realne situacije,
4. reševanje matematičnega problema,
5. prenos rešitev matematičnega problema v realni problem.



Slika 2: Koraki matematizacije *(povzeto po PISA 2006)*

Opisani koraki matematizacije so temeljni elementi uporabe matematike v večplastnih situacijah. Posledica nesposobnosti uporabe matematike lahko povzroči napačne osebne odločitve in napačno delovanje, čedalje več poklicev zahteva sposobnost razumevanja, posredovanja informacij, pojasnjevanja pojmov in postopkov, ki temeljijo na matematičnem razmišljanju. Koraki matematizacije so temelji takega matematičnega razmišljanja.

Pri učenju matematike oz. pri pouku naj bi učenci reševali probleme, katerih cilji so izvajanje različnih bolj ali manj zahtevnih matematičnih operacij, pa tudi probleme, ki preverjajo uporabo matematike v realnem svetu.

Vendar pa so v šolskih učbenikih še vedno pogostejši problemi, katerih glavni cilji so izvajanje rutinskih ali zahtevnejših matematičnih operacij, kot tisti, ki preverjajo uporabo matematike v realnem svetu. Tipično matematično situacijo ilustrira naloga SISTEM ENAČB, ki se osredotoča na matematične predmete, simbole oz. strukture in ne vključuje stvari zunaj matematičnega sveta. Takšen kontekst štejemo kot popolnoma matematičen, problemska situacija pa pripada znanstveni situaciji.

Naloga: SISTEM ENAČB

Cilj: reševanje sistema enačb grafično ali analitično

Situacija: znanstvena

Za katere vrednosti spremenljivke x leži premica z enačbo $y = -x + 220$ nad premico z enačbo $y = -0{,}7 \cdot x + 208$.

Reševanje:

$y = -x + 220$ in $y = -0{,}7 \cdot x + 208$.

$220 - x = 208 - 0{,}7 \cdot x$

$x = 40$ in k tej vrednosti pripadajoča vrednost za y, ki je $y = 180$.

Premici se sekata v T(40, 180). Ker je smerni koeficient prve funkcije – 1, druge pa – 0,7, vemo, da je graf prve funkcije bolj strm kot graf druge. Premica z enačbo $y = 220 - x$ leži nad premico z enačbo $y = 208 - 0{,}7 \cdot x$ za vrednosti x, ki so manjše od 40.

Nasprotno je naloga SRČNI UTRIP postavljena v realno situacijo in opredeljuje osebno situacijo, ki bi lahko bila del resnične izkušnje posameznika v realnem življenju, zato imenujemo takšen kontekst avtentični kontekst. Ta je pristen, predstavlja situacijo oziroma okolje, ki lahko nastopi v vsakdanjem življenju. Primer SRČNI UTRIP v izhodišču ni izražen v matematični obliki in ga mora učenec šele prevesti v matematično obliko ter ga rešiti ob upoštevanju splošnih strategij in korakov matematizacije, ki so opisani zgoraj.

S procesom reševanja naloge SRČNI UTRIP bomo v nadaljevanju prikazali proces matematizacije, ki v procesu reševanja uvaja načela matematike v realne kontekste.

Izziv SRČNI UTRIP preverja podobno matematično znanje kot primer SISTEM ENAČB, nalogi se razlikujeta glede na situacijo oz. kontekst, v katerega sta postavljeni, kar posledično zahteva različne procese reševanja.

Naloga: SRČNI UTRIP (PISA 2006)

Cilj: prepoznati matematiko v realni situaciji in preoblikovati problem glede na prepoznane matematične pojme; prepoznati odnos oziroma odvisnost dveh spremenljivk; prepoznati spremembo v odvisnosti in primerjavo dveh odvisnosti za izpeljavo odločitev; opisane odnose preoblikovati v matematične algebraične izraze; reševati sistem enačb grafično ali analitično; interpretirati matematične rešitve v realnem svetu.

Situacija: osebna

Iz zdravstvenih razlogov bi morali ljudje omejiti svoj napor, da ne bi presegli določene frekvence srčnega utripa. Več let je veljalo: priporočeni maksimalni srčni utrip = 220 – starost. Zdaj: priporočeni maksimalni srčni utrip = 208 – (0,7 · starost). V časopisu je pisalo: Če uporabimo novo formulo namesto stare, se priporočeno maksimalno število utripov srca na minuto pri mladih ljudeh malo zniža, pri starejših pa malo zviša. Od katere starosti se pri uporabi nove formule priporočeno maksimalni srčni utrip zviša? Prikaži svoje delo.

Koraki matematizacije za dani primer bi bili:

Prvi korak: Seznanjanje s problemom, postavljenim v realno okolje.

Drugi korak: Prepoznavanje matematike in matematičnih pojmov v problemu.

Dani »življenjski formuli« je treba razumeti in ugotoviti matematični pomen. Predstavljata odnos med priporočenim maksimalnim srčnim utripom in starostjo osebe.

Tretji korak: Preoblikovanje problema v matematični problem in postopno odstranjevanje resnične situacije.

Problem prestavimo v matematično okolje. Odnose preoblikujemo v matematične algebraične izraze in rešimo sistem.

Postavitev sistema: $y = 220 - x$ in $y = 208 - 0{,}7 \cdot x$.

Lahko se odločimo tudi za grafični prikaz odvisnosti.

Ti trije koraki nas pripeljejo do matematičnega problema, ki je v točki 4 enak reševanju naloge Sistem enačb.

Četrti korak: Reševanje matematičnega problema.

Rešitev sistema $y = -x + 220$ in $y = -0{,}7 \cdot x + 208$; $x = 40$, $y = 180$.

Rešitev nas pripelje do ugotovitev, da se premici sekata v točki T(40, 180). Premica z enačbo

$y = -0{,}7 \cdot x + 208$ leži nad premico z enačbo $y = -x + 220$ za vrednosti x, ki so večje od 40.

Peti korak: Prenos rešitev matematičnega problema v realni svet.

Povezan je z vprašanjem: Kaj je pomen matematične rešitve v smislu realnega sveta? Če je oseba stara 40 let, ima lahko maksimalni srčni utrip 180 po obeh formulah. Sicer staro pravilo dovoljuje višji utrip mlajšim osebam, nova formula pa starejšim dopušča nekoliko višjega. Od 40. leta se pri uporabi nove formule priporočeno maksimalni srčni utrip zviša.

Pri prenosu rešitev matematičnega problema v realni svet je zelo pomembno zavedanje omejitev danega izračuna. Pri tem se učimo kritičnega vrednotenja rezultatov, zavedanja, da ne poznamo vseh pogojev, da bi lahko slepo prenašali rezultate, da je formula le navidezno znanstvena idr.

Nalogi SISTEM ENAČB in SRČNI UTRIP večinoma preverjata enako matematično znanje, razlikujeta pa se glede na kontekst, v katerega sta postavljeni. Prva se osredotoča le ne matematične objekte in procese, druga pa prikazuje, kako matematiki pogosto »delajo matematiko«, kako ljudje uporabljajo matematiko in kako bi jo ljudje morali uporabljati, da bi lahko v celoti in odgovorno sodelovali v družbi. Primarni izobraževalni cilji za vse učence bi morali biti učenje procesa matematizacije.

Posameznik, ki želi uresničiti model matematizacije znotraj problemov, mora imeti razvite številne matematične kompetence. V posodobljenem učnem načrtu za matematiko za osnovno šolo (Učni načrt za matematiko OŠ, 2008) in tudi v posodobljenem učnem načrtu za matematiko za gimnazijo (Učni načrt za matematiko 2008) je matematična kompetenca opredeljena kot sposobnost uporabe matematičnega načina razmišljanja za reševanje matematičnih in interdisciplinarnih problemov. Iz didaktičnega vidika so lahko problemi, ki so ozko matematični ali širši, postavljeni v šolski ali zunajšolski kontekst (npr. poklicni), med drugim tudi priložnosti za preverjanje razumevanja matematičnih pojmov in postopkov ter delujejo na učenje motivacijsko.

1.5.3 Empirične preiskave – pot do kompleksnih znanj

Empirične preiskave

Z izrazom *preiskovanje* (Žakelj, A., 2003) označujemo postopke za obravnavo problemskih situacij z nejasnimi izhodišči in cilji (lahko odprti problemi). Problemi morajo biti predstavljeni v kontekstu, ki ga učenci razumejo/prepoznajo in so pogosto vzeti iz vsakdanjih, življenjskih situacij. Poudarek je na praktični uporabi znanja, preiskovanju/raziskovanju, refleksiji, skupinskem delu in pripravljenih aktivnostih, pogosto je to lahko vodeno odkrivanje.

Empirične preiskave se nanašajo na probleme iz vsakdanjega življenja, ki jih lahko rešimo na podlagi zbiranja podatkov in njihove obdelave.

Faze pri empiričnih preiskavah

1. *Razmislek o problemski situaciji in postavitev vprašanja*

   Razmislimo o dani problemski situaciji in izluščimo bistvo. V zvezi z izzivom si postavimo eno ali več vprašanj.

2. *Zbiranje podatkov*

   Odločimo se o načinu zbiranja podatkov.

3. *Analiziranje podatkov*

   Glede na vrsto podatkov in namene preiskave podatke uredimo (po velikosti, razporedimo jih v skupine, izračunamo sredine, predstavimo podatke s primernim diagramom idr.).

4. *Predstavitev in interpretacija ugotovitev in predstavitev*

   Ugotovitve predstavimo, interpretiramo, opišemo z besedami in uporabo matematičnih pojmov. Na koncu razmislimo, ali smo odgovorili na postavljena vprašanja.

Več o empiričnih preiskavah v poglavjih 3.1.5 in 3.1.6.

1.6 Matematično modeliranje kot didaktični pristop

Modeliranje je proces matematizacije. V izbrane situacije vnašamo načela in principe matematike ter tako prevajamo realnost v matematično okolje. Npr. rast prebivalstva, ki narašča eksponentno, modeliramo z eksponentno funkcijo.

Matematično modeliranje je ena od oblik dejavnega učenja pri uporabi in graditvi znanja, je didaktični pristop, ki med drugim ustvarja priložnosti za medpredmetno povezovanje. Pri modeliranju učenci rešujejo probleme, ki so postavljeni v matematični ali realistični kontekst, uporabljajo matematično znanje, učijo se **oblikovanja predpostavk in matematičnih formulacij**, reflektiranja matematičnih znanj in znanj drugih predmetnih področij ter kritičnega odnosa do prenosa znanstvenih rešitev v realno okolje.

Modeliranje pomeni konstruirati strukturo ali teorijo, ki vključuje lastnosti objekta, sistema ali procesa. Model reprezentira fizično ali abstraktno situacijo (Abrams, 2001). Matematično modeliranje pomeni prevesti situacijo iz resničnega sveta v matematični jezik (model).

V raziskavi PISA 2006 (Repež M., Drobnič A., Straus M., 2008) je modeliranje opredeljeno kot: »Prenos realnosti v (matematični) svet, interpretacija modelov v smislu skladnosti z realnostjo, delo z modelom, vrednotenje, analiziranje in kritika modela, posredovanje podatkov o modelu ter spremljanje in nadzorovanje procesov modeliranja.«

Matematični modeli poskušajo dati posnetek pomembnih značilnosti dejanskega stanja situacije/objekta/procesa v matematičnem jeziku. Pri sestavljanju matematičnega modela upoštevamo fizikalne ali katere druge zakone, npr. v družboslovju.

Matematični model za met krogle je poševni met. Znižanje vrednosti dobrin na trgu *(npr. s starostjo se vrednosti avtomobilov, stanovanj znižujejo, idr.)* lahko predstavimo z eksponentnim pojemanjem, razmnoževanje bakterij modeliramo z eksponentno rastjo. Zgled matematičnih modelov je tudi napovedovanje vremena. Matematično modeliranje je zahtevno, saj je zanj potrebno znanje različnih področij.

Posebno previdni moramo biti pri matematičnih modelih v družboslovju, saj je človeška družba precej nepredvidljiva, za modeli pa lahko stojijo tudi določeni interesi. Slabi modeli lahko dajo napačne ali zavajajoče rezultate.

Spomnimo se le angleškega ekonomista Thomasa R. Malthusa. Ta je okrog leta 1800 pravilno ugotovil, da prebivalstvo narašča eksponentno, v ZDA precej hitreje kot v industrializiranih evropskih državah. V njegovem modelu pa so se sredstva za preživljanje večala le kot linearna funkcija časa. Sčasoma naj bi na vsakega prebivalca prišlo čedalje manj hrane. Zato naj bi lakota, vojna in bolezni omejili rast prebivalstva. Drugi način ustavitve rasti je Malthus videl v pregrehi, revščini ali vzdržnosti. Podjetniki, ki so minimalno plačevali delavce, so v tej teoriji našli odlično opravičilo. Če bi bili radodarnejši, bi po Malthusu le spodbujali nenadzorovano rast prebivalstva (Legiša, Matematika 2, str. 174-175, DZS 2003).

Dejavnosti pri modeliranju

Dejavnosti pri nalogah, povezanih z modeliranjem, so zelo različne in večplastne po obsegu vsebin in tudi glede na kognitivne ravni znanja: *zbiranje informacij in podatkov, oblikovanje predpostavk, iskanje modelnih funkcij oz. modelov, razvijanje modela, ki omogoča izdelavo primernih primerjav, strukturiranje področja, interpretacija modelov, primerjava modelov, evalvacija modela, ugotavljanje veljavnosti modela, razmišljanje o modelu in njegovih rezultatih, kritično ocenjevanje rezultatov modela in drugo.*

Didaktični vidiki modeliranja

Modeliranje je priložnost za reflektiranje (matematičnih) znanj:

- učenje posploševanja, postavljanja predpostavk/hipotez,
- uvid v smiselnost in uporabnost matematike,
- interpretacijo matematičnih rešitev z vidika realistične situacije (prenos rešitev v realni svet in veljavnost rešitev v realni situaciji),
- uvid v povezave med matematiko in realističnimi situacijami,
- razvijanje inovativnosti,
- razvijanje analitičnega mišljenja,
- razvijanje kritičnega mišljenja,
- uporabo matematike,
- razvijanje matematične pismenosti.

Glavne faze modeliranja *(med posameznimi primeri so lahko tudi razlike):*

1. *seznanjanje s problemom* (uvid v problem),
2. *oblikovanje predpostavk in matematična formulacija* (prevajanje realističnih situacij v matematični kontekst/problem, analiziranje in razumevanje situacije, postavitev predpostavk, določanje povezav med spremenljivkami idr.),
3. *postavitev modela* (zapis funkcije, formule, postavitev geometrijskega modela idr.),
4. *ugotavljanje veljavnosti modela* (z vidika matematike in realistične situacije),
5. *uporaba in interpretacija modela* (interpretacija rešitev z vidika matematike in realistične situacije, primerjava med modeli).

Primer: TAKSI (primer linearne rasti)

Na spletu je oglas storitev za prevoz s taksijem.

Taksi A: Cena za prevoz je 1,50 EUR/km.

Taksi B: 4 EUR za start in 1,30 EUR/km.

Življenjska situacija: Marko je primerjal ponudbe dveh taksistov. Hotel se je peljati 10 km. Kateri taksi je za 10 km vožnje cenejši?

Rešitev:

Za taksi A bi Marko plačal za 10 km vožnje: $10 \cdot 1{,}50$ EUR = 15 EUR

Za taksi B bi Marko plačal za 10 km vožnje: $4 + 10 \cdot 1{,}30$ EUR = 17 EUR

Rešitev in odločitev: Cenejši je taksi A. Marko bo naročil taksi A.

Matematični model

Ponudbo storitev, prevoz s taksijem, predstavimo še z matematičnim modelom – z linearno funkcijo. Za taksi A in B modelirajmo spreminjanje cene v odvisnosti od prevoženih kilometrov x in upoštevajmo še morebitne dodatne stroške.

1. Oblikovanje predpostavk in matematična formulacija

Prevajanje realističnih situacij v matematični kontekst/problem:

- sestavimo tabelo za plačilo storitev za prevoz s taksijem;
- predpostavimo, da gre za linearno zvezo med količinama.

Odločimo se za analitični pristop ugotavljanja polinomske zveze med količinama z metodo končnih diferenc.

V tabelo dodamo stolpca za: $\Delta f(x)$ in $\Delta g(x)$:

- $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ in
- $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$.

Tabela: Zneski za plačilo storitev za prevoz s taksijem.

Pot (km)	Znesek (v EUR) Taksi A		Znesek (v EUR) Taksi B	
x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$g(x)$	$\Delta g(x)$
0	0,00	7,5	4,00	6,5
5	7,50	7,5	10,50	6,5
10	15,00	7,5	17,00	6,5
15	22,50	7,5	23,50	6,5
20	**30,00**	**7,5**	**30,00**	**6,5**
25	37,50	7,5	36,50	6,5
30	45,00	7,5	43,00	6,5
35	52,50		49,50	
. . .				

Ugotovite:

$\Delta f(x) = 7{,}5$ *za vsak* x

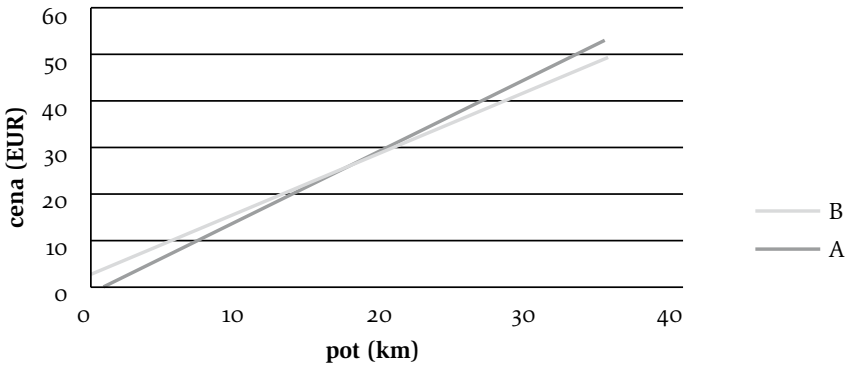
$\Delta g(x) = 6{,}5$ *za vsak* x

2. Postavitev modela

S podatki v tabeli oblikujemo modelni funkciji spreminjanja cene glede na prevožene kilometre x:

- Taksi A: $f(x) = 1{,}5x$ ($f(x)$: spreminjanje zneska za plačilo glede na prevožene kilometre x s taksijem A)
- Taksi B: $g(x) = 1{,}3x + 4$ ($g(x)$: spreminjanje zneska za plačilo glede na prevožene kilometre x s taksijem B)

Odnos med ceno in prevoženimi kilometri lahko prikažemo tudi grafično.



Graf: Plačilo storitev za prevoz s taksijem A in B.

3. Ugotavljanje veljavnosti modela

Z matematičnega vidika preverimo pravilnost modelne funkcije. Njeno uporabo lahko testiramo pri posameznih primerih.

4. Interpretacija rešitev

Popolnoma drugače pa je, kadar testiramo veljavnost modela z vidika realistične situacije. Pogosto se izkaže, da uporaba modela ni tako »čista«, kot je matematika. Že pri danem primeru, ki je zelo preprost, lahko nastane problem, če so na cesti zastoji in stoji taksist v koloni npr. štiri ure. Verjetno se lahko zgodi, da bo cena v tem primeru drugačna, kot jo napoveduje matematični model. To samo pomeni, da matematični model ne more vključiti vseh okoliščin, ki se v realni situaciji lahko zgodijo, in zato tudi interpretacija o veljavnosti modela z vidika realističnih situacij ni tako preprosta.

Po drugi strani pa lahko z uporabo modela ugotavljamo rezultate pri poljubnem spreminjanju podatkov; formule, modeli, grafični prikazi in podobno imajo univerzalno uporabno vrednost. Markov izračun je pokazal ceno samo za 10 km. Primerjava rezultatov z uporabo modelov pa pokaže, da taksi A ni vedno cenejši. Izkaže se, da je pri 30 km cena pri obeh taksistih enaka, če pa se peljemo več kot 30 km, je cenejši taksi B.

Primer: DELITEV CELIC (primer eksponentne rasti)

V laboratoriju so opazovali delitev celic, kot kaže tabela. Določi dan, ko bo število celic preseglo 70.000.

Tabela: Delitev celic

Čas t (dnevi)	Št. celic $f(t)$
3	452
5	633
7	886
9	1240
11	1736
13	2431
15	3403
17	4765
19	6670
21	.....

1. Oblikovanje predpostavk in matematična formulacija

Prevajanje realističnih situacij v matematični kontekst/problem:

- sestavimo tabelo,
- predpostavimo, da gre za eksponentno zvezo med količinama.

Modelno funkcijo določimo z analitičnim ugotavljanjem eksponente zveze med količinama na podlagi podatkov. V tabeli dodamo stolpec $f(t+1)/f(t)$ in izračunamo kvociente.

Tabela: Delitev celic

Čas t (dnevi)	Št. celic $f(t)$	$f(t+1)/f(t)$
3	452	**1,4**
5	**633**	**1,4**
7	**886**	**1,4**
9	**1240**	**1,4**
11	**1736**	**1,4**
13	2431	**1,4**
15	**3403**	**1,4**
17	**4765**	**1,4**
19	**6670**	
21	.....	

2. Postavitev modela

Na osnovi ugotovitev, da so kvocienti $f(t + 1)/f(t)$ konstantni in različni od nič, lahko sklepamo na eksponentno funkcijo. Določimo funkcijo $f(t)$, ki bo čim bolj natančno modelirala podatke, in izračunajmo t, ko bo $f(t) \geq 70\,000$.

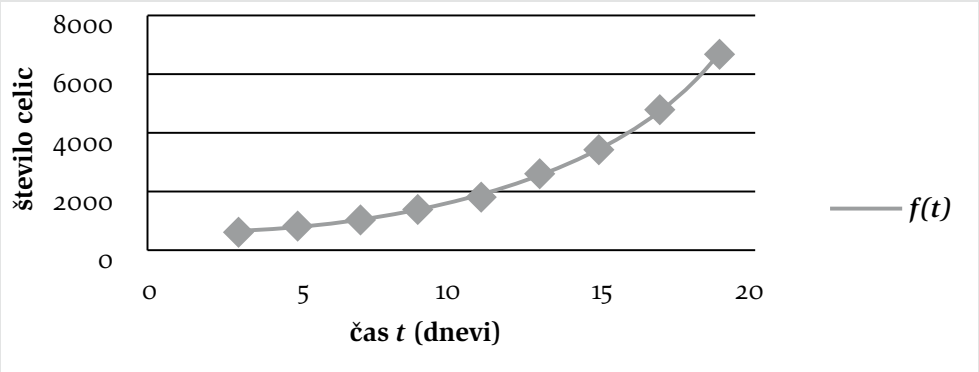
$f(t + 1)/f(t) = 1{,}4$ za vsak t

$a = 1{,}4$

$f(t) = k \cdot 1{,}4^{\,t}$

Iz podatkov v tabeli dobimo, da je $k = 452/1{,}4^3 = 164{,}7$.

Modelna funkcija za rast celic: $f(x) = 164{,}7 \cdot 1{,}4^x$



Graf: Delitev celic

3. Ugotavljanje veljavnosti modela

Z vidika matematike preverimo pravilnost zapisa eksponentne funkcije glede na podatke v tabeli. (Opomba: analitično pridobljene modelne funkcije lahko primerjamo s prilagoditvenimi funkcijami, ki nam jih pri danih podatkih izračuna program Graph.)

4. Interpretacija rešitev

Interpretacija rešitev z vidika realistične situacije je povezana z vprašanjem: Kaj je pomen matematične rešitve v smislu dejanskega razmnoževanja oz. delitev celic. Pri prenosu rešitev matematičnega problema v realni svet je pomembno zavedanje omejitev danega izračuna. Pri tem se učimo kritičnega vrednotenja rezultatov, zavedanja, da vplivajo na delitev celic razmere v laboratoriju, in drugo.

Primer: CENE AVTOMOBILOV (primer eksponentnega pojemanja)

*Prodajalna avtomobilov **CXXS** je objavila podatke o gibanju cen za starejše avtomobile. V tabeli so prikazane cene avtomobilov za znamki $\boldsymbol{X}_{max}$ in $\boldsymbol{XX}_{max}$ za prihodnjih šest let. Izkaže se, da v temelju dražjim avtomobilom na letni ravni hitreje upada cena kot cenejšim. Z modelnimi funkcijami ugotovi, kdaj bo cena avtomobila B nominalno nižja od cene avtomobila A, če upoštevamo, da se bodo cene gibale tako, kot kaže tabela Cene avtomobilov.*

Tabela: Cene avtomobilov

Čas (v letih)	Cena za X_{max} $f(t)$	Cena za XX_{max} $g(t)$
0	10 000	20000
1	9 000	17 000
2	8 100	14 450
3	7 190	12 282
4	6 561	10 440
5	5 904	8 874
6	5 313	7 542
.....		

1. Oblikovanje predpostavk in matematična formulacija

Prevajanje realističnih situacij v matematični problem:

- sestavimo tabelo,
- predpostavimo, da gre za eksponentno zvezo med količinami.

V tabelo dodamo stolpca s kvocientoma $f(t + 1)/f(t)$ in $g(t + 1)/g(t)$.

Tabela: Cene avtomobilov s primerjavo

Čas (v letih)	Cena za X_{max} $f(t)$	$f(t + 1)/f(t)$	Cena za XX_{max} $g(t)$	$g(t + 1)/g(t)$
0	10 000	0,9	20000	0,85
1	9 000	0,9	17 000	0,85
2	8 100	0,9	14 450	0,85
3	7 190	0,9	12 282	0,85
4	6 561	0,9	10 440	0,85
5	5 904	0,9	8 874	0,85
6	5 313		7 542	
.....				

2. Postavitev modela

Modelno funkcijo določimo z analitičnim ugotavljanjem eksponentne zveze med količinama na osnovi podatkov v tabeli.

Iz ugotovitev, da so kvocienti $f(t + 1)/f(t)$ in $g(t + 1)/g(t)$ konstantni, manjši od 1 in različni od nič, lahko sklepamo na eksponentno pojemanje.

$f(t + 1)/f(t) = 0{,}9$ za vsak t

Z upoštevanjem podatkov v tabeli je $f(t) = 10\,000 \cdot 0{,}9^{\,t}$

$g(t + 1)/g(t) = 0{,}85$ za vsak t

Z upoštevanjem podatkov v tabeli je $g(t) = 20\,000 \cdot 0{,}85^{\,t}$

Rešimo še neenačbo. Za katere t velja:

$20\,000 \cdot 0{,}85^{\,t} < 10\,000 \cdot 0{,}9^{\,t}$

Rešitev: $t \geq 13$

Po 13 letih bo cena avtomobila XX_{max} nižja od cene avtomobila X_{max}.

3. Ugotavljanje veljavnosti modela

Z vidika matematike preverimo pravilnost zapisa obeh eksponentnih funkcij.

(Opomba: analitično pridobljene modelne funkcije lahko primerjamo s prilagoditvenimi funkcijami, ki nam jih pri danih podatkih izračuna program Graph.)

4. Interpretacija rešitev

Interpretacija rešitev z vidika realistične situacije je povezana z vprašanjem o pomenu matematične rešitve v resničnem življenju. Pomena rešitev ni težko razbrati, teže pa je realno ovrednotiti veljavnost takega modela. Lahko se zgodijo spremembe na trgu, sprememba tečaja, na trgu se pojavijo nove znamke avtomobilov, spremeni se kupna moč prebivalstva idr., vse to je povezano z razmerji na trgu, znanjem in razumevanjem ekonomije in tudi drugih družbenih vidikov.

Poleg poznavanja poti in načinov modeliranja in uporabe modelov je treba modele razumeti tudi širše. Dobro je, da znamo rezultate modelov tudi kritično oceniti oz. se zavedamo omejitev in pasti modeliranja. Z izdelanim modelom lahko vplivamo na prepričanje ljudi, z modeli lahko tudi manipuliramo, žal tudi v negativnem pomenu. Delno se lahko temu izognemo, če poznamo njihovo ozadje nastajanja. Za šolsko prakso je zato še toliko pomembnejše, da si učenci pridobijo tudi tovrstne izkušnje, kritični vpogled v rezultate, ki jih dobimo z modeli. Tudi v tem kontekstu si oglejmo primer PEČICA.

Primer: PEČICA

Revija POTROŠNIK enkrat na mesec predstavlja nove izdelke domačih proizvajalcev na področju gospodinjskih aparatov. Imajo izdelan model, po katerem izdelke razvrstijo po »kakovosti«. Za takšno oceno električnih pečic uporabljajo ocenjevalni sistem. Ocenjujejo hitrost pečenja (h), nizko porabo električne energije (e), kapaciteto (k) in dodatno opremo (o). Za vsako kategorijo podelijo točke, in sicer: 3 točke – odlično, 2 točki – dobro, 1 točka – zadovoljivo. Januarja 2010 so za pet proizvajalcev pečic objavili naslednje rezultate.

Tabela: Opis pečic

Pečica	Hitrost *h*	Poraba el. ener. *e*	Kapaciteta *k*	Dodatna opr. *o*
Proizvajalec pečice A1	3	1	2	3
Proizvajalec pečice B4	2	2	2	2
Proizvajalec pečice D1	3	1	3	2
Proizvajalec pečice S1	1	3	3	3
Proizvajalec pečice A12	3	2	3	2

3 točke – odlično, 2 točki – dobro, 1 točka - zadovoljivo

Za izračun skupnega števila točk za posamezno pečico uporabljajo uteženo formulo, ki je linearna kombinacija posameznih ocen:

$$\text{Skupno število točk } t\text{: } t = 3 \cdot h + e + k + o$$

Nekateri proizvajalci so protestirali, da model ni pošten.

Razmisli, ali je mogoče postaviti model tako, da bi dobil največ točk proizvajalec pečice A1.

Zapiši formulo, po kateri bi pečica A1 dobila največ točk.

V formuli $\boldsymbol{t = \ldots \cdot h + \ldots \cdot e + \ldots \cdot k + \ldots \cdot o}$ *morajo biti uporabljene vse štiri spremenljivke: h, e, i in o, in sicer s koeficienti, ki so pozitivna cela števila.*

1. Prevajanje realističnih situacij v matematični kontekst/problem:

Branje z razumevanjem, razbrati razmerje med jezikom problema in formalnim matematičnim jezikom. Za začetek si lahko postavimo nekaj vprašanj:

Koliko točk je dobila pečica A1?

Katera pečica je dobila največ točk?

Kolikšna je vsota točk za posamezno pečico glede na dani model?

Izračune glede na dani model lahko zapišemo v preglednico.

2. Postavitev modela glede na opisane zahteve

Izberemo strategijo postavljanja modela, ki je prikazana v zadnjih treh stolpcih v tabeli.

Tabela: Strategija postavljanja modela

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Pečica	**Hitrost *h***	**Nizka poraba el. ener. *e***	**Kapaciteta *k***	**Dodatne opcije *o***	***h* + *e* + *k* + *3o***	***h* + *e* + *k* + *3o* + *h***	***2h* + *e* + *k* + *3* · *o***
Proizvajalec pečice A1	3	1	2	3	**6 + 9**	9 + 6 + **3**	18
Proizvajalec pečice B4	2	2	2	2	**6 + 6**	6 +6 + **2**	14
Proizvajalec pečice D1	3	1	3	2	**7 + 6**	6 +7 + **3**	16
Proizvajalec pečice S1	1	3	3	3	**7 + 9**	9 +7 + **1**	**17**
Proizvajalec pečice A12	3	2	3	2	**8 + 6**	6 +8 + **3**	17

Rešitev:

$t = 2 \cdot h + 1 \cdot e + 1 \cdot k + 3 \cdot o$

3. Ugotavljanje veljavnosti modela z vidika matematike in vidika realistične situacije

Izračunamo skupno število točk po enem in drugem modelu ter razvrstimo pečice glede na točke, ki jim pripadajo po obeh formulah:

Tabela: Razvrstitev pečic

Pečica	$t = 3 \cdot h + 1 \cdot e + 1 \cdot k + 1 \cdot o$	$t = 2 \cdot h + 1 \cdot e + 1 \cdot k + 3 \cdot o$
Proizvajalec pečice A1	**15**	18
Proizvajalec pečice B4	12	14
Proizvajalec pečice D1	15	16
Proizvajalec pečice S1	12	17
Proizvajalec pečice A12	16	17

Z izračunom preverimo, da po modelu $t = 2 \cdot h + 1 \cdot e + 1 \cdot k + 3 \cdot o$ pripada pečici A1 dejansko največ točk. Z matematičnega vodika je rešitev pravilna. Z vidika uporabnika pa je interpretacija precej zahtevnejša.

4. Prenos rešitev matematičnega problema v realni svet je povezan z vprašanjem

Dani primer opozarja na pomen kritičnega vrednotenja modelov in rezultatov, ki jih dobimo z modeli. Slabi modeli lahko dajo napačne ali zavajajoče rezultate. Pri prenosu rešitev matematičnega problema v realni svet je pomembno zavedanje oz. poznavanje pogojev nastajanja modela. V danem primeru sta po modelu $t = 2 \cdot h + 1 \cdot e + 1 \cdot k + 3 \cdot o$ nizka poraba električne energije in kapaciteta pečice ovrednoteni manj kot dodatne opcije, ki jih omogoča pečica. Postavljeni model, ki je enak za vse, daje navidezni občutek poštenosti in enakopravnosti.

Prednosti in omejitve modeliranja

Proces modeliranja je med drugim tudi **reflektiranje matematičnih znanj**. Kadar npr. z analitičnim pristopom ugotavljamo linearno zvezo med količinama, reflektiramo linearno funkcijo, ali pa, kadar z analitičnim pristopom modeliramo eksponentno pojemanje, med drugim reflektiramo eksponentno funkcijo.

Modeliranje ustvarja tudi priložnosti za učenje **postavljanja predpostavk in posploševanja**, zlasti pri empiričnem pristopu.

Za konec je smiselno poudariti, da se je pri prenosu rešitev matematičnega problema v realni svet treba zavedati omejitev modela, zavedanja o pogojih nastajanja modela, da je formula lahko le navidezno znanstvena, in drugega. V tem kontekstu je treba razviti kritični odnos do vrednotenja rezultatov. Pogosto je interpretacija rešitev z vidika realne situacije zelo zahtevna, če ni včasih zahtevnejša kot interpretacija z vidika matematike.

Stopnjevanje zahtevnosti problema

Primer PEČICA lahko zastavimo tudi tako, da se vprašanja stopnjujejo po zahtevnosti. Prvi dve vprašanji preverjata predvsem nižje taksonomske ravni znanja. Faze reševanja so precej rutinske: razumevanje besedila, izvajanje postopkov, preverjanje izračunov. Tretje vprašanje pa je problem, ki ni rutinsko rešljiv in zahteva tudi drugačne pristope pri reševanju.

Od reševalca se pričakuje, da problem razišče, nastavi model in preveri njegovo veljavnost. Preverja analitično mišljenje, kreativnost, sposobnost sintetiziranja. Razlika v zahtevnosti in vrstah znanja je očitna. Pri prvem in drugem vprašanju reševalec izvaja postopke, pri reševanju problema pa samostojno išče modele, preverja svojo kreativnost in ustvarjalnost.

Didaktično analizo naloge navajamo tudi v tabeli.

Tabela 4: Didaktična analiza naloge glede na prvi in drugi sklop vprašanj

	stopnjevanje zahtevnosti problema	
	Koliko točk je dobila pečica A1? Katera pečica je dobila največ točk?	**MODELIRANJE Zapišite formulo za izračun skupnega števila točk tako, da bo po izračunu pečica A1 dobila največ točk. V formuli morajo biti uporabljene vse štiri spremenljivke: h, e, i, o.**
Cilji naloge	• brati podatke v tabeli • izvajati računske postopke • izračunati vrednosti algebrskega izraza	• razumeti problemsko situacijo/uvid v problem • prevajati »resničnost« v matematične strukture • modelirati – postaviti model • ugotavljati veljavnosti modela – validacija modela • razmišljati o modelu in njegovih rezultatih
Faze modeliranja		
Seznanjanje s problemom *(prevajanje realistične situacije v matematični problem)*	• izračunati vrednost algebrskega izraza za različne vrednosti spremenljivk	• razbrati razmerje med jezikom problema in formalnim matematičnim jezikom
Oblikovanje predpostavk in matematična formulacija	• uporabiti dani obrazec za izračun vrednosti • primerjati vrednosti izračunov	• uporabiti dani obrazec za izračun vrednosti
Postavitev modela – oblikovati matematični zapis		• samostojno postaviti model za izračun vrednosti • primerjati rezultate med modeli
Preverjanje izračunov	• preveriti pravilnost izračunov • narediti razmislek o smiselnosti rezultata	• preveriti pravilnost izračunov • narediti razmislek o smiselnosti rezultata
Ugotavljanje veljavnosti modela		• razmisliti o pravilnosti, smiselnosti in veljavnosti modela glede na postavljene cilje modeliranja
Uporaba in interpretacija modela *(z vidika realistične situacije)*		• razmisliti o pomenu rešitve, ki jih prinaša dani model • kritika modela in njegove omejitve • (veljavnost rešitev v realistični situaciji, primerjava med modeli)

[2] *Faze modeliranja: seznanjanje s problemom, oblikovanje predpostavk in matematična formulacija, postavitev modela, ugotavljanje veljavnosti modela, uporaba in interpretacija modela*

1.7 Literatura

1 *Abrams, J. (2001). Mathematical modeling. Teaching the open-ended application of Mathematics. Dostopno na naslovu: http://www.meaningfulmath.org.*

2 *Gagne, R.M. (1985). The conditions of learning and theory of instruction. New York: Holt, Rinehart & Winston.*

3 *Kavaš, B. (2002). Matematično nadarjeni učenci v osnovni šoli. Psihološka obzorja, št. 3–4, Ljubljana: Društvo psihologov Slovenije.*

4 *Korthagen, F. A. J. (1999). Linking reflection and technical competence: The logbook as an instrument in teacher education. European Journal of Teacher Education.*

5 *Legiša, P. (2003). Matematika 2. Ljubljana: DZS, str. 174–175.*

6 *Marentič Požarnik, B. (2000). Psihologija učenja in pouka. Ljubljana: DZS.*

7 *Pečjak S., Gradišar A. (2002). Bralne učne strategije. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo*

8 *Pečjak, S. (2001). Zakaj uporaba bralnih strategij povečuje bralno/učno učinkovitost? V: Ivšek, M. (ur.), Različne vrste branja terjajo razvijanje različnih bralnih strategij: zbornik Bralnega društva Slovenije. 1. natis. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.*

9 *Poročilo Evropskega parlamenta in Sveta Evropske unije z dne 18. 12. 2006, Uradni list EU, št. 394/10.*

10 *Razdevšek Pučko, C. (2004). Kakšnega učitelja potrebuje (pričakuje) današnja (in jutrišnja) šola? Sodobna pedagogika, 55/(posebna številka), str. 52–74.*

11 *Repež, M., Drobnič Vidic, A., Štraus, M. (2008). Izhodišča merjenja matematične pismenosti v raziskavi PISA 2006. Ljubljana: Nacionalni center PISA, Pedagoški inštitut.*

12 *Repež, M., Štraus, M. (2005). Izhodišča merjenja bralne pismenosti v raziskavi PISA 2000. Ljubljana: Nacionalni center PISA, Pedagoški inštitut.*

13 *Smernice, načela in cilji posodabljanja učnih načrtov (2007). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.*

14 *Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. V: Grouws D. A. (ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan Publishing Company.*

15 *Sweller, J. (1989). Cognitive technology: Some procedures for facilitating learning and problem-solving in mathematics and science. Journal of Educational Psychology, 8.*

16 *Weinert, F. E. (2001). Concept of Competence: A Conceptual Clarification. V: Developing Competent Teachers. Germany: Hogrefe & Huber Publishers.*

17 *Woolfolk, A. (2002). Pedagoška psihologija. Ljubljana. Educy.*

18 *Zentall, S. S. (1990). Fact-retrieval automatization and math problem solving by learning disabled, attention-disorderd and normal adolescents. Journal of Eduational Psychology, 82.*

19 *Žakelj, A. (2003). Kako poučevati matematiko. Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.*

20 *Žakelj, A. (2004). Procesno-didaktični pristop in razumevanje pojmovnih predstav v osnovni šoli. Doktorsko delo. Ljubljana: Filozofska fakulteta.*

21 *Žakelj, A., Cotič, M. (2004). Gagnejeva taksonomija pri preverjanju in ocenjevanju matematičnega znanja. Sodobna pedagogika, 2004, let. 55, št. 1, str. 182–192.*

22 *Žakelj, A., Lipovec A., Perat Z., Vršič V., Repovž B., Senekovič J., Bregar Z., Prinčič A. (2009). Učni načrt, Matematika: osnovna šola. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.*

23 *Žakelj, A., Bon Klajnšček, M., Jerman, M., Kmetič, S., Repolusk, S., Ruter, A. (2008). Učni načrt, Matematika: gimnazija: splošna, klasična in strokovna gimnazija: obvezni predmet in matura (560 ur). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo, str. 47. ISBN 978-961-234-693-5. Dostopno na naslovu: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/ss/programi/2008/Gimnazije/UN_MATEMATIKA_gimn.pdf.*

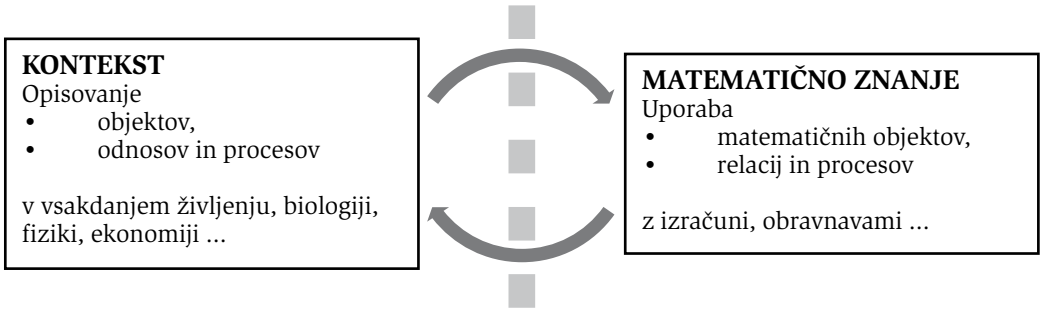
Matematično modeliranje

2.1 Primeri različnih pristopov pri matematičnemu modeliranju

Samo Repolusk

Uvod

1. Matematično modeliranje je odkrivanje in preizkušanje matematične predstavitve ali modela za realen objekt ali proces:



2. Koraki matematičnega modeliranja so ciklični proces:

1. Razumevanje in identificiranje problema.
2. Oblikovanje predpostavk in matematična formulacija:
   a. Identificiranje in klasificiranje spremenljivk.
   b. Določanje povezav med spremenljivkami in pomožnimi modeli.
3. Reševanje modela.
4. Preverjanje modela:
   a. Ali se model nanaša na problem?
   b. Ali je model smiseln?
   c. Preizkušanje modela z realnimi podatki.
5. Uporaba (implementacija) modela.
6. Izboljšave modela.

3. Modeliranje je zahtevno, ker predpostavlja **poznavanje modeliranega pojava** (npr. fizikalnih zakonov), **matematičnih orodij, tehnik modeliranja** in **kritičnost pri uporabi modelov**.

4. Pristopi k izbiri modelov (Magajna, 2005):

KLJUČNO IZHODIŠČE	IZBIRA PRISTOPA
Meritve, podatki	Empirični pristop
Temeljne zakonitosti (obvladljive)	Teoretični pristop
Temeljne zakonitosti (neobvladljive)	Simulacijski pristop
Vrste količin	Dimenzijski pristop

2.1.1 Primeri nalog z rešitvami

Naloga 1 (empirični pristop: ugotavljanje zveze med količinama na osnovi zbranih podatkov z uporabo računalnika; besedilo naloge po: Magajna, 2005)

Zanima nas, kako se z vajo izboljšuje priklic poštevanke. Zbrali smo naslednje podatke:

Dan 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16.

Čas (min) 7,7 5,6 4,9 3,7 4,7 3,4 3,3 2,8 3,5 2,4 2,2 2,0 2,1 2,0 1,9 1,9

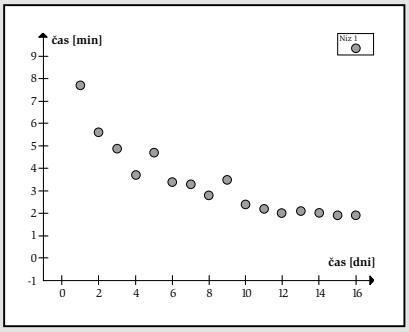
(a) S programom Graph prikažimo dane podatke v koordinatnem sistemu.

(b) S programom Graph poiščimo nekaj primerov prilagoditvenih funkcij, ki lahko modelirajo dane podatke (npr. linearno, kvadratno in potenčno funkcijo). Primerjajmo modele med seboj glede na prileganje krivulje točkam v koordinatnem sistemu.

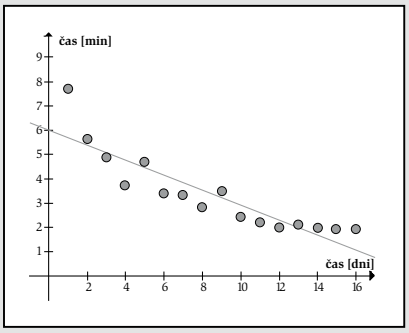
(c) Kaj lahko na podlagi podatkov in prilagoditvenih funkcij sklepamo o učinkovitosti vaj za izboljšanje priklica poštevanke? Ali lahko iz te ugotovitve povemo kaj več o ustreznosti modelov iz primera (b)? Kako bi lahko še dodatno preverili natančnost izbranega modela?

Rešitev: *Z uporabo programa Graph rešimo dani problem v nekaj korakih:*

1. Vnos podatkov v tabelo: izberemo > *Funkcija* > *Vstavi* zaporedje točk in vnesemo podatke:

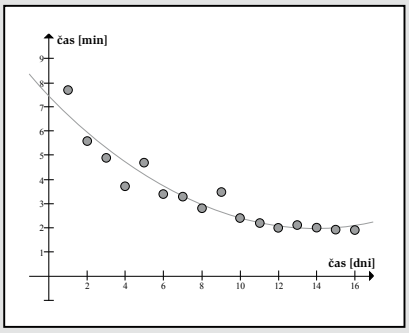


2. Preizkušanje različnih **prilagoditvenih** (regresijskih) krivulj: izberemo > *Funkcije* > *Vstavi trendno črto* in poskušamo z različnimi prilagoditvenimi funkcijami:



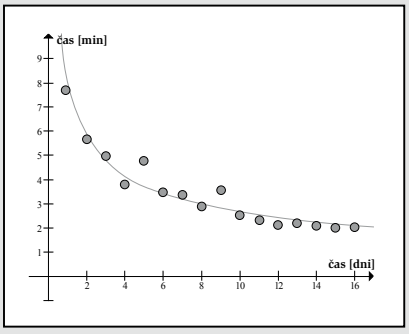
linearna funkcija

$f(x) = -0{,}306x + 5{,}985$



polinomska funkcija, stopnje 2

$f(x) = -0{,}029x^2 - 0{,}797x + 7{,}457$



potenčna funkcija

$f(x) = 8{,}488x^{-0{,}529}$

Če primerjamo modele funkcij med seboj glede na prileganje njihovih grafov empirično dobljenim točkam, lahko rečemo, da so na danem območju vsi modeli primerni, pri čemer sta nekoliko natančnejša modela kvadratne in potenčne funkcije. Brez upoštevanja konteksta (realistične situacije) med zadnjima ne moremo izbrati primernejšega.

Ob upoštevanju konteksta in dobljenih podatkov pa lahko oblikujemo sklep, da vaja k izboljšanju priklica poštevanke največ pripomore v prvih dneh vadbe, pozneje pa čedalje manj. To je mogoče ugotoviti z opazovanjem razlik med izmerjenimi časi (velike razlike na začetku, zanemarljive na koncu) ali z opazovanjem strmine grafov modelnih funkcij (padajoče). Sklepamo lahko tudi, da potrebni čas za priklic poštevanke nikoli ne bo enak 0 min, zato linearni model odpade. Prav tako ni verjetno, da bi se z dnevi vadbe čas priklica poštevanke začel podaljševati, zato odpade tudi model kvadratne funkcije, kot najbolj realističen nam ostane model potenčne funkcije.

Kritični pripombi:

1. Dobljeni podatki seveda ne podpirajo teze, da vadba poštevanke po določenem času ni potrebna, le izpeljana mora biti v optimalnem obsegu (torej ne v nerazumno velikem obsegu za vse učence in s predpostavko, da so učenci 15. dan vaj enako okorni kot 1. dan, ampak v optimalnem obsegu za izbranega učenca, ki bo omogočal vzdrževanje usvojenega znanja: včasih je ta »optimalni« obseg večji (npr. pri ohranjanju vedenja o nekaterih faktografskih podatkih), včasih pa sploh ni več potreben (npr. učenje vožnje s kolesom). Dejavniki, ki vplivajo na optimalnost časa za vadbo, so tako različni in individualno pogojeni (notranja motivacija, kognitivna zrelost, izkušnje, predsodki, razumevanje pojmov in procesov ...), da ne moremo govoriti o univerzalnem načinu ohranjanja znanja, ki bi bil primeren za vse učence, za vse vsebine, v vsakem času.
2. Natančnost izbranega modela bi seveda preverili z meritvami pri različnih učencih, njegovo univerzalnost pa z meritvami učinkovitosti vadbe pri utrjevanju različnega znanja (nekatere raziskave kažejo, da pri športnih treningih pretirana in neprilagojena vadba po določenem času povzroči tudi obraten učinek – upad zmožnosti, zato v takšnih primerih model potenčne funkcije ni ustrezen).

Naloga 2 (dimenzijska analiza: določanje zveze med količinami s primerjavo merskih enot)

Kateri funkcijski predpis opisuje hitrost tekočine pri iztekanju skozi majhno odprtino v steni posode, če predpostavimo, da je hitrost v[m/s] odvisna od višine gladine tekočine nad odprtino h[m] in težnega pospeška g[m/s^2]?

Rešitev: Pri reševanju tovrstnih nalog vedno predpostavimo še obstoj določenih konstant (npr.) v enačbah:

1. nastavitev splošne zveze:

$v = k \cdot g^A \cdot h^B$

2. upoštevanje merskih enot:

$\frac{m}{s} = \left(\frac{m}{s^2}\right)^A \cdot m^B$

3. primerjava eksponentov nam da sistem $A + B = 1$ in $2A = 1$, od koder dobimo $A = B = 1/2$;

$k = \sqrt{2gh}$

4. mogoči model je torej:

$v = k \cdot \sqrt{g \cdot h}$

Izkaže se, da je $k = \sqrt{2}$ in predpis se glasi $v = \sqrt{2gh}$ (fiziki ga imenujejo Torricellijeva enačba).

Domača naloga *(Dym, str. 31):*

Hitrost zvoka (c) v plinu je odvisna od tlaka (p) v plinu in od gostote plina (ρ). S pomočjo dimenzijske analize določimo zvezo med temi količinami.

Rešitev: Iz nastavkov $c = k \cdot p^A \cdot \rho^B$ in $m/s = (kg/m^2)^A \cdot (kg/m^3)^B$ dobimo za vsako od enot enačbe $A + B = 0$, $-A - 3B = 1$ in $2A = 1$, kar nam da enolični rešitvi $A = 1/2$ in $B = -1/2$, torej je $c = k \cdot \sqrt{p/\rho}$.

Učenci poiščejo pomen konstante *k* sami ali z učiteljem na spletu.

Naloga 3 (teoretični pristop: uporaba obstoječega matematičnega modela)

Urejanje kemijskih enačb je na splošno zahtevna naloga, saj je treba poznati reaktante in tudi produkte kemijskih reakcij, prav tako pa tudi zakonitosti kemijskih reakcij. V določenih primerih se srečamo le z zahtevo določitve koeficientov pred posameznimi spojinami v zapisu kemijske enačbe, kar lahko rešimo s premislekom (na pamet), s poznavanjem ustrezne teorije pri kemiji ali pa uporabimo kakšen že izdelan matematični model. Premislimo, s katero srednješolsko matematično metodo bi lahko uredili naslednjo enačbo:

$H_3PO_4 + Mg(OH)_2 \rightarrow Mg_3(PO_4)_2 + H_2O$

Premislimo tudi o univerzalnosti in morebitnih omejitvah uporabljenega modela za dani problem.

Rešitev: Dobimo sistem linearnih enačb z več neznankami (enačbe so po vrsti urejene po *H, P, O* in *Mg*): $3x + 2y = 2w$, $x = 2z$, $4x + 2y = 8z + w$, $y = 3z$, katerega rešitev je enoparametrična družina. Smiselna izbira je $z = 1$, ki nam da:

$2H_3PO_4 + 3Mg(OH)_2 \rightarrow Mg_3(PO_4)_2 + 6H_2O$

Naloga 4 (teoretični pristop: izpeljava preprostega matematičnega modela)

Klinometer je naprava za določanje višine oddaljenih objektov (zgled iz narave).

(a) Razmislimo o matematičnem modelu merjenja višine s klinometrom. Preverimo, ali je model smiseln in kako natančen je. Izdelajmo tabelo vrednosti višin za različne vrednosti izmerjenih kotov pri vnaprej določeni razdalji opazovalca od predmeta in vnaprej določeni višini opazovalca.

(b) Izdelajmo klinometer: potrebujemo polkrožni kotomer, vrvico, kovinsko podložko (ali drugo utež) in slamico za pitje. Odrežimo 30 cm dolgo vrvico, en konec vrvice privežimo na sredino kotomera, na drugi konec vrvice pa privežimo podložko in prilepimo slamico na vrh kotomera. Klinometer preizkusimo v naravi.

Rešitev:

Naloga omogoča izdelavo bolj ali manj natančnih modelov, npr. en model lahko zanemari razdaljo od tal do oči (oz. do klinometra), drugi model jo upošteva (pogovorimo se o uporabnosti obeh modelov). Če označimo z d razdaljo med človekom in objektom, katerega višino določamo, z L višino človeka, s h iskano višino objekta in z ρ kot, ki ga odmerimo v klinometru, se modelna enačba glasi:

$h = d \cdot tg\,(90^\circ - \rho) + L$

Ustreznost modela lahko hitro preverimo tudi z robnima podatkoma.

Pri naslednjih nalogah je kontekst zanemarjen, ker je poglavitni cilj seznanitev s postopkom iskanja modela ustrezne funkcije (linearne, eksponentne, polinomske), ki modelira predstavljene podatke.

Naloga 5 (Empirični pristop: analitično ugotavljanje linearne zveze med količinama na osnovi zbranih podatkov; Usiskin, 2003, str. 113–115)

(a) Poiščimo realno funkcijo L, ki modelira podatke:

x	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	5,53	7,68	9,83	11,98	14,13	16,28	18,43

(b) Ali je dobljena funkcija f(x)=L(x) edina funkcija, ki modelira dane podatke (t. j. ali je f(x)=L(x) za vsak realen x)? Če je odgovor »ne«, navedimo še kakšen primer in s programom Graph narišimo grafa obeh funkcij.

Rešitev:

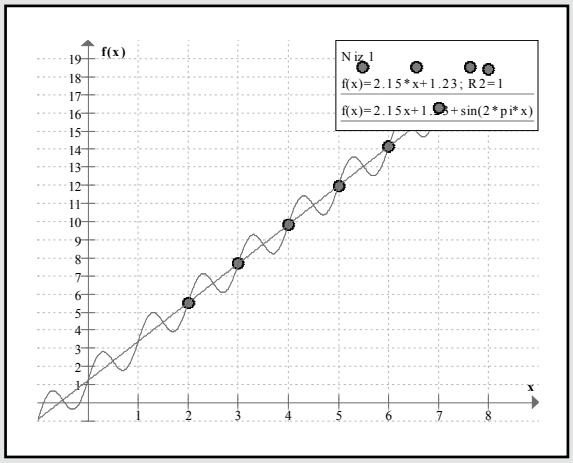
a) Najprej v tabeli dopišimo vrstico z razlikami $\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$ in na podlagi tega sklepajmo o naravi funkcije:

x	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	5,53	7,68	9,83	11,98	14,13	16,28	18,43
$\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$	**2,15**	**2,15**	**2,15**	**2,15**	**2,15**	**2,15**	

Preverimo lahko, da za vsako linearno funkcijo $L(x) = kx + n$ velja, da je $\Delta L(x)=k\Delta x$ za vsak x in Δx. Velja pa tole: če so prve diference funkcije konstantne, različne od 0 in vedno enake (oz. približno enake), lahko naše podatke modeliramo z linearno funkcijo. Obratna implikacija seveda ne velja. V našem primeru je $\Delta f(x) = 2{,}15 = k$ in z vstavljanjem ene od točk dobimo tudi $n = 1{,}23$ in modelno linearno funkcijo $L(x) = 2{,}15x + 1{,}23$.

b) Eden od (nelinearnih) modelov je lahko tudi $h(x) = L(x) + \sin(2\pi x)$.

Grafa sta:



Naloga 6 (Empirični pristop: analitično ugotavljanje eksponentne zveze med količinama na osnovi zbranih podatkov; Usiskin, 2003, str. 118–119)

(a) Poiščimo realno funkcijo E, ki čim bolj natančno modelira podatke:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,90	2,51	3,31	4,37	5,76	7,60	10,03

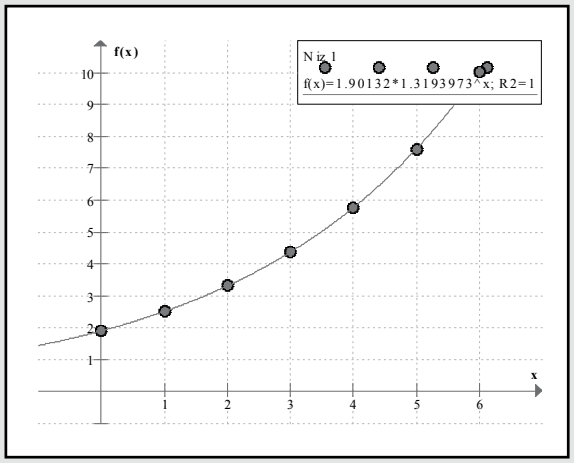
(b) Z uporabo funkcije E napovejmo vrednosti za f(3,5) in f(10).

Rešitev:

a) Najprej v tabeli dopišimo vrstico s kvocienti $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ in na podlagi tega sklepajmo o naravi funkcije.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,90	2,51	3,31	4,37	5,76	7,60	10,03
$\frac{f(x+1)}{f(x)}$	**1,32**	**1,32**	**1,32**	**1,32**	**1,32**	**1,32**	

Preverimo lahko, da za vsako eksponentno funkcijo $E(x) = y_o \cdot a^x$ velja, da je $\frac{E(x+1)}{E(x)} = a$ za vsak x. Velja tudi: če so kvocienti $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ vedno enaki (oz. približno enaki) in različni od 0, lahko naše podatke modeliramo z eksponentno funkcijo. V našem primeru je $\frac{f(x+1)}{f(x)} = 1{,}32 = a$ (natančno na tri mesta) in z vstavljanjem prve točke dobimo tudi $y_o = 1{,}90$ in modelno eksponentno funkcijo $E(x) = 1{,}90 \cdot (1{,}32)^x$ (naloga je rešena z uporabo programa Graph):



b) $f(3{,}5) \doteq E(3{,}5) \doteq 5{,}02$ in $f(10) \doteq E(10) \doteq 30{,}51$.

Naloga 7 (Empirični pristop: analitično ugotavljanje polinomske zveze med količinama na osnovi zbranih podatkov; Usiskin, 2003, str. 121–124)

Poiščimo realno funkcijo P, ki modelira podatke:

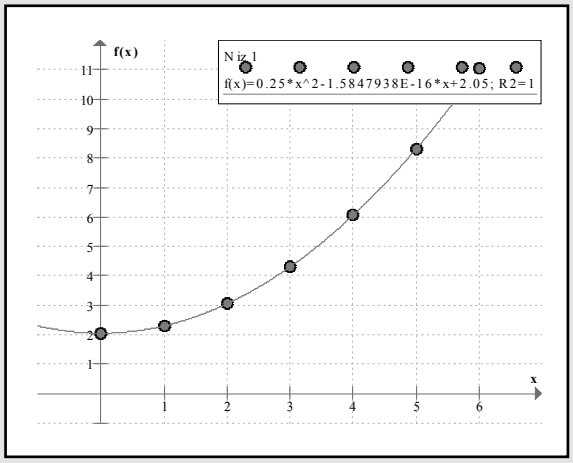
x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2,05	2,30	3,05	4,30	6,05	8,30	11,05

Rešitev:

Modelno funkcijo bomo iskali z *metodo končnih diferenc.* V tabeli dopišimo vrstice z diferencami $\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$, $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + 1) - \Delta f(x)$, $\Delta^3 f(x)$, …, $\Delta^n f(x)$.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2,05	2,30	3,05	4,30	6,05	8,30	11,05
$\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$	**0,25**	**0,75**	**1,25**	**1,75**	**2,25**	**2,75**	
$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + 1) - \Delta f(x)$	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,50**		
$\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x + 1) - \Delta^2 f(x)$	**0**	**0**	**0**	**0**			

Na podlagi tega sklepajmo o naravi funkcije: preverimo lahko, da je za poljubno linearno funkcijo konstantna in neničelna prva diferenca, za kvadratno funkcijo druga diferenca, za poljubno polinomsko funkcijo stopnje n pa natanko n-ta diferenca. Velja pa naslednje: vsako realno funkcijo z neničelno konstantno n-to diferenco lahko modeliramo s polinomsko funkcijo stopnje n. V našem primeru je $\Delta^2 f(x) = 0{,}50$, zato lahko podatke modeliramo s kvadratno funkcijo. Ob rešitvi ustreznega sistema enačb (upoštevamo formule za diference za kvadratno funkcijo in točke v tabeli) dobimo modelno kvadratno funkcijo $P(x) = 0{,}25x^2 + 2{,}05$ (naloga je rešena z uporabo programa Graph):



Opomba: Analitično dobljene modelne funkcije iz nalog 5, 6 in 7 lahko primerjamo s prilagoditvenimi funkcijami, ki nam jih pri danih podatkih v nalogah izračuna program Graph.

Viri

1 *Abrams, J. (2001). Mathematical modeling: Teaching the open-ended application of Mathematics. Spletna stran: http://www.meaningfulmath.org, pridobljeno 17. 09. 2007.*

2 *Dym, C. L. (2004). Principles of Mathematical Modeling. Second Edition. Elsevier Science & Technology Books.*

3 *Giordano, F. R., Weir, M. D., Fox, W. P. (2003). A First Course in Mathematical Modeling. Third Edition. China Machine Press.*

4 *Magajna, Z. (2005). Matematično modeliranje – podiplomska predavanja. Interna skripta s podiplomskih predavanj.*

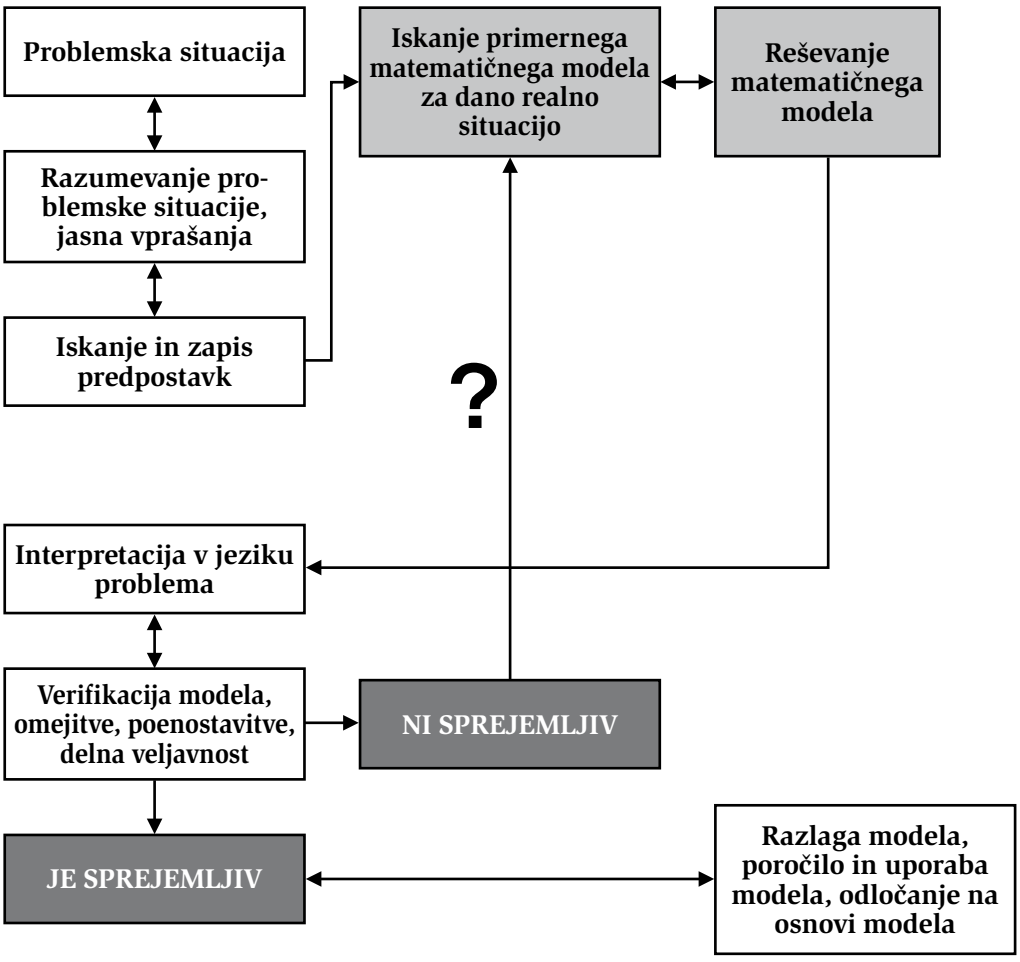
5 *Usiskin, Z. [et al.] (2003). Mathematics for high school teachers: An advanced perspective. Pearson Education, Prentice Hall.*

2.2 Razvoj in spremljanje procesa modeliranja

Silva Kmetič

Beseda model običajno pomeni v matematiki simbolno ali konkretno ponazoritev matematičnega pojma. Beseda modeliranje po Slovarju slovenskega knjižnega jezika (ZRC SAZU, 2009) pomeni *prenos lastnosti, značilnosti raziskovanega predmeta na podoben predmet, narejen po določenih pravilih*, v našem primeru dodajamo še opis celotnega procesa, ki nas pripelje do tega modela, vključno z verifikacijo in interpretacijo modela. Matematični model običajno ni predmet, ampak matematični teoretično abstraktni konstrukt. Matematično modeliranje lahko opišemo tudi kot proces od realne situacije do matematičnega modela in 'nazaj'. Matematični del je tisti, ki realen problem (problem v kontekstu) opiše na matematičen način. Definicije in razumevanje obeh pojmov, model in matematično modeliranje, različni avtorji razumejo drugače. V našem primeru bi z modeliranjem radi presegli raven 'zapisanega računa' po besedilu.

Najboljši so primeri, ki jih lahko rešujemo na različne načine in tako rezultat oziroma najdeni model preverjamo z modelom drugega pristopa (simulacija, empirični pristop in teoretični pristop).



Slika 1: Proces matematičnega modeliranja

Proces matematičnega modeliranja lahko nadaljujemo s posplošitvijo in razširitvijo problema.

Matematično modeliranje je kot vsako reševanje realnih problemskih situacij zahtevno, saj moramo poznati dve področji, matematiko in področje problema. Zato lahko pričakujemo naslednje kognitivne težave učencev:

- težave pri uporabi dveh ali več informacij hkrati,
- težave pri prepoznavanju implicitno danih podatkov v nalogi,
- slabe skice, torej premalo usmerjenosti v vizualizacijo problema,
- nejasno razlago svojih idej o reševanju problema,
- nerazumevanje enačb,
- težave pri verifikaciji in interpretiranju enačbe oz. modela.

Učitelj ob zavedanju pričakovanih kognitivnih težav vertikalno in horizontalno načrtuje tako, da lahko učenci napredujejo in premagujejo ovire pri reševanju problema do mogoče stopnje samostojnosti v procesu reševanja.

Poglejmo naslednji primer na različnih starostnih skupinah učencev:

Vzemimo list papirja pravokotne oblike. Prepognimo ga na polovico in postopek nadaljujmo. Koliko plasti papirja imamo po štirih prepogibanjih? Koliko po sedmih?

Začnimo v šestem razredu osnovne šole

Učno situacijo prepogibanja papirja navadno vključimo v pouk pri poglavju o potencah. V tem primeru je cilj, da konkretno ali miselno dejavnost prepogibanja (ena od lastnosti dobrega problema) nadomestimo z matematičnim opisom. Ta je lahko besedni, aritmetični, z naštevanjem števil iz zaporedja prepogibanj, z opisom pravila (dve mogoči obliki), s tabelo vrednosti, potencami, induktivnim sklepom, posplošitvijo ...

Če se vživimo v vlogo učenca šestega razreda, lahko razumemo, kaj je za učenca težko pri reševanju tega problema. Učenec prepogiba in šteje plasti. Ker je bolj osredotočen na rezultat, to je na število plasti, ne vidi spremenljivke, od katere je odvisno število plasti. Rezultat izrazi z zaporedjem vrednosti: 2, 4, 8, 16, 32 ...

Vzorec kaže na pravilo podvojevanja, ki je neposredna posledica prepogibanja, saj vsako nadaljnje prepogibanje papirja število plasti podvoji. Matematik vidi v preprostem vzorcu podvojevanja rekurzijo. Rekurzivne formule običajno neposredno povežejo dva zaporedna dogodka oziroma člena, in ne le dveh spremenljivk:

$a_n = 2a_{n-1}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

Pričakujemo lahko izpadlo začetno stanje plasti. Zaporedje se dejansko začne z 1, torej je zaporedje vrednosti: 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... V šestem razredu ne opredeljujemo potence z eksponentom 0, zato učitelju ustreza, da začetno stanje ni opisano. Neskladje med pričakovanim rezultatom učitelja, zapis s potenco, in učenčevim videnjem problema razrešimo z dodatnimi namigi.

Učenec naj bi sam iskal druge možnosti zapisa ob uporabi metakognitivnih znanj.

Ali lahko zaporedje vrednosti zapišem še drugače? Npr. z uporabo operacije množenja:

$2 = 1 \cdot 2 = 2 = 2^1$

$4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 2^2$

$8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

....

Kadar učenec po opazovanju vzorca zapiše nekaj nadaljnjih korakov, se kot posledica induktivnega sklepanja pojavi vprašanje, kaj pomeni eksponent v zapisu potence. Razkrijemo 'neopaženo' spremenljivko in povežemo neodvisno in odvisno spremenljivko.

Št. prepogibov	Št. plasti	Št. plasti	
0	1	2^0	
1	2	2^1	
2	4	2^2	
3	8	2^3	
4	16	2^4	
...	...	...	nadaljevanje vzorca
7			induktivni sklep
8			
n		2^n	posplošitev

V šestem razredu običajno naredi posplošitev učitelj. Po n prepogibanjih imamo 2^n plasti. Od šestošolcev se pričakuje dosežek 'zna nadaljevati aritmetični vzorec' oziroma 'induktivno sklepati'.

Za razumevanje in poglobitev problema lahko postavljamo vprašanja ali ponudimo stavke v dopolnjevanje:

- Če bi lahko papir prepognili 10-krat, bi bilo število plasti enako _____.
- Če je število plasti 32, potem smo papir prepognili _____.
- Izračunaj število prepogibanj pri 128 plasteh.
- Ali je mogoče dobiti po opisanem postopku 50 plasti? Odgovor utemelji?
- Z razširitvijo dejavnosti in računskimi operacijami opiši, kako bi lahko dobili 60 plasti papirja.
- Opiši dejavnost, ki te pripelje do 1000 listov enake velikosti. Primer: Za enačbo $2^{10} - 24 = 1000$ poiščemo dejavnosti v kontekstu prepogibanja papirja.
- Če učenci poznajo koordinatni sistem, lahko v njem ponazorijo pare (0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8) ...

Ob prejšnjih vprašanjih smo bolj v kontekstu matematike kot v realni situaciji. Za matematiko, ki je opisovana kot abstraktna veda, je pomembno učence peljati v to smer in posploševati sklepe ter se ukvarjati z objekti, ki so 'odlepljeni' od realnosti. Za matematično modeliranje pa je pomembna tudi faza, ko se vrnemo nazaj v kontekst, v razpravo o smiselnosti in uporabnosti modela v realni situaciji, iz katere smo izhajali. Z nadaljnjimi vprašanji, ko se usmerimo bolj v kontekst kot v matematiko, se oddaljujemo od matematike le na videz. V iskanju odgovorov v kontekstu se osmišljajo tudi matematični zaključki. Vrnimo se k realnemu problemu prepogibanja papirja. Lepe matematične posplošitve v realnosti ne veljajo in njeni rezultati za realno prepogibanje papirja niso uporabni, o čemer se lahko prepričajo tudi učenci.

Poskušaj zapored prepogibati izbrani list papirja. Kaj opaziš? Ali je posplošitev smiselna?

Ali je število plasti odvisno od velikosti (debeline) papirja?

Izziv o prepogibanju in povezanosti rezultata od začetne situacije je s posnetki dostopen tudi na spletu *(http://www.bestofyoutube.com/story.php?title=mythbusters--folding--paper-seven-plus-times, 1. 6. 2010; http://www.abc.net.au/science/experimentals/default.htm?clip=episode1, 1. 6. 2010)*. S prilagoditvijo zaključkov realni situaciji smo obogatili tudi matematične izkušnje. Katere?

Reševanje problema v srednji šoli

Neizkoriščeno možnost vpeljevanja pojma eksponentna funkcija lahko izpeljemo v srednji šoli. Po formalnem zapisu $f(n) = 2^n$ se pogovarjamo o definicijskem območju, zalogi vrednosti, grafu, vzrokih, zakaj ne povežemo točk v koordinatnem sistemu ... Postavljamo podobna vprašanja kot v osnovni šoli, le da kontekst povezujemo s pojmom funkcija:

- Ali je funkcijska zveza res smiselna za poljuben n?
- Ali je definicijsko območje odvisno od velikosti papirja?
- Ali je definicijsko območje odvisno od debeline papirja?
- Kaj pa, če papirja ne prepogibamo, ampak ga režemo in prelagamo na isti kup?
- Kaj ugotovimo, če štetje plasti nadomestimo z merjenjem debeline dobljenih plasti?
- Zakaj so koristni matematični opisi realnih situacij?

Razvijamo lahko implikacije, ki vključujejo predpostavko: če lahko papir zapognemo 10-krat, potem je število plasti 1024. Če smo dobili 64 plasti, pomeni, da smo zapognili list šestkrat.

Če spremenimo problem tako, da režemo in prelagamo papir ter merimo debelino papirja, je tudi v tem primeru definicijsko območje diskretno, zaloga vrednosti pa je podmnožica večkratnikov debeline $\{d, 2d, 4d, 8d \ldots\}$. Interval mogočega števila rezov glede na dani format in debelino lista ni neskončna, ampak končna množica,

ki je odvisna od npr. kakovosti pripomočka za rezanje.

Isti kontekst lahko uporabimo tudi pri vpeljavi geometrijskega zaporedja. Smiselno je začeti npr. s tremi listi papirja, ki jih prepogibamo hkrati.

Pri empiričnem pristopu in uporabi računalniške tehnologije meritve običajno vnesemo v program oziroma koordinatni sistem, tehnologija nam ponudi različne modelne-prilagoditvene funkcije, torej krivuljo, ki se danim podatkom najbolje prilega. Za tehnologijo so to zvezne funkcije, zato so točke vedno gladko povezane. Konflikt med tehnologijo in 'čisto' matematiko moramo rešiti skladno z definicijskim območjem problema in z mogočo zalogo vrednosti.

Razširitev klasičnega zaprtega problema z uvedbo parametra

Klasični, zaprt matematični problem lahko razširimo v kompleksnejšega, z elementi modeliranja, z vpeljavo parametrov.

Primer: ČOLN

Smo v čolnu na reki, 3 km do najbližje točke O na obali. Želimo priti do kraja B v najkrajšem času. Kraj B je na obrežju reke in je 6 km oddaljen od točke O. Po reki se premikamo s stalno hitrostjo 4km/h, peš pa s stalno hitrostjo 5km/h. Kje naj pristanemo, da bomo najhitreje v kraju B?

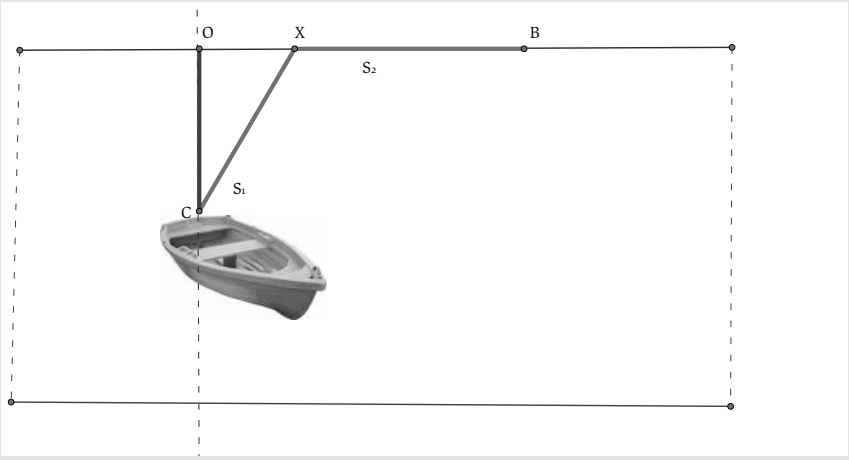
Reševanja se običajno lotimo korakoma v naslednjem vrstnem redu:

1. narišemo skico in poskušamo razumeti problem,
2. iščemo podatke/konstante in spremenljivke ter povezave med njimi,
3. si postavljamo vprašanja (kaj poznam, kaj želim izračunati, kaj lahko povežem, kaj pomeni najhitreje ...),
4. iščemo povezave med danim in iskanim,
5. najkrajša pot, najdaljša pot, najkrajši čas,
6. pot, čas, hitrost, funkcija, ekstrem ...

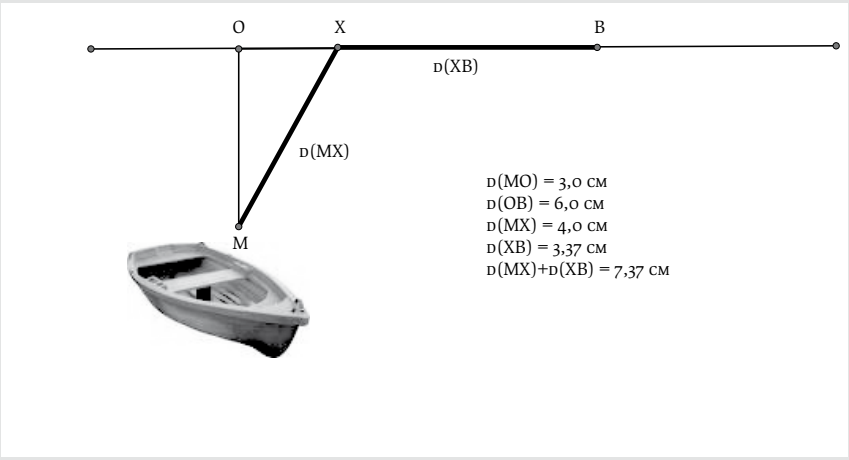
Pri reševanju si lahko učinkovito pomagamo z uporabo programa dinamične geometrije.

Koraki reševanja so enaki, le skica je dinamična (čoln.gsp). Dinamična skica nam lahko pomaga pri razumevanju problema, omogoča simulacijo dogodka in empirični pristop, če uporabim orodja za merjenje, ki jih ustrezno obdelamo.

Podobni primeri so na straneh 177 in 179.



Dinamična slika 1: Točka M označuje lego čolna na reki, v točki X je predviden pristanek, s_1 pot človeka v čolnu po reki, s_2 pot po kopnem.

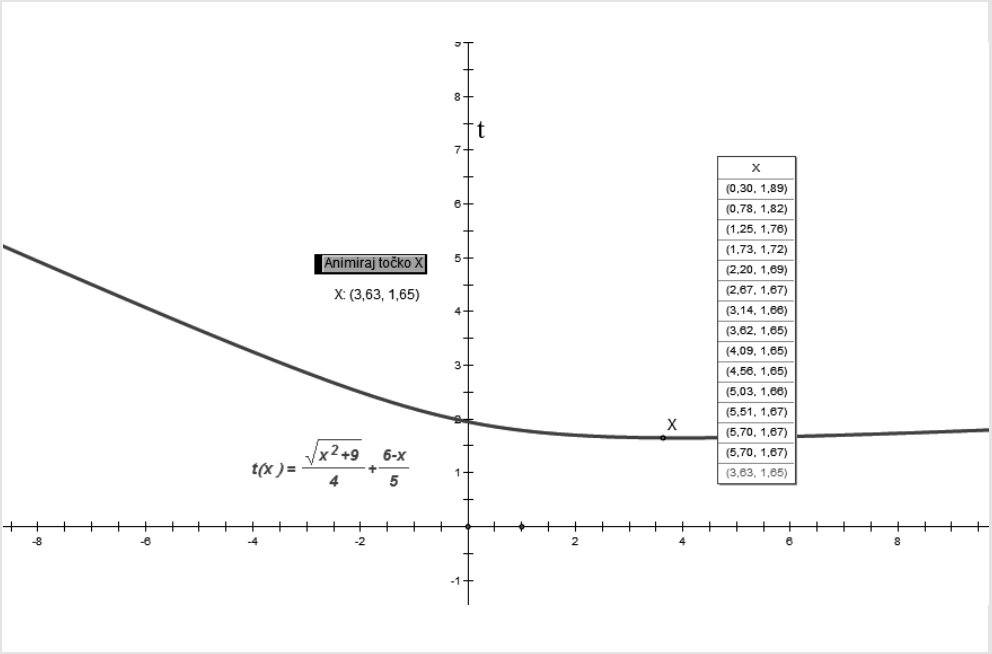


Dinamična slika z meritvami poti v ustreznem merilu, nam lahko pomaga v procesu reševanja. V danem problemu je ključno razumeti, kaj pomeni najhitreje, torej v najkrajšem času, kar pomeni umestitev problema med ekstremalne probleme. Čas je 'skrita' spremenljivka, ki je odvisna od druge 'skrite' spremenljivke, to je točke pristanka. Če želimo povezati obe spremenljivki, je treba lego opisati z razdaljo (realno število) in ne s spremenljivko, ki pomeni lego točke. V bistvu uporabimo za opis koordinatni sistem, izberemo os ter izhodišče, od katerega merimo odmik točke pristanka X. Ko najdemo zvezo med spremenljivkama t in x, dobimo

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}$$

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{4} + \frac{6-x}{5}, 0 \le x \le 6$$

Funkcijo v istem programu tudi narišemo. Program poišče odvod in ga nariše. Ob funkciji čas v odvisnosti od kraja pristanka lahko opazujemo tabelo vrednosti, ko animiramo točko pristanka. Graf funkcije ne kaže na obstoj minimuma, opazimo pa ga lahko v tabeli.



$$t'(x) = \frac{x \cdot (x^2+9)^{-1/2}}{4} + \frac{-1}{5}$$

$$t''(x) = \frac{-1 \cdot x^2 \cdot (x^2+9)^{-3/2} + (x^2+9)^{-1/2}}{4}$$

Na ta način smo za opis problema uporabili nekaj geometrijskega znanja, nekaj merjenja, nekaj znanja fizike in matematično analizo. Zadnja da lep analitičen rezultat: $x = 4$. Graf funkcije je v okolici lokalnega ekstrema vizualno 'raven', zato si ne moremo pomagati zgolj z opazovanjem slike. Z vrednostjo drugega odvoda potrdimo pravilnost analitično dobljene rešitve.

Razširimo problem z vprašanjem: *Kaj se zgodi, če lahko človek vesla nekoliko hitreje?*

Naj bo v = 4,5 km/h. Majhna sprememba povzroči zanimivo situacijo pri interpretaciji rešitve.

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{4,5} + \frac{6-x}{5}, 0 \le x \le 6 \quad (1)$$

Funkcija (1) ima ekstrem na razširjenem definicijskem območju. Zato naloga ni rutinsko rešljiva in zahteva od reševalca tako matematično kot fizikalno znanje, da pojasni situacijo. Ali je problem nerešljiv, ali smo naredili napako v postopku oziroma sklepanju, ali imamo težave z interpretacijo v kontekstu fizike?

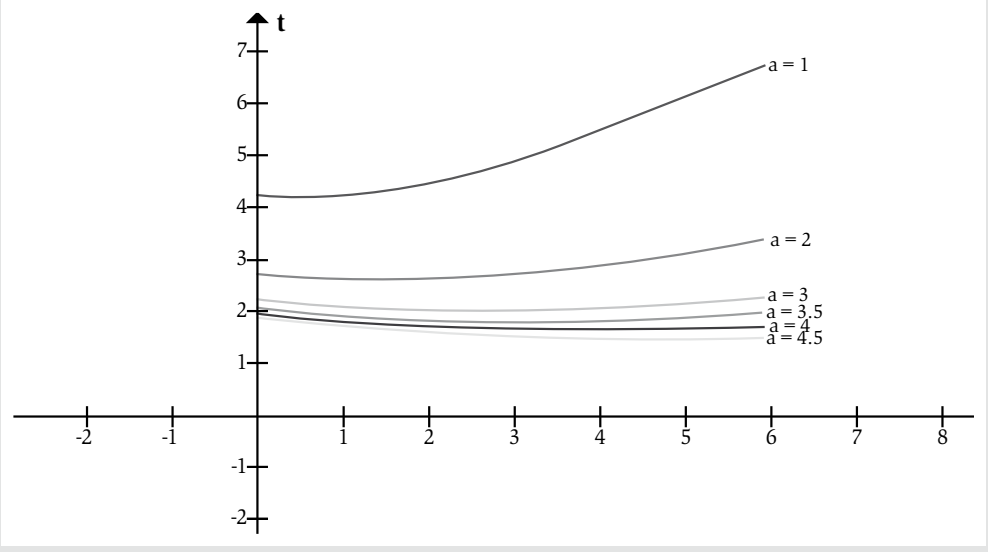
Dobljena funkcija je še bolj 'ravna'. Na definicijskem območju ne doseže lokalnega minimuma. Lokalni ekstrem je izven definicijskega območja.

x	t(x)	t′(x)	t′′(x)
0	1,87	-0,2	0,07
0,5	1,78	-0,16	0,07
1,0	1,7	-0,13	0,06
1,5	1,65	-0,1	0,05
2,0	1,6	-0,08	0,04
2,5	1,57	-0,06	0,03
3,0	1,54	-0,04	0,03
3,5	1,52	-0,03	0,02
4,0	1,51	-0,02	0,02
4,5	1,5	-0,02	0,01
5,0	1,5	-0,01	0,01
5,5	1,49	0	0,01
6,0	1,49	0	0,01

x	t(x)	t′(x)	t′′(x)
5,0	1,5	-0,01	0,01
5,1	1,49	-0,01	0,01
5,2	1,49	-0,01	0,01
5,3	1,49	-0,01	0,01
5,4	1,49	-0,01	0,01
5,5	1,49	0	0,01
5,6	1,49	0	0,01
5,7	1,49	0	0,01
5,8	1,49	0	0,01
5,9	1,49	0	0,01
6,0	1,49	0	0,01

x	t(x)	t′(x)	t′′(x)
5,5	1,4922	-0,0049	0,0081
5,6	1,4918	-0,0041	0,0078
5,7	1,4914	-0,0034	0,0075
5,8	1,4911	-0,0026	0,0072
5,9	1,4909	-0,0019	0,0069
6,0	1,4907	-0,0012	0,0066

Z drobljenjem intervala poskušamo dognati, kaj se dogaja s funkcijo t(x) v točki pristanka.



Graf: Eksperimentiranje s hitrostjo veslanja.

Tudi hitrost po kopnem je mogoče spreminjati. Poskušati je smiselno v okviru človeških zmožnosti.

V katerih mejah so pri danih razdaljah smiselni eksperimenti med hitrostmi po vodi in kopnem? V kolikšni meri je problem odvisen od že izbranih podatkov kot sta razdalji po vodi in kopnem?

Predpostavke in poenostavitve danega problema in procesa reševanja

Vprašajmo se, koliko je obravnavani primer res realen in ali je ukvarjanje z njim koristno za morebitni nešolski kontekst. Problem seveda ni avtentičen, saj je veliko privzetkov in poenostavitev (reka miruje, veter ne piha, hitrost je ves čas konstantna ...).

Analiza problema, procesa reševanja in rezultatov, skratka ukvarjanje s problemom je tisto, kar je bistvo matematičnega modeliranja kot procesa reševanja problemov, kjer se učimo ne samo predmetnih znanj ampak tudi procesov mišljenja.

Od cilja k cilju

Med pričakovanimi učnimi dosežki je v Posodobljenem učnem načrtu za matematiko v gimnaziji zapisano *'v problemih dijak prepozna in predstavi, katera elementarna funkcija lahko modelira problem'*, kar v povezavi s procesnimi oziroma problemskimi znanji lahko krajše opišemo z *'dijak zna modelirati'*. Pot do tega cilja traja vsa štiri leta, zato je vtkana kot učni cilj med posamezne vsebinske cilje. Na poti do cilja bo dijak reševal različne problemske naloge, kompleksne in manj kompleksne. Zna modelirati, pomeni, da bo znal izpeljati celoten proces matematičnega modeliranja, kot ga prikazuje diagram Proces matematičnega modeliranja (str. 90). Pri pouku se bomo s celotnim procesom modeliranja srečevali občasno, pogosteje pa s posameznimi, 'delnimi' cilji, ki jih učenec lahko razvija pri vsaki matematični učni uri.

Zakaj načrtujemo? Zapisane cilje, ki jim dodamo dejavnosti za učenca in posledično za učitelja, je laže doseči in laže evalvirati. Cilj je torej izhodišče načrtovanja, v naslednjem koraku pa je rezultat našega dela oziroma rezultat, ki ga želimo doseči, torej merilo samoevalvacije.

Matematična pot reševalca problemov se je začela že v osnovni šoli, ko so učenci reševali preproste besedilne in druge matematične probleme. V srednji šoli nadaljujemo in dopolnjujemo obstoječe učenčeve izkušnje. Prvi izziv za srednješolskega učitelja je, kako obuditi in aktivirati obstoječe znanje učencev. Kako ustvariti učno okolje, v katerem bodo lahko učenci aktivirali znanje o že učenem?

Učitelj načrtuje pot za doseganje tega cilja 'horizontalno' in 'vertikalno'. Učenec izpopolnjuje svojo matematično zmožnost modeliranja z realnimi problemi, matematičnimi ali matematiziranimi, in s krajšimi nalogami, s katerimi razvija 'delne' cilje. Razvoj dejavnosti za doseganje teh ciljev načrtujemo spiralno, ob reševanju različnih manj kompleksnih problemskih izhodišč.

Realne probleme, ob katerih razvijamo proces modeliranja, lahko rešujejo učenci vodeno, s strukturiranimi nalogami, ali pa so problemi podani odprto. V zadnjem primeru se pot reševanja začne z zastavitvijo cilja, to je postavitvijo smiselnih raziskovalnih vprašanj. Dijak mora imeti izkušnje s tovrstnimi problemi. Takšen način reševanja je posebno primeren za ustvarjalne učence. Vsak zaprt ali strukturiran

in voden problem reševanja zlahka spremenimo v odprtega. Učenci ob tem intenzivneje pridobivajo procesna znanja, ki vključujejo tudi delne cilje, povezane z matematičnim modeliranjem.

Primeri delnih ciljev:

- oblikuje predpostavke;
- spreminja, poenostavi ali zaostri predpostavke;
- izostri cilj problema;
- preoblikuje problem, preoblikuje vprašanje;
- oblikuje ekvivalentne matematične izjave;
- poišče in imenuje spremenljivke, parametre, konstante;
- uporablja različne reprezentacije (tudi grafične ...);
- razume pomen koordinatnega sistema;
- zna uporabljati IKT-tehnologijo;
- oblikuje izjave v jeziku realnega problema in v matematičnem jeziku;
- poveže matematični rezultat z realno situacijo danega problema;
- zna interpretirati dano formulo, funkcijsko zvezo v jeziku konteksta in v matematičnem jeziku;
- vrednoti model ...

Nekaj zgledov za izkazovanje delnih ciljev

- **Zna oblikovati predpostavke.**

  Prepogibanje papirja opisuje zveza $p = 2^n$, kjer p pomeni število plasti, n pomeni število prepogibanj.

  Če lahko list (A4) prepognemo 10-krat, dobimo 1024 plasti papirja.

- **Zna ovrednotiti izjavo.**

a) *Če list prepognemo 10-krat, dobimo 1024 plasti papirja.*
Ovrednoti izjavo. Preveri, ali izjava drži. Glede na izbor možnosti (velikost, debelina, teža papirja ...) lahko sklepamo o zmožnosti analiziranja dijaka.

b) *Met valja: Verjetnost, da pade valj na krivo ploskev, je 1/3. Verjetnost, da pade valj na ravno ploskev, je 2/3.*
Učenec lahko trditvi preveri z mejnimi primeri (kovanec, svinčnik), ju ovrže in postavi hipotezo za drugačen verjetnostni model.

c) *Gorenje sveče: 10 cm visoka sveča zgori v treh dneh, 20 cm visoka sveča pa v šestih.*
Preveri, od česa je odvisno gorenje sveče, ali je ključna le višina? Ali govorimo o isti vrsti sveč?

- **Zna preveri pravilnost zveze.**

  Pomeni, da zna poiskati smiselne podatke za testiranje, uporabi mejne in začetne vrednosti (robni in začetni pogoji).

a) $p = 2^n$ je formula za število plasti pri prepogibanju. Formula ima smisel tudi za $n = 0$, stanje pred prvim prepogibanjem papirja je 1 plast.

b) *Met valja:* Učenec sklepa na osnovi modelov svinčnika in kovanca ter zaključi, da predpostavljena verjetnost za mejna primera ne velja, torej rezultata ni mogoče posplošiti na vse valje.

- **Spreminja predpostavke.**

  Mečemo valj in se sprašujemo, kolikšna je verjetnost, da pade na ravno ploskev. Metoda mejnih možnosti met kovanca in svinčnika nas usmeri, da bo rezultat verjetno odvisen od razmerja med višino in premerom valja. Za svoj problem izberemo na primer enakostranični valj.

- **Zna interpretirati dano formulo, funkcijsko zvezo v jeziku konteksta in v matematičnem jeziku.**

  Hitrost avtomobilov za optimalni pretok prometa je podana z naslednjo formulo $v = \sqrt{2Aa}$, pri čemer je v – hitrost, A – dolžina avtomobila, a – pospešek. Formula kaže na to, da mora za optimalni pretok prometa pri nekih pogojih, ki jih ne poznamo, voziti hitreje daljši kot krajši avto.

- **Vrednotenje modela v pomenu uporabnosti modela.**

  Ali za ohlajanje vsake skodelice kave velja empirično ugotovljeni Newtonov zakon ohlajanja? Kaj se zgodi, če spremenimo eksperiment, npr. podaljšamo čas merjenja, merimo temperaturo pogosteje ali redkeje, uporabimo drugačen merilni instrument, skodelico pokrijemo, izberemo skodelico iz drugačnega materiala, izberemo skodelico drugačne oblike ...

Posebni spremljevalni cilji so še: zna simulirati dogodek z ekvivalentnim poskusom, zna narisati dinamično skico v programu dinamične geometrije z namenom, da problem razume in ga reši, torej zna eksperimentirati v realnem in navideznem svetu z uporabo tehnologije ter zna postavljati svoja vprašanja, s katerimi problem ali poenostavi ali razširi ter ga nadaljuje.

Spremljanje in vrednotenje procesov učenja

Kaj vrednotiti? Pravilni rezultat ali proces reševanja? Za razvoj kompleksnega znanja je potrebno razviti tudi način za spremljanje procesa reševanja in učenja. Opisano shemo vrednotenja lahko spreminjamo glede na dani problem. V vsaki kategoriji lahko tudi dodajamo in izostrujemo stopnje vrednotenja.

A. Se loti problema.

B. Problem razume.

C. Izbere in uporabi strategijo reševanja.

D. Poišče odgovor.

E. Zna razložiti.

A. Se loti problema.
0 – Sploh ne poskusi reševati.
1 – Nekaj poskusov.
2 – Dober poskus.

B. Problem razume.
0 – Problema sploh ne razume.
1 – Ne razume dela problema.
2 – Problem popolnoma razume.

C. Izbere in uporabi strategijo reševanja.
0 – Ni poskusov ali uporabi popolnoma neustrezno strategijo.
1 – Izbere delno pravilno strategijo, ki izhaja iz delno pravilne interpretacije problema, ali izbere ustrezno strategijo in jo slabo uporabi.
2 – Izbere pravilno strategijo, ki bi lahko vodila do pravilne rešitve, če jo učenec uporabi brez napak ali z manjšimi napakami.

D. Poišče odgovor.
0 – Ni odgovora, neuspešen pri podajanju odgovora ali napačen odgovor, ki izhaja iz neustrezne strategije.
1 – Napaka pri prepisu podatkov ali računska napaka, delni odgovor ali napačno zapisan odgovor.
2 – Pravilen odgovor, jasno in pravilno zapisan.

E. Zna razložiti.
0 – Razlage ni ali pa je nepovezana in neurejena.
1 – Nepopolna razlaga, ali razlagi je težko slediti.
2 – Razlaga je jasna in povezana.

(T. Herr, K. Johnson, 1994, str. 25)

Zapis točk po ocenitvi učenčevega izdelka, npr. (2, 2, 2, 1, 0), pokaže kakovost izpeljanega procesa in je lahko spodbuda za delo, tudi če učenec ne pride do rešitve. Dosežek (1, 2, 2, 1, 1) pomeni, da je bilo nekaj poskusov uporabe različnih strategij, problem popolnoma razume, izbral je pravilno strategijo z manjšimi napakami, odgovor je delni ali napačno zapisan, razlaga je nepopolna.

Na strani 243 je predstavljena še ena možnost za spremljanje in vrednotenje, ki vključuje proces.

Viri in literatura

1 *Jacobs, H. R. (1994). Mathematics: A Human Endeavor. New York: W.H. Freeman & Co.*

2 *Jaušovec, N. (1994) Naučiti se misliti. Nova Gorica: Educa.*

3 *Herr, T., Johnson, K. (1994). Problem solving strategies. Berkeley (CA).*

4 *Kmetič, S. (2008). Pouk matematike z aktivnimi metodami. V: Nolimal F. et al., Fleksibilni predmetnik – pot do večje avtonomije, strokovne odgovornosti in kakovosti vzgojno-izobraževalnega dela. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. str. 318–326.*

5 *Magajna, Z. (2003). Problemi, problemsko znanje in problemski pristop pri pouku matematike. Matematika v šoli, let. 10, št. 3/4 (2002/2003), str. 129–138.*

6 *Žakelj, A. (2003). Kako poučevati matematiko. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.*

2.3 Teorija v praksi: Spreminjanje dolžine dneva

Mateja Sirnik

Osnovni podatki

Tema:	Kotne funkcije
Enota:	Iskanje ustreznega modela
Predvideni čas izpeljave:	4 šolske ure (v sklopu projektnega tedna)

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

Učni cilji	Dijaki/dijakinje: • razvijajo problemska znanja; • znajo poiskati ustrezno funkcijo, ki lahko modelira problem; • razvijajo kritičen odnos do uporabe IKT.	
Kompetence	**K1 – sporazumevanje v slovenščini**	K5 – učenje učenja
	K2 – sporazumevanje v tujih jezikih	K6 – socialne in državljanske kompetence
	K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji	K7 – samoiniciativnost in podjetnost
	K4 – digitalna pismenost	K8 – kulturna zavest in izražanje
Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje: • poznajo definicijo in lastnosti funkcije $f(x) = a\ sin(bx + c) + d$; • znajo uporabljati program Graph ali Geogebra (zna urediti koordinatni sistem); • poznajo proces matematičnega modeliranja; • poznajo kontekst problema.	
Pričakovani dosežki/ rezultati	Dijaki/dijakinje: • uporabijo in preverijo model za svoje podatke; • kritično ocenijo rezultate.	
Didaktični pristop	• medpredmetna povezava z geografijo, • vodeno raziskovanje	
Potek učnega procesa	1. Predstavitev problema in postavitev vprašanj 2. Reševanje, raziskovanje 3. Opis ugotovitev in predstavitev rezultatov 4. Preverjanje veljavnosti modela in njegova razširitev	
Gradivo na zgoščenki	Dolzina_dneva.grf Dolzina_dneva.ggb	
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Program Graph ali Geogebra	
Viri	*1 http://vesolje.net/koledar/koledar.php (22. 1. 2010)* *2 http://gandraxa.com/length_of_day.aspx (22. 1. 2010)* *3 Jacobs, H. R. (1994). Mathematics: A Human Endeavour. New York: W. H. Freeman & Co.*	

Problemska situacija

Spreminjanje dolžine dneva

Reševanje naloge je dopolnjeno z opisi procesa matematičnega modeliranja, kot je predstavljeno na sliki na strani 90.

Problemska situacija	*Dán je ena od različnih enot za čas in traja 24 ur (t. i. koledarski dan). Beseda dan v naslovu te učne ure pa se nanaša na čas osvetljenosti dela Zemlje, ko je Sonce nad krajevnim obzorjem – t. i. naravni dan. Radi bi raziskali, od česa se odvisna dolžina naravnega dneva. V nadaljevanju bomo uporabljali kar besedo dan.*

Problemska situacija je primer odprte avtentične naloge. Dijaki v tretjem letniku že imajo nekoliko izkušenj z matematičnim modeliranjem, zato lahko kot izziv rešimo katero od težjih realnih situacij. Naloga ustvarja priložnosti za medpredmetno povezovanje, sodelovanje učiteljev različnih predmetnih področij, oblikovanje projektnega tedna in drugo.

Razumevanje problemske situacije **Iskanje in zapis predpostavk**	Vprašanja za uvid v problemsko situacijo: • S katerim naravnim pojavom je povezana dolžina dneva? • Kako bi izračunal dolžino dneva? • Poišči podatke o sončnem vzhodu in zahodu za današnji dan v Ljubljani. • Kako dolg bo danes dan v Ljubljani? • Kdaj imamo najdaljši dan v Ljubljani, kdaj najkrajšega? Kako ta dneva imenujemo? • Kdaj nastopi enakonočje? • Poišči vir, s katerim lahko vsak dan v letu določiš dolžino dneva. • Kdaj bo zagotovo dan spet tako dolg kot danes? • Katero matematično lastnost ima spreminjanje dolžine dneva? • Od česa je odvisna dolžina dneva v Ljubljani? • Kaj predvidevaš, koliko podatkov je potrebnih, da bi lahko z njimi določil dovolj zanesljivo dolžino dneva kateri koli dan v letu? Potrebuješ celoletne podatke?

Podatke o sončnem vzhodu in zahodu za današnji dan lahko dijaki poiščejo predhodno za domačo nalogo in se pogovorimo o različnih virih, kjer so jih našli.

Pri zbiranju potrebnih podatkov za dovolj zanesljivo določanje dolžine dneva kateri koli dan v letu lahko nalogo diferenciramo na zbiranje in urejanje:

- celoletnih podatkov,
- podatkov od zimskega do poletnega solsticija,
- podatkov od pomladnega do jesenskega enakonočja,
- podatkov od pomladnega enakonočja do poletnega solsticija.

Poleg različnih dolžin časovnega intervala, na katerem bomo zbrali podatke, je lahko različno tudi število podatkov na izbranem intervalu.

Nadaljujemo delo v parih: vsaka dvojica zbere podatke in jih zapiše v preglednico.

Dan v letu 2010	**Sončni vzhod** (ura)	**Sončni zahod** (ura)	**Dolžina dneva v urah**
≡	≡	≡	≡

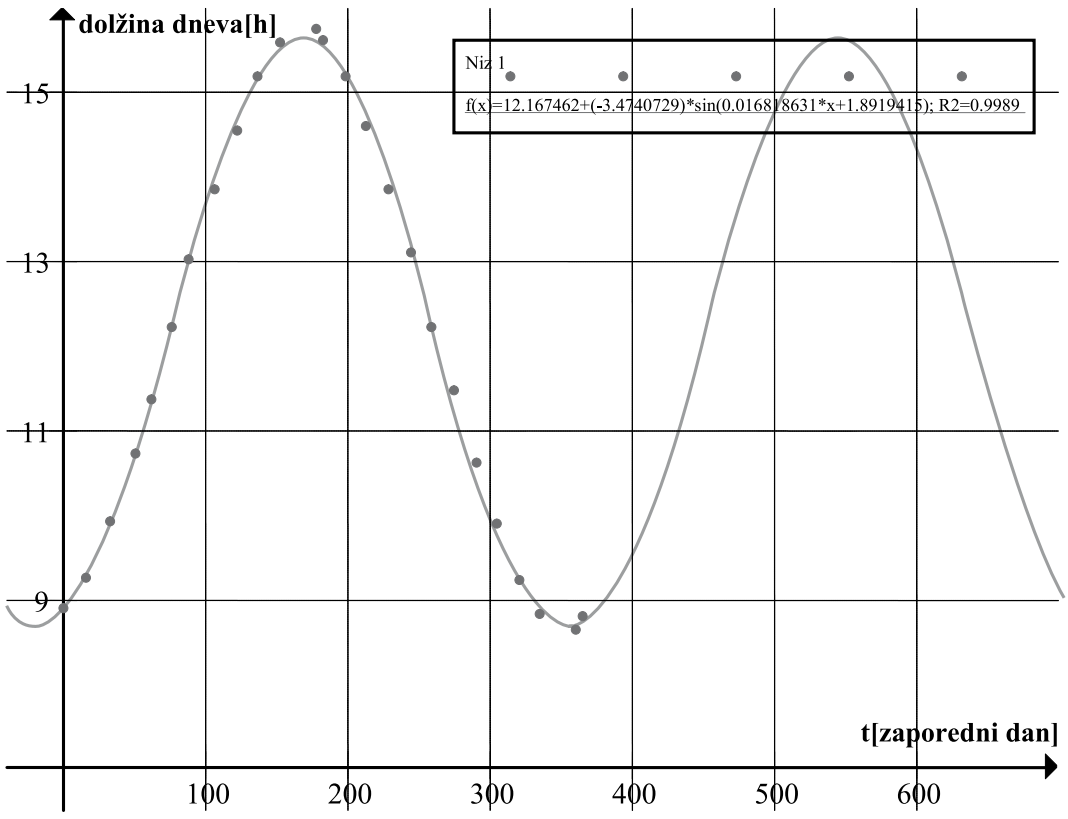
Opozorilo dijakom: Časovne enote ne ustrezajo desetiškemu številskemu sistemu.

Iskanje primernega matematičnega modela **Reševanje matematičnega problema**	• Poskušaj ugotoviti, katera funkcija bi lahko modelirala problem, in poišči njen funkcijski predpis. • Določi zalogo vrednosti dobljene funkcije. • Iz grafa preberi, kdaj funkcija zavzame maksimalno in kdaj minimalno vrednost. Kolikšna je ta maksimalna in minimalna vrednost? Ali so ti podatki primerljivi z empirično pridobljenimi? Preverite. • Primerjajte prilagoditvene funkcije med seboj. Katera se vam zdi najprimernejša? • Katera množica zbranih podatkov je po vašem mnenju posledično najustreznejša?

Spodaj so zbrani podatki in grafični prikaz spreminjanja dolžine dneva z empirično dobljenimi podatki v programu Graph. Podatki so s spletne strani *http://vesolje.net/koledar/koledar.php* zbrani dvakrat na mesec vse leto.

Dan v letu 2010	Sončni vzhod	Sončni zahod	Dolžina dneva v urah
5. januar			8:48
21. januar			9:16
5. februar			9:55
21. februar			10:43
5. marec			11:22
21. marec			12:13
5. april			13:02
21. april			13:52
5. maj			14:34
21. maj			15:12
5. junij			15:36
21. junij			15:46

Dan v letu 2010	Sončni vzhod	Sončni zahod	Dolžina dneva v urah
5. julij			15:38
21. julij			15:12
5. avgust			14:37
21. avgust			13:51
5. september			13:06
21. september			12:14
5. oktober			11:29
21. oktober			10:38
5. november			9:54
21. november			9:13
5. december			8:49
21. december			8:39
5. januar 2011			8:48



Interpretacija v jeziku problema **Verifikacija modela, omejitve, poenostavitve, delna veljavnost**	• Poskušaj ugotoviti pomen koeficientov prilagoditvene funkcije v kontekstu problema. • Izračunaj dolžino dneva na svoj rojstni dan z uporabo funkcijskega predpisa prilagoditvene funkcije oziroma z uporabo IKT preberi iz grafa, veljavnost dobljenega rezultata pa preveri na spletni strani *http://vesolje.net/koledar/koledar.php*. • Napovej iz grafa dolžino dneva 10. avgusta in to primerjaj z empirično pridobljenim rezultatom. • Ali velja tvoj model v Atenah? • Kako se dolžina dneva spreminja s časom na ekvatorju? Zapiši odvisnost s funkcijskim predpisom in odvisnost prikaži v koordinatnemu sistemu. • Na omenjeni spletni strani so zbrani podatki o dolžini dneva še za nekatere slovenske kraje. Kolikšna je povprečno razlika v dolžini dneva med najbolj severnim in južnim krajem? • Od česa je odvisna dolžina dneva?

Naša prilagoditvena funkcija torej ne opisuje spreminjanja dolžine dneva v krajih z drugačno zemljepisno širino. Postavljen matematični model iz empirično dobljenih podatkov za Ljubljano bomo primerjali s teoretično pridobljenim modelom. Na spletni strani *http://gandraxa.com/length_of_day.aspx* najdemo teoretično izpeljavo enačbe za dolžino dneva.

Dolžina dneva d je enaka

$$d = \frac{24 \cdot \arccos\left(\tan\left(\frac{\pi \cdot a}{180}\right) \cdot \tan\left(\frac{23{,}44 \cdot \pi}{180} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{182{,}625}\right)\right)\right)\right)}{\pi}$$

Argumenti kotnih funkcij so podani v radianih. Spremenljivka x pomeni zaporedni dan v letu, kjer začnemo dneve šteti od zimskega solsticija naprej. Parameter a pa predstavlja zemljepisno širino.

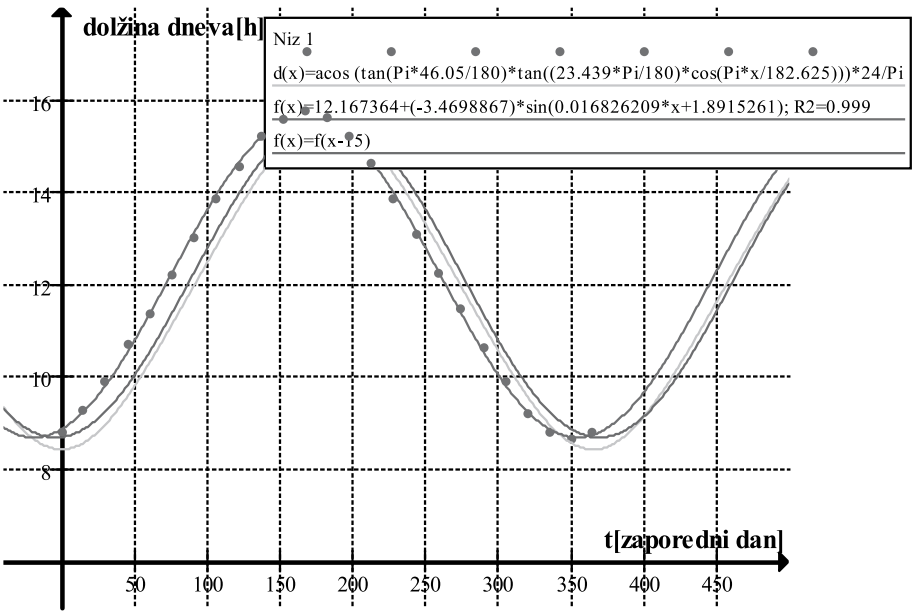
Opomba: Odvisna spremenljivka d zaradi omejenega definicijskega območja funkcije *arccos* ne obstaja pri vseh vrednostih izraza

$$\tan\left(\frac{\pi \cdot a}{180}\right) \cdot \tan\left(\frac{23{,}44 \cdot \pi}{180} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{182{,}625}\right)\right)\right)$$

V tem primeru je dolžina dneva d enaka 0 ali 24 ur, odvisno od konteksta.

NI sprejemljiv	• Kje je postavljeni matematični model iz empiričnih podatkov za Ljubljano še veljaven? • Poišči podatek o zemljepisni širini a za Ljubljano. • Z uporabo tehnologije nariši graf funkcije $d(x) = \frac{24 \cdot \arccos\left(\tan\left(\frac{\pi \cdot a}{180}\right) \cdot \tan\left(\frac{23{,}44 \cdot \pi}{180} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{182{,}625}\right)\right)\right)}{\pi}$ za Ljubljano.
JE sprejemljiv	• Primerjaj grafa obeh prilagoditvenih funkcij in smiselno oceni veljavnost tvoje sinusne prilagoditvene funkcije. • Prilagoditvena funkcija teoretičnega pristopa ima začetno vrednost na zimski solsticij. Če se ne ujema z začetno vrednostjo empirično dobljene prilagoditvene funkcije, enega od grafov ustrezno premakni po abscisni osi. • Z uporabo tehnologije poizkusi narisati graf funkcije $d(x)$ s parametrom a, ki lahko zavzame vrednosti od 0° do 90°. Kakšen graf dobimo pri geografski širini 0° in kakšnega pri 90°? Utemelji odgovor. Do katere zemljepisne širine se stalno menjavata dan in noč? Preveri odgovor v literaturi.
Razlaga modela, poročilo in uporaba modela, odločanje na podlagi modela	

V spodnjem koordinatnem sistemu je narisana funkcija $d(x)$ za Ljubljano (zemljepisna širina 46°4′). Na zgoščenki jo najdete v mapi Spreminjanje dolžine dneva v datoteki *Dolzina_dneva.grf*.



V Graph-ovi datoteki *Dolzina_dneva.grf* je z animacijo prikazano spreminjanje dolžine dneva pri različnih zemljepisnih širinah s korakom 10°. Animacijo odpremo tako, da v orodni vrstici izberemo Računaj in nato Animiraj. Z uporabo programa Geogebra je v datoteki *Dolzina_dneva.ggb* prikazano spreminjanje dolžine dneva z drsnikom na intervalu [0°, 90°].

Pri reševanju se učenci učijo povezovati znanje znotraj matematike, postavljati raziskovalna vprašanja, kritično razmišljati o potrebnih in zadostnih podatkih, interpretirati rešitve in jih posploševati. Učitelj mora pred izpeljavo nalogo temeljito analizirati, predvideti možne težave učencev pri reševanju problema in delu s tehnologijo, razmisliti o razširitvi naloge in pripraviti aktivnosti tako, da bodo učenci zmožni rešiti problem.

Učenci naj bi predhodno poznali osnove programa Graph ali GeoGebra. Znali naj bi urediti koordinatni sistem, vnesti podatke v tabelo, iskati prilagoditvene funkcije.

Eden od učnih ciljev je razvijati kritičen odnos do uporabe IKT. Pri predstavitvi podatkov se soočijo z realnimi podatki, katerim pri ponazarjanju v koordinatnem sistemu ne ustreza vedno, da je koordinatno izhodišče v točki (0, 0). Pri primerjavi programov Graph in Geogebra lahko ugotovijo, da program Graph omogoča postavitev koordinatnega izhodišča v poljubno točko, medtem ko ima program Geogebra koordinatno izhodišče vedno v točki (0,0).

Torej je za prikaz realnih podatkov v koordinatnem sistemu ustreznejši program Graph.

Pri iskanju prilagoditvene funkcije s programom Geogebra dobimo iskano prilagoditveno funkcijo takoj z ukazom *SinusnaTrendnaČrta.* Program Graph med vgrajenimi trendnimi črtami nima sinusne, zato jo je potrebno definirati med lastnimi kot *$a+$b*sin($c*x+$d)* in tudi podati približne vrednosti parametrov *a, b, c* in *d*. Z uporabo morda že vgrajene lastne sinusne funkcije lahko dobimo napačen rezultat.

Pri risanju funkcij s parametrom nam Geogebra omogoča kreiranje drsnika, ki ga lahko na izbranem intervalu za vrednost parametra poljubno premikamo in spreminjamo graf v odvisnosti od vrednosti parametra. Z uporabo programa Graph pa lahko izdelamo animacijo v avi formatu na izbranem intervalu parametra z izbranim korakom spremembe.

Pri reševanju te naloge lahko dijaki razvijajo kritičen odnos do uporabe tehnologije, spoznajo prednosti in slabosti posameznega programa, jih primerjajo med seboj in kritično ocenijo.

2.4 Primeri iz prakse

2.4.1 Modeliranje z linearno funkcijo

2.4.1.1 Gorenje sveče

Mirjam Bon Klanjšček, Gimnazija Nova Gorica

Osnovni podatki

Tema	Linearna funkcija
Enota	Linearna funkcija
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• narišejo graf linearne funkcije, ki najbolj ustreza podatkom;
• poiščejo predpis za linearno funkcijo z računanjem;
• poiščejo predpis za linearno funkcijo z uporabo IKT;
• primerjajo dobljena predpisa;
• razlikujejo med neodvisno in odvisno spremenljivko;
• uporabljajo graf linearne funkcije v praktičnih situacijah</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• poznajo pomen neodvisne in odvisne spremenljivke;
• poznajo enačbo linearne funkcije;
• znajo uporabljati program Graph ali Excel.</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki/ rezultati</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje znajo modelirati.</td></tr>
<tr><td>Potek učnega procesa</td><td colspan="2">1. Predstavitev problema
2. Reševanje učnega lista
3. Zaključek</td></tr>
</table>

Domača naloga	DN_Vpis_dijakov.doc
Vprašanje za preverjanje izbranega bistvenega cilja/dosežka	Vprašanja so zajeta v datoteki UL_Gorenje_svece.doc
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Program Graph ali Excel, grafično računalo
Gradivo na zgoščenki	UL_Gorenje_svece.doc RUL_Gorenje_svece.doc DN_Vpis_dijakov.doc
Priprava pripomočkov pred izvedbo	Nameščen program Graph ali Excel na namizju vsakega računalnika.
Priporočeni način izpeljave	Dijaki samostojno rešujejo učni list in poiščejo ustrezni model. Dijaki dobljeni predpis primerjajo s predpisom, ki so ga izpeljali brez uporabe računalnika.
Izhodišče za nadaljevanje problema	Dijaki doma opravijo isti poskus s svečo v obliki valja, poiščejo ustrezno prilagoditveno funkcijo, nato rezultate primerjajo pri naslednji učni uri.
Viri	*spletna stran http://www.padowan.dk (31. 1. 2010)*

Refleksija

Predvidevala in pričakovala sem, da bodo dijaki po navodilih samostojno in uspešno rešili nalogo ter da bo verjetno nekaj težav z uporabo IKT. Pri izpeljavi učne ure sem opazila, da so nekateri dijaki porabili več časa za računanje predpisa za linearno funkcijo kot z uporabo računalniškega programa, nekaj dijakov pa ni znalo spretno uporabljati računalniškega programa. Učna ura je potekala, kot sem načrtovala. Na začetku ure sem dijakom nalogo predstavila, ponovili smo pojem neodvisne in odvisne spremenljivke in enačbo linearne funkcije. Dijaki so osvojili predvidene cilje učne ure, saj so znali poiskati predpis za linearno funkcijo z računanjem in z uporabo IKT. Pri ponovitvi ure ne bi ničesar spreminjala.

Opažene prednosti po izpeljani učni uri: Dijaki so spoznali uporabnost matematike v vsakdanjem življenju in povezali znanje, ki so ga pridobili pri urah informatike.

Kje lahko pričakujemo ovire: V šoli, če v učilnici za matematiko ni dostopa do računalniške tehnologije.

Mnenje in odzivi dijakov: Dijaki so bili navdušeni, želijo si več takšnih ur matematike, saj vidijo njeno uporabnost v vsakdanjem življenju.

Problemska situacija

Gorenje sveče

Ana in Niko sta opazovala gorenje sveče. Vsaki dve minuti sta zapisovala njeno višino.

Čas (v min)	Višina sveče (v cm)
0	7,5
2	7,2
4	6,6
6	6,1
8	6,0
10	5,6
12	5,0

1. Rešimo nalogo brez uporabe IKT.

a) Poišči ustrezen matematični model za gorenje sveče. Predstavi ga z grafom in s funkcijskim predpisom.

b) V kolikšnem času bo sveča visoka 2 cm?

c) V kolikšnem času bo sveča zgorela?

d) V kolikšnem času bi zgorela 10 cm visoka sveča?

e) Opiši, kako si dobil rezultate.

2. Nalogo rešimo še z uporabo IKT.

a) Podatke predstavi z Excel-om v koordinatnem sistemu in poišči najustreznejšo prilagoditveno funkcijo.

b) Kdaj bo po tem modelu sveča visoka 2 cm?

c) Kdaj bo po tem modelu sveča zgorela?

d) V kolikšnem času bo po tem modelu zgorela 10 cm visoka sveča?

e) Primerjaj rezultate obeh načinov reševanja?

f) Poimenuj prilagoditveno funkcijo.

g) Kdaj je po tvojem mnenju izdelani model uporaben?

h) Razmisli, od česa je odvisno gorenje sveče. Svoje mnenje in rezultate preveri pri izdelovalcih sveč.

Domača naloga:

Na neki šoli bi radi raziskali spreminjanje števila vpisanih dijakov. Imajo naslednje podatke:

Leto	Število dijakov
2000	177
2001	182
2002	188
2003	190
2004	189
2006	186
2007	179
2008	172
2009	170

a) Opiši spreminjanje števila dijakov na šoli.

b) Ponazori podatke z najustreznejšim prikazom in jih komentiraj.

c) Napovej, koliko bo vpisanih dijakov leta 2012?

d) Naštej nekaj dejavnikov, ki lahko vplivajo na številčno stanje dijakov neke šole.

2.4.1.2 Markove priprave na maraton. Poraba goriva

Simona Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem

Osnovni podatki

Tema	Linearna funkcija Zaporedja
Enota	Linearna funkcija Aritmetično zaporedje
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• poiščejo model za dano življenjsko situacijo;
• prepoznajo matematični kontekst v realističnih situacijah;
• induktivno sklepajo in posplošujejo;
• ugotavljajo veljavnost modela;
• kritično interpretirajo rezultate;
• razvijajo kritični odnos do informacij oziroma podatkov;
• prepoznajo in uporabijo linearno funkcijo.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
BREZ UPORABE TEHNOLOGIJE
• poznajo linearno funkcijo;
• znajo rešiti linearno enačbo in neenačbo.
Z UPORABO IKT-TEHNOLOGIJE
• poznajo osnove dela z odprtokodnim programom Graph.</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki/ rezultati</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje znajo modelirati.</td></tr>
<tr><td>Potek učnega procesa</td><td colspan="2">1. Predstavitev problema
2. Reševanje naloge
3. Iskanje prilagoditvene krivulje z uporabo programa Graph
4. Iskanje potrebnih podatkov na grafu funkcije
5. Povzetek z razpravo
6. Domača naloga (poraba goriva)</td></tr>
</table>

Priporočeni način izpeljave (didaktične strategije)	• v računalniški učilnici, • kot utrjevanje in povezovanje znanja, • kot uvod v linearno funkcijo, • kot uvod v aritmetično zaporedje.
Kontekst problemske situacije	Življenjska situacija, šport in avtomobili
Gradivo na zgoščenki	UL_Markove_priprave.doc RUL_Markove_priprave.doc UL_Poraba_goriva.doc RUL_Poraba_goriva.doc
Viri	*1 http://www.padowan.dk (31. 1. 2010)* *2 http://www.ljubljanskimaraton.si/index.asp?l=sl&p=1&s=10 (31. 1. 2010)* *3 http://www.volkswagen.si/files/si/download/datei/fox_tehnicni.pdf (31. 1. 2010)* *4 http://www.volkswagen.si/files/si/download/datei/passat_tehnicni.pdf (31. 1. 2010)* *5 http://www.volkswagen.si/files/si/download/datei/phaeton_tehnicni_1.pdf (31. 1. 2010)*

Refleksija

Uro sem izpeljala junija na koncu poglavja Linearna funkcija kot uro utrjevanja. Čeprav sem najprej mislila, da je primer preveč preprost, smo za delo porabili vso šolsko uro. Proces je bil ves čas dinamičen, vsi dijaki so bili med uro aktivni. Po njihovem odzivu sem ugotovila, da sem v celoti dosegla zastavljene cilje.

Ob ponovni izpeljavi ne bi ničesar spreminjala, saj smo v tej uri vsi veliko pridobili. Vsi dijaki so znali odgovoriti na postavljena vprašanja. Čeprav so naloge res preproste, dajo dijakom občutek, da vendarle nekaj znajo in da lahko svoje znanje tudi uporabijo. Hkrati je to lepa priložnost, da lahko dijaki tudi pri matematiki konstruktivno debatirajo in si izmenjajo mnenja. Veselilo me je, da so v debati zavzeto sodelovali tudi dijaki, ki se sicer pri urah matematike ne vključujejo aktivno v delo.

Kot izziv sem si pustila tri možnosti, in sicer:

- Izpeljava enake učne ure na začetku poglavja Linearna funkcija. V tem primeru bi bilo smiselno že v prvem delu uporabiti IKT in s tehnologijo poiskati predpis za linearno funkcijo. Menim, da bi tako v uro vnesli odkrivanje novega in ura ne bi bila le ura utrjevanja.
- Ponoviti isto temo v istem razredu pri zaporedjih in tako pokazati povezavo med aritmetičnim zaporedjem in linearno funkcijo, pa tudi nazorno prikazati razliko v definicijskem območju obeh funkcij.
- V razredu uporabiti učni list Poraba goriva, za domačo nalogo pa Maratonec Marko.

Najbolj sem bila zadovoljna, da so dijaki pri delu zelo uživali, predvsem fantje so menili, da je takšno delo »luksuz«.

Problemska situacija

Maratonec Marko

Slika: Z Ljubljanskega maratona[3].

Maratonec Marko si želi sodelovati na Ljubljanskem maratonu. Ker je to veliki maraton, na katerem mora preteči razdaljo 42 km, mora biti na prireditev dobro pripravljen. Zato si skrbno izdela načrt. Odloči se, da bo vsak dan pretekel določeno razdaljo. Priprave bo začel 1. avgusta 2010 in se bo pripravljal vsak dan ne glede na vremenske razmere. Začel bo tako, da bo prvi dan pretekel 2 km, nato pa vsak naslednji dan 0,5 km več. Priprave bo končal tisti dan, ko mu bo uspelo preteči vseh 42 km. Razišči Markove priprave.

1. Reševanje problema brez uporabe IKT

Razmisli, koliko kilometrov preteče Marko prvi dan, koliko drugi, tretji ... Poišči model, ki bo opisal odnos med pretečeno razdaljo in časom priprav.

1. Izpolni preglednico.

Zaporedni dan priprav (t)	Pretečena razdalja v km (s)
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
...	

2. Koliko kilometrov je Marko pretekel šesti dan svojih priprav?
3. Koliko kilometrov je Marko pretekel 50. dan?
4. Podatke iz preglednice prikaži v koordinatnem sistemu.
5. Zapiši funkcijski predpis, po katerem lahko izračunaš razdaljo, ki jo je Marko pretekel za kateri koli dan svojih priprav.
6. Izračunaj, koliko dni trajajo Markove priprave.
7. Ali se bo Marku uspelu pripraviti na maraton, če bo maraton v nedeljo, 24. oktobra 2010[4], ob 10.30? Odgovor utemelji!

2. Reševanje problema z uporabo IKT

1. Odpri program Graph.
2. V orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi zaporedje točk*. Podatke iz preglednice (za prvih sedem dni Markovih priprav) prepiši v prikazano tabelo.

[3] *Sliko najdemo na naslovu http://www.ljubljanskimaraton.si/pics/razpis/maraton2.jpg.*
[4] *Aktualni datum najdemo na http://www.ljubljanskimaraton.si/index.asp?s=2&p=1&l=sl (31. 1. 2010).*

3. Poišči, katera prilagoditvena krivulja najbolje opisuje narisano množico točk. Utemelji svojo izbiro. V orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi trendno črto*.
4. Ko najdeš ustrezno prilagoditveno krivuljo, zapiši enačbo njenega grafa, ki ti jo izpiše program.
5. Povečaj si območje prikaza grafa (v orodni vrstici izberi ukaz *Uredi* in v meniju *Osi*) in iz grafa odčitaj:
   - Kako dolgo trajajo Markove priprave?
   - Koliko kilometrov Marko preteče 80. dan?
   - Ali misliš, da je model realen tudi, če Marko nadaljuje priprave po pretečenem maratonu? Odgovor utemelji.

3. Razgovor o privzetkih in kritična presoja dobljenega modela

1. Na osnovi svojega modela presodi, koliko kilometrov Marko preteče 100. dan, če priprav ne prekine.
2. Kritično premisli o omejitvah danega modela.
3. O danem problemu se pogovori s profesorjem športne vzgoje.
4. V skupini se pogovorite o predpostavkah, na osnovi katerih je nastal model.

Problemska situacija

Poraba goriva

Slika: Codellijev prvi avto[5].

Avto porabi na 100 prevoženih kilometrov povprečno 7,8 litra bencina. Poln rezervoar drži 60 litrov.

Poišči model, ki bo prikazal količino goriva v rezervoarju v odvisnosti od prevožene poti. Rezervoar je na začetku poti napolnjen do vrha.

Razmisli, koliko goriva je v rezervoarju po prevoženih 10 km, 20 km, 30 km ...

1. Izpolni preglednico.

Prevožena pot *s* (km)	**Količina goriva v rezervoarju *V*[l]**
10	
20	
30	
40	
50	
60	
70	
...	

2. Koliko bencina je še v rezervoarju po prevoženih 50 kilometrih?
3. Podatke iz preglednice prikaži v koordinatnem sistemu.
4. Imenuj krivuljo, ki se prilega narisanim točkam?
5. Kako daleč se lahko odpeljemo, ne da bi vmes dotočili gorivo?
6. Zapiši funkcijski predpis, po katerem lahko izračunaš količino bencina v rezervoarju (*V*[l]) v odvisnosti od prevožene poti (*s*).
7. Ko prevozimo 450 kilometrov, se ustavimo na bencinskem servisu in dotočimo 10 litrov goriva. Ali se lahko brez postanka odpeljemo do kraja, ki je 750 kilometrov oddaljen od bencinskega servisa? Odgovor utemelji.
8. Ali se lahko s polnim rezervoarjem brez dotakanja goriva pripeljemo iz domačega kraja do Dunaja? Kaj pa iz domačega kraja do Pariza? Odgovor utemelji. (Podatke poišči na spletu.)
9. Na spletu poišči najmanj tri avtomobile, ki imajo deklarirano povprečno porabo goriva na 100 kilometrov manj kot 7,8 litra.
10. Drevo v svojem življenjskem obdobju veže približno eno tono ogljikovega dioksida. Na spletu poišči podatke o emisiji ogljikovega dioksida za avtomobile VW fox – motor 40 kW, VW passat – motor 75 kW in VW phaeton

[5] *Baron Anton III. Codelli, pionir avtomobilizma na Slovenskem (citirano 31.1.2010). Dostopno na naslovu: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cf/Benz_velo_comfortabile.jpg.*

– motor 331 kW in izračunaj, koliko kilometrov lahko maksimalno naredi posamezen avto, da bi celotno emisijo ogljikovega dioksida vezalo pet dreves v svojem življenjskem ciklu.

Podatke za avtomobile najdeš na spletnih naslovih: *http://www.volkswagen.si/files/si/download/datei/fox_tehnicni.pdf, http://www.volkswagen.si/files/si/download/datei/passat_tehnicni.pdf in http://www.volkswagen.si/files/si/download/datei/phaeton_tehnicni_1.pdf* (31. 1. 2010).

Nekatere rešitve lahko preveriš z uporabo odprtokodnega programa Graph.

1. Odpri program Graph.
2. V orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi zaporedje točk*. Podatke iz preglednice prepiši v prikazano tabelo.
3. Razišči, katera prilagoditvena krivulja se najbolj prilega narisani množici točk?

   V orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi trendno črto*.
4. Ko najdeš ustrezno prilagoditveno krivuljo, zapiši enačbo njenega grafa, ki ti jo izpiše program.

Razgovor o privzetkih in kritična presoja dobljenega modela

1. Kritično premisli o omejitvah danega modela.
2. V skupini se pogovorite o predpostavkah, na osnovi katerih je nastal model.
3. Razmisli o uporabnosti danega modela v različnih situacijah.

2.4.1.3 Poševni stolp v Pisi

Katja Novak, III gimnazija Maribor

Osnovni podatki

Tema	Linearna funkcija
Enota	Linearna funkcija
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• modelirajo primere iz vsakdanjega življenja z linearno funkcijo;
• presojajo o veljavnosti modela;
• kritično interpretirajo rezultate;
• razvijajo kritični odnos do informacij oziroma podatkov.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• zapišejo predpis linearne funkcije in narišejo graf;
• uporabljajo graf linearne funkcije v praktičnih situacijah.</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki/ rezultati</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje znajo modelirati.</td></tr>
<tr><td>Domača naloga</td><td colspan="2">Poiščejo in rešijo podoben problem.</td></tr>
<tr><td>Potrebna programska oprema</td><td colspan="2">Program Graph (neobvezno)</td></tr>
<tr><td>Priporočeni način izpeljave</td><td colspan="2">Dijaki samostojno rešujejo učni list in poiščejo ustrezni model.
Ko končajo, učitelj (s pomočjo dijakov) z odprtokodnim programom Graph poišče prilagoditveno funkcijo.
Dijaki dobljeni predpis primerjajo s tistim, ki so ga izpeljali sami (na oko).
Če je v učilnici dovolj računalnikov, lahko dijaki zadnji del naredijo samostojno.</td></tr>
</table>

Kontekst situacije	naravni pojav, fizika
Gradivo na zgoščenki	UL_Stolp_pisa.doc RUL_Stolp_pisa.doc Stolp_pisa.grf
Viri	*1 Repolusk, S. (2009): Gradivo s seminarja o matematičnem modeliranju* *2 http://web.ist.utl.pt/mcasquilho/compute/ertheory/regression/VirgTech_Ch10Examples.pdf (31. 1. 2010)*

Refleksija

Uro je mogoče izpeljati tudi, če učitelj ni vešč dela z računalnikom ali pa v učilnici ni računalnika. V tem primeru odpade zadnje navodilo z učnega lista.

Sicer pa je ta del za dijake zelo motivacijski, saj svoje predpise linearne funkcije primerjajo s tisto, ki jo je napisal program Graph.

Pri reševanju učnega lista vsak dijak »na oko« nariše svoj model in na njegovi osnovi računa naprej. Tako so dijaki prisiljeni delati samostojno.

Uro bi lahko povezali s fiziko. V tem primeru bi dijaki lahko izračunali, pri kateri nagnjenosti bi se stolp podrl.

Problemska situacija

Poševni stolp v Pisi

Slika 1: Stolp v Pisi[6].

Zvonik romantične katedrale v Pisi, ki ga svet pozna kot poševni stolp, je čudež arhitekture.

Gradili so ga med letoma 1173 in 1370. Že leta 1178, ko so gradili tretje nadstropje, se je začel zaradi peščene podlage nagibati.

V zgodovini so ga večkrat poskusili poravnati ali ustaviti nagibanje, kar je bilo bolj ali manj neuspešno.

Strokovnjaki so zaradi skrbi, da bi se porušil, začeli meriti njegovo nagnjenost. Spodnja tabela prikazuje meritve nagnjenosti stolpa med letoma 1975 in 1987. Nagnjenost pomeni razdaljo med točko, kjer bi bil stolp, če bi bil pokončen, in točko, kjer dejansko je. Nagnjenost je podana v centimetrih.

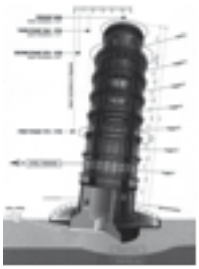
Leto	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
Nagnjenost (cm)	296,42	296,44	296,56	296,67	296,73	296,88	296,96	296,98	297,13

Leto	1984	1985	1986	1987
Nagnjenost (cm)	297,17	297,25	297,42	297,57

1. Nariši diagram za nagnjenost stolpa v odvisnosti od leta.
2. Nariši graf funkcije, ki se najbolje prilega danim podatkom.
3. Iz diagrama preberi in zapiši naslednje podatke:
4. Za koliko centimetrov bi bil po tem modelu stolp nagnjen leta 1993?
5. Kdaj bi bil po tem modelu stolp nagnjen za več kot 2,9800 metra?
6. V približno koliko letih se stolp nagne za en centimeter?
7. Kako uporaben se ti zdi ta model?
8. Zapiši predpis funkcije (model), ki se najbolje prilega danim podatkom.
9. Strokovnjaki so ugotovili, da se bo stolp porušil, če bo nagnjenost presegla 302,5 centimetra. Z uporabo modela (predpisa) oceni, katerega leta bi se to zgodilo.
10. Leta 1918 je bila izmerjena nagnjenost stolpa 290,71 cm. Preveri, ali izmerjena vrednost ustreza tisti, ki jo izračunaš po tvojem modelu. Zakaj?

[6] *Slika dostopna na naslovu: http://www.wormsandgermsblog.com/uploads/image/pisa-tower.jpg (citirano 31.1.2010)*

Strokovnjaki so ugotovili, da bi se brez sanacije stolp okrog leta 2040 zrušil. Že leta 1990 je bil dostop do njega iz varnostnih razlogov prepovedan. Med letoma 1990 in 2001 so ga prenovili. Pod njim so izkopali 38 m^3 peska in ga nadomestili z armiranim betonom. Nagnjenost so zmanjšali za 45 cm.



Slika 2: Reševanje stolpa v Pisi[7]

11. Izračunaj, katerega leta je bil stolp po tvojem modelu nagnjen toliko, kot po odprtju leta 2001.

Leta 2008 so stolp še zadnjič rekonstruirali. Svetovno znani poševni stolp v Pisi se je prvič v svoji 800-letni zgodovini prenehal nagibati. Strokovnjaki predvidevajo, da se ne bo nagibal več najmanj nadaljnjih 200 let. Kljub uspehu stolp zdaj ne spada več med svetovna arhitekturna čudesa.

Slika 3: Stolp v Pisi[8]

12. S programom Graph poišči prilagoditveno funkcijo, ki modelira dane podatke, in jo primerjaj s predpisom funkcije, ki si jo zapisal sam.

[7] *Slika dostopna na http://www.archidose.org/Jul00/pisa2.jpg (citirano 31.1.2010).*
[8] *Slika dostopna na http://www.world- guides.com/images/pisa/pisa_tower11.jpg (citirano 31. 1. 2010).*

2.4.2 Modeliranje z eksponentno funkcijo

2.4.2.1 Tekaški treningi

Jasna Kos, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

Osnovni podatki

Tema	Linearna funkcija (1. letnik) ali zaporedja (4. letnik)
Enota	Definicija funkcije Graf funkcije
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura za pregled in pogovor o domači nalogi Tekaški trening 1 in ena ura za izpeljavo modeliranja Tekaški trening 2

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

Učni cilji (splošni, procesni in vsebinski)	Dijaki/dijakinje: • poiščejo model za dano situacijo; • izpeljejo linearni in eksponentni model; • primerjajo ugotovitve, dobljene z uporabo modela z resničnimi podatki.	
Kompetence	**K1 – sporazumevanje v slovenščini**	K5 – učenje učenja
	K2 – sporazumevanje v tujih jezikih	K6 – socialne in državljanske kompetence
	K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji	K7 – samoiniciativnost in podjetnost
	K4 – digitalna pismenost	K8 – kulturna zavest in izražanje
Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje: • poznajo pojma odvisna in neodvisna spremenljivka; • poznajo različne načine predstavitve funkcije; • znajo zapisati predpise različnih funkcij (predvsem linearnih), znajdejo pa se tudi pri težjih primerih, na primer Zapiši predpis za funkcijo, ki opisuje debelino prepogibanca, če prepogibamo papir, debeline 0,1 mm; • znajo rešiti linearno enačbo in neenačbo; • so rešili domačo nalogo Tekaški trening 1, ki je namenjena pripravi na zahtevnejše primere modeliranja.	
Pričakovani dosežki/ rezultati	Pri učni uri v razredu naj bo mogoče demonstrirati z računalnikom.	

Priporočilo za nadaljevanje	Za zapolnjevanje vrzeli (ura pred počitnicami ali prazniki) ali za boljše dijake je pripravljen učni list za iskanje vsote aritmetičnega zaporedja: SPRETNI RAČUNAR Carl Friderich Gauss.
Gradivo na zgoščenki	UL_Tekaski_trening_1.doc UL_Tekaski_trening_2.doc RUL_Drugi_ucitelj.doc (uporaba gradiva drugega učitelja) DN_rast_prebivalstva.doc DN_Gauss.doc
Viri	*1 Žagar, F. (1986). Naš jezik, jezikovna vadnica za 6. razred. Ljubljana: Mladinska knjiga.* *2 Statistični urad Republike Slovenije: http://www.stat.si/preb_ura.asp (21. 1. 2010)* *3 TSM Resources: http://www.tsm-resources.com/xls/Data/WorldPop.xls (21. 1. 2010)*

Refleksija

Nalogo smo reševali takoj, ko so dijaki usvojili temeljne pojme o funkciji in pred poglavjem linearna funkcija. Pri reševanju domače naloge Priprave na tekaško tekmovanje 1 dijaki niso imeli težav, sem pa kljub temu pregledala domačo nalogo vsem dijakom v razredu, saj posamezniki, ki bi se jim morda zataknilo pri reševanju, ne bi mogli slediti nadaljevanju. Predvsem zadnja dva odgovora smo komentirali in poiskali vse načine reševanja.

Za reševanje naslednjega dela Priprave na tekaško tekmovanje 2 smo si vzeli vso uro. Dijaki so nalogo reševali samostojno, če ni šlo, so se posvetovali s sosedom. Najprej so dobili le prva štiri vprašanja. Za prva tri je bilo mogoče pričakovati, da bodo nanje vedeli odgovoriti prav vsi, četrto pa je namenjeno zelo hitrim dijakom. Pravilnega odgovora nanj nisem pričakovala, bilo je bolj mašilo, da so vsi v razredu nehali reševati hkrati, počasneje po treh vprašanjih, preostali pa s krajšim ali daljšim razmišljanjem o pravilnem odgovoru na četrto vprašanje. Pregledali smo rešitve prvih treh nalog, ugotovili, da četrte ni uspelo rešiti skoraj nikomur, ter nadaljevali z naslednjimi nalogami. Po šesti nalogi smo se spet ustavili ter pregledali rešitve. Sedmo nalogo smo reševali skupaj. Dijaki so predlagali različne poti reševanja:

- poskušanje (nadaljevati tabelo toliko časa, dokler ne dobimo rešitve),
- grafično reševanje,
- reševanje z enačbo.

Pogledali smo vse možnosti, za zadnji dve smo uporabili Derive 5.

Dijaki so rešene naloge oddali in dogovorili smo se, da bomo odgovore komentirali naslednjo uro matematike. Na koncu nam je ostalo toliko časa, da smo utrdili zapis funkcije, ki opisuje povečanje vrednosti funkcije v odstotkih. Dijaki so Darkove pretečene kilometre opisali s funkcijo $D(x) = 5 \cdot (6/5)^x$ ali $D(x) = 5 \cdot 1,2^x$. Nato smo se vprašali, kakšna bi bila funkcija, če bi število pretečenih kilometrov povečeval za 10 %, 5 %, 32 %, 1 %, 0,23 % ... Hitro smo ugotovili, da je decimalni zapis preprostejši, in dobili občutek za zapis funkcije. To utrjevanje je bilo nujno zato, da

bi dijaki lahko rešili domačo nalogo. En sam primer, ki je v nalogi, ne zadošča za razumevanje.

Zelo pomembno je, da pri daljši nalogi, kot je predstavljena tukaj, med uro večkrat preverimo, ali so dijaki usvojili načrtovane cilje, sicer se lahko zgodi, da nekateri od ure nimajo nikakršne koristi. Tudi po pregledovanju delovnih listov in domače naloge sem ugotovila, da so bili cilji doseženi.

Zadnji del naloge SPRETNI RAČUNAR Carl Friderich Gauss je zelo zahteven. Reševali smo ga zato, ker je bil pozneje pouk za teden dni prekinjen in zadnjo uro pred tem ni bilo smiselno obravnavati nove snovi. Sicer naloge ne bi reševala s celotnim razredom, primernejša se mi zdi za neobvezno domačo nalogo ali kot uvod v zaporedja v četrtem letniku. Uspešnega reševanja nisem pričakovala in tudi dijake sem obvestila, da imajo pred seboj zahteven primer, cilj pa je izpeljati formulo, ki jo bodo sicer spoznali v četrtem letniku. Najbrž je bil to zanje izziv, saj so neverjetno zbrano delali, se trudili, uspešnih pa je bilo na koncu malo dijakov. Zanimivo je, da so v refleksiji ta del ocenili kot zelo zanimiv in zabaven.

Refleksija dijakov

Dijaki so ugotovili, da imajo pri daljših nalogah, kot je bila ta, težave zaradi površnega branja naloge. Zdelo se jim je zelo težko zapisati odgovore v stavkih, bolj jim je všeč, da se da odgovor zapisati v matematičnem simbolnem jeziku. Zanimalo jih je, kako bo znanje, ki so si ga pridobili pri modeliranju, preverjeno. Želela sem, da sami najdejo primerne naloge na delovnem listu, ki bi jih lahko preverjali tudi pri testu ali ustnem ocenjevanju. Vsi smo se strinjali, da bodo to krajše naloge, in ugotovili so, da jim tudi pri preverjanju ne bodo delale težav. Zelo dobro so ocenili zadnji del naloge SPRETNI RAČUNAR Carl Friderich Gauss, vendar so mnogi rekli, da je bilo reševanje te naloge zabavnejše kot obravnavanje nove snovi, le redki pa, da jih je zanimala formula, ki naj bi jo dobili.

Problemski situaciji

Tekaški trening 1

Ana in Bor se pripravljata na tekaško tekmovanje. Ana se je odločila v prvem tednu preteči 10 kilometrov, potem pa vsak naslednji teden kilometer več. Bor se je odločil v prvem tednu preteči le štiri kilometre, potem pa razdaljo povečevati za dva kilometra na teden.

1. Podatke o pretečenih razdaljah Ane in Bora uredi v preglednici.

	1. teden	**2. teden**	**3. teden**	**4. teden**	**5. teden**
Anina pot					
Borova pot					

2. Zgornje podatke grafično predstavi.
3. Ker je število kilometrov, ki jih preteče Ana, odvisno od tedna treninga, lahko Anin trening prikažemo kot funkcijo.

   Imenuj neodvisno spremenljivko x v dani nalogi.

   Imenuj odvisno spremenljivko $A(x)$ v dani nalogi.

   Zapiši funkcijo $A(x)$.
4. Zapiši funkcijo $B(x)$, ki opisuje Borovo pot v odvisnosti od spremenljivke x.
5. V katerem tednu treninga bosta Bor in Ana pretekla enako število kilometrov?
6. Tudi Cvetka se pripravlja na tekmovanje. Začela je s 6 kilometri teka na teden in povečuje pretečeno pot za 1,6 kilometra na teden. S tabelo prikaži, koliko kilometrov je pretekla Ana in koliko Cvetka v posameznem tednu.
7. Zapiši funkcijo $C(x)$, ki opisuje pretečeno Cvetkino pot.
8. Ali lahko ugotoviš, v katerem tednu pretečeta Ana in Cvetka enako število kilometrov?
9. Kako bi pokazal, v katerem tednu bo Cvetka pretekla večje število kilometrov kot Ana?

Tekaški trening 2

Ana in Darko se pripravljata na tekaško tekmovanje. Ana se je odločila v prvem tednu preteči 10 kilometrov, potem pa vsak nadaljnji teden kilometer več. Darko se je odločil preteči najprej le pet kilometrov, potem pa razdaljo povečevati za 20 % na teden.

1. Podatke o pretečenih razdaljah Ane in Darka v prvih petih tednih uredi v preglednici.
2. Podatke iz zgornje preglednice grafično predstavi.

3. Primerjaj dobljena grafa. V čem se razlikujeta?
4. Funkcijo, ki opisuje Anine treninge, že poznamo. Kakšna pa bo funkcija, ki opisuje Darkove?

Denimo, da Darko preteče prvi teden a km, vsak nadaljnji teden pa povečuje razdaljo za 20 %.

Izpolni naslednjo tabelo:

	1. teden	**2. teden**	**3. teden**	**4. teden**	**5. teden**	**.....**	**x-ti teden**
Darkova pot							

Funkcijo, ki opisuje Darkovo pot, označimo z $D(x)$, pri čemer x predstavlja zaporedno številko tedna. Zapiši:

$D(1) =$ _____ $D(4) =$ _____

$D(2) =$ _____ $D(5) =$ _____

$D(3) =$ _____ $D(x) =$ _____

5. Zapiši funkcijo $D(x)$, ki opisuje Darkovo pot, pri čemer velja začetna predpostavka, da Darko preteče v prvem tednu pet kilometrov.
6. V katerem tednu bo Darko pretekel večje število kilometrov kot Ana?
7. Tekmovanje bo v 12. tednu. Koliko sta Ana in Darko pretekla teden dni pred tekmovanjem?
8. Denimo, da Darko preteče prvi teden a kilometrov, vsak nadaljnji teden pa povečuje razdaljo za p %. Zapiši funkcijo $E(x)$, ki opisuje Darkov trening.
9. Po kolikšnem času bi bil ti sposoben teči v šolo in domov, če bi treniral tako kot Darko?
10. Kaj meniš o funkciji, ki opisuje Darkov trening glede na njegove sposobnosti?
11. Zapiši nekaj predpostavk, ki smo jih privzeli pri reševanju tega tekaškega primera?

Domača naloga

RAST SVETOVNEGA PREBIVALSTVA

Od leta 1950 do leta 1990 je število svetovnega prebivalstva naraščalo približno za 1,85 % na leto. Leta 1950 je bilo na svetu 2,52 milijarde ljudi.

(a) Zapiši funkcijo, ki opisuje rast prebivalstva v tem obdobju.

(b) Koliko ljudi je bilo na svetu (izračunano po tvojem modelu) leta 1970 in koliko 1990?

(c) Koliko ljudi bi bilo na svetu zdaj, če bi število prebivalcev ves čas naraščalo tako hitro?

(d) Koliko nas je v resnici, preveri na spletnem naslovu Statističnega urada Republike Slovenije *http://www.stat.si/preb_ura.asp*.

Kako natančni so tvoji izračuni v nalogah (b) in (c), lahko preveriš v tabeli, ki je objavljena na spletni strani TSM Resources *http://www.tsm-resources.com/xls/Data/WorldPop.xls* (3. 5. 2009):

Leto	Število let	Število prebivalstva v milijardah
1950	0	2,52
1955	5	2,76
1960	10	2,98
1965	15	3,33
1970	20	3,69
1975	25	4,07
1980	30	4,43
1985	35	4,83
1990	40	5,26
1995	45	5,67
2000	50	6,07
2005	55	6,45
2008	58	6,67

ali v prebivalstveni uri na *http://www.stat.si/tema_demografsko_prebivalstvo.asp* (23. januar 2010).

GAUSSOVA IZNAJDLJIVOST

Glejte datoteko DN_Gauss.doc(x) na zgoščenki.

2.4.2.2 Skodelica kave

Katja Novak, III. gimnazija Maribor

Osnovni podatki

Tema	Eksponentna funkcija
Enota	Eksponentna funkcija
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura za zbiranje podatkov in ena šolska ura za obdelavo podatkov

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• modelirajo primere iz vsakdanjega življenja z eksponentno funkcijo;
• samostojno ugotovijo spremenljivki in odvisnost med njima;
• presojajo o veljavnosti modela;
• kritično interpretirajo rezultate;
• razvijajo kritični odnos do informacij oziroma podatkov.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• ločijo eksponentno odvisnost od linearne;
• poznajo eksponentno funkcijo;
• poznajo naslednje ukaze programa Graph:
◦ vstavi zaporedje točk;
◦ uredi lastnosti osi,
◦ vstavi graf, ki se najbolje prilega zaporedju točk;
◦ ovrednoti ali sledi izbrano funkcijo.</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki/ rezultati</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje znajo modelirati.</td></tr>
<tr><td>Potek učnega procesa</td><td colspan="2">1. Zastavitev problema.
2. Zbiranje podatkov.
3. Reševanje problema (UL_skodelica_kave.doc).
4. Razgovor o ugotovitvah (predpostavke, vrednotenje in razlaga modela, uporaba modela, razširitev problema ...) .</td></tr>
</table>

Domača naloga	Poiščejo in rešijo podoben problem.
Potrebna programska oprema	• Program Graph • Program Excel
Priporočeni način izpeljave	Prvo uro dijaki z meritvami spremljajo spreminjanje temperature kave iz šolskega avtomata. Merijo vsake štiri minute in si podatke zapišejo. Izmerijo tudi temperaturo prostora. Meritve lahko potekajo pri redni uri, meri dijak in meritve sproti (ali na koncu ure) sporoča preostalim. Drugo uro dijaki samostojno poiščejo ustrezni model z ustreznim programom v računalniški učilnici.
Postavitev problema	Z dijaki se pogovorimo o problemu in meritvah, ki jih bomo izpeljali. Dijaki imenujejo odvisno in neodvisno spremenljivko, razmislijo o ustreznih oznakah in organizaciji zapisa meritev ter o pričakovanem grafu (napoved pričakovanega rezultata, vsaj padajoča funkcija).
Kontekst situacije	Naravni pojav, fizika Enačba ohlajanja: $T(t) = T_O + (T_K - T_O)e^{-kt}$ t – čas, T_O – temperatura okolja, T_K – temperatura kave na začetku merjenja, k – pozitivna konstanta v ustreznih enotah, $T(t)$ – temperatura kave po času t
Gradivo na zgoščenki	UL_Skodelica_kave.doc Meritve_temperature.xls RUL_Skodelica_kave.doc Kava_ohlajanje.grf
Viri	*1 Repolusk, S. (2009). Gradivo s seminarja o matematičnem modeliranju.* *2 http://www.math.wpi.edu/Course_Materials/MA1022A96/lab2/node5.html (2. 2. 2010),* *3 http://orion.math.iastate.edu/algebra/sp/xcurrent/applets/cooling.html (2. 2. 2010),* *4 http://www.leaningpinesoftware.com/hot_water_pipes_Newtons_cooling.shtml (2. 2. 2010)*

Refleksija

Čeprav se lahko pri uri uporabijo podatki, ki so jih izmerili drugi (npr. podatke s spletne strani *http://mathbits.com/Mathbits/TISection/Statistics2/exponential.htm* ali pa podatke, ki smo jih pri uri izmerili mi - RUL_skodelica_kave.doc), je najbolje, da se meritve dejansko opravijo v razredu.

Le tako bodo dijaki zares spoznali, da so modeli matematičnih funkcij v našem okolju.

Predznanje programa Graph ni nujno potrebno. Dovolj je, da učitelj pred delom v računalniški učilnici skupaj z dijaki pogleda osnovne ukaze programa. Priporočljivo je, da vsak dijak dela na svojem računalniku.

Dijaki so bili zelo navdušeni, saj je bila ura drugačna že zaradi merjenja temperature kave. Že med tem je večina predvidevala, da gre za padajočo eksponentno funkcijo. Nekaj posameznikov je tudi sklepalo, da je odvisnost linearna.

Dijaki na vprašanja, ki niso »tipično matematična« in se navezujejo na drugi predmet, neradi odgovarjajo (npr. Kaj bi lahko naredil, da bi kava iz avtomata dlje časa ostala vroča?). Zdi se jim, da bi morali pri matematiki bolj ali manj računati, ne pa utemeljevati in razlagati.

Uro bi lahko medpredmetno povezali s fiziko (enačba ohlajanja). Tam bi se lahko tudi temeljiteje ukvarjali z dejavniki, ki vplivajo na ohlajanje tekočin.

Problemska situacija

Skodelica kave

Merili smo temperaturo kave iz šolskega avtomata. Čez koliko časa se kava iz šolskega avtomata ohladi na sobno temperaturo?

Uporabi preglednico meritev in opazuj vrednosti spremenljivk.

1. Imenuj spremenljivki.
2. Katera lastnost funkcije je iz meritev najbolj prepoznavna?
3. Katera od funkcij bi se lahko po tvojem mnenju najbolje prilegala meritvam?

Uporabi program Graph in izbiraj med različnimi predpisi funkcij.

4. Kateri predpis je po tvojem mnenju najustreznejši? Utemelji.
5. Zapiši predpis funkcije, ki jo izpiše program.
6. Kolikšna bi bila, po tvojem mnenju, temperatura kave pet ur po začetku merjenja?
7. Kolikšna pa je bila, po tvojem modelu, temperatura kave pet ur po začetku merjenja?
8. Ali enačba realno opisuje temperaturo kave po zelo dolgem času? Utemelji.
9. Razmisli o mogočih napakah pri merjenju, ki bi lahko vplivale na rezultat?
10. Z grafa odčitaj naslednje podatke:
    a. Čez koliko časa se kava ohladi na temperaturo 40 °C?
    b. Kolikšna je temperatura kave po eni uri?
11. Za koliko °C se je ohladila kava
    a. prvih pet minut,
    b. med peto in deseto minuto,
    c. med 40. in 45. minuto?
12. Kaj se dogaja s prirastki funkcije na teh intervalih?

Leta 1992 je 79-letna Stella Liebeck tožila McDonald's zaradi opeklin, ki ji jih je povzročila kava, kupljena v eni njihovih restavracij. Liebeckova se je polila s kavo, ki je imela 80 – 90 °C in dobila opekline tretje stopnje. Ker lahko opekline povzroči kava, ki ima več kot 68 °C, je dobila odškodnino 2,7 milijona dolarjev. Od takrat večina restavracij servira kavo ohlajeno na temperaturo okrog 68 °C, čeprav ima kava najboljši okus pri 80 – 90 °C.

13. Ali lahko kava iz avtomata na naši šoli povzroči opekline?
14. Kaj bi naredil, da bi kava iz avtomata ostala vroča dlje časa?
15. Naštej dejavnike, ki vplivajo na hitrost ohlajanja kave.

2.4.2.3 Naravno čiščenje onesnaženega jezera

Helena Kapus, Ekonomska gimnazija in srednja šola Radovljica

Osnovni podatki

Tema	Eksponentna funkcija
Enota	Uvod v eksponentno funkcijo, modeliranje z eksponentno funkcijo
Predvideni čas izpeljave	dve šolski uri

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• spoznajo eksponentno funkcijo;
• primerjajo grafe funkcij pri različnih podatkih;
• preizkušajo različne modele;
• znajo se odločiti v dani situaciji;
• znajo brati podatke iz tabele in narisanega grafa in sklepati, kaj graf funkcije prikazuje;
• znajo model vrednotiti;
• znajo zapisati rekurzivno formulo;
• znajo model uporabiti.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
BREZ UPORABE TEHNOLOGIJE
• znajo analizirati grafe funkcij, naraščanje, padanje, asimptoto ...
Z UPORABO IKT
• poznajo kopiranje celic iz Microsoft Office Excela v program Graph;
• poznajo temelje dela z odprtokodnim programom Graph;
• poznajo vstavljanje prilagoditvene krivulje.</td></tr>
</table>

Potek učnega procesa	1. Uvod, predstavitev problema. 2. Empirično modeliranje, primerjanje modelov med seboj. 3. Delo s preglednicami in prenos tabele v Graph. 4. Iskanje potrebnih podatkov na grafu funkcije. 5. Spoznajo novo funkcijo (eksponentna funkcija ...) 6. Primerjajo modele pri različnih predpostavkah.
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	• Program Graph • Program Excel • Model_brezdotoka.xls • Model_dotok.xls
Priporočeni način izpeljave	• V računalniški učilnici. • Kot uvod v eksponetno funkcijo (2. letnik). • Kot utrjevanje znanja (2. letnik). • Kot utrjevanje znanja pri ponovitvi funkcij (4. letnik). • Excelovi tabeli sta dostopni v e-učilnici ali v mapi.
Gradivo na zgoščenki	UL_Jezero.doc RUL_Jezero.doc Model_brezdotoka.xls Model_dotok.xls
Priprava pripomočkov pred izpeljavo	Nameščena e–predloga v skupni rabi (samo za branje) na strežniku ali na namizju vsakega računalnika
Viri	*1 http://www.math.montana.edu/frankw/ccp/modeling/discrete/linear/learn.htm (29. 3. 2009)* *2 Žakelj, A. (2003). Kako poučevati matematiko. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.* *3 Vtič Tršinar, D. (2004). Iskalci biserov. Maribor: Društvo za boljši svet.* *4 Repolusk, S. (2009). Gradivo s seminarja o modeliranju.*

Refleksija

Moje predvidevanje in pričakovanje:

Dijaki uporabljajo računalniške programe različno spretno in hitro. Zato sem pripravila nekoliko več nalog, da se najbolj spretni dijaki ne bi dolgočasili, lahko pa že med poukom z računalnikom delajo DN.

Ali je učna ura potekala tako, kot ste jo načrtovali?

Moje pričakovanje se je izpolnilo, delo je potekalo v ustvarjalnem ozračju. Dijaki so bili z izpeljavo ure zadovoljni.

Ali so dijaki usvojili predvidene cilje učne ure?

Dijaki so usvojili cilje učne ure. Pri naslednji učni uri, ko smo definirali eksponentno funkcijo in narisali njen graf, so pojem asimptote bolje razumeli in tudi niso imeli težav pri njenem risanju.

Kolikšen del učne ure ste porabili za odkrivanje lastnosti, zakonitosti …

Mislim, da je bila celotna ura namenjena odkrivanju novega.

Bi morda pri ponovitvi nastopa kaj spremenili?

Zanimivo bi bilo sodelovanje s profesorjem biologije, morda geografije. Lahko bi takšno uro izpeljali v sklopu projektnega dneva, snov pa sem izbrala zato, ker je letošnji šolski projekt (medpredmetno povezovanje) postavljen na temo vode.

Uro sem izpeljala pred obravnavo eksponentne funkcije kot uvod v novo snov, lahko pa bi jo tudi kot ponovitev eksponentne funkcije na koncu poglavja.

Problemska situacija

Naravno čiščenje onesnaženega jezera

Denimo, da gre za jezero, ki je onesnaženo, to pa je povzročilo neko podjetje, njegovo dejanje pa so odkrili. Zagotovo vemo, da drugih onesnaževalcev jezera ni bilo. Onesnaženost jezera merimo v ppm, kar pomeni število delčkov umazanije na milijon delčkov vode (parts per million).

Naše jezero je del sistema (verige) jezer, povezanih z reko. Vemo, da vsako leto določena količina vode v jezeru odteče in se nadomesti s čisto vodo iz zgornjih jezer in od dežja (ni onesnažen).

Zakonodaja določa, da je jezero primerno za kopanje, ko je stopnja onesnaženosti pod 5 ppm, torej je mejna vrednost 5 ppm. Kazen za onesnaževalca je 50.000 EUR za vsako leto, ko jezero ni primerno za kopanje.

1. naloga

Z meritvami so bili zbrani naslednji podatki za prvih deset let:

Leto	Mera onesnaženosti v ppm
1.	20
2.	18.5
3.	16.1
4.	14.6
5.	13.1
6.	11.9
7.	10
8.	9.7
9.	8.5
10.	7.3

Tabela 1: Onesnaženost jezera

Sodni izvedenec

Država je podjetje, ki je jezero onesnažilo, tožila in ga spoznala za krivega. Najela je svojega izvedenca. Sodni izvedenec je poiskal pomoč strokovnjaka, ki je dane podatke modeliral z eksponentno funkcijo.

Tudi sam naredi to z naslednjimi koraki:

- odpri program Graph, poimenuj obe osi,
- v orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi zaporedje* točk, prepiši podatke iz tabele Onesnaženost jezera v zaporedje točk,
- v orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi trendno črto*, eksponentno funkcijo,
- graf naj bo zelene barve, poimenuj ga Sodni izvedenec,
- iz grafa preberi, kdaj bo stopnja onesnaženosti pod 5 ppm, in izračunaj vrednost kazni,
- prepiši enačbo grafa funkcije.

Izvedenec podjetja

Podjetje je najelo svojega izvedenca in ta je meritve modeliral z linearno funkcijo.

Tudi sam naredi to z naslednjimi koraki:

- v prejšnjem grafu v meniju označi Niz1,
- v orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi trendno črto*, linearno funkcijo,
- graf naj bo rdeče barve, poimenuj ga Podjetje,
- iz grafa preberi, kdaj bo stopnja onesnaženosti pod 5 ppm, in izračunaj vrednost kazni,
- prepiši enačbo grafa funkcije.

Izvedenec naravovarstvenikov

Naravovarstveniki, zbrani v civilni iniciativi Prijatelji jezera, so dane podatke modelirali z recipročno funkcijo.

Tudi sam naredi to z naslednjimi koraki:

- v orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi zaporedje točk*, prepiši podatke iz tabele Onesnaženost jezera v zaporedje točk,
- v orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi trendno črto*, lastne funkcije, recipročna funkcija,
- graf naj bo modre barve, poimenuj ga Prijatelji jezera,
- iz grafa preberi, kdaj bo stopnja onesnaženosti pod 5 ppm, in izračunaj vrednost kazni,
- prepiši enačbo grafa funkcije.

Primerjaj vse tri modele med seboj in odgovori:

Kateri model je ugodnejši za podjetje in zakaj? Ali je izbrani model dober tudi čez 10 let? Svojo trditev v odgovoru utemelji.

2. naloga

Po 10 letih meritev imamo tri izvedenska mnenja in tri modele, ki se zelo razlikujejo v napovedih, kdaj bo voda primerna za kopanje. Država tokrat najame četrtega izvedenca, ki poskuša problem rešiti teoretično, brez meritev. Izvedenec ve, da je podjetje jezero onesnažilo do stopnje 20 ppm in da vsako leto 10 % vode v jezeru odteče ter se nadomesti s čisto vodo iz zgornjih jezer in od dežja (ni onesnažen).

Dopolni rekurzivno formulo, ki povezuje stopnjo onesnaženosti prihodnjega leta $p(n)$ glede na stopnjo onesnaženosti sedanjega $p(n - 1)$:

$p(n) = ____ \cdot p(n-1); n \in N$ in $n \geq 2$

Zapisal si model četrtega izvedenca.

1. Odpri program Graph in tabelo iz Excelovega dokumenta Model_brezdotoka prenesi v program Graph. To narediš z naslednjimi ukazi:

- V Excelovem dokumentu označi tabelo in jo kopiraj.
- Vrni se v Graph, v orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi zaporedje točk*.
- V izbranem ukazu prilepi tabelo.

2. Poišči, katera prilagoditvena krivulja se najbolj prilega narisani množici točk?
3. V orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi trendno črto.*
4. Ko najdeš ustrezno prilagoditveno krivuljo, zapiši enačbo njenega grafa, ki ti jo izpiše program. Nato zapiši splošen predpis za dobljeno funkcijo.

Iz grafa preberi, kdaj bo stopnja onesnaženosti pod 5 ppm pri modelu četrtega izvedenca.

Ugotovi in obrazloži, kateri izvedenec iz prve naloge je imel najboljši model (model, ki se najbolj približa modelu četrtega izvedenca).

3. naloga

V Excelovem dokumentu Model_brezdotoka spreminjaj odstotek vode P, ki iz jezera odteče in se nadomesti z novo, neonesnaženo vodo ter začetno stopnjo onesnaženosti. Oceni število let in izračunaj kazen. Podatke za zadnjo vrstico v podnalogi d) v spodnji tabeli si izmisli sam.

	Začetna onesnaženost v ppm	**Odstotek vode, ki odteče in se zamenja s čisto *P***	**Mejna vrednost v zakonodaji (v ppm)**	**Število let**	**Kazen v EUR**	**Rekurzivna formula**
a)	20	5	5			$p(n) =$ ____ $\cdot\, p(n-1)$
b)	15	22	2			$p(n) =$ ____ $\cdot\, p(n-1)$
c)	30	15	1			$p(n) =$ ____ $\cdot\, p(n-1)$
d)						$p(n) =$ ____ $\cdot\, p(n-1)$

RAZŠIRITEV PROBLEMA

V vsakdanjem življenju je voda, ki priteče v jezero iz jezer nad njim, le redko popolnoma čista. Predpostavimo, da je stopnja onesnaženosti vode, ki priteka v naše jezero, b. Potem se naš prejšnji model

$p(n) = 0{,}90 \cdot p(n-1)$ spremeni v $p(n) = 0{,}90 \cdot p(n-1) + 0{,}10b$.

V nadaljevanju bomo raziskovali naš novi model.

4. naloga

1. Odpri program Graph in tabelo iz Excelovega dokumenta Model_dotok prenesi v program Graph. To narediš z naslednjimi ukazi:
   - V Excelovem dokumentu označi tabelo in jo kopiraj.
   - Vrni se v Graph, v orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi zaporedje točk*.

- V izbranem ukazu prilepi tabelo.

2. Zdaj poišči, katera prilagoditvena krivulja se najbolj prilega narisani množici točk.
   - V orodni vrstici izberi ukaz *Funkcija* in v meniju izberi *Vstavi trendno črto*.
3. Ko najdeš ustrezno prilagoditveno krivuljo, zapiši enačbo njenega grafa, ki ti jo izpiše program.
4. Povečaj si območje prikaza grafa (v orodni vrstici izberi ukaz *Uredi* in v meniju *Osi*) in iz grafa odčitaj:
   - Do katere meje se bo jezero očistilo v najboljšem primeru? Oceni.
   - Zapiši enačbo asimptote.

5. naloga

V našem modelu bomo spreminjali vrednost mere onesnaženosti dotočne vode, to je količine b. Vrednost količine b spreminjaš v Excelovem dokumentu Model_dotok, nato ponovi zgornje štiri korake ter izpolni tabelo.

	***p* (1) v ppm**	***b* v ppm**	**Kdaj je stopnja onesnaženosti prihodnjega leta enaka stopnji onesnaženosti sedanjega? Oceni v letih.**	**Zapiši enačbo asimptote.**
a)	20	10		
b)	20	3		
c)	20	30		
d)	20	0		

Kaj ugotoviš? Svojo ugotovitev tudi zapiši.

Domača naloga

V naslednjih nalogah boš preveril svoje znanje, ga nadgradil in povezal z drugimi področji:

1. Naj bo začetna vrednost onesnaženja 42 ppm. Voda, ki v jezero priteče, ni onesnažena. Onesnaženost jezera se zniža pod 1 ppm v 14 letih. S spreminjanjem parametra v Excelovem dokumentu Model_brezdotoka ugotovi, kolikšen odstotek vode se mora na leto zamenjati, da se to zgodi?
2. Naštej najmanj štiri vzroke za onesnaževanje voda.
3. Kaj lahko sam storiš za zmanjšanje onesnaževanja voda?
4. Razmisli in poišči na internetu, v časopisih, revijah najmanj dva primera onesnaženja jezera oziroma reke, potoka v našem okolju, lahko tudi drugje. Zapiši, kdaj in kje se je to zgodilo, kdo je bil onesnaževalec (predpostavka).

Čas, datum	**Jezero, reka, potok**	**Onesnaževalec**

2.4.2.4 Upadanje svetlobnega toka

Jasna Kos, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

Osnovni podatki

Tema	Eksponentna funkcija
Enota	Graf eksponentne funkcije Uporaba eksponentne funkcije
Predvideni čas izpeljave	tri šolske ure

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• opišejo problem;
• spoznajo fizikalne pojme gostota svetlobnega toka, prepustnost svetlobe, intenziteta svetlobe...
• za dane podatke računsko poiščejo prilagoditveno funkcijo (poiščejo ustrezne vrednosti parametrov);
• z uporabo IKT poiščejo prilagoditveno krivuljo;
• razumejo pomen parametrov a in I_0 v fizikalni enačbi $I(x) = I_0 \cdot a^x$;
• z uporabo matematike znajo sklepati o fizikalnih pojavih.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• poznajo pojma odvisna in neodvisna spremenljivka;
• znajo narisati graf funkcije;
• znajo zapisati predpis eksponentne funkcije;
• zna rešiti eksponentno in logaritemsko enačbo;
• zna poiskati prilagoditveno krivuljo z uporabo tehnologije.</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki/ rezultati</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje znajo modelirati.</td></tr>
</table>

Potek učnega procesa	1. Učitelj fizike uvede osnovne pojme in vodi dijake pri reševanju uvodnega problema. 2. Izpeljava fizikalnega poskusa. 3. Reševanje matematične naloge – s podatki iz meritev najti takšna parametra v funkciji oblike $f(x) = a \cdot b^x$, da se graf funkcije najbolje prilega meritvam. 4. Uporaba tehnologije pri iskanju prilagoditvene krivulje. 5. Vodeno delo v dveh skupinah: pomen parametrov v fizikalni enačbi $I(x) = I_0 \cdot a^x$;. 6. Reševanje nalog, delo v skupinah.
Priporočeni način izpeljave	Po obravnavi eksponentne in logaritemske funkcije kot primer uporabe eksponentne funkcije
Viri	*http://illuminations.nctm.org/java/light/student/water2.mov*

Problemska situacija

Upadanje svetlobnega toka z globino vode

I. FIZIKALNI DEL

V uvodnem delu ure dijaki iz izkušenj ugotavljajo, kakšna je prepustnost svetlobnega toka v vodi.

1. Se potapljate? Ste že kdaj opazili, kako se prepuščeni svetlobni tok v vodi spreminja z globino?
2. Oblikujte vprašanje v zvezi s tematiko, o kateri se pogovarjamo, na katerega bi matematiki ali fiziki odgovorili z matematično enačbo.

(Z vprašanjem želimo dobiti formulacije, kot so na primer svetlobni tok, gostota svetlobnega toka, intenziteta svetlobe in podobno. Učitelj fizike dijake pri tem usmerja in razlaga pravilno uporabo naštetih pojmov. V odgovoru na vprašanje morajo dijaki pravilno izbrati odvisno in neodvisno spremenljivko, ki ju uporabijo v naslednji nalogi.)

3. Narišite koordinatni sistem, ga označite in s pomočjo slike delfinov in svojih izkušenj narišite krivuljo, ki bi po vašem mnenju opisovala spreminjanje gostote svetlobnega toka z globino vode.
4. Če z $I(d)$ označimo gostoto svetlobnega toka v globini d metrov, kolikšna je potem vrednost izraza $I(11) - I(10)$?
5. Na osnovi svojih potapljaških izkušenj primerjajte vrednosti izrazov $|I(12) - I(11)|$ in $|I(2) - I(1)|$.

Ker pričakujemo slabše odgovore na 3. vprašanje kot na zadnji dve, na podlagi zadnjih dveh odgovorov popravimo krivuljo, ki so jo dijaki narisali.

V naslednjem delu ure naredimo poskus. S črnilom enakomerno obarvano vodo natakamo v osvetljeno posodo in z merilnikom luxmetrom merimo gostoto svetlobnega toka pri različnih višinah vode v posodi.

V razredu smo izpeljali dve ponovitvi poskusa (z bolj in manj obarvano vodo) in dobili naslednje podatke:

Globina (cm)	**Gostota svetlobnega toka (lux) 1. poskus**	**Gostota svetlobnega toka (lux) 2. poskus**
0	99,2	112
1	/	83,2
2	71,4	62,2
3	50,5	48,7
4	49,6	37,0
5	42,3	25,6
6	32,7	19,4
7	25,7	13,6
8	20,2	10,6
9	17,3	8,80
10	14,1	7,30

Zaradi stalnega spreminjanja zunanjega vira svetlobe (sonce je posijalo v učilnico, v naslednjem hipu pa so ga že zakrili oblaki) so nekatere meritve slabše.

II. MATEMATIČNI DEL

Podatke prvega poskusa vnesemo v računalnik. Dijaki ugotovijo, da točke ustrezajo eksponentni funkciji oblike

$f(x) = a \cdot b^x$.

Najprej poskušajo brez računalnika poiskati enačbo krivulje. Dobljeno krivuljo narišejo in preverijo, kako se prilega danim podatkom. Model izboljšajo, če je potrebno.

Z uporabo ustreznega računalniškega programa dijaki poiščejo prilagoditveno krivuljo.

V istem koordinatnem sistemu narišejo še točke, ki ustrezajo drugemu poskusu. Nato poskušajo uganiti, kako bi morali spremeniti parametra a in b, da bi dobili enačbo krivulje, ki opisuje upadanje gostote svetlobnega toka z globino vode v drugem poskusu.

Nalogo rešijo še z uporabo računalnika.

Pri reševanju nalog smo pozorni na pravilne oznake koordinatnih osi in enake oznake pri zapisu funkcij.

III. POMEN PARAMETROV (PRVIČ)

Zanima nas, kaj nam povesta parametra a in b v enačbi krivulje. Parameter a pomeni začetno vrednost; to je začetna gostota svetlobnega toka. Dogovorimo se za oznako I_0.

Pri prepoznavanju pomena parametra b si pomagamo z novo nalogo. Na primeru steklenih ploščic, katerih prepustnost svetlobe je 70 %, izpeljemo enačbo, ki opisuje prepustnost svetlobnega toka.

Vzemimo enake plošče iz pleksi stekla debeline d, kjer vsaka absorbira (vpije) 30 % svetlobnega toka.

Skozi ploščo	1	debeline d pride	$70\% = \frac{70}{100}$	svetlobnega toka.
	2		$\frac{70}{100} \cdot \frac{70}{100}$	
	3		$\left(\frac{70}{100}\right)^3$	
	n		$\left(\frac{70}{100}\right)^n$	

Vzemimo, da je I_0 začetni svetlobni tok in I_n svetlobni tok, ki pride skozi n plošč debeline d:

$I_n = \left(\frac{70}{100}\right)^n \cdot I_0$

Če je x skupna debelina plošč iz pleksi stekla, je $x = n \cdot d$ in $I_n = \left(\frac{70}{100}\right)^{x/d} \cdot I_0 = a^x \cdot I_0$, pri čemer z a označimo $a = \left(\frac{70}{100}\right)^{1/d}$.

Dobili smo enačbo, v kateri je I gostota svetlobnega toka, ki ga prepušča plast debeline x, I_0 je začetna gostota svetlobnega tok in a faktor prepustnosti.

$$I(x) = I_0 \cdot a^x$$

IV. POMEN PARAMETROV (DRUGIČ)

Pri zelo dobrih meritvah lahko pomen parametrov odkrijemo še na en način. Narišemo graf I(d + 1) – I(d) v odvisnosti od I(d). Dobimo graf linearne funkcije. Izrazimo I(d + 1) z I(d) :

$$I(d+1) = r \cdot I(d) \Rightarrow I(1) = r \cdot I(0)$$
$$I(2) = r \cdot I(1) = r^2 \cdot I(0)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$I(d) = r^d \cdot I(0)$$

Ker natančne meritve težko izpeljemo, si lahko pomagamo s simulatorjem, ki ga najdemo na naslovu *http://illuminations.nctm.org/index_d.aspx?id=462*.

V. NALOGE, DELO V SKUPINAH

1. naloga:

Izmerili smo, da meter debela plast vode v jezeru prepušča 60 % vpadne svetlobe.

a. Koliko % svetlobe prepušča 3 m debela plast vode?

b. Koliko % svetlobe prepušča 3,7 m debela plast vode?

c. Kako globoko moramo, da bo svetlobni tok upadel na 10 % začetne vrednosti?

d. Kako globoko moramo, da bo svetlobni tok upadel na 1 % začetne vrednosti?

2. naloga:

Razmerje med izmerjeno osvetljenostjo v dani globini z osvetljenostjo na vodni površini I/I_0 (merimo v %) imenujemo relativna osvetlitev. Če se globina poveča za 1 dm, se relativna osvetljenost zmanjša za faktor 0,8.

a. Zapišite tabelo z vrednostmi za relativno osvetlitev v odstotkih za 1 dm, 2 dm ... 6 dm globine.

b. Narišite graf relativne osvetlitve v odvisnosti od globine. Pazite na oznake.

c. Določite globino, pri kateri je relativna osvetlitev 10 %.

3. naloga:

Na površini morja je intenziteta svetlobe 100 enot, 1 m pod gladino pa 32,5 enote.

a. Kakšna je intenziteta svetlobe pol metra pod globino?

b. Pri potapljanju potrebuje potapljač posebno opremo, če se intenziteta svetlobe spusti pod 0,2 enote. V kolikšni globini se to zgodi?

2.4.3 Modeliranje z logaritemsko funkcijo

2.4.3.1 Naravno čiščenje jezera

Alojz Grahor, Škofijska gimnazija Vipava

Osnovni podatki

Tema	Eksponentna funkcija
Enota	Modeliranje realističnih pojavov z eksponentno funkcijo
Predvideni čas izpeljave	dve šolski uri

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• razlikujejo, prepoznajo eksponentno odvisnost od drugih vrst odvisnosti;
• uporabljajo lastnosti eksponentne funkcije;
• po navodilih izpeljejo eksponentni model;
• znajo utemeljiti, zakaj je izbira eksponentne funkcije ustrezna.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• poznajo definicijo funkcije, znajo tabelirati funkcijo in poznajo predpise različnih funkcij (predvsem linearnih in eksponentnih) in analizirati njihove grafe;
• znajo uporabljati zvezo med eksponentno in logaritemsko funkcijo in pravila za računanje z logaritmi;
• znajo rešiti eksponentno enačbo in sistem dveh preprostih eksponentnih enačb;
• iz dveh točk na grafu funkcije $y = a \cdot b^x$ znajo izračunati konstanti a in b;
• znajo praktično računati potence in logaritme z žepnim računalom.</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki/ rezultati</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje modelirajo z eksponentno funkcijo brez uporabe tehnologije.</td></tr>
</table>

Potek učnega procesa	1. Predstavitev problema: frontalno. 2. Reševanje naloge: dijaki dobijo učne liste, rešujejo v dvojicah, sodelujejo, lahko vprašajo učitelja. 3. Pregled rešitev, diskusija (frontalno).
Priporočeni način izpeljave	• V razredu, pri učni uri, v dvojicah. • Dodatno: možnost demonstracije z računalnikom (na koncu učne ure).
Gradivo na zgoščenki	UL _Jezero.docx RUL _Jezero.docx
Viri	*Helena Kapus: Onesnaženost jezera (primer matematičnega modeliranja z uporabo IKT v priročniku)*

Problemska situacija

Naravno čiščenje jezera (matematično modeliranje brez uporabe IKT)

Zaradi izpustov strupenih snovi iz tovarne v jezero je to postalo zelo onesnaženo. Po zaprtju tovarne se je naravno čistilo. Jezero je del verige jezer, povezanih z reko. Vsak mesec določen odstotek vode v jezeru odteče in se zamenja s čisto vodo iz zgornjih jezer in od dežja (predpostavimo, da dež ni onesnažen). Jezero se tako postopoma naravno čisti. Dosedanje meritve so zbrane v tabeli.

Čas x [mesec]	**Onesnaženost y [ppm[9]]**	***log y***
1	20	
5	13,1	
10	7,5	
15	4,6	
20	2,7	

1. Narišite graf onesnaženosti v odvisnosti od časa.
2. Narišite graf funkcije, ki se smiselno prilagaja danim podatkom (ni nujno, da gre skozi vse točke) in ki ustreza opisanemu problemu (izbirajte med grafom linearne, potenčne, eksponentne ali logaritemske funkcije). Katere (ena ali več) izmed naštetih funkcij po vaši presoji ustrezajo opisanemu problemu? Utemelji.

   Izbrali ste eno ali več funkcij. Kako se odločimo med več funkcijami (med več modeli) oziroma kako utemeljimo ali zavržemo izbiro? Rešite naslednje tri naloge.
3. V tabeli izpolnite tretji stolpec (zaokrožite na eno decimalno mesto).
4. Narišite graf: $x \Rightarrow log\ y$ in narišite funkcijo, ki se najbolj prilega narisanim točkam. Smiselno jo podaljšajte do presečišč s koordinatnima osema.
5. Računsko dokažite, da iz $y = a \cdot b^x$ sledi $log\ y = log\ a + x\ log\ b$.
6. Pojasnite enakost, ki ste jo dokazali pod točko 5., in jo povežite z drugim grafom. Kakšna je zveza med spremenljivkama x in $log\ y$ (linearna, eksponentna, logaritemska, potenčna)?

   Se ta ugotovitev ujema z obliko krivulje v drugem koordinatnem sistemu? Utemeljite!

   Ali je bila vaša predpostavka pod točko 2. pravilna? Ob morebitni napaki jo popravite.

   Ali graf prve funkcije seka ordinatno os?

   Ali graf prve funkcije seka abscisno os?
7. Predpostavite, da je graf prilagoditvene funkcije eksponentna funkcija $y = a \cdot b^x$. Na osnovi zbranih podatkov v tabeli izračunajte konstanti a in b (na dve decimalni mesti natančno) ter zapišite iskano funkcijo.

[9] *Število onesnaženih delcev na milijon delcev vode*

8. S pomočjo dobljenega predpisa prilagoditvene funkcije izračunajte (na eno decimalno mesto natančno):

   a) onesnaženost po osmih mesecih,

   b) onesnaženost po 30 mesecih,

   c) onesnaženost po 5 letih,

   d) začetno onesnaženost (ob času t = 0),

   e) čez koliko časa bo onesnaženost manjša od 0.5 ppm? To je onesnaženost, ki dovoljuje kopanje v jezeru,

   f) v kolikšnem času se onesnaženost zmanjša za polovico.

9. Konstanti a in b boste še enkrat določili z grafom druge funkcije.

   a) Odčitajte začetno vrednost iz druge funkcije in z uporabo točke 5. izračunajte konstanto a. Primerjajte dobljeno vrednost s tisto, ki ste jo dobili pod točko 7.

   b) Iz drugega grafa izračunajte smerni koeficient premice. Uporabite točko 5 in izračunajte vrednost konstante b.

      Primerjajte dobljeno vrednost s tisto, ki ste jo dobili pod točko 7.

Opomba za ljubitelje matematike:

V točki 5 ste dokazali trditev: Če sta spremenljivki x in y povezani eksponentno $y = a \cdot b^x$, sta x in $\log y$ povezani linearno.

Iz tega pa seveda ne moremo sklepati: Če je graf $x \Rightarrow \log y$ premica, je funkcija $x \Rightarrow y$ eksponentna funkcija. Zapišite ustrezno trditev in jo dokažite.

10. Je ta vaja preprosta ali zahtevna? Zakaj? Kaj je preprosto, kaj zahtevno? Napišite mnenje.

    Se vam je zdela vaja zanimiva? Napišite, zakaj?

2.4.4 Modeliranje z logistično funkcijo

2.4.4.1 Primeri naravnih rasti (razmnoževanje bakterij, rast fižola, rast malčka Jureta)

Simona Pustavrh, ŠC Novo mesto, Darka Hvastja, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

Osnovni podatki

Tema	Eksponentna funkcija
Enota	Modeliranje realističnih pojavov z eksponentno funkcijo
Predvideni čas izpeljave	dve šolski uri

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

Učni cilji (splošni, procesni in vsebinski)	Dijaki/dijakinje: • uporabljajo matematiko v vsakdanjem življenju; • prepoznajo vprašanja, na katera matematika lahko ponudi odgovor; • spoznavajo in uporabljajo različne IKT-tehnologije kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov; • izražajo se ustno, pisno in v drugih izraznih oblikah; • prepoznajo problem naravne rasti; • podatke predstavijo v koordinatnem sistemu; • za modeliranje naravne rasti izberejo ustrezno funkcijo (eksponentno ali logistično funkcijo).	
Kompetence	**K1 – sporazumevanje v slovenščini**	K5 – učenje učenja
	K2 – sporazumevanje v tujih jezikih	K6 – socialne in državljanske kompetence
	K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji	K7 – samoiniciativnost in podjetnost
	K4 – digitalna pismenost	K8 – kulturna zavest in izražanje
Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje: • poznajo modeliranje s funkcijami (linearna, kvadratna, eksponentna, logaritemska); • znajo rešiti eksponentno in logaritemsko enačbo. • znajo uporabljati program Graph.	
Pričakovani dosežki/ rezultati	Dijaki/dijakinje: • kritično ovrednotijo rezultate.	

Potek učnega procesa	1. Razlaga logistične funkcije (le pomen, lastnosti, brez izpeljave z diferencialno enačbo). 2. Učitelj z dijaki reši prvo nalogo z učnega lista, kjer pokaže razliko med eksponentno in logistično krivuljo. 3. Dijaki samostojno rešijo preostale naloge z učnega lista, če je na voljo računalniška učilnica, sicer učitelj pokaže rešitev z računalnikom.
Gradivo na zgoščenki	UL_Modeliranje_naravne_rasti.doc RUL_Modeliranje_naravne_rasti.doc
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Program Graph ali TX82
Viri	*1 Edwards D., Hamson, M. (1996). Mathematical Modelling Skills. Macmillan Pres.* *2 Križanič, F. (1985). Matematika 4. Ljubljana: Državna založba Slovenije.* *3 Peitgen, H. O., Richter, P. H. (1986).The Beauty of Fractals. Springer-Verlag.* *4 http://www.statcan.gc.ca/edu/edu05_0018c-eng.htm#link05 (10. 10. 2009)* *5 http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/LogisticEquationMod.html (10. 10. 2009)*

Logistična krivulja

Okrog leta 1800 je angleški ekonomist Malthus objavil tedaj zelo sporni zakon o naraščanju prebivalstva. To, kar zdaj imenujemo Malthusov zakon, pravi, da je hitrost naraščanja premo sorazmerna s številom prebivalstva. Če z x označimo trenutno velikost populacije, je

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Rešitev te diferencialne enačbe $x = x_0e^{kt}$, kjer je x_0 začetno število prebivalcev, nam pove, da x narašča kot eksponentna funkcija. V šoli dijakom pri pouku povemo, da z eksponentno funkcijo opisujemo naravno rast (dokler je neomejena), s tem tudi utemeljimo smiselnost omenjanja števila e že v drugem letniku.

Seveda pa v naravi stvari ne morejo neomejeno naraščati. Ko npr. zmanjka prostora ali hrane, se rast ustavi. Tako rast opišemo z logističnim modelom, ki ni idealen, je pa boljši približek kot Malthusov zakon.

1. Zvezen logistični model

Poglejmo, kako se širi novica. Ko vedo zanjo vsi ljudje, se ne širi več. Lahko sklepamo tako:

Vseh ljudi naj bo N, v nekem trenutku pa novico pozna x ljudi. Novica se širi ob medsebojnih stikih x ljudi, ki zanjo vedo, z $(N - x)$ ljudmi, ki zanjo še niso slišali. Takih stikov pa je $x(N-x)$. Torej je hitrost širjenja

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x) = kNx - kx^2$$

Sorazmernostni faktor k je gotovo odvisen tudi od tega, kako aktualna je novica.

Pri majhnih x je člen z x^2 zanemarljiv, zato je rast pri majhnih x res eksponentna, kot to pravi Malthus.

Rešimo zgornjo diferencialno enačbo:

$$\int \frac{dx}{x(N - x)} = \int k dt$$

Ulomek $\frac{1}{x(N - x)}$ razbijemo na parcialna ulomka in dobimo

$$\int \left(\frac{\frac{1}{N}}{x} - \frac{\frac{1}{N}}{N - x} \right) dx = \frac{1}{N}(ln \mid x \mid - ln \mid N - x \mid) + C$$

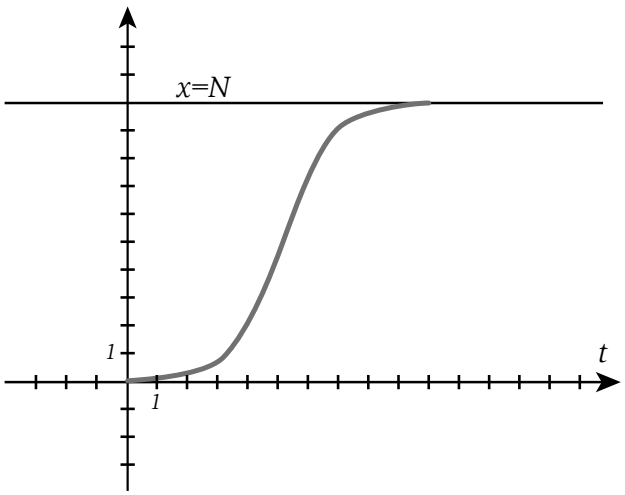
Iz česar dobimo:

$$ln \frac{x}{N - x} = Nkt + C'$$

$$\frac{x}{N - x} = Ce^{Nkt} \Longrightarrow x = \frac{N}{1 + Ce^{-kNt}}$$

Če je ob času $t = 0$ začetna vrednost $x = x_0$, potem je konstanta $C = \frac{x_0}{N - x_0}$.

Ko gre $t \to \infty$, gre $x \to N$, zato je premica $x = N$ je vodoravna asimptota krivulje. V začetku pa je rast eksponentna.



Slika 1: Logistična krivulja

Krivulja ima prevoj v točki $\left(\frac{ln\frac{x_0}{N-x_0}}{kN}, \frac{N}{2}\right)$.

Takrat je rast najhitrejša. To lahko izkoristimo tudi v ribogojnicah. Če skrbimo za to, da vzdržujemo populacijo rib na polovici maksimalne, naj bi bilo razmnoževanje najhitrejše.

Kako učinkovito uničimo miši v naši okolici? Z mišelovkami sicer zmanjšamo populacijo, povečamo pa razmnoževanje. Za učinkovito uničevanje moramo zmanjšati kapaciteto *N*, npr. s tem, da miši ne dobijo hrane.

2. Diskreten logistični model

$x_{n+1} = x_n(1+r) - rx_n^2$

Zaporedje x_0, x_1, x_2, … raste, dokler ne doseže vrednosti 1.

Če je koeficient $r > 2$, postane stabilno stanje pri $x = 1$ nestabilno, začne oscilirati ter preide v svet kaosa in fraktalov.

Opomba: Pri uporabi tehnologije v programu Geogebra uporabljamo ukaz *LogističnaKrivulja*. V programu Graph med ponujenimi trendnimi črtami ni logistične krivulje, zato oblikujemo lastno takole:

- Izberemo ukaz *Vstavi trendno črto* in nato *Lastno*.
- Pod vzorec napišemo npr. *$a/(1+$b*exp($c*x))* in izberemo *Dodaj vzorec*.
- Pod ime napišemo npr. Logistična in izberemo *V redu*.
- Pri označeni lastni funkciji izberemo *V redu*, dobimo iskani graf in funkcijski predpis.

Problemske situacije

Razmnoževanje bakterij

Opravili smo raziskavo, v kateri smo opazovali razmnoževanje bakterij, ki se vsake štiri ure podvojijo. Na bakterijsko gojišče smo nanesli 10 bakterijskih celic. Predvidevamo, da je njihova življenjska doba daljša od časa našega poskusa.

1. Izračunaj število bakterij po 4, 8, 12, 16 in 20 urah ter izpolni tabelo. Rezultate predstavi v koordinatnem sistemu.

Čas (ure)	**0**	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**
Število bakterij						

2. Predpostavimo, da imajo bakterije na voljo dovolj hrane in prostora za neomejeno razmnoževanje. Katera krivulja bi se podatkom najbolje prilegala? Z uporabo računalniškega programa vriši krivuljo in odčitaj enačbo.

3. Predpostavimo, da se število bakterij podvoji vsake štiri ure, dokler je na voljo dovolj hrane in prostora. Ko zmanjka hrane in prostora, se razmnoževanje najprej upočasni in nato preneha. Hrane in prostora je dovolj za 1000 bakterij. Katera krivulja bi se podatkom najbolje prilegala? Z uporabo računalniškega programa jo vriši v isti koordinatni sistem kot v točki b) in določi njeno enačbo. Kateri model je realnejši?

4. Približno koliko bakterij lahko pričakujemo po 25 urah po modelu iz naloge b) in koliko po modelu iz naloge c)?

5. Čez koliko časa lahko pričakujemo 900 bakterij po modelu iz naloge b) in čez koliko časa po modelu iz naloge c)?

6. S pomočjo slike določi približen čas, ko se bo po modelu c) razmnoževanje prenehalo.

Rast fižola

Dijaki drugega letnika so pri biologiji zasadili 5 zrn nizkega fižola iste sorte, ki zraste do višine 50 cm. Opazovali so kaljenje zrn in nato rast fižola. Od petih zrn so vzklila štiri zrna. Fižol so zalivali vsaka dva dni in vsak dan sproti merili, kako visoko je zrasel. Njihovi rezultati v cm so:

Datum	**1. fižol (cm)**	**2. fižol (cm)**	**3. fižol (cm)**	**4. fižol (cm)**
5.4.2009	0,5	0	0	0
6.4.2009	3,5	0	0	0
7.4.2009	7	1	1	0
8.4.2009	8,4	3	2	0
9.4.2009	8,9	5	3	0,5
10.4.2009	9	5,5	4,5	1
11.4.2009	10	6,6	6,2	2
12.4.2009	11	7	7,5	3

13.4.2009	11,5	7	8,2	4
14.4.2009	13	7,9	11	5
15.4.2009	14	9,5	11,5	6
16.4.2009	15	10	13,5	6,8
17.4.2009	16	11	15	8
18.4.2009	17,5	12,5	18	9
19.4.2009	19	14	20	9,3
20.4.2009	20	16	23	11
21.4.2009	24	17	26,5	12,5
22.4.2009	26	18	28	13
23.4.2009	27	20	29,5	13,5
24.4.2009	30	23,5	31	15
25.4.2009	32	24	34	17
26.4.2009	33	26	38	18
27.4.2009	35	27	41	19,5
28.4.2009	35,5	30	43	20
29.4.2009	36	32	44	21
30.4.2009	37	34	45	23
1.5.2009	38	35,5	46	26

1. Podatke o višini prvega fižola ponazori v koordinatnem sistemu z uporabo ustreznega računalniškega programa (ker je datum vrstna spremenljivka, je potrebna primerna izbira neodvisne spremenljivke-časa). Katera krivulja bi se dobro prilegala podatkom? Z ustreznim računalniškim programom vriši krivuljo in poišči njeno enačbo.
2. Z uporabo enačbe krivulje izračunaj, približno kako visok bo fižol po 40 dneh. Rezultat preberi tudi na sliki.
3. Čez približno koliko časa bo fižol zrasel do končne višine?
4. V isti koordinatni sistem vriši še podatke o višinah preostalih treh fižolov. Za vsak fižol vriši ustrezno krivuljo, ki se podatkom najbolj prilega, in določi njeno enačbo. Primerjaj rezultate vseh štirih fižolov.

Rast malčka Jureta

Malček Jure je danes star štiri leta. Njegovi skrbni starši so od njegovega rojstva naprej zapisovali njegovo višino. Podatki so zbrani v tabeli:

Starost (v letih)	**Višina (v cm)**
0	50
0,25	61
0,5	67
0,75	73
1,5	84
2	89
2,5	96
3,5	104
4	109

1. Podatke iz tabele predstavi z ustreznim računalniškim programom v koordinatnem sistemu. Katera krivulja bi se dobro prilegala podatkom? S pomočjo programa vriši krivuljo in poišči njeno enačbo, če glede na višini njegovih staršev lahko pričakujemo, da bo zrasel do višine 185 cm.
2. Iz enačbe krivulje izračunaj, približno kako visok bo Jure pri 10 letih. Rezultat preberi tudi na sliki. Oceni realnost dobljenega rezultata.
3. Čez približno koliko časa bo Jure visok 150 cm? Ali je rezultat realen?
4. Po približno kolikšnem času bo Jure zrastel do končne višine. Ali je omenjeni model realen za napovedovanje, kdaj bo Jure zrasel do končne višine?

2.4.5 Modeliranje s sinusno funkcijo

2.4.5.1 Temperatura zraka v Novem mestu

Simona Pustavrh, Šolski center Novo mesto

Osnovni podatki

Tema	Kotne funkcije
Enota	Graf funkcije sinus
Predvideni čas izpeljave	ena do dve šolski uri

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

Učni cilji (splošni, procesni in vsebinski)	Dijaki/dijakinje: • prepoznajo vprašanja, na katera matematika lahko ponudi odgovor; • spoznavajo in uporabljajo različne IKT-tehnologije kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov; • presodijo, kdaj je smiselno uporabiti določeno IKT-tehnologijo in razvijajo kritični odnos do informacij na spletu; • uporabljajo različne vire (poiščejo podatke na internetu); • poiščejo podatke na spletu; • modelirajo podatke z ustrezno funkcijo (sinus); • brez uporabe IKT iz podatkov določijo enačbo funkcije sinus; • v programu Graph vstavijo prilagoditveno krivuljo (IKT); • napovedo vrednosti temperature v prihodnosti in se kritično opredelijo do rezultata (razvijanje kritičnega mišljenja); • ozaveščanje o okolju in ekologiji – kaj vpliva na temperaturo; • evalvirajo svoje delo.	
Kompetence	**K1 – sporazumevanje v slovenščini**	**K5 – učenje učenja**
	K2 – sporazumevanje v tujih jezikih	K6 – socialne in državljanske kompetence
	K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji	K7 – samoiniciativnost in podjetnost
	K4 – digitalna pismenost	K8 – kulturna zavest in izražanje

Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje: • poznajo lastnosti funkcije sinus, • znajo narisati graf funkcije sinus, • iz danega grafa funkcije sinus znajo določiti konstante (amplituda, perioda, premik funkcije v smeri abscisne in ordinatne osi), • znajo uporabiti internet kot vir podatkov, • znajo uporabljati programa Graph in Excel.
Pričakovani dosežki/ rezultati	Dijaki/dijakinje znajo modelirati.
Potek učnega procesa	1. Uvod, ponovitev lastnosti funkcije sinus. 2. Iskanje podatkov na spletni strani SURS. 3. Reševanje naloge brez uporabe IKT. 4. Reševanje naloge z uporabo IKT. 5. Diskusija rešitve in evalvacija dela. **Priporočen način izpeljave** I. Dijaki nalogo rešujejo samostojno v računalniški učilnici tako, da podatke sami poiščejo na spletu. II. Dijaki nalogo rešujejo samostojno v računalniški učilnici tako, da podatke dobijo v Excelovi datoteki. Učni list ustrezno spremenimo. III. Dijaki in učitelj rešujejo nalogo skupaj pri pouku. Učitelj poda potrebne podatke na učnem listu, dijaki najprej samostojno rešijo nalogo brez uporabe IKT, nato učitelj ob sodelovanju dijakov reši nalogo z uporabo IKT. Učni list ustrezno spremenimo.
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Programa Excel in Graph
Gradivo na zgoščenki	UL_Temperatura_NM.doc RUL_Temperatura_NM.doc Temperatura_NM.grf Temperatura_NM.xls UL_Domaca_naloga_TEMPERATURA_NM.doc RUL_Domaca_naloga_TEMPERATURA_NM.doc
Viri	*http://www.stat.si/pxweb/Database/Okolje/Okolje.asp (10.3 .2009)*

Refleksija

Učni snovi sem namenila dve šolski uri v računalniški učilnici. Na to smo se eno uro prej pripravili tako, da sem s programom Graph narisala in projicirala na tablo graf funkcije sinus z vsemi premiki in raztegi ter jim dala nalogo, naj zapišejo enačbo narisane krivulje. Na moje veliko presenečenje boljši dijaki s tem niso imeli posebnih težav. Sami so predlagali pot do rešitve. Slabšim smo nato skupaj razložili postopek določanja konstant krivulje.

V računalniški učilnici so dijaki delali v parih, ker je bilo v učilnici le 16 računalnikov. Po navodilih so samostojno reševali učni list, pri tem so uporabljali internet, da so dobili podatke, in program Graph (programa so navajeni, ker ga uporabljamo že od prvega letnika). Sem ter tja so potrebovali mojo pomoč, večino dela pa so opravili samostojno.

Po teh dveh urah so imeli teden dni časa, da so lepo in pravilno izpolnili učni list, ki so ga izpolnjevali med urama, in učni list z domačo nalogo. Ker so na spletnih straneh SURS objavljene povprečne mesečne temperature za približno 18 krajev, sta po dva dijaka dobila en kraj (na učnem listu za domačo nalogo v tem gradivu je primer za Portorož). Dijaki so domačo nalogo opravili dobro in vsi oddali učna lista.

Oddane učne liste sem pregledala in le opisno ocenila (odlično, zelo dobro ...) ter dodala komentarje, kaj bi lahko bilo bolje, označila napake, pohvalila posebne komentarje ...

Dijakom sem zastavila tudi nekaj vprašanj za evalvacijo dela. Z učnima urama in domačo nalogo so bili zelo zadovoljni. Posebno jih je veselilo, da so znanja, ki so jih pridobili pri matematiki, uporabili v realni situaciji, da so uporabili dejanske podatke s spleta, da so reševali nalogo z uporabo programa Graph ... Nekateri so ugotovili, da niso dobro ocenili konstant krivulje, in zato dobili slabše napovedi povprečnih mesečnih temperatur za prihodnje mesece.

Tudi sama sem bila z delom zelo zadovoljna. Kot slabost bi omenila le, da je bilo v računalniški učilnici 32 dijakov hkrati, kar je preveč. Delo v parih je bilo zelo intenzivno, zato je bilo v razredu nekoliko hrupno, česar nisem navajena. Dijaki tega zaradi zavzetosti z delom niti niso opazili.

Problemska situacija

Povprečna mesečna temperatura zraka v Novem mestu

Poletje! Letni čas, ki se ga vsi veselimo. Počitnice, morje, vročina so prve asociacije na poletje. Nato nastopi jesen, z njo šola in nekoliko nižje temperature ozračja. Nekateri pa se zelo veselijo zime. Komaj čakajo na smučanje, pri tem pa jih mraz prav nič ne moti. Tudi pomlad je prijetna: narava se prebuja, temperatura zraka se počasi zvišuje in napoveduje poletje, ko gremo spet na morje …

Iz izkušenj vemo, da se poletje, jesen, zima in pomlad ponavljajo, z njimi pa tudi različni dogodki in temperatura zraka.

Ugotavljali bomo, kako se spreminja povprečna mesečna temperatura med letom

1. naloga

Kako imenujemo lastnost dogodkov, da se ponavljajo v določenih obdobjih?

V preglednico zapiši svojo oceno povprečne temperature zraka v Novem mestu za posamezni mesec.

Mesec	**jan**	**feb**	**mar**	**apr**	**maj**	**jun**	**jul**	**avg**	**sep**	**okt**	**nov**	**dec**
Povp. temp. (°C)												

2. naloga

Na spletni strani Statističnega urada Republike Slovenije (SURS) poišči podatke o povprečnih mesečnih temperaturah zraka v Novem mestu za obdobje od januarja 2005 do marca 2006, shrani in uredi jih v Excelovi datoteki, nato pa izpolni preglednico.

Zap. št.	**Leto**	**Mesec**	**Povprečna mesečna temperatura v NM**
1	2005	jan	
2	2005	feb	
3	2005	mar	
4	2005	apr	
5	2005	maj	
6	2005	jun	
7	2005	jul	
8	2005	avg	
9	2005	sep	
10	2005	okt	
11	2005	nov	
12	2005	dec	
13	2006	jan	
14	2006	feb	
15	2006	mar	

Vir: SURS

3. naloga

Primerjaj svoje približne ocene iz 1. naloge s podatki, ki si jih dobil na spletni strani SURS. Kako dobro si ocenil povprečne mesečne temperature zraka v Novem mestu?

4. naloga

1. Podatke prikaži grafično v koordinatnem sistemu. Poimenuj koordinatni osi.
2. Razmisli, katera krivulja se najbolje prilega podatkom?
3. Nariši krivuljo, ki se najbolje prilega podatkom.
4. * Izračunaj enačbo krivulje.
5. Iz enačbe krivulje izračunaj povprečne mesečne temperature zraka v Novem mestu maja 2006 in decembra 2007. Rezultata primerjaj s podatkoma, ki ju za ti obdobji najdeš na spletni strani SURS. Kaj ugotoviš? Zapiši ugotovitev.

5. naloga

Podatke o povprečni mesečni temperaturi zraka v Novem mestu prenesi iz Excela v program Graph in jih nariši kot zaporedje točk. S pomočjo programa vstavi krivuljo, ki se podatkom najbolje prilega. Če je ni med ponujenimi, izberi krivuljo pod lastnimi. Kako dobro se krivulja prilega podatkom?

Zapiši enačbo dobljene krivulje. Primerjaj rezultat z enačbo krivulje, ki si jo sam izračunal. Kaj ugotoviš?

6. naloga

S spletne strani SURS shrani v Excel še podatke od aprila 2006 do decembra 2007. Podatke nato prenesi v isto datoteko v Graphu in jih nariši kot zaporedje točk z drugo barvo. Primerjaj, kako se krivulja prilega tem podatkom. Kaj ugotoviš?

7. naloga

Ali bi bilo smiselno uporabiti dobljeni model za napoved povprečne mesečne temperature zraka v Novem mestu marca 2100? Odgovor razloži.

Glede na rezultate oceni smiselnost modeliranja s sinusno funkcijo.

8. naloga

Naštej primere iz življenja ali stroke, ki bi jih lahko modeliral s katero od kotnih funkcij.

9. naloga (EVALVACIJA DELA, vprašanja za dijake)

1. Česa sem se naučil/-a?
2. Kje sem bil/-a najbolj uspešen/-a?
3. Ni mi uspelo narediti ...
4. Vzroki za težave ...
5. Kaj moram izboljšati?
6. Tudi v prihodnje želim delati v individualno z učnim listom, ker ...

2.4.5.2 Vreme

Jasna Kos, Gimnazija Bežigrad

Osnovni podatki

Tema	Kotne funkcije
Enota	Grafi kotnih funkcij
Predvideni čas izpeljave	dve šolski uri

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

Učni cilji (splošni, procesni in vsebinski)	Dijaki/dijakinje: • poiščejo matematični model za avtentični primer; • uporabijo ustrezno prilagoditveno krivuljo; • interpretirajo in kritično presojajo rezultate.	
Kompetence	**K1 – sporazumevanje v slovenščini**	K5 – učenje učenja
	K2 – sporazumevanje v tujih jezikih	K6 – socialne in državljanske kompetence
	K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji	K7 – samoiniciativnost in podjetnost
	K4 – digitalna pismenost	K8 – kulturna zavest in izražanje
Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje: • poznajo funkcijo oblike $a \cdot \sin(bx + c) + d$ in pomen parametrov.	
Potek učnega procesa	1. Ponavljanje: pomen parametrov v funkciji oblike $a \cdot \sin(bx + c) + d$ 2. Reševanje naloge. 3. Kritična presoja rezultatov. 4. Navodila za nadaljevanje nerešenih vprašanj doma. 5. Razprava o rezultatih in o mogočem globalnem segrevanju ozračja. 6. Sklep.	
Priporočeni način izpeljave	• Ena šolska ura za izpeljavo dela (a) in (b). • Nadaljevanje doma, del (c). • Ena ura za pregledovanje naloge in komentarje rezultatov, timsko z učiteljem geografije. • Možnost demonstracije z računalnikom (uporaba emulatorja).	
Gradivo na zgoščenki	UL_Vreme.doc RUL_Vreme.doc Navodila_za_delo_z_graficnim_racunalom.doc Podatki_Kredarica_Maribor.xls	

Viri	*1*	*Statistični urad Republike Slovenije http://www.stat.si/preb_ura.asp (31. 1. 2010)*
	2	*http://www.stat.si/pxweb/Dialog/varval.asp?ma=0156101S&ti=Povpre E8ne+letne+in+mese E8ne+temperature+zraka+po+meteorolo 9Akih+postajah 2C+Slovenija&path=../Database/Okolje/01_ozemlje_podnebje/10_01561_podnebni_kazalniki/&lang=2*

Problemska situacija

Vreme

Kaj lahko sklepamo iz danih podatkov o povprečnih mesečnih temperaturah?

Na spletni strani Statističnega urada Slovenije najdemo podatke o povprečnih mesečnih temperaturah v °C:

KREDARICA

	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	avg	sep	okt	nov	dec
1981–1990	-7,7	-8,6	-6,7	-4,2	0,2	3,2	6,7	6,3	4,3	1,4	-3,8	-6,2
1991–2000	-6,1	-7,3	-6,2	-3,9	0,9	4,3	6,5	7,3	3,5	0,4	-4,1	-6,1
2001	-7,2	-7,8	-3,6	-4,7	2,6	3,3	6,9	8,6	0,4	4,7	-4,7	-10,8
2002	-5,4	-4,6	-3,6	-4,1	1,9	6,8	6,9	6,1	1,5	0,4	-2,8	-5,5
2003	-8,6	-11,2	-5	-4,9	3,4	8,9	7,9	10,2	3,2	-2,5	-1,6	-5,8
2004	-10,3	-7	-6,3	-3,7	-1,3	4,1	6,3	7	4	2,3	-4,1	-4,6
2005	-8,5	-13,1	-6,2	-3,3	1,8	4,9	7	4,7	3,6	2,7	-4,3	-9,8
2006	-8,8	-9,6	-7,6	-2,7	0,7	5,1	9,1	3,5	6,6	3,8	-1,1	-3,1
2007	-3,6	-5,5	-5,7	0,4	2,3	5,6	7,5	6,7	1,6	0	-5,7	-7,2
2008	-4,9	-5,1	-7,2	-4,3	1,7	5,7	6,5	7,5	1,6	1,9	-4	-7,2

MARIBOR

	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	avg	sep	okt	nov	dec
1981–1990	-0,9	0,5	5,4	10,3	15,2	17,7	20,3	19,5	15,9	10,8	3,9	1,2
1991–2000	0,4	2,3	6,2	10,9	15,7	19,1	20,8	20,7	15,8	10,4	5,1	0,5
2001	1,9	4	8,5	9,7	17,4	18,1	21,7	22	13,7	13,8	3,3	-2,2
2002	0,5	5,5	8,1	10	17,8	21,5	21,9	20,3	14,9	11,1	9	1,1
2003	-1,7	-2	6,9	10	18,5	23,5	22,7	24,4	15,3	8,6	7,4	1,3
2004	-0,6	2,3	4,5	10,9	13,9	18,4	20,5	20,8	15,5	12,3	5,4	1
2005	0,4	-1,6	4,4	11	16,2	19,6	20,7	18,1	16,1	11,1	4,2	0,9
2006	-3,2	0,1	4,5	11,6	15,2	19,7	23,4	17,8	17,3	12,9	7,4	2,6
2007	4,6	5,8	8	13,7	17,2	21,2	22,4	20,2	13,9	9,5	4,6	-0,5
2008	2,8	4,5	6,1	11	16,9	20,2	21,3	20,7	14,9	11,6	6,2	1,9

Naloga 1

a. Predstavite podatke, ki ustrezajo povprečnim mesečnim temperaturam na Kredarici v desetletnem obdobju 1981–1990.

b. Katera funkcija najbolje ustreza narisanim točkam?

c. Poiščite ustrezno prilagoditveno krivuljo in narišite graf funkcije.

d. Kako dobro se prilega danim podatkom?

e. V istem koordinatnem sistemu predstavite še podatke za povprečne mesečne temperature na Kredarici leta 2007.

f. Komentirate hipotezo o globalnem segrevanju ozračja pri danih podatkih?

Pred iskanjem prilagoditvene krivulje se z dijaki pogovorimo o pomenu in velikostih parametrov, ki nastopajo v enačbi krivulje $y = a \sin(bx + c) + d$.

Naloga 2

a. Predstavite podatke, ki ustrezajo povprečnim mesečnim temperaturam za Maribor leta 2006.

b. Poiščite ustrezno prilagoditveno krivuljo za dane podatke.

c. Ali lahko z dobljeno funkcijo uspešno napovemo povprečne mesečne temperature v Mariboru za leto 20xy?

d. Ali lahko funkcijo popravimo tako, da bo napovedovanje temperature zanesljivejše?

e. Predstavite podatke za leti 2005 in 2006 in nato poiščite ustrezno prilagoditveno krivuljo.

f. Kolikšna naj bi bila povprečna temperatura glede na to funkcijo julija 20xy?

g. Ali so tudi preostali pričakovani rezultati tako blizu realnim temperaturam? Zakaj?

Naloga 3

a. Z grafičnim računalom predstavite v isti koordinatni sistem podatke o povprečni mesečni temperaturi Maribora in Kredarice za obdobje 1991–2000. Narišite ustrezno prilagoditveno funkcijo za Kredarico.

b. Brez računala poskusite najti funkcijo, ki se najbolje prilega podatkom za Maribor.

c. Poiščite prilagoditveno funkcijo, ki se danim podatkom najbolj prilega.

d. Razišči, v čem se ujemata oz. razlikujeta funkcijska predpisa prilagoditvenih funkcij za oba kraja.

Navodila za delo z grafičnim računalom TI-84 so v datoteki: Navodila_za_delo_z_graficnim_racunalom.doc.

2.4.6 Modeliranje s kvadratno funkcijo

2.4.6.1 Uta psa Lorda

Irena Rauter Repija, Gimnazija Ljutomer

Osnovni podatki

Tema	Kvadratna funkcija Uporaba odvoda
Enota	Uvod v kvadratno funkcijo Reševanje ekstremalnih problemov
Predvideni čas izpeljave	ena do dve šolski uri

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• učijo se reševati probleme;
• spoznajo kvadratno funkcijo;
• učijo se uporabljati tehnologijo za iskanje rešitev;
• učijo se reševati ekstremalne probleme (4l ali 2l).</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• znajo poiskati zvezo med odvisno in neodvisno spremenljivko;
• znajo poiskati ekstrem funkcije (4l);
• poznajo osnove dela s programom, ki ga bodo uporabljali pri reševanju naloge.</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki/ rezultati</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje znajo modelirati.</td></tr>
<tr><td>Potek učnega procesa</td><td colspan="2">1. Predstavitev problema in postavitev vprašanj.
2. Samostojno reševanje na izbrani način (empirični, teoretični, uporaba različne tehnologije).
3. Predstavitev ugotovitev.
4. Primerjanje in vrednotenje rezultatov.</td></tr>
</table>

Priporočeni način izpeljave	Delo po skupinah organiziramo glede na izbrano raziskovalno vprašanje ali glede na uporabo tehnologije. **2. letnik:** I. Pri učni uri v razredu. Za iskanje rešitev lahko dijaki uporabijo grafična računala. II. V računalniški učilnici. Za iskanje rešitev lahko dijaki uporabijo enega od programov Graph ali GeoGebra, lahko uporabimo ta programa v kombinaciji z Excelom. V 2. letniku lahko nalogo uporabimo kot uvod v kvadratno funkcijo. **4. letnik:** Pri učni uri v razredu, če delamo na teoretični osnovi. V 4. letniku lahko nalogo uporabimo kot uvod v reševanje ekstremalnih problemov.
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Programi Graph ali Geogebra; Excel ali grafična računala
Gradivo na zgoščenki	UL_empiricno_graph.docx Uporaba_tehnologije_navodila.docx Uta_2_moznost.xls Uta_dinamicna_simulacija.ggb
Viri	1 *Odprtokodni program GeoGebra: www.geogebra.at* 2 *Odprtokodni program Graph: www.padowan.dk/graph/* 3 *Učbenik PLANUM, za 2. letnik gimnazije.*

Refleksija

Moje predvidevanje in pričakovanje

Uro sem izpeljala pri obravnavanju polinomov v tretjem letniku. Pričakovala sem, da bodo dijaki nalogo hitro rešili brez uporabe računala, saj imajo v tretjem letniku že vse potrebno znanje za to. Glavni cilj v tretjem letniku ni bil rešiti nalogo, ampak se naučiti pristopa k reševanju takšnih nalog in kako uporabljati grafično računalo pri iskanju rešitev.

Vtisi in opažanje po učni uri

Ali je učna ura potekala, kot smo jo načrtovali?

Vsi dijaki so nalogo rešili. Ker je bilo podatkov, ki so jih morali vnesti, malo, tudi z uporabo grafičnih računal niso imeli težav.

Ali so dijaki usvojili predvidene učne cilje?

Mislim, da so bili vsi cilji, ki sem si jih zadala za to učno uro, doseženi. Dijaki so ponovili pojem ekstrema kvadratne funkcije (polinoma 2. stopnje). Videli so, kako

lahko z uporabo računala poiščejo ekstrem in da z računalom lahko poiščejo ekstreme nekaterih drugih funkcij, čeprav še ne poznajo pojma odvoda.

Kolikšen del učne ure ste uporabili za odkrivanje lastnosti, zakonitosti …

Za odkrivanje lastnosti in reševanje brez računal smo porabili 15 minut, za delo in učenje z grafičnim računalom pa 30. Dijaki nimajo svojih grafičnih računal in so se pri reševanju te naloge z njimi srečali prvič.

Bi pri ponovitvi ure kaj spremenili?

Pri iskanju ekstrema bi namesto grafičnih računal raje uporabila enega izmed odprtokodnih programov Graph ali GeoGebra.

Problemska situacija

Uta psa Lorda

Ob hiši bi radi ogradili del površine (pesjak) pravokotne oblike, po kateri bi se gibal psiček Lord. Na voljo imamo 10 m žične ograje. Pesjak mora vsebovati tudi pasjo uto (1 m x 1 m). Razišči velikost površine (pesjaka), po kateri se bo gibal naš ljubljenec, kadar ne bo počival v uti.

Postavitev vprašanj pred reševanjem

1. Kje postaviti uto?
2. Ali bomo del žične ograje namenili za vratca v pesjak?
3. Kolikšni sta lahko širina in dolžina pesjaka?
4. Kako se spreminja dolžina pesjaka, kadar spreminjamo širino?
5. Kako se spreminja površina pesjaka, kadar spreminjamo širino?
6. Kdaj bo površina pesjaka največja?
7. Kdaj bo pesjak kvadratne oblike?
8. ...

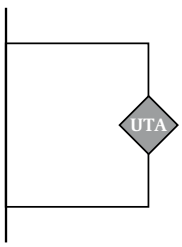
Primerjamo rešitve in načine reševanja.

Vprašanja po končanem reševanju

1. Ali je problem realen?
2. Kaj smo pri reševanju privzeli?
3. Česa pri reševanju nismo upoštevali?
4. Ali je za gibanje psa primernejši pesjak kvadratne ali pravokotne oblike?

Vprašanje za razširitev problema

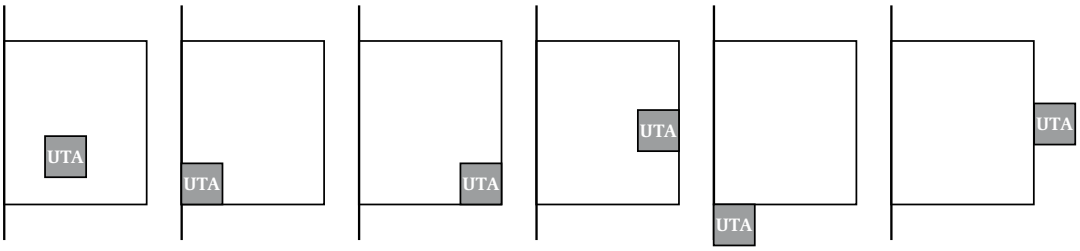
1. Ali je mogoča še kakšna postavitev ute, s katero dobimo drugačen rezultat?



Reševanje

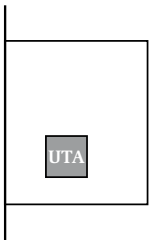
Za postavitev ute imamo več možnosti. Lahko leži vsa v pesjaku ali pa je žična ograja pripeta v njen vogal. Dogovorimo se, da bodo tudi vratca iz žične ograje, ki je na voljo, in da je stena hiše dovolj dolga, da žična ograja v nobenem primeru ne sega čez njen rob.

Spodaj je narisanih nekaj možnosti.



Pogledali si bomo štiri različne možnosti.

1. možnost – uta leži znotraj žične ograje in se je ne dotika.



Kolikšni sta lahko širina in dolžina pesjaka?

Označimo: širina: x, dolžina: d, površina: P.

Če upoštevamo velikost ute, je lahko najmanjša širina pesjaka 1 m, največja pa 4,5 m, če se uta dotika hiše. V prvem primeru je dolžina pesjaka 8 m, v drugem pa 1 m.

Dolžino pesjaka povežemo z njegovo širino:

$x + x + d = 10 \Longrightarrow d = 10 - 2x, 1 \leq x < 5$

Kako je površina odvisna od širine pesjaka x?

$P(x) = x \cdot (10 - 2x) - 1 = -2x^2 + 10x - 1$

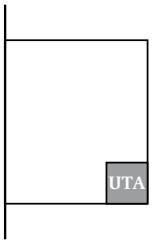
Kdaj bo površina največja? Poiščemo ekstrem.

$P'(x) = -4x + 10,\ P'(x) = 0,\ -4x + 10 = 0,\ x = 2{,}5,\ P(2{,}5) = 11{,}5$

Odgovor: Površina, po kateri se lahko giblje pes Lord, bo največja (11,5 m^2), ko bo pesjak širok 2,5 m.

Opomba: Namesto uporabe odvoda lahko ekstrem izračunamo tako, da poiščemo teme kvadratne funkcije.

2. možnost – žična ograja je pripeta v enem ali dveh sosednjih vogalih ute, znotraj ograje.



Kolikšni sta lahko širina in dolžina pesjaka?

Če upoštevamo velikost ute, bo najmanjša širina pesjaka 1 m, največja pa 5 m, če se uta dotika hiše. V prvem primeru je dolžina pesjaka 9 m, v drugem pa 1 m.

Kako je dolžina pesjaka odvisna od njegove širine?

$x + x - 1 + d = 10 \Longrightarrow d = 11 - 2x;\ 0 \leq x < 5{,}5$

Kako je površina odvisna od širine pesjaka?

$p(x) = x \cdot (11 - 2x) - 1 = -2x^2 + 11x - 1$

Kdaj bo površina največja?

$P'(x) = -4x + 11,\ P'(x) = 0,\ -4x + 11 = 0,\ x = 2{,}75,\ P(2{,}75) = 14{,}125$

Odgovor: Površina, po kateri se lahko giblje pes Lord, bo največja (14,125 m^2), ko bo pesjak širok 2,75 m.

3. možnost – žična ograja je pripeta v dveh nasprotnih vogalih ute znotraj ograje.

Kakšni sta lahko širina in dolžina pesjaka?

V tem primeru se uta dotika hiše in v enem vogalu ne moremo pripeti ograje. Dolžina pesjaka bo takrat 9 m. Največja širina bo 5,5 m pri dolžini 1 m.

Kako je dolžina pesjaka odvisna od njegove širine?

$x + x - 1 + d - 1 = 10 \Longrightarrow d = 12 - 2x,\ 0 \leq x < 6$

Kako je površina odvisna od širine pesjaka?

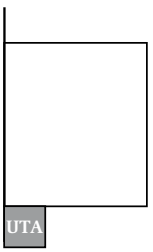
$P(x) = x \cdot (12 - 2x) - 1 = -2x^2 + 12x - 1$

Kdaj bo površina največja? Z uporabo odvoda poiščemo ekstrem.

$P'(x) = -4x + 12,\ P'(x) = 0,\ -4x + 12 = 0,\ x = 3,\ P(3) = 17$

Odgovor: Površina, po kateri se lahko giblje pes Lord, bo največja (17 m^2), ko bo pesjak širok 3 m.

4. možnost – uta leži zunaj žične ograje, ki je pripeta v enem vogalu ute.



Če upoštevamo velikost ute, bo najmanjša širina pesjaka 1 m, največja pa 5,5 m, vendar bi bila potem površina pesjaka nič in morali bi se vprašati o smiselnosti postavitve pesjaka takšne velikosti. V prvem primeru je dolžina pesjaka 9 m, v drugem pa 0 m.

Kako je dolžina pesjaka odvisna od njegove širine?

$x + x - 1 + d = 11 \Longrightarrow d = 11 - 2x$

Kako je površina odvisna od širine pesjaka?

$P(x) = x \cdot (11 - 2x) = -2x^2 + 11x$

Kdaj bo površina največja? Z uporabo odvoda poiščemo ekstrem.

$P'(x) = -4x + 11,\ P'(x) = 0,\ -4x + 11 = 0,\ x = 2{,}75,\ P(2{,}75) = 15{,}125$

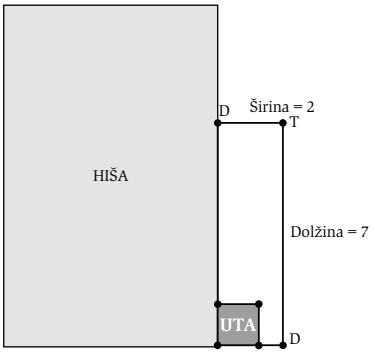
Odgovor: Površina, po kateri se lahko giblje pes Lord, bo največja (15,125 m^2), ko bo pesjak širok 2,75 m.

II.

V 2. letniku lahko nalogo uporabimo kot uvod v kvadratno funkcijo, če je pristop empirični.

Pri tem si lahko pomagamo s tabelo, opazujemo točke na grafu in pri iskanju odgovorov na vprašanja uporabimo tehnologijo. Glede na način dela učni list ustrezno dopolnimo (tabela, koordinatni sistem, navodila za delo z grafičnimi računali, navodila za delo s programom Graph …).

Opisana je možnost, kot jo prikazuje Slika 2.



Priprava podatkov za tabelo

širina pesjaka = x

Odvisnost dolžine pesjaka od njegove širine: *dolžina = d* = 11 – 2*x*

Odvisnost površine pesjaka (za gibanje) od širine: *površina = P = širina·dolžina* – 1·1

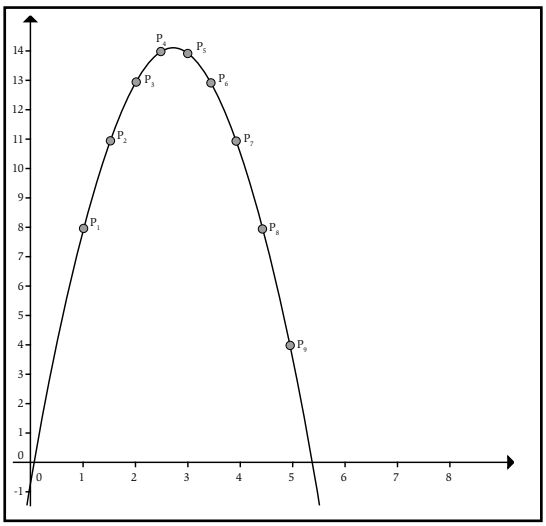
S podanimi zvezami lahko izračunamo ustrezne podatke za tabelo:

Širina [m]	Dolžina [m]	Površina [m^2]
1	9	8
1,5	8	11
2	7	13
2,5	6	14
3	5	14
3,5	4	13

4	3	11
4,5	2	8
5	1	4

Kaj opaziš?

V koordinatni sistem lahko narišemo točke, ki prikazujejo površino pesjaka v odvisnosti od širine, in poskusimo narisati krivuljo, ki se jim najbolje prilega.



Iz grafa lahko sklepamo, da bo površina največja, ko bo širina približno med 2,5 m in 3 m.

Če upoštevamo prej izpeljani zvezi,

dolžina = $d = 11 - 2x$ in *Površina* = P = *širina*·*dolžina* – $1 \cdot 1 = x \cdot (11 - 2x) - 1$,

lahko zapišemo površino kot funkcijo širine (x): $P = f(x) = -2x^2 + 11x - 1$.

Ker dijaki še ne znajo izračunati ekstrema, lahko uporabimo IKT. Mogoča uporaba za reševanje tega problema je predstavljena na zgoščenki v dokumentu Tehnologija_navodila.docx.
Opisane so naslednje možnosti:

1. Uporaba grafičnega računala
2. Uporaba odprtokodnega programa Graph
3. Uporaba odprtokodnega programa GeoGebra
4. Priprava tabele v Excelu

2.4.6.2 Goreči šotor

Irena Rauter Repija, Gimnazija Ljutomer in Mateja Sirnik, ZRSŠ (teoretični pristop)

Osnovni podatki

Tema	Geometrija
Enota	Merjenje, preslikave, ekstremalni problemi
Predvideni čas izpeljave	ena do dve šolski uri

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

Učni cilji (splošni, procesni in vsebinski)	Dijaki/dijakinje: • v enem izmed programov dinamične geometrije v ravnini narišejo model in s simulacijo poskusijo najti rešitev naloge: ◦ narišejo model; ◦ opazujejo, kako mesto zajema vpliva na dolžino poti; ◦ poiščejo geometrijsko mesto zajema, za katerega je razdalja najmanjša; • analizirajo ekstremalni problem.	
Kompetence	**K1 – sporazumevanje v slovenščini**	K5 – učenje učenja
	K2 – sporazumevanje v tujih jezikih	K6 – socialne in državljanske kompetence
	K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji	K7 – samoiniciativnost in podjetnost
	K4 – digitalna pismenost	K8 – kulturna zavest in izražanje
Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje poznajo: • pojem razdalje v ravnini; • transformacije v ravnini; • osnove dela s programom GeoGebra; • osnove dela s programom Graph.	
Pričakovani dosežki/ rezultati	Dijaki/dijakinje: • vidijo, kako z uporabo tehnologije najdejo pot do rešitve.	
Didaktični pristop	• delo v parih za računalnikom, • eksperimentiranje z modelom in programom za dinamično geometrijo v ravnini, • raziskovanje	
Potek učnega procesa	1. Predstavitev problema in postavitev vprašanj. 2. Reševanje, raziskovanje. 3. Opis ugotovitev in predstavitev rezultatov.	

Preverjanje dosežkov/ rezultatov	Kako geometrijsko določimo točko, kjer bo mesto zajema? Ali je v tisti točki dolžina poti res najkrajša?
Domača naloga	Klop v parku
Gradivo na zgoščenki	UL _Goreci_sotor.docx Goreci_sotor.grf Goreci_sotor_analiza_s_tabelo.ggb DN_Klop.docx Klop_konstrukcija.ggb Klop_raziskovanje_s_pravokotnico.ggb
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Odprtokodni program GeoGebra, Graph
Viri	1 *Željko, M. (2007). Rešene naloge iz matematike s srednješolskih tekmovanj – 5. del. Ljubljana: DMFA založništvo.* 2 *Griesel, H., Gundlach, A. (2006). Elemente der Mathemathik, 11. Sculjahr. Braunschweig: Schroedel.* 3 *Odprtokodni program Geogebra: www.geogebra.at* 4 *Odprtokodni program Graph: www.padovan.dk/graph*

Problemska situacija

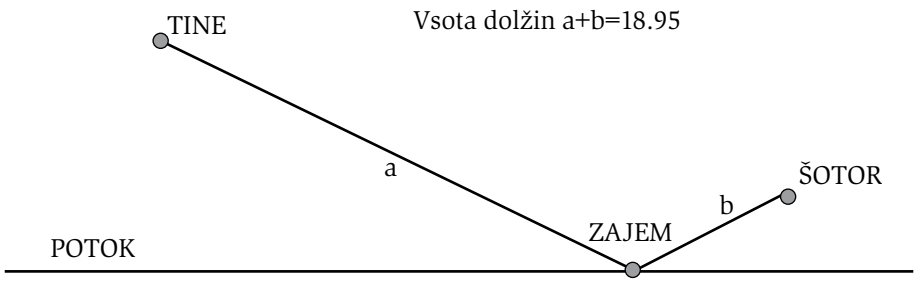
Goreči šotor

Tine je taboril. Zakuril je ogenj za pripravo kosila, nato pa se z vedrom hitro odpravil v bližnji gozd, da bi nabral še sočnih borovnic. Ko se je ozrl nazaj, je videl, da se je ogenj začel nepričakovano širiti proti šotoru. Brž je stekel do bližnjega potoka po vodo. Na katerem mestu naj zajame vodo, da bo pot, ki jo mora preteči, če hoče pogasiti ogenj, najkrajša? Glej sliko.

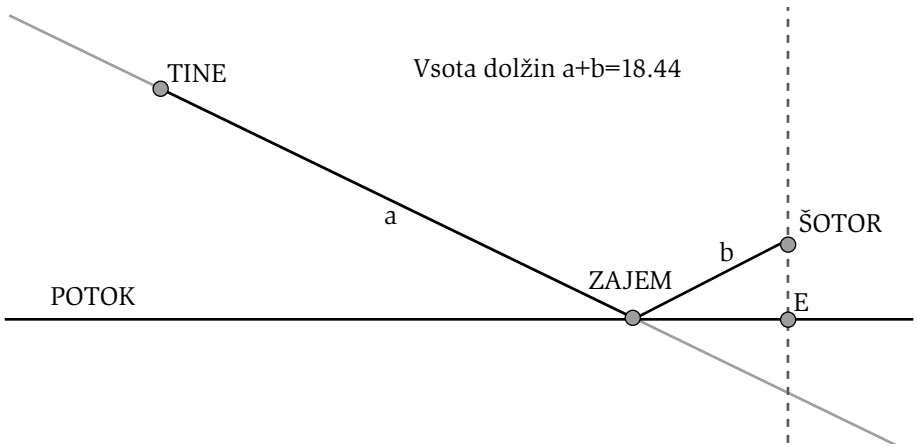
Reševanje

Pri reševanju si lahko pomagamo s programom dinamične geometrije.

Če si na premici *POTOK* izberemo točko, ki jo poimenujmo *ZAJEM*, in jo premikamo po premici, vidimo, da se vsota razdalj $a + b$ spreminja.



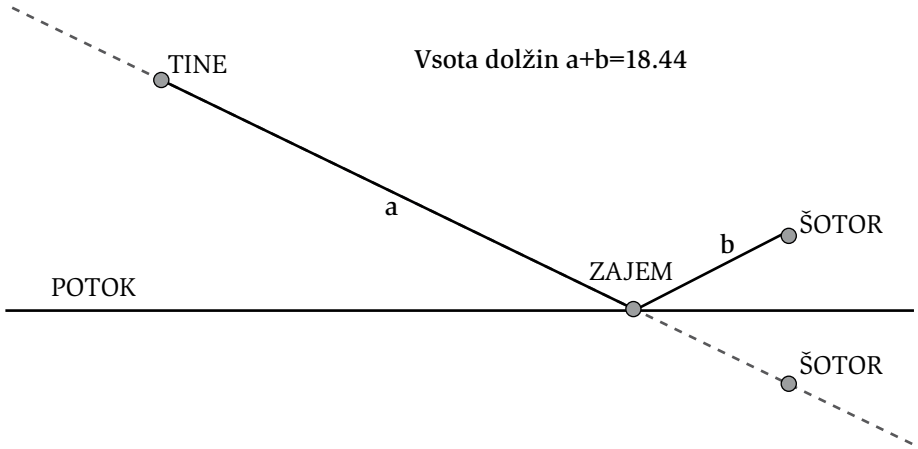
Ko nekako določimo mesto zajema, narišemo zveznico *TINE - ZAJEM* in pravokotnico na premico *POTOK*, skozi točko *ŠOTOR*.



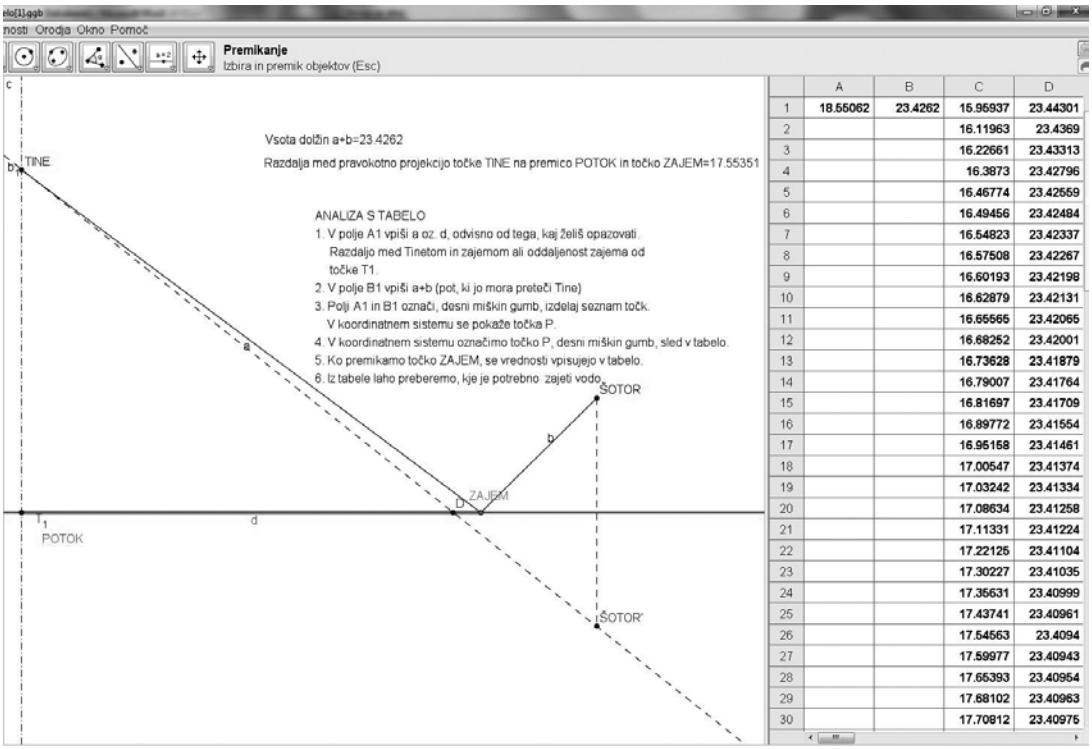
Opazimo lahko, da je točka, kjer se sekata zveznica TINE - ZAJEM in pravokotnica, ravno zrcalna slika točke ŠOTOR.

Sklep

Točko prezrcalimo čez premico POTOK in jo poimenujmo Točka ZAJEM, ki je presečišče zveznice točk TINE - ŠOTOR in premice POTOK. V tem primeru sta točki TINE in ZAJEM kolinearni in zato je vsota razdalj najmanjša.



Pri raziskovanju si lahko pomagamo tudi s tabelo programa GeoGebra.



	A	B	C	D
1	18.55062	23.4262	15.95937	23.44301
2			16.11963	23.4369
3			16.22661	23.43313
4			16.3873	23.42796
5			16.46774	23.42559
6			16.49456	23.42484
7			16.54823	23.42337
8			16.57508	23.42267
9			16.60193	23.42198
10			16.62879	23.42131
11			16.65565	23.42065
12			16.68252	23.42001
13			16.73628	23.41879
14			16.79007	23.41764
15			16.81697	23.41709
16			16.89772	23.41554
17			16.95158	23.41461
18			17.00547	23.41374
19			17.03242	23.41334
20			17.08634	23.41258
21			17.11331	23.41224
22			17.22125	23.41104
23			17.30227	23.41035
24			17.35631	23.40999
25			17.43741	23.40961
26			17.54563	23.4094
27			17.59977	23.40943
28			17.65393	23.40954
29			17.68102	23.40963
30			17.70812	23.40975

Analiza s tabelo v programu GeoGebra

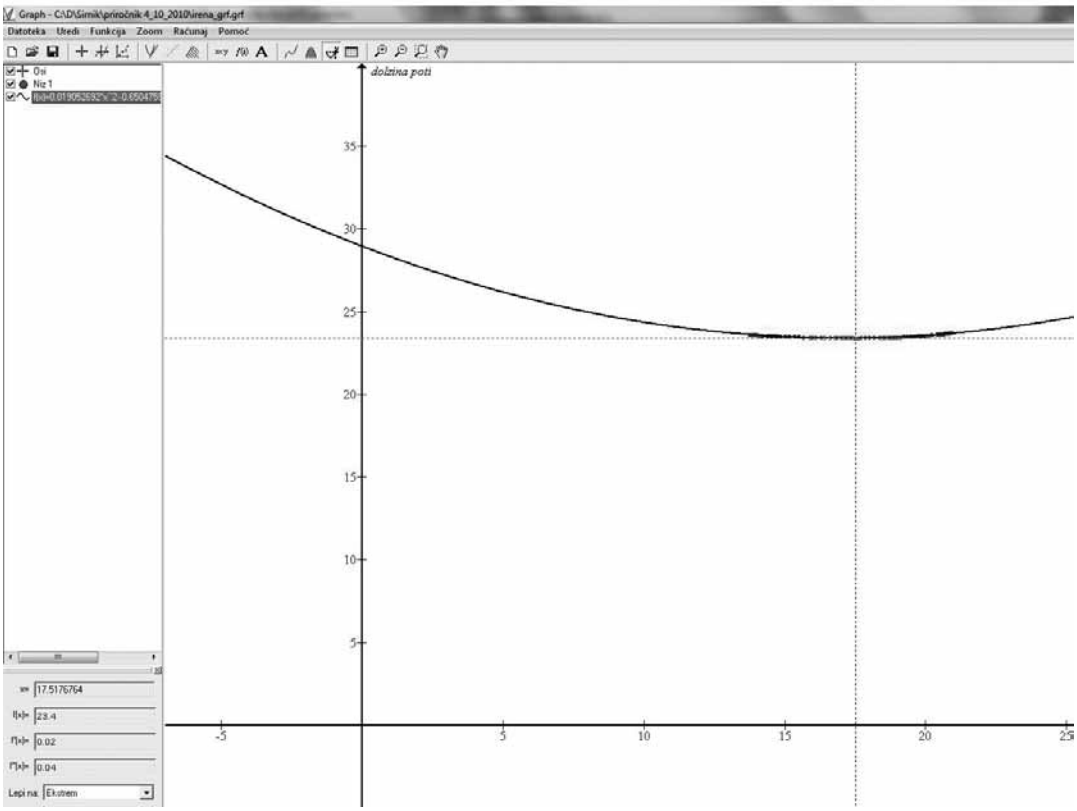
Navodilo za vnos podatkov v tabelo:

1. V polje *A1* vpišemo a (a = razdalja *TINE–ZAJEM*) ali d (d = razdalja med pravokotno projekcijo točke *TINE* na premico *POTOK* in točko *ZAJEM*).
2. V polje *B1* vpišemo $a + b$ ($a + b$ = razdalja *TINE–ZAJEM–ŠOTOR*).
3. Polji *A1* in *B1* označimo, desni miškin gumb, ukaz *Izdelaj seznam točk*. V koordinatnem sistemu se pojavi točka *P*. (Pazite, točka *P* je lahko zunaj vidnega okna na zaslonu.)
4. Točko *P* označimo, desni miškin gumb, *Ukaz Sled v tabelo*.
5. Kadar premikamo točko *ZAJEM*, se ustrezne vrednosti zapisujejo v tabelo.

Tudi iz tabele lahko razberemo, kje približno leži točka *ZAJEM*, pri kateri je razdalja najkrajša.

Za podrobnejšo analizo ekstremalnega problema lahko uporabimo program Graph.

V polje A1 vpišemo razdaljo d, v B1 pa dolžino poti $a+b$ in izdelamo tabelo, kot je zapisano zgoraj. Podatke iz tabele lahko prenesemo v program Graph.



Podatki v programu Graph

Navodilo za delo s programom Graph:

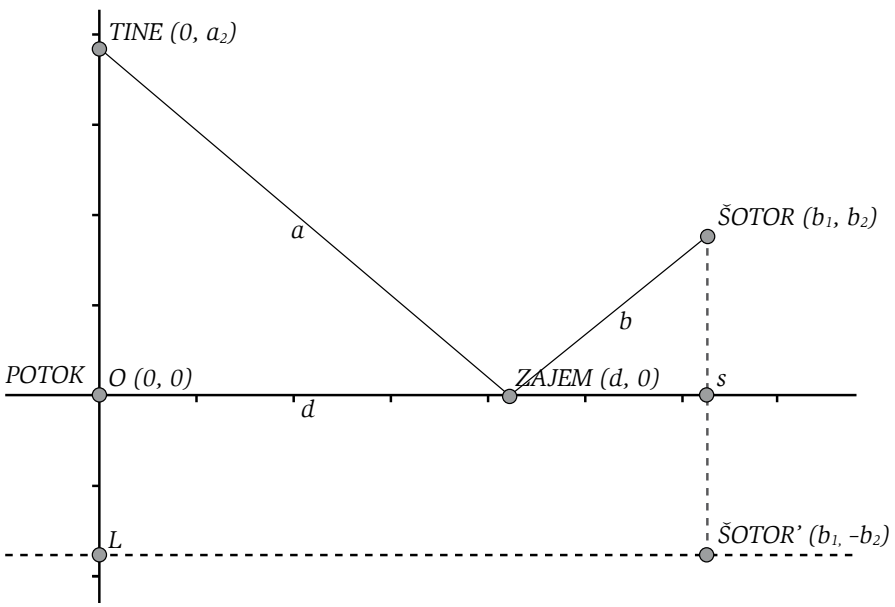
1. V meniju izberemo ukaz *Funkcija/Vstavi* zaporedje točk.
2. V tabelo, ki se prikaže, prekopiramo podatke iz GeoGebrine tabele.
3. Z ukazom *Funkcija/Vstavi trendno črto* izberemo krivuljo, ki se najbolj prilega zaporedju točk.
4. Z ukazom *Računaj/Ovrednoti* preberemo, pri kateri vrednosti spremenljivke x doseže funkcija najmanjšo vrednost.

   Če želimo prebrati ekstrem, v levem kotu spodaj izberemo ukaz *Lepi* na *Ekstrem*.

Vidimo, da se abscisa ekstrema kar dobro ujema z vrednostjo razdalje d, pri kateri je dolžina poti najkrajša. Ordinata ekstrema nam pove, kolikšna je najkrajša pot *TINE–ZAJEM–ŠOTOR*.

Obe ekranski sliki sta kot datoteki dostopni na priloženi zgoščenki.

Rešimo nalogo še teoretično. Poznamo lego točk *TINE* in *ŠOTOR* ter premice *POTOK*. Postavimo koordinatni sistem, kot prikazuje naslednja slika.



Točka *TINE* naj ima koordinati $(0,a_2)$, točka *ŠOTOR* pa (b_1, b_2).

Ker zrcaljenje čez premico ohranja razdaljo, smo že rekli, da sta razdalji *TINE–ZAJEM–ŠOTOR* in *TINE–ZAJEM–ŠOTOR'* enaki. Razdalja *TINE–ZAJEM–ŠOTOR'* je najkrajša, ko je točka *ZAJEM* na zveznici *TINE–ŠOTOR'* zaradi kolinearnosti točk. Iz podobnosti trikotnikov z oglišči *O, TINE, ZAJEM* in *S, ŠOTOR, ZAJEM* sledi

$$\frac{d}{a_2} = \frac{b_1 - d}{b_2},$$

od koder dobimo

$$d = \frac{a_2 b_1}{b_2 + a_2}.$$

Točka, kjer moramo zajeti vodo, ima koordinati $(\frac{a_2 b_1}{b_2+a_2}, 0)$. Koliko pa je najkrajša razdalja? Iz podobnosti trikotnikov z oglišči *0, TINE, ZAJEM* in *L, TINE, ŠOTOR'* dobimo

$$\frac{d}{a} = \frac{b_1}{a+b}.$$

Torej je

$$a+b = \frac{ab_1}{d} = \frac{b_1\sqrt{d^2+a_2^2}}{d}.$$

Zdaj preverimo rešitev konkretnega primera, ki smo jo dobili z uporabo programov GeoGebra in Graph. Koordinate točk *TINE* in *ŠOTOR* vstavimo v izpeljani enakosti in izračunamo d ter $a + b$.

Domača naloga

Klop v parku

V parku vodi ravna pot mimo dveh krožnih stezic, ki ležita na različnih straneh ravne poti. Radi bi postavili štiri svetilke in klop. Na vsaki od krožnih stezic naj bo po ena svetilka, na ravni poti dve, klop pa naj stoji ob ravni poti tako, da bo razdalja od nje do vseh štirih svetilk enaka. Svetilki na krožni stezici naj bosta enako oddaljeni od svetilk od ravni poti.

Kje naj postavimo svetilke in klop? Razišči.

Rešitev domače naloge je na zgoščenki:

DN_Klop.docx

Klop_konstrukcija.ggb

Klop_raziskovanje_s_pravokotnico.ggb

2.4.6.3 Pleskanje stene

Irena Rauter Repija, Gimnazija Ljutomer

Osnovni podatki

Tema	Geometrijsko zaporedje (4. letnik)
Enota	Neskončna geometrijska vrsta (4. letnik)
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

Učni cilji (splošni, procesni in vsebinski)	Dijaki/dijakinje: • spoznajo pojem in pomen neskončne geometrijske vrste; • znajo poiskati matematični model; • problem povežejo z neskončnim geometrijskim zaporedjem; • izračunajo limito končne geometrijske vrste.	
Kompetence	**K1 – sporazumevanje v slovenščini**	K5 – učenje učenja
	K2 – sporazumevanje v tujih jezikih	K6 – socialne in državljanske kompetence
	K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji	K7 – samoiniciativnost in podjetnost
	K4 – digitalna pismenost	K8 – kulturna zavest in izražanje
Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje poznajo: • geometrijsko zaporedje; • končno geometrijsko vrsto; • pojem limite in računanje z limitami.	
Pričakovani dosežki/ rezultati	Dijaki/dijakinje: • prepoznajo neskončno geometrijsko vrsto v problemski situaciji.	
Didaktični pristop	• problemsko učenje, • preiskovanje	
Preverjanje dosežkov/ rezultatov	Koliko stene bo popleskano posamezni dan? Ali bo stena kdaj popleskana?	
Domača naloga	Delovni list: DN_Zoga.docx	
Gradivo na zgoščenki	UL_Stena.docx Stena.xlsx DN_Zoga.docx Zoga.xlsx	
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Program Excel za nazornejšo predstavitev naloge in domače naloge.	

Viri	*1*	*Žakelj, A. (2003). Kako poučevati matematiko. Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.*
	2	*Griesel, H., Gundlach, A. (2006). Elemente der Mathemathik, 11. Schuljahr. Braunschweig: Schroedel.*

Problemska situacija

Pleskanje stene

Prepleskali bomo steno. Prvi dan polovico, vsak naslednji dan polovico ostanka prejšnjega dne. Z matematičnim modelom predstavi pleskanje stene.

Postavitev vprašanj pred reševanjem

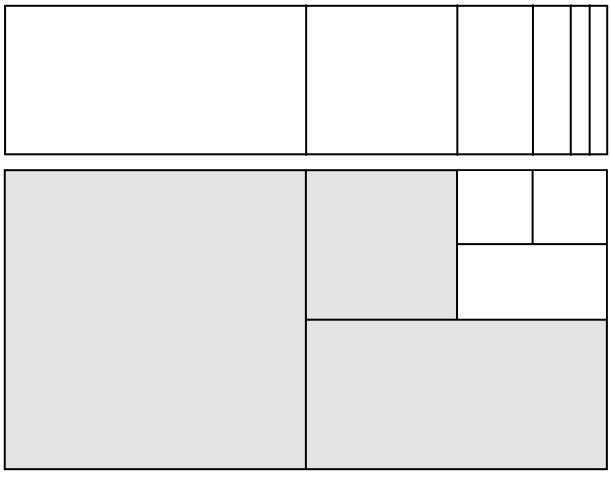
1. V kolikšnem času lahko popleskamo steno?
2. Ali bo delo kdaj končano?
3. ...

Vprašanja po končanem reševanju

1. Ali je problem realen?
2. Kaj smo pri reševanju privzeli?
3. Česa pri reševanju nismo upoštevali?

Reševanje

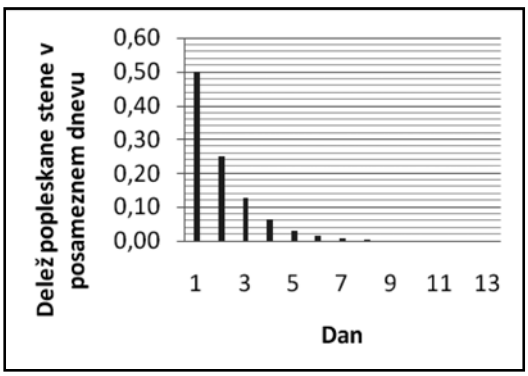
Situacijo predstavimo z matematičnim modelom (pravokotnik, eksponentna funkcija, zaporedje ...). Dijaki po navadi narišejo eno izmed spodnjih slikic.

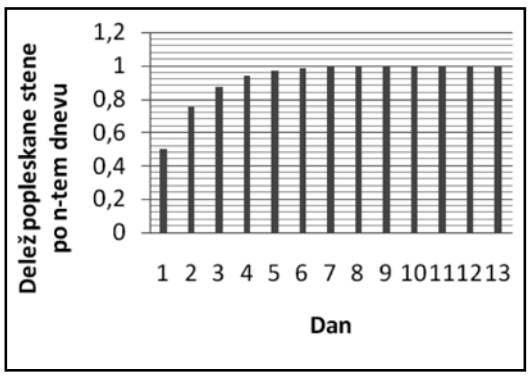


Za predstavitev lahko uporabimo tudi program Excel.

Dan	Delež sveže popleskane stene
1	0,50
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,03125
6	0,015625

7	0,0078125
8	0,00390625
9	0,001953125
10	0,000976563
11	0,000488281
12	0,000244141
13	0,00012207





V 4. letniku uporabimo nalogo kot uvod v vsoto neskončne geometrijske vrste. Dijaki znajo delež popleskane stene posameznega dneva zapisati z zaporedjem.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \ldots$$

Če izračunamo vsoto n členov, dobimo, koliko stene je popleskano po n dneh.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Kaj se zgodi, če število dni večamo? Imeli bomo čedalje več popleskane stene. Če izračunamo limito

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=1.$$

Od tod sklepamo, da je vsota neskončne geometrijske vrste enaka 1.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots=1$$

Opomba: Naloga je po mojem mnenju zelo primerna za nazoren prikaz tega, kako lahko seštevamo neskončno mnogo členov, pa kljub temu dobimo končno vsoto.

Dijaki si steno dejansko lahko predstavljajo pred seboj in sami vidijo, da je s takim pleskanjem ne bi mogli popleskati več kot celotne stene.

Domača naloga

Žoga

Žogo vržemo v zrak do višine 2,5 m od tal. Vsakič, ko pade na tla, odskoči in pri tem izgubi 70 % prejšnje višine.

Z matematičnim modelom predstavi pot, ki jo opravi žoga pri tem gibanju.

Rešitev domače naloge je na zgoščenki:
DN_Zoga.docx
Zoga.xlsx

2.4.7 Uporaba in preverjanje modela

2.4.7.1 Plačilo porabe plina

Romana Bohak Farič, Gimnazija in srednja kemijska šola Ruše

Osnovni podatki

Tema	Razvijanje problemskih znanj
Enota	Modeliranje – uporaba in preverjanje modela
Predvideni čas izpeljave	dve šolski uri

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• razvijajo problemska znanja;
• razložijo, uporabijo in preverijo dani model;
• poiščejo prilagoditvene krivulje;
• uporabijo model na danih podatkih;
• razložijo uporabo modela.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• poznajo principe plačevanja mesečne porabe plina, vode, elektrike;
• poznajo aritmetično sredino;
• znajo predstaviti podatke v koordinatnem sistemu;
• znajo brati predstavljene podatke v koordinatnem sistemu;
• poznajo grafe funkcij;
• so vešči uporabe programa Graph;
• poznajo delo s preglednicami (Excel).</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki/ rezultati</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• prepoznajo neskončno geometrijsko vrsto v problemski situaciji.</td></tr>
<tr><td>Didaktični pristop</td><td colspan="2">• problemsko učenje, preiskovanje, raziskovanje,
• uporaba tehnologij</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki/ rezultati</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• uporabijo in preverijo dani model za svoje podatke,
• kritično ovrednotijo rezultate.</td></tr>
</table>

Potek učnega procesa	1. Dijaki za domačo nalogo opišejo princip obračuna elektrike, vode ... 2. Razgovor o principu obračuna, ki so ga opisali za domačo nalogo. 3. Predstavitev problema in postavitev vprašanj. 4. Reševanje, raziskovanje. 5. Predstavitev ugotovitev.
Domača naloga	Dijaki zbirajo svoje podatke in preverijo model (lahko tudi za porabo elektrike).
Gradivo na zgoščenki	UL_Poraba_plina.doc RUL_Poraba_plina.doc
Kontekst problema	avtentična situacija v gospodinjstvu
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	računalnik za vsakega dijaka s programsko opremo (Graph, Excel)
Viri	*www.plinarna-maribor.si (januar 2008, oktober 2009)*

Problemska situacija

Plačilo porabe plina

Vsako gospodinjstvo ima redne mesečne izdatke: plačilo elektrike, vode, plina ali kurilnega olja za ogrevanje. Pri vseh plačilih se pojavlja izbrani model plačevanja – ali mesečne akontacije ali plačilo po dejanski uporabi ali pa kombinacija obeh. Mesečne akontacije navadno upoštevajo neko predvideno letno porabo, ki se razdeli na 12 enakih obrokov. Plačilo po dejanski uporabi se uporablja le, če uporabnik sam sporoča mesečno porabo; mesečno popisovanje stanja na kraju je namreč povezano z dodatnimi stroški (plačilo popisovalca, plačilo potnih stroškov popisovalca ...).

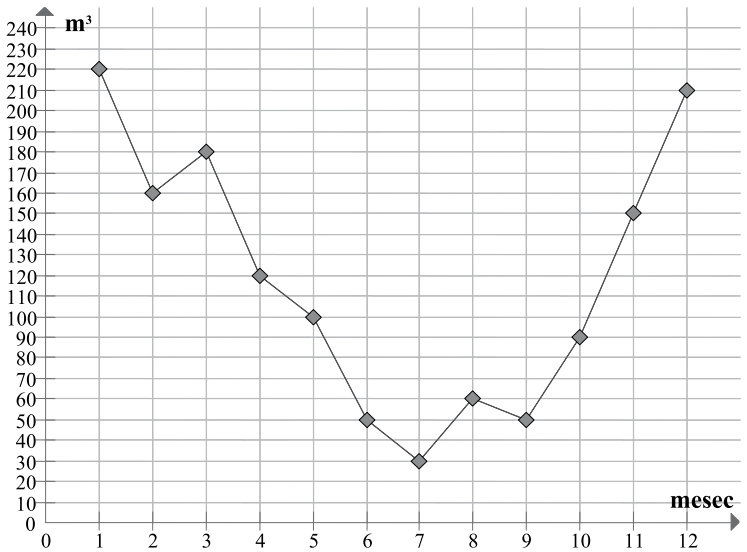
Glede na uporabo različnih modelov plačevanja je koristno, da uporabnik ta model pozna in tudi razume, da lahko vpliva na svoje mesečne in letne izdatke. Drugače se lahko zgodi, da je bilo mesečno plačevanje prenizko ali previsoko ocenjeno. Če cena ni konstantna v celotnem obračunskem obdobju, je avtentični primer matematično še bolj zanimiv.

Plinarna Maribor je začela na začetku leta 2008 uporabljati nov model za plačilo porabe zemeljskega plina. Do leta 2008 so njegovi odjemalci plačevali mesečno akontacijo, torej se je celotna poraba razdelila na 12 enakih obrokov.

Ta matematični model imenujmo 1. model.

Razumevanje problema

1. Leta 2007 je uporabnik A porabil 2154 m^3 plina. Koliko m^3 plina je plačeval na mesec?
2. Marca 2007 je uporabnik B plačal 153 m^3 plina. Koliko plina je predvidoma porabil leta 2007?
3. Uporabnik C je leta 2007 na mesec plačeval 215 m^3 plina. Decembra so popisali dejansko porabo plina za leto 2007. Ugotovili so, da je bila letna poraba 2354 m^3. Ali so bila predvidena mesečna plačila ustrezna? Utemeljite!
4. Uporabnik D si je leta 2007 vsak mesec zapisoval porabo plina. Njegova poraba je predstavljena na sliki.



Koliko m^3 je uporabnik D porabil na mesec?

Kaj lahko poveste o mesečni porabi plina?

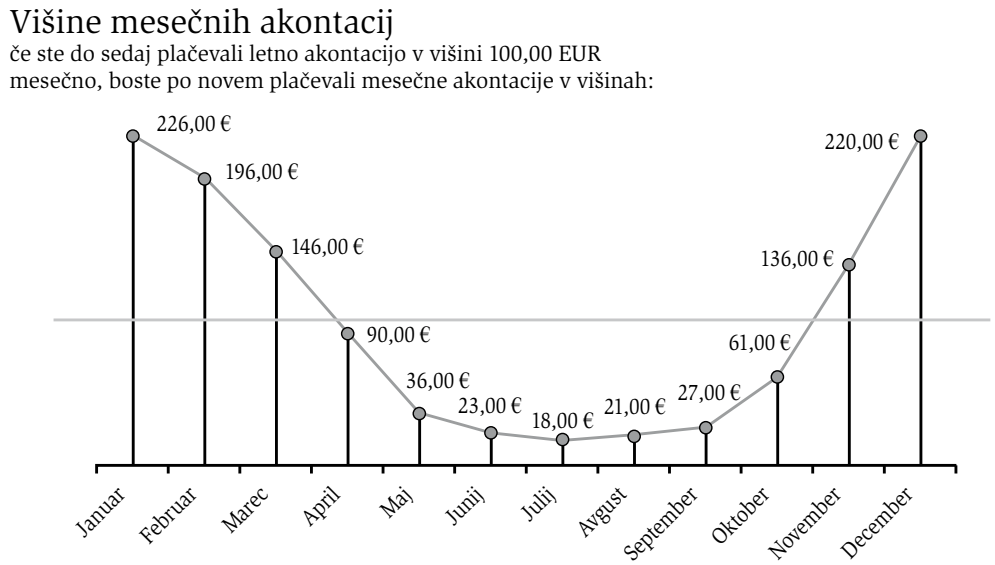
Koliko m^3 je uporabnik D porabil leta 2007?

Koliko m^3 plina bi povprečno plačeval na mesec?

Leta 2008 so začeli odjemalci plačevati po predvideni mesečni porabi plina. Novi model so pripravili tako, da so povprečno mesečno plačilo v obračunskem obdobju pomnožili z ustreznim faktorjem za posamezni mesec (2. model):

za januar z 2,26, za februar z 1,96, za marec z 1,46, za april z 0,90, za maj z 0,36, za junij z 0,23, za julij z 0,18, za avgust z 0,21, za september z 0,27, za oktober z 0,61, za november z 1,36 in za december z 2,20.

Predstavili so ga na naslednji način (slika):



Vir: www.plinarna-maribor.si (januar 2008)

Razumevanje modela

1. Kaj menite, od česa je odvisna izbira faktorja?
2. Določite plačila za posamezni mesec leta 2008, če ste leta 2007 plačevali mesečno akontacijo 75 EUR.
3. Določite plačila za posamezni mesec leta 2008, če ste leta 2007 plačali skupaj 115 EUR.
4. Leta 2007 ste maja plačali 86 EUR. Koliko boste plačali maja 2008, če se je plin podražil za 3,24 %?
5. Januarja 2009 so model spremenili tako, da je veljal za porabo plina v m^3 (3. model). Koliko smo plačali maja (februarja) 2008 in koliko maja (februarja) 2009, če smo leta 2007 plačevali mesečno akontacijo 68 EUR? Cene m^3 plina so dane v tabeli.

2008	Cena (EUR/m³)
JANUAR	0,63309
FEBRUAR	0,63204
MAREC	0,63593
APRIL	0,64929
MAJ	0,61910
JUNIJ	0,63930
JULIJ	0,68601
AVGUST	0,68475
SEPTEMBER	0,71273
OKTOBER	0,76785
NOVEMBER	0,77974
DECEMBER	0,77974

2009	Cena (EUR/m³)
JANUAR	0,76996
FEBRUAR	0,75797
MAREC	0,76712
APRIL	0,66686
MAJ	0,66234
JUNIJ	0,65624
JULIJ	0,60006
AVGUST	0,60174
SEPTEMBER	0,59038

Vir: www.plinarna-maribor.si (oktober 2009)

Prilagoditvena krivulja

1. Katera krivulja se najbolje prilega danim točkam? (matematični opis)
2. Koliko plina smo po modelu porabili avgusta 2009? Koliko plina bomo porabili januarja 2010 (pri enakih pogojih)?
3. Koliko smo plačali za porabo plina aprila 2009?

Preverjanje modela

Nekaj uporabnikov si je med letom zapisovalo porabo plina (vedno prvega v mesecu). Za vsakega uporabnika preverite model. Zapišite ugotovitve.

1. Za uporabnika B napovejte, koliko plina bo porabil oktobra, novembra in decembra 2009.
2. Primerjajte modele iz leta 2007 (1. model), 2008 (2. model) in 2009 (3. model).
3. Kateri od predstavljenih treh modelov je za uporabnika ustreznejši? Svoj odgovor utemeljite.

Uporabnik A	
2008	**V (m³)**
JANUAR	264
FEBRUAR	230
MAREC	217
APRIL	96
MAJ	75
JUNIJ	72
JULIJ	70
AVGUST	76
SEPTEMBER	92
OKTOBER	95
NOVEMBER	188
DECEMBER	280

Uporabnik B	
2008	**V (m³)**
JANUAR	250
FEBRUAR	321
MAREC	211
APRIL	79
MAJ	73
JUNIJ	51
JULIJ	71
AVGUST	46
SEPTEMBER	68
OKTOBER	
NOVEMBER	
DECEMBER	

Uporabnik C	
2008	**V (m^3)**
JANUAR	236
FEBRUAR	160
MAREC	158
APRIL	60
MAJ	62
JUNIJ	58
JULIJ	59
AVGUST	69
SEPTEMBER	92
OKTOBER	130
NOVEMBER	213
DECEMBER	342

Uporabnik D	
2008	**V (m^3)**
JANUAR	514
FEBRUAR	369
MAREC	304
APRIL	121
MAJ	49
JUNIJ	44
JULIJ	27
AVGUST	39
SEPTEMBER	51
OKTOBER	177
NOVEMBER	345
DECEMBER	403

V = prostornina plina

2.4.8 Modeliranje z normalno krivuljo

2.4.8.1 Analiza rezultatov mature iz matematike

Jasna Kos, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

Osnovni podatki

Tema	Statistika
Enota	Normalna porazdelitev
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• interpretirajo normalno porazdelitev;
• ugotovitve, ki jih dobijo s pomočjo modela, primerjajo z realnimi podatki;
• interpretirajo in kritično presojajo rezultate;
• se naučijo uporabljati ukaz distribution na računalu;
• spoznajo, da je normalna porazdelitev model za opisovanje neke realne situacije.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje poznajo:
• standardno normalno porazdelitev;
• normalno porazdelitev;
• osnove dela z računalom.</td></tr>
<tr><td>Potek učnega procesa</td><td colspan="2">1. Ponavljanje standardne normalne in normalne porazdelitve.
2. Pregled domače naloge (naloge iz učbenika, poglavje normalna porazdelitev).
3. Reševanje naloge.
4. Zaključek.</td></tr>
<tr><td>Gradivo na zgoščenki</td><td colspan="2">UL_Normalna porazdelitev.doc
RUL_Normalna_porazdelitev.doc
Navodila_za_TI_84.doc</td></tr>
<tr><td>Priporočeni način izpeljave</td><td colspan="2">• v razredu, pri učni uri,
• možnost demonstracije z računalnikom (uporaba emulatorja),
• kot primer normalne porazdelitve (4. letnik)</td></tr>
</table>

Priporočilo za nadaljevanje	povezava z biologijo, kjer običajno nastopa standardna normalna porazdelitev
Viri	*Republiški izpitni centrer, statistični podatki: http://www.ric.si/splosna_matura/statisticni_podatki (31. 1. 2010)*

Problemska situacija

Analiza rezultatov mature

Vzemimo statistične podatke o rezultatih mature iz matematike 2008, osnovni nivo, spomladanski in jesenski rok skupaj. Povprečno število odstotnih točk je bilo 64,69 in standardni odklon 15,72, rezultati so bili približno normalno porazdeljeni.

1. Kolikšna je verjetnost, da je izbrani dijak dosegel manj kot 40 odstotnih točk?
2. Kolikšna je verjetnost, da je izbrani dijak dosegel več kot 80 odstotnih točk?
3. Koliko odstotkov dijakov je doseglo rezultat med 51 in 55 odstotnih točk?
4. Koliko jih je imelo rezultat nad 50 odstotnih točk, če vemo, da je maturo pisalo 6582 dijakov?
5. Kakšen rezultat je doseglo najslabših 10 % dijakov?
6. Kakšen rezultat je doseglo 10 % najboljših dijakov?
7. Oceno 4 ali več je dobila najboljša tretjina dijakov. Najmanj koliko odstotnih točk je moral imeti dijak za oceno 4 ali več?

2.4.9 Vhodno-izhodni matematični model ekonomije

Katja Novak, III. gimnazija Maribor

Osnovni podatki

Tema	Linearna funkcija
Enota	Sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• poiščejo matematični model realne življenjske situacije;
• presojajo o veljavnosti modela;
• kritično interpretirajo rezultate;
• razvijajo kritični odnos do informacij oziroma podatkov.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• znajo rešiti sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami.</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje znajo modelirati.</td></tr>
<tr><td>Potek učnega procesa</td><td colspan="2">1. Zastavitev problema.
2. Reševanje problema.
3. Razgovor o ugotovitvah (predpostavke, vrednotenje in razlaga modela, uporaba modela, razširitev problema ...).</td></tr>
<tr><td>Priporočeni način izpeljave</td><td colspan="2">Opišemo modela odprte in zaprte ekonomije. Na kratko začnemo s primerom odprte ekonomije, saj je ta za dijake lažji (enolično rešljiv), nato pa nadaljujemo s primerom zaprte ekonomije, v katerem lahko primer rešujemo tako, kot je originalno zastavljen, ali pa na začetku ne podamo vrednosti proizvodnje elektrike v EUR, ampak le postavimo, da je vrednost znana.</td></tr>
</table>

Postavitev problema	Z dijaki se pogovorimo o problemu in njegovih predpostavkah ter poenostavitvah. Dijaki ugotovijo, da v problemu nastopajo tri neznanke v treh enačbah. Sistem zapišejo in ga rešijo.
Kontekst situacije	ekonomija
Viri	*1 Repolusk, S. (2009). Gradivo s seminarja o matematičnem modeliranju.* *2 Jerman, M. (2009). Vhodno-izhodni matematični model ekonomije.*

Vhodno-izhodni matematični model ekonomije

Marjan Jerman

Vhodno-izhodni model Leontijeva je primer, ki pokaže, kako lahko z enostavnim matematičnim orodjem modeliramo realne življenjske situacije.

Zaprti in odprti model ekonomije

Zaprti model ekonomije predvideva, da je neka regija (lahko tudi država ali večje območje) samozadostna, torej, da se v regiji porabi natanko toliko izdelkov, kolikor se jih proizvede. Odprti model pa upošteva še zunanje povpraševanje. Zaradi računske obvladljivosti Leontijev model predvideva, da posamezna industrijska veja porabi fiksne deleže proizvodenj drugih industrij.

Primer zaprte ekonomije

Za primer si poglejmo hipotetično preprost in računsko obvladljiv primer zaprte ekonomije, ki jo sestavljajo trije sektorji.

Gospodarstvo neke regije sestavljajo: črpališče nafte, termoelektrarna, ki iz nafte proizvaja elektriko, in storitvene službe. Po daljši analizi podatkov so ugotovili naslednje:

- *za črpanje nafte je potrebnih 40 % lastne proizvodnje, 30 % proizvodnje elektrike in 30 % dela servisnih služb;*
- *proizvodnja elektrike zahteva 20 % proizvodnje nafte, 30 % svojih sredstev in 10 % dela servisnih služb;*
- *za servisna dela potrebujejo 40 % proizvodnje nafte, 40 % vse elektrike in 60 % lastnega dela.*

Proizvodnja elektrike je vredna 500 000 EUR. Kolikšna mora biti vrednost produkcije preostalih sektorjev, da bo ekonomija uravnotežena, to je, da bo skupna proizvodnja posamičnega sektorja enaka njeni skupni porabi?

Ena od bistvenih predpostavk modela Leontijeva je, da so deleži porabe fiksni. Na primer: za črpanje nafte vedno porabijo 30 % celotne proizvodnje elektrike. To je tudi ena od glavnih kritik in slabosti modela. V realnosti je vrednost črpanja nafte gotovo zapletenejša funkcija vseh treh spremenljivk. Je pa model zato laže računsko obvladljiv.

Druga bistvena lastnost modela je samozadostnost ekonomije. Na primer: za črpanje nafte, proizvodnjo elektrike in servisna dela se porabi natanko 40 % + 20 % + 40 % = 100 % vse načrpane nafte.

Podatke lahko vpišemo v matriko koeficientov (matriko Leontijeva).

$$L = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

(Če nočemo govoriti o matrikah, lahko matriko izpustimo, ali pa jo navedemo le kot primer dobro organizirane tabele. Z znanjem linearne algebre pa lastnosti te matrike določajo rešljivost sistemov linearnih enačb, ki se bodo pojavljale zaradi uravnoteženosti ekonomije.)

Glede na prvo lastnost so podatki v matriki konstante med 0 in 1, glede na drugo pa je vsota posamičnega stolpca enaka 1 = 100 %.

Označimo z x vrednost načrpane nafte, z y vrednost proizvedene elektrike in z z vrednost storitvenega sektorja. Ker je ekonomija samozadostna, se mora poraba pokriti s povpraševanjem:

$x = 0,4\,x + 0,3\,y + 0,3\,z$

$y = 0,2\,x + 0,3\,y + 0,1\,z$

$z = 0,4\,x + 0,4\,y + 0,6\,z$

Sistem lahko preuredimo v bolj navadno obliko:

$-\,0,6\,x + 0,3\,y + 0,3\,z = 0$

$0,2\,x - 0,7\,y + 0,1\,z = 0$

$0,4\,x + 0,4\,y - 0,4\,z = 0$

Ker ima sistem na desni strani same ničle, je zagotovo rešljiv. Ena od rešitev je

$x = y = z = 0,$

vendar z njo nismo zadovoljni, ker je po naših podatkih $y = 500\,000$. Če bi znali malo več matematike, bi lahko ugotovili, da iz dejstva, da je vsota posamičnega stolpca v matriki Leontijeva enaka 1, sledi, da ima sistem neskončno rešitev.

Seveda lahko sistem brez dodatnih premislekov kar rešimo:

$-6x + 3y + 3z = 0$

$2x - 7y + z = 0$

$4x + 4y - 4z = 0$

Po primernih deljenjih je ta sistem enačb ekvivalenten sistemu

$2x - y - z = 0$

$2x - 7y + z = 0$

$2x + 2y - 2z = 0$

Ko se z odštevanjem prve enačbe od preostalih znebimo spremenljivke x, dobimo

$2x - y - z = 0$

$-6y + 2z = 0$

$3y - z = 0$

Vidimo, da sta zadnji dve enačbi enaki. Sistem ima enoparametrično rešitev

$x = 2y$

$z = 3y$

Tako mora biti vrednost načrpane nafte 1 000 000 EUR, storitveni sektor pa mora izstaviti račune za 1 500 000 EUR.

Primer odprte ekonomije

V neki regiji temelji gospodarstvo na poljedelstvu, živinoreji in servisnih dejavnostih.

- *Za pridelavo pridelkov porabijo 20 % lastne proizvodnje, 20 % vrednosti živinoreje in 20 % vrednosti servisnih dejavnosti.*
- *Za živinorejo porabijo 20 % vrednosti poljedelstva, 20 % svoje proizvodnje in 20 % servisnih dejavnosti.*
- *Za servisne dejavnosti porabijo 20 % vrednosti poljedelstva, 20 % vrednosti živinoreje in 20 % svojih storitev.*
- *Iz sosednih regij prihajajo naročila za 5 000 EUR poljedelskih izdelkov, za 20 000 EUR živine in 4 000 EUR storitvenih servisov.*

Kolikšna naj bo vrednost proizvodnje posamičnih sektorjev, da bo ekonomija uravnotežena?

Tokrat je matrika Leontijeva enaka

$$L = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$$

V nasprotju s prejšnjim primerom je tokrat vsota posamičnih stolpcev manjša od 1, kar pomeni, da je proizvodnja večja od porabe v regiji.

Z x označimo vrednost poljedelstva, z y vrednost živinoreje in z z vrednost servisnih dejavnosti. Da bo pridelava enaka porabi, mora tokrat veljati:

$x = 0,2\,x + 0,2\,y + 0,2\,z + 5\,000$

$y = 0,2\,x + 0,2\,y + 0,2\,z + 20\,000$

$z = 0,2\,x + 0,2\,y + 0,2\,z + 4\,000$

Po malenkostni preureditvi dobimo nehomogen sistem enačb

$0,8\,x - 0,2\,y - 0,2\,z = 5\,000$

$-0,2\,x + 0,8\,y - 0,2\,z = 20\,000$

$-0,2\,x - 0,2\,y + 0,8\,z = 4\,000$

Če bi znali malo več matematike, bi lahko vnaprej napovedali, da bo sistem enolično rešljiv.

Lahko pa se ga lotimo kar reševati. S primernimi množenji lahko v sistemu dosežemo celoštevilske koeficiente:

$4\,x - y - z = 25\,000$

$-x + 4y - z = 100\,000$

$-x - y + 4\,z = 20\,000$

Z odštevanjem primernih večkratnikov enačb se lahko znebimo spremenljivke y:

$4\,x - y - z = 25\,000$

$15\,x - 5\,z = 200\,000$

$-5\,x + 5\,z = -5\,000$

Ekvivalenten sistem je:

$4x - y - z = 2\,500$

$3x - z = 40\,000$

$10x = 195\,000$

Ko ga rešimo, dobimo $x = 19\,500$, $y = 34\,500$, $z = 18\,500$.

Ugotovili smo, da bo ekonomija uravnotežena, če je vrednost poljedelstva 19 500 EUR, vrednost živinoreje 34 500 EUR in vrednost storitvenih dejavnosti 18 500 EUR.

Vasilij Leontijev

Vasilij Leontijev se je rodil leta 1906 v Sankt Peterburgu. Študiral je filozofijo, sociologijo in ekonomijo. Leta 1928 je v Berlinu doktoriral iz ekonomije. Kmalu je emigriral v Ameriko in začel predavati na Harvardu. Tam je razvil vhodno-izhodni model ekonomije, za katerega je leta 1973 dobil Nobelovo nagrado. Leta 1949 je s tem modelom opisal ameriško ekonomijo tako, da jo je razdelil na 500 sektorjev. S tem modelom in računalnikom, zelo preprostim za današnje razmere, je lahko približno napovedoval, kako bodo na ekonomijo vplivale spremembe v industriji, povpraševanju, vplivu vlade in izvoz. Z modelom se da približno oceniti tudi BDP. Ker je model ideološko nevtralen, so ga veliko let uporabljale kapitalistične in socialistične države, pa tudi države tretjega sveta.

2.4.10 Modeliranje z različnimi funkcijami (kvadratna, eksponentna, logaritemska)

2.4.10.1 Gojitev fižola v izbranih pogojih (projektna naloga)

Nives Mihelič Erbežnik, Gimnazija Vič, Ljubljana

Osnovni podatki

Tema	Funkcije in lastnosti funkcij
Enota	Matematično modeliranje
Predvideni čas izpeljave	tri šolske ure pri matematiki in tri šolske ure pri biologiji

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• uporabljajo pojem funkcije;
• osmislijo pojem spremenljivke, funkcijske odnose in prikazovanje spremenljivk ter odnosov resničnem kontekstu;
• modelirajo preproste probleme iz vsakdanjega življenja z znanimi funkcijami;
• v problemih prepoznajo in predstavijo, katera elementarna funkcija lahko modelira problem;
• spoznajo in uporabijo programa Excel ali Graph.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• poznajo definicijo funkcije, pojma odvisna in neodvisna spremenljivka;
• poznajo definicije lastnosti funkcij (definicijsko območje, zaloga vrednosti, naraščanje in padanje, omejenost, ...);
• znajo tabelirati funkcijo in analizirati graf funkcije;
• poznajo linearno in kvadratno funkcijo.</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje znajo izpeljati eksperiment, napisati poročilo in modelirati.</td></tr>
</table>

Potek učnega procesa	1. Navodila za izdelavo eksperimenta pri uri biologije. 2. Navodila za matematični del eksperimenta pri uri matematike. 3. Predstavitev in uporaba programov Graph in Excel (navzoča sta učitelja matematike in informatike). 4. Razgovor o rezultatih pri uri matematike in biologije.
Vprašanje za preverjanje izbranega bistvenega cilja/dosežka	Domača naloga: Dojenčkova masa
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Programa Graph in Excel
Priprava pripomočkov pred izpeljavo	*pri biologiji:* za vsakega dijaka 5 nakaljenih semen fižola posajenih v gojitvenih posodicah s prstjo
Priporočeni način izpeljave	• v razredu pri učni uri in doma, • kot primer utrjevanje znanja po kvadratni funkciji v 2. letniku (ali po obravnavi eksponentne in logaritemske funkcije), • možnost uporabe računalnika v šoli in doma, • ena šolska ura v računalniški učilnici
Izhodišče za nadaljevanje problema	• Dijake motiviramo za iskanje in sestavljanje podobnih primerov nalog. • Podatke poiščejo v resničnem življenju ali na spletu ter jih grafično predstavijo. • Pri uri matematike interpretacijo in analizo rezultatov predstavijo sošolcem. • Mogoči primeri: trening plavalcev, let vodne rakete, rast prebivalstva ... • Dodatna popestritev ur matematike.
Viri	*1 Kavka, D., Šparovec, J., Pavlič, G., Rugelj, M. (2006). PLANUM, Učbenik za matematiko za 2. letnik gimnazij. Ljubljana: Modrijan.* *2 Zlatan Magajna, delovni listi s predavanja* *3 Samo Repolusk, vaje za mentorske učitelje*

Refleksija učitelja

Predvidevala in pričakovala sem, da bodo dijaki:

- načrtno opazovali, zapisovali in uporabljali svoje meritve kot vir podatkov,
- obdelovali in vrednotili pridobljene podatke,
- matematiko uporabili tudi medpredmetno,
- spoznali in uporabili IKT za shranjevanje in predstavljanje informacij.

Učne ure so potekale, kot sem načrtovala. Večina dijakov je usvojila predvidene cilje učnih ur. Boljši dijaki in tisti, ki so že poznali najmanj enega od obeh progra-

mov, so v prvih dveh urah dosegli učne cilje. Prav tako so nalogo brez težav izdelali sami. Matematično šibkejši dijaki in tisti, ki niso bili dovolj pozorni (malo manj kot polovica), so potrebovali dodatna individualna pojasnila in pomoč. Pomagali so jim tudi boljši dijaki. Vsi dijaki so na koncu razumeli princip matematičnega modeliranja in tudi njegovo uporabnost. Veliko jih je program Graph začelo uporabljati za preverjanje svojih grafov funkcij (kvadratna, eksponentna) pri domačih nalogah.

Opažene prednosti po izpeljani učni uri

Dijaki so doma delali popolnoma samostojno. Velik »plus« naloge vidim v samostojnem pridobivanju in zapisovanju podatkov. Vsak dijak je izhajal iz svojih podatkov in izkušenj. »Minus« naloge je neatraktivni fižol, ki mogoče ni najboljši primer. Njegova prednost pa je, da v mesecu dni dovolj zraste.

Dijaki so se pri urah v šoli in domačem delu doma dovolj naučili, da se lahko podobnih krajših nalog lotevajo samostojno. Primer dodatne domače naloge sem navedla v učnem listu. Nadaljevanje vidim v krajših domačih nalogah (primeri matematičnega modeliranja) pri vsaki na novo vpeljani funkciji. Dijaki lahko sami poiščejo problematiko, ki jih zanima, poiščejo podatke, ki jih potrebujejo, jih obdelajo, poiščejo najprimernejšo prilagoditveno funkcijo, analizirajo in komentirajo dobljene rezultate. Zanimive teme (treningi športnikov, let vodne rakete, rast svetovnega prebivalstva ...) lahko popestrijo ure matematike in spodbujajo argumentirane razprave med dijaki.

Ker je bil večji del naloge povezan tudi z doseganjem določenih učnih ciljev pri biologiji, je velika prednost take naloge v tem, da dijaki uvidijo uporabnost matematičnega znanja pri drugih predmetih.

Kje lahko pričakujemo ovire?

Dijaki so se prvič srečali s programom Graph. Zaradi matematično »šibkejših« dijakov in tistih, ki programa ne poznajo, bi dodala še eno uro, pri kateri bi v parih (en dijak, ki že obvlada program, in eden, ki ga še ne) delali več krajših vaj za spoznavanje omenjenega programa.

Velika ovira je tudi obsežnost nalog, ki jih morata pregledati in komentirati dva učitelja. V idealnih razmerah (veliko manjše število dijakov v razredu) bi bil rezultat takega dela precej boljši. Jasno je, da v eni šolski uri pri vsakem predmetu, ki je namenjena komentarju kar vseh izdelanih nalog skupaj, marsikaj ostane nedorečeno ali premalo obdelano. Žal ni več časa.

Mnenja in odzivi dijakov

Dijaki so bili s takšnim načinom dela zelo zadovoljni in si želijo še več podobnih povezav:

»Takšen poskus smo izpeljali prvič, bilo je zanimivo, ker je medpredmetno povezovanje med biologijo in matematiko. Menim, da smo se iz tega poskusa naučili veliko, namen naloge pa je bil, da se to naučimo uporabljati v konkretnih življenjskih situacijah.«

»Dobra izkušnja je bila predvsem, ker smo tudi v praksi na nekaterim zanimivejši

način prikazali matematiko in risanje ter uporabo funkcij.«

»Prav tako je bilo zanimivo delati s programom Graph, ki prikaže rezultate še drugače. Morda bi tako vajo še lahko ponovili s kakšno drugo rastlino, ki bi bila še bolj zanimiva in atraktivna.«

»Mislim, da smo dosegli namen tega dela. Torej, boljše razumevanje vsebine s praktičnim delom tudi v konkretnih življenjskih situacijah ter se jih naučiti prikazati še drugače, tokrat z matematičnim modeliranjem. Torej, tovrstno povezovanje predmetov se je izkazalo za dobro in zanimivo in ker je bilo to prvo takšno povezovanje, lahko le upamo, da jih bo v prihodnje še več.«

Projektna naloga

Gojenje fižola v izbranih pogojih

Navodila za delo doma pri uri biologije:

- 5 nakaljenih semen fižola posadi v gojitveno posodico s prstjo,
- izberi ustrezno in dobro osvetljeno mesto,
- zalivaj s postano vodo sobne temperature (del dijakov vsak drugi dan, del le enkrat na teden),
- opredelitev problema naj vključuje hipotezo o vplivu razmer (spremenljivk) na rast in razvoj rastlin,
- rastline opazuj enkrat na dan,
- merjenje opravi trikrat na teden, štiri tedne zapored,
- skupna količina vode naj bo obakrat 100 ml.

Navodila za delo doma pri uri matematike:

- za vsako rastlino s tabelo predstavi meritve: čas t in višino $h = h(t)$,
- točke predstavi v koordinatnem sistemu (to lahko narediš z uporabo programa Graph ali Excel),
- poišči nekaj primerov prilagoditvenih funkcij, ki modelirajo dane podatke.

Raziskovalna vprašanja

1. Kaj lahko na osnovi podatkov in prilagoditvenih funkcij sklepaš o rasti in razvoju rastlin?
2. Ali lahko na osnovi teh ugotovitev poveš kaj več o ustreznosti posameznih modelov?
3. Kako bi lahko še dodatno preveril natančnost izbranega modela?
4. Sklepe za posamezne primere rastlin primerjaj tudi med seboj.
5. Postavi končni sklep o rasti in razvoju rastlin na osnovi vseh dobljenih podatkov in ob upoštevanju realističnega konteksta (vplivi pogojev gojenja).

Pričakovani rezultati:

- dnevnik gojenja:
  - opisi sprememb v rasti in razvoju rastlin,
  - opisi pogojev gojenja,
  - natančno zapisovanje meritev,
- grafična predstavitev merjenja,
- komentar oz. interpretacija rezultatov.

Domača naloga

Dojenčkova masa

Dojenčkova masa se v prvih treh mesecih življenja poveča vsak mesec za 812 g, v naslednjih treh vsak mesec za 560 g, v naslednjih treh vsak mesec za 420 g in v zadnjih treh za 336 g vsak mesec.

(Vir: http://www.bambino.si)

1. Tabeliraj predvideno dojenčkovo maso za vsak mesec njegovega prvega leta.
2. S programom Graph predstavi točke v koordinatnem sistemu.
3. Poišči najprimernejšo prilagoditveno krivuljo, ki opisuje dojenčkovo rast.
4. Kolikšno maso doseže dojenček, ko dopolni štiri mesece in pol, kolikšno, ko 31 tednov?
5. Kolikšno maso bi dosegel ob letu in pol, če bi njegova teža naraščala tako, kot kaže izbrana prilagoditvena krivulja.
6. Ali je otrokova rast po prvem letu takšna, kot jo prikazuje izbrana prilagoditvena krivulja? Svoje razmišljanje utemelji (viri ...).

2.5 Naloge iz modeliranja

Naloga 1

Spreminjanje prostornine

Francoski fizik Jacques Charles je odkril, da vsi plini pri ohlajanju spreminjajo prostornino pri konstantnem tlaku na enak način. V spodnji preglednici so prikazani podatki o spreminjanju prostornine enega od plinov v odvisnosti od temperature pri ohlajanju.

Temperatura [°C]	50	– 30	– 110	– 135	– 220
Prostornina [dm³]	120	90	60	50	20

1. Kaj se dogaja s plinom pri ohlajanju?
2. Zgornje podatke nariši v koordinatni sistem in poišči najustreznejšo prilagoditveno krivuljo. Poišči njen funkcijski predpis.
3. Prilagoditveni funkciji določi presečišče z vodoravno osjo. Kaj predstavlja to presečišče?
4. Iz grafa oceni prostornino pri – 60 °C.
5. Izračunaj prostornino plina pri 0 °C.
6. Kaj je smiselno definicijsko območje te funkcije?
7. Kakšno je v splošnem definicijsko območje funkcije, ki prikazuje ohlajanje?
8. Kaj je smiselna zaloga vrednosti te funkcije?
9. Poglej v učbenik fizike in primerjaj svoje ugotovitve z ugotovitvami stroke.

Naloga 2

Raztezanje traku

Na elastični trak smo obešali različno težke uteži in pri tem merili dolžino traku. V spodnji preglednici so zapisani rezultati meritev.

Masa uteži [kg]	0,2	0,3	0,5	1,0	1,2
Dolžina traku [cm]	15	16	18	23	25

1. V koordinatnem sistemu prikaži odvisnost dolžine traku od mase uteži. Nariši najustreznejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis.
2. Iz grafa odčitaj dolžino traku, če nanj obesimo 0,8 kg.
3. Koliko je dolg neobremenjeni trak?
4. Izračunaj dolžino traku, če nanj obesimo 2 kg utež?
5. Kateri od zadnjih treh odgovorov je gotovo nepravilen. Zakaj?

Naloga 3

Temperatura vode v jezeru

Temperatura vode v jezeru se z globino spreminja. Spodnja preglednica predstavlja povprečno temperaturo vode glede na globino v 20 m globokem jezeru.

Globina [m]	0	4	8	12	16	20
Temperatura [°C]	15	14	13	6	5	4

1. Nariši graf, ki prikazuje odvisnost temperature jezera od njegove globine.
2. Kako bi ocenil temperaturo jezera na globini 20 m, če bi imel samo naslednje podatke:

Globina [m]	0	4	8
Temperatura [°C]	15	8	13

3. Med katerima dvema globinama je po tvojem mnenju ocena temperature jezera najmanj zanesljiva? Zakaj?
4. Poišči prilagoditveni funkciji na dveh ločenih intervalih.
5. Ali je smiselno ocenjevati temperaturo na globini, večji od 20 m? Razloži.

Naloga 4

Avtomobilske dirke

Indianapolis 500 je tradicionalna vsakoletna ameriška dirka, njeni začetki pa segajo v leto 1911. Med sezonama 1950 in 1960 je štela tudi za prvenstvo Formule 1. V spodnji preglednici je zapisana povprečna hitrost zmagovalca v miljah na uro za nekatera leta.

Leto	**Hitrost zmagovalca[milja/h]***
1920	89
1930	100
1940	114
1950	124
1960	139
1970	156
1980	143
1990	186
2000	154

** Angleška ali kopenjska milja je 1609 m.*

1. Kako se je hitrost zmagovalca v letih spreminjala? Katero leto je povprečna hitrost zmagovalca najbolj presenetljiva?

2. V koordinatnem sistemu predstavi podatke za leta od 1920 do 1960 iz zgornje preglednice. Poišči ustrezno prilagoditveno funkcijo.
3. Na osnovi modela iz naloge 2 sklepaj, kolikšno povprečno hitrost so gledalci pričakovali v letih 1970, 1980 in 1990. Kako se pričakovanje ujema z dejansko povprečno hitrostjo zmagovalca?
4. Iz grafa oceni največjo povprečno hitrost prvo leto prireditve 1911. Na spletni strani *http://sl.wikipedia.org/wiki/Indianapolis_500* (24.2.2010) poišči pravi podatek in ju primerjaj.
5. Ali lahko iz zgornjega grafa napoveš povprečno hitrost zmagovalca prihodnje leto in leta 2050?
6. Naštej nekaj dejavnikov, ki lahko vplivajo na dosežene povprečne hitrosti.

Naloga 5

Gorenje sveče in merjenje časa

Preden so iznašli mehanske ure za merjenje časa, so uporabljali sveče. Naslednja empirična funkcijska zveza povezuje višino sveče s časom: $h(t) = 10 - 2t$, kjer je h višina sveče v cm in t čas gorenja sveče v urah.

1. Kolikšna je višina sveče, preden jo prižgejo?
2. Kaj predstavlja v funkcijskem predpisu število 10?
3. Za koliko se sveča zniža vsako uro?
4. Kaj predstavlja konstanta 2 v funkcijskem predpisu?
5. Koliko časa sveča gori?
6. Koliko sveč bi potrebovali za merjenje časa v tednu dni?
7. Kaj so predpostavke vseh zgornjih ocen?

Naloga 6

Žeblji

Spodnja tabela prikazuje, kako se premer glave žeblja spreminja z njegovo dolžino.

Dolžina[mm]	**Premer [mm]**
20	1.2
25	1.4
30	1.6
35	1.6
35	1.8
40	2.0

45	2.2
50	2.2
55	2.2
55	2.5
60	2.5
60	2.8
65	2.8
65	3.1
70	3.1
80	3.1
80	3.4
90	3.4
100	3.8
90	3.8
110	4.2
120	4.2
130	4.6
140	5.5
160	5.5
180	6.0
210	7.0

1. V koordinatnem sistemu prikaži odvisnost premera glave žeblja od njegove dolžine.
2. Nariši najprimernejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis.
3. V kakšni odvisnosti je dolžina žeblja od premera glave žeblja. Zapiši funkcijski predpis.
4. Ali lahko določiš premere žebljev manjkajočih dolžin?
5. Ali obstajajo daljši (krajši) žeblji, ki jih dobiš s to modelsko funkcijo?

Naloga 7

Vroča čokolada

Vroča čokolada se po pripravi začne ohlajati. Kako je njena temperatura odvisna od časa po pripravi, prikazuje spodnja preglednica.

Čas[minuta]	10	20	40	70	80
Temperatura[°C]	95	77	52	28	23

1. Kaj prikazuje tabela?
2. Zgornje podatke nariši v koordinatni sistem in poišči najustreznejšo prilagoditveno krivuljo. Poišči njen funkcijski predpis.

3. Iz grafa oceni temperaturo čokolade po 50 minutah ohlajanja.
4. Preveri rezultat iz točke c) z uporabo funkcijskega predpisa.
5. S pomočjo prilagoditvene funkcije določi temperaturo čokolade po 90 minutah ohlajanja.
6. Ali se bo čokolada po preteku 80 minut še ohlajala?
7. Kaj je smiselno definicijsko območje te funkcije?
8. Kaj je smiselna zaloga vrednosti te funkcije?
9. Ali lahko na osnovi teh meritev sklepamo, da se vsaka vroča čokolada ohlaja na način, kot ga predvideva naš model? Svoje stališče razloži.
10. Od česa je odvisna natančnost ocen o temperaturi čokolade na časovnih intervalih, na katerih meritev ni bila izpeljana?

Naloga 8

Število prebivalcev na Zemlji

Število prebivalcev na planetu Zemlja se je v zadnjih nekaj stoletjih zelo povečalo. V spodnji preglednici imamo predstavljeno število prebivalcev v milijardah.

Leto	1600	1700	1800	1900	1950	1975	2000
Število prebivalcev [milijarda]	0,5	0,6	0,9	1,6	2,5	3,9	6,3

1. V koordinatnem sistemu prikaži, kako s časom narašča število prebivalcev na Zemlji. Poišči najprimernejšo prilagoditveno funkcijo, ki modelira zgornje podatke.
2. Kaj se dogaja s strmino krivulje?
3. Iz grafa oceni število prebivalcev na Zemlji leta 1500.
4. Iz grafa oceni število prebivalcev na Zemlji leta 2025.
5. Oblikuj odgovora na vprašanji 2. in 3. tako, da vključiš privzetke.
6. Katero oceno je laže narediti in zakaj?

Naloga 9

Velikosti žebljev

V spodnji tabeli je prikazana odvisnost dolžine žeblja v dveh različnih dolžinskih enotah od velikosti žeblja.

Velikost žebljev	**Dolžina v inčih**	**Dolžina v mm**
2d	1	25
3d	$1^1/_4$	32
4d	$1^1/_2$	38

6d	2	51
7d	$2^1/_4$	57
8d	$2^1/_2$	65
9d	$2^3/_4$	70
10d	3	76
12d	$3^1/_4$	83
16d	$3^1/_2$	89
20d	4	102
30d	$4^1/_2$	115
40d	5	127
50d	$5^1/_2$	140
60d	6	152

1. V koordinatnem sistemu prikaži, kako je dolžina v milimetrih odvisna od dolžine v inčih in obratno. Poišči zvezo med obema dolžinskima enotama.
2. V koordinatnem sistemu nariši odvisnost velikosti žeblja od njegove dolžine v milimetrih in obratno. Nariši najprimernejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis.
3. V koordinatnem sistemu nariši odvisnost dolžine žeblja v milimetrih (inčih) od njegove velikosti. Nariši najprimernejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis.
4. Izračunaj kompozitum dobljenih funkcij pod 2. in 3. Kaj ugotoviš?

Naloga 10

Razbarvanje raztopine

Pri poizkusu smo v raztopino rdeče barve vlili belilo in merili čas, v katerem se je raztopina razbarvala. Poizkus smo ponovili pri različnih temperaturah, temperaturi raztopine in belila sta bili vedno enaki. Vsakič smo izmerili čas, potreben za razbarvanje.

Eksperimentalni rezultati so podani v preglednici.

Temperatura T[°C]	**Čas t[s]**	***ln (t)***
3,5	690	
7,0	474	
12,0	292	
22,5	121	
27,0	69	
30,0	47	
34,5	35	

1. Kako je čas razbarvanja odvisen od temperature, pri kateri smo začeli poskus?
2. Nariši koordinatni sistem in prikaži odvisnost časa t od temperature T. Nariši funkcijo, ki se najbolje prilega izmerjenim podatkom.

3. Računsko poišči predpis za prilagoditveno eksponentno funkcijo v obliki $t(T) = a \cdot e^{kt}$. Koliko točk potrebuješ?
4. Izmerjene podatke predstavi v koordinatnem sistemu z Excelom (Geogebra, grafično računalo ...) in poišči prilagoditveno funkcijo. Funkcijski predpis primerjaj s funkcijskim predpisom, ki si ga izračunal brez IKT. Poizkusi še s katero drugo prilagoditveno funkcijo.
5. Izračunaj čas razbarvanja pri temperaturi 40 °C z obema funkcijskima predpisoma. Primerjaj rezultata.
6. V preglednici dopolni stolpec za *ln(t)*. Z uporabo tehnologije nariši graf *ln(t)* v odvisnosti od temperature T in najprimernejšo prilagoditveno funkcijo. Poišči njen funkcijski predpis.
7. S primerno osnovo logaritmiraj funkcijski predpis iz točke 4. in rezultat primerjaj s funkcijskim predpisom iz točke 6. Komentiraj dobljeni rezultat.
8. Kako uporaben se ti zdi eksponentni model?

Naloga 11

Cena smučarske vozovnice

Na smučišču prodajo na dan povprečno 1000 smučarskih vozovnic po 25 EUR. Vsaka podražitev smučarske vozovnice posledično vpliva na manjši obisk smučišča. Raziskave so pokazale, da se lahko število smučarjev zmanjša na dva različna načina:

a) zmanjšanje števila smučarjev je premo sorazmerno s podražitvijo, kjer je koeficient k premega sorazmerja enak k = 30. Podražitev za x EUR pomeni za 30-krat manj prodanih vozovnic,

b) zmanjšanje števila smučarjev je p EUR za vsak evro podražitve, kjer je p = 3.

Vprašanje: Za koliko se upravljavcu smučišča splača podražiti ceno vozovnice, da bodo kljub manjšemu številu prodanih vozovnic imel večji oziroma enak dohodek?

Katera napoved je za upravljavca smučišča boljša? Kateri model je bolj smiseln? Utemelji?

Literatura:

Edwards, D., Hamson, M. (1996). Mathematical Modelling Skills. Hampshire, UK: MacMillan Press Ltd.

Naloga 12

Promet

S kolikšno hitrostjo naj vozimo, da bo čim manj zastojev?

Pot ustavljanja je enaka vsoti reakcijske poti, ki jo naredimo, preden se odzovemo na oviro, in poti, ki jo naredimo med zaviranjem – zavorne poti. Reakcijska pot je pot, ki jo vozilo prevozi od trenutka, ko voznik zazna oviro pred vozilom, do trenutka, ko začne

zavirati, torej pot, ki jo prevozi v reakcijskem času. Predvideva se, da je reakcijski čas povprečnega voznika približno sekunda. Po eni sekundi začne voznik zavirati, zavorna pot pa je odvisna od hitrosti, razmer na cesti in še česa drugega.

V spodnji preglednici so zbrani podatki o poti ustavljanja pri različnih hitrostih na suhi cesti.

Hitrost v[km/h]	**Reakcijska pot (m)**	**Zavorna pot (m)**	**Hitrost v [m/s]**	**Pot ustavljanja s[m]**
30	8	5		
50	14	13		
70	19	26		
90	25	42		
110	31	63		
130	36	90		

Predpostavimo, da vozijo avtomobili v medsebojni razdalji, ki je enaka poti ustavljanja pri njihovi hitrosti.

Vprašanje: Kako hitro naj vozijo avtomobili, da gre mimo opazovališča prometa v eni uri največ avtomobilov?

1. Dopolni zgornjo preglednico: hitrost pretvori v m/s in izračunaj pot ustavljanja.
2. Razišči, kako je pri danih podatkih celotna pot ustavljanja odvisna od hitrosti, s katero vozimo (s = s(v)). Nariši graf poti s[m] ustavljanja v odvisnosti od hitrosti v[m/s]. Nariši najprimernejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis (pri tem uporabi grafično računalo ali ustrezen matematični program).
3. Predpostavimo, da je v povprečju avto dolg 4 m. Rekli smo, da avtomobili vozijo v medsebojni razdalji, ki je enaka poti ustavljanja. Koliko je pri dani hitrosti v razdalja med začetkom prvega avtomobila in začetkom drugega?
4. Kolikšen je časovni interval med prihodom avtomobila do opazovališča do prihoda drugega?
5. Koliko avtomobilov pelje mimo opazovališča v eni uri?
6. Pri kateri hitrosti je število avtomobilov največje? Koliko avtomobilov je peljalo mimo opazovališča?

Naloga 13

Čakalni čas pred zapornicami

Čas čakanja vlaka pred zapornicami v odvisnosti od hitrosti vlaka prikazuje spodnja tabela.

Hitrost vlaka [km/h]	16,1	32,2	48,3	64,4	80,5	96,6
Čas čakanja[min]	12	6	4	3	2,4	2

1. Kako se spreminja čas čakanja pred zapornicami v odvisnosti od hitrosti vlaka?
2. V koordinatnem sistemu prikaži čas čakanja pred zapornicami v odvisnosti od hitrosti vlaka.
3. Nariši najprimernejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis. Kako imenujemo dobljeno krivuljo.

Naloga 14

Dolžina dneva

Dolžina dneva se v Ljubljani med letom spreminja. Spodnja tabela prikazuje tipične podatke za Ljubljano za leto 2010. Podatki so povzeti s spletne strani http://vesolje.net/koledar/koledar.php (22. 1. 2010).

Dan v letu 2010	Dolžina dneva v urah*	Dan v letu 2010	Dolžina dneva v urah*
5. januar	8:48	5. julij	15:38
21. januar	9:16	21. julij	15:12
5. februar	9:55	5. avgust	14:37
21. februar	10:43	21. avgust	13:51
5. marec	11:22	5. september	13:06
21. marec	12:13	21. september	12:14
5. april	13:02	5. oktober	11:29
21. april	13:52	21. oktober	10:38
5. maj	14:34	5. november	9:54
21. maj	15:12	21. november	9:13
5. junij	14:36	5. december	8:49
21. junij	15:46	21. december	8:39
		5. januar 2011	8:48

** Opomba: Zapis 8:48 pomeni 8 ur in 48 minut.*

1. Kaj se dogaja z dolžino dneva? Kakšno lastnost ima?
2. V koordinatnem sistemu prikaži podatke. Na abscisni osi naj bo čas od prvega podatka 5. januar 2010 (npr. 21. 1. 2010 je pri 0,5 meseca, 5. 2. 2010 je pri 1 mesecu ...)
3. Z besedami in funkcijskim predpisom opiši odvisnost med spremenljivkama.
4. Oceni dolžino dneva za svoj rojstni dan.
5. Napovej dolžino dneva 200 dni po 1. septembru?
6. Določi zalogo vrednosti dobljene funkcije.
7. Kdaj funkcija zavzame maksimalno in kdaj minimalno vrednost?
8. Kako se dolžina dneva spreminja s časom na ekvatorju? Odvisnost prikaži v koordinatnem sistemu.

Naloge in rešitve nalog so v mapi Naloge iz modeliranja v dokumentih Naloge.doc in Resitve.doc.

2.6 Naloge za preverjanje delnih ciljev

Naloga 1

Čistilnica

V čistilnici in pralnici ČISTČISTO je cena pranja in likanja moške srajce 1,30 EUR. Če je število srajc, ki jih stranka prinese v čistilnico, večje ali enako 6, se cena zniža za 1,30 EUR.

I.

1. Katera trditev je pravilna:
   - Cena C je funkcija števila srajc n.
   - Število srajc n je funkcija cene C.
2. Katera je odvisna in katera neodvisna spremenljivka?
3. Zapiši definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije.

II.

1. Zapiši predpis za funkcijo $C(n)$.

Naloga 2

Insekti

V laboratorijskem eksperimentu je število insektov v prvih petih dneh poteka eksperimenta naraščalo eksponentno po enačbi $f(t) = 42 \cdot 1{,}208^t$, pri čemer je čas t merjen v dnevih.

1. Koliko insektov je bilo na začetku eksperimenta?
2. Za koliko odstotkov je na dan naraščalo število insektov?
3. Kakšen je bil faktor rasti v izvedenem eksperimentu?
4. Kaj faktor rasti pomeni?

Naloga 3

Širjenje virusa gripe H1N1

Na spletni strani Wikipedie http://en.wikipedia.org/wiki/2009_flu_pandemic_tables so naslednji podatki o širjenju virusa gripe H1N1 v svetu leta 2009:

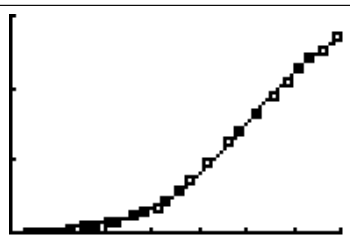
Datum	Podatki na abscisni osi	Število obolelih
24. april		25
30. april		257
5. maj		1490
10. maj		4379
15. maj		7520
20. maj		10243
25. maj		12514
29. maj		15501
5. junij		21924
10. junij		27713
15. junij		35891
19. junij		44287
24. junij		55867
29. junij		70893
6. julij		94512
15. julij		125993
20. julij		141962
27. julij		163859
3. avgust		188333
9. avgust		208269
14. avgust		226065
19. avgust		243587
24. avgust		253169
31. avgust		268609

** Zaradi zelo hitrega širjenja virusa so za poznejša obdobja dani samo še podatki o umrlih.*

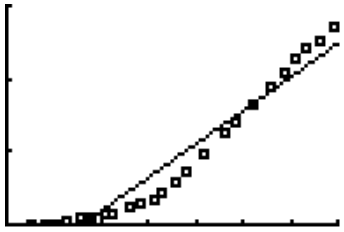
1. Izpolni drugi stolpec tabele s števili, ki bi jih namesto datumov zapisal/a na abscisno os, ko bi risal točkovni graf.
2. Na spodnjih slikah so dobljene prilagoditvene krivulje in njihove enačbe, ki jih dobimo iz podatkov o številu okuženih z virusom H1N1 od 20. aprila do 31. avgusta. Kateri dve lahko izbereš kot najboljši model? Zakaj?

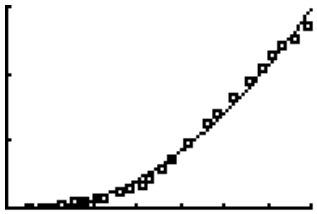
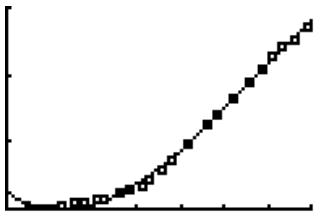
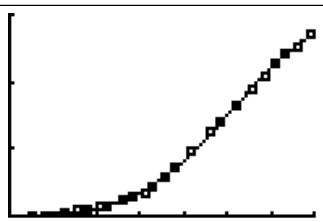
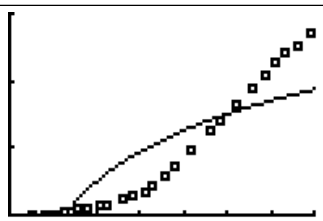
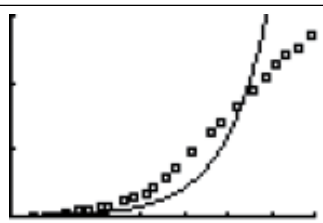
a)

Logistic
y=c/(1+ae^(-bx))
a=167.4404112
b=.5121539743
c=302228.5155

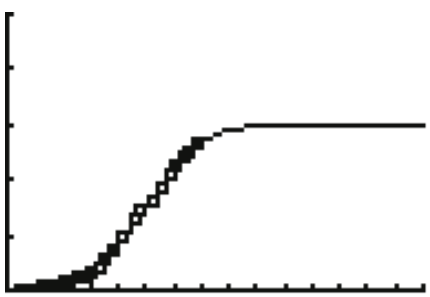


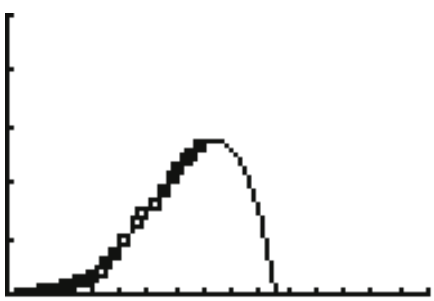
b)



c)	QuadReg y=ax²+bx+c a=1758.883203 b=-3274.622681 c=-2075.10592	
d)	CubicReg y=ax³+bx²+cx+d a=-132.7361222 b=4685.085267 c=-21240.66263 d=25165.15765	
e)	QuarticReg y=ax⁴+bx³+…+e a=-29.06535736 b=726.8422266 c=-3752.925825 d=9580.021803 e=-6889.204611	
f)	LnReg y=a+blnx a=-102624.0137 b=109873.21	
g)		

3. Pri prejšnji nalogi v (b) in v (g) delu manjkata zapisa funkcij. Katera funkcija je izbrana v delu (b) in katera v (g)?
4. Izberi tisto sliko, ki bolje opisuje širjenje virusa H1N1 po 31. avgustu 2009:





5. Na levi sliki v prejšnji nalogi je predstavljen logistični model širjenja virusa H1N1 in na desni polinomski, polinom 4. stopnje. Čeprav sta bila v drugi nalogi mogoča kar dva odgovora, se sedaj odločimo samo za en model, ki opisuje širjenja virusa H1N1 leta 2009, to je ..... .

Naloga 4

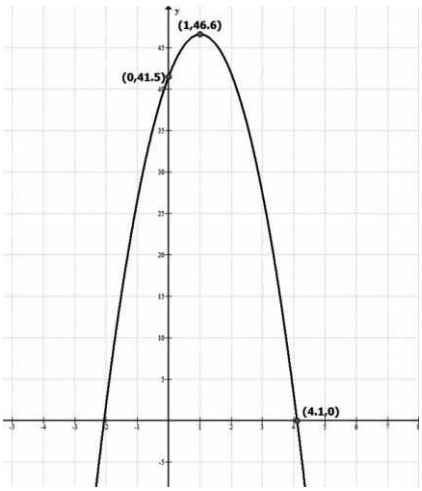
Met kamna

Domen na 40 m visoki pečini vrže v zrak kamen. Višino kamna v odvisnosti od časa opišemo s funkcijo $h(x) = -4{,}9x^2 + 10x + 41{,}5$, *kjer je h višina v metrih in x čas v sekundah.*

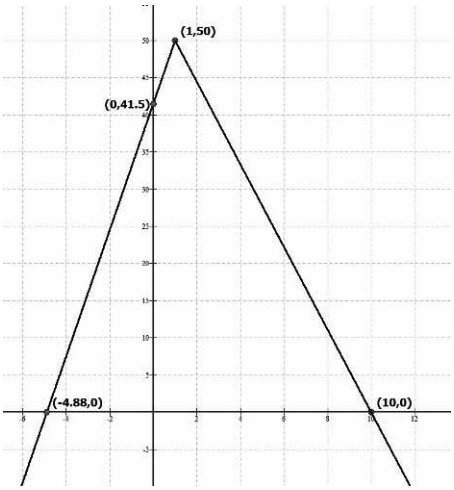
Uporabite program Graph.

1. Kateri izmed naslednjih grafov po vašem mnenju ustreza dani funkciji? Zakaj?

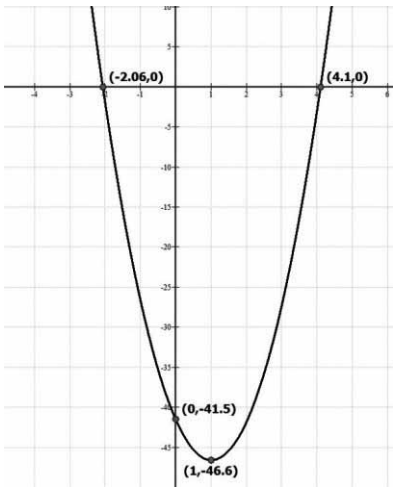
a)



b)



c)



2. Narišite graf funkcije $h(x)$ in tako preverite pravilnost svojega odgovora.
3. Spremenite nastavitve koordinatnega sistema tako, da bo graf pregleden.
4. Na graf zapišite funkcijski predpis.
5. Zapišite območje, na katerem je dana funkcija primeren model za met kamna.
6. Razložite, kaj v funkcijskem predpisu pomeni 41.5.
7. Na kateri višini je kamen po
   - 2 sekundah?
   - 3 sekundah?
   - 4 sekundah?
8. Koliko je najvišja višina, ki jo kamen doseže? Čez koliko časa se kamen obrne?
9. Čez koliko sekund pade kamen na tla?

Naloga 5

Kocka ledu

Kocko ledu potopimo v vročo vodo in tam se začne počasi taliti. Njeno prostornino opisuje funkcija $V(x) = (4 - 0{,}2x)^3$ *, kjer je V prostornina v* cm^3 *in x čas v minutah.*

1. Odprite novo datoteko.
2. Narišite graf, ki bo ponazarjal taljenje ledene kocke, to je njeno prostornino V v odvisnosti od časa x.
3. Spremenite nastavitve koordinatnega sistema tako, da bo graf pregleden.
4. Na graf zapišite funkcijski predpis.
5. Kolikšna je bil prostornina kocke na začetku taljenja?
6. Kolikšna je prostornina kocke po
   - 1 minuti taljenja?
   - 2 minutah taljenja?
   - 15 minutah taljenja?
7. Čez približno koliko minut taljenja je prostornina kocke
   - 30 cm^3?
   - 3 cm^3?
8. Čez koliko minut taljenja se bo kocka stalila?

Naloga 6

Prostornina kocke

Prostornina kocke V je odvisna od roba kocke x: $V(x) = x^3$.

1. Narišite graf funkcije *V*.
2. Zapišite območje, na katerem je dana funkcija primeren model za prostornino kocke.
3. Iz grafa odčitajte prostornino kocke *V*, če meri rob
   - $x = 1\ cm$.
   - $x = 2\ cm$.
   - $x = 3\ cm$.
4. Iz grafa odčitajte rob kocke *x*, če meri prostornina
   - $V = 8\ cm^3$.
   - $V = 50\ cm^3$.
5. Za nalogo 5 ugotovite rob kocke ledu na začetku taljenja in po 15 minutah.

Naloga 7

Prostornina krogle

1. Poiščite funkcijski predpis, ki pove odvisnost prostornine krogle *V* od polmera *x*.
2. Narišite graf funkcije *V*.
3. Zapišite območje, na katerem je dana funkcija primeren model za prostornino krogle.
4. Iz grafa odčitajte prostornino krogle *V*, če meri polmer
   - $x = 1\ cm$.
   - $x = 2\ cm$.
   - $x = 5\ cm$.
5. Iz grafa odčitajte polmer krogle, če meri prostornina $V = 8\ cm^3$.

Opomba: Naloge 5. 6. in 7. so vzete in prirejene iz učbenika SPATIUM, stran 41.

Naloga 8

Nihajni čas

Nihajni čas t_0 nihala lahko pri majhnih odmikih od ravnovesne lege izrazimo z dolžino nihala l in težnim pospeškom g takole:

$t_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ *(1)*

Ko v formulo postavimo g = 9,8 m/s², dobimo poenostavljen izraz

$t_0 = 2\sqrt{l}$ *(2)*

Vprašanje: Razmislite, v čem je razlika med obema (modeloma) formulama? Kdaj lahko uporabljamo prvo in kdaj drugo?

Naloga 9

Težni pospešek

Ko pomnožimo enoto za težni pospešek [g] z enoto za čas [t], dobimo enoto za hitrost [v]. Od tod sklepamo, da za hitrost telesa pri prostem padu velja:

a) $v = gt$

b) $v = \alpha gt$

c) $v = gt/\beta$

č) $v = \gamma t$

Naloga 10

Prosti pad

Ko izračunamo enoto [gh], dobimo kvadrat enote za hitrost. Od tod sklepamo, da za hitrost pri prostem padu velja:

a) $v = \sqrt{gh}$

b) $v = \alpha\sqrt{gh}$

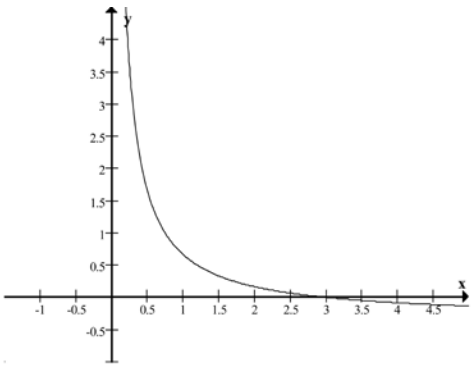
c) $v = \beta\sqrt{h}$

Naloga 11

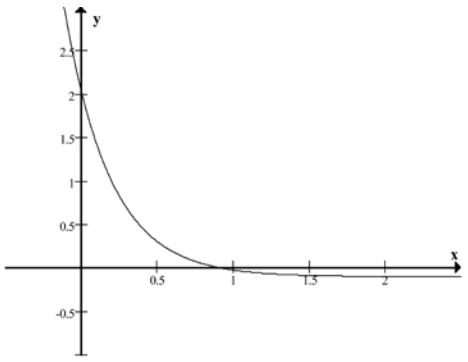
Čiščenje jezera

V onesnaženo jezero smo ustavili dotok onesnaženja. Od takrat doteka le čista voda in jezero se počasi čisti. Kateri graf najbolj ustreza opisani situaciji (onesnaženost jezera v odvisnosti od časa)? Utemeljite.

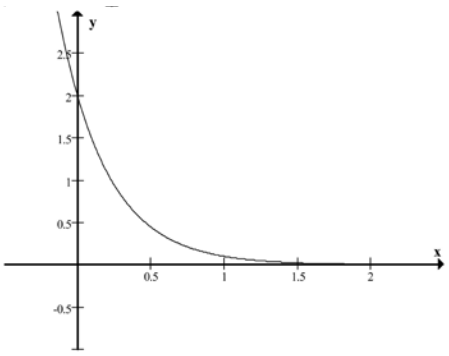
a)



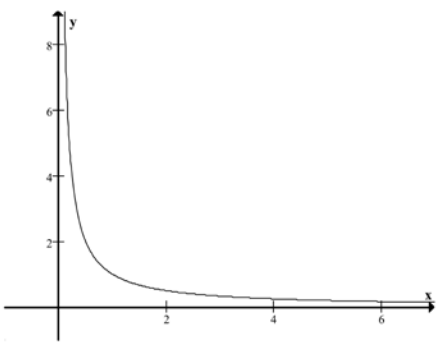
b)



c)



d)



Naloge in rešitve nalog so v mapi Naloge za doseganje delnih ciljev v dokumentih Naloge_delni_cilji.doc in Resitve_naloge_delni_cilji.doc.

Statistika

3.1 Od obdelave podatkov v osnovni šoli do statistike v gimnaziji

Amalija Žakelj

3.1.1 Uvod

Komisija za razvoj pismenosti je v dokumentu Nacionalna strategija za razvoj pismenosti opredelila pismenost kot trajno razvijajočo se zmožnost posameznikov, da uporabljajo družbeno dogovorjene sisteme simbolov za sprejemanje, razumevanje, tvorjenje in uporabo besedil za življenje v družini, v šoli, na delovnem mestu in v družbi. Pridobljeno znanje in spretnosti ter razvite sposobnosti posamezniku omogočajo uspešno in ustvarjalno osebnostno rast ter odgovorno delovanje v poklicnem in družbenem življenju. (Bucik N. at all. 2006: 7)

Kot zmožnost in družbena praksa se pismenosti pridobivajo in razvijajo vse življenje v različnih okoliščinah in na različnih področjih ter prežemajo vse človekove dejavnosti. Pridobljeno znanje in spretnosti ter razvite sposobnosti omogočajo posamezniku uspešno in ustvarjalno osebnostno rast ter odgovorno delovanje v poklicnem in družbenem življenju.

Poleg zmožnosti branja, pisanja in računanja, ki veljajo za temeljne zmožnosti pismenosti, se poudarja tudi pomen drugih pismenosti, kot so informacijska, statistična, podatkovna, digitalna, medijska, matematična in druge, ki so pomembne za uspešno delovanje v družbi.

V nadaljevanju so predstavljene temeljne značilnosti in definicije informacijske, statistične in podatkovne pismenosti, o matematični pismenosti pa je več zapisano v poglavju 1.4.

3.1.2 Informacijska, statistična in podatkovna pismenost

Informacijska pismenost

Informacijska pismenost je sposobnost posameznika določiti obseg potrebnih informacij, dostop, učinkovitost in zmogljivost informacij, kritično ovrednotiti informacije in njihov izvor, učinkovito uporabiti informacije za specifične namene, razumeti njihov ekonomski, pravni in socialni izvor in uporabiti informacije etično in legalno (Schield, 2004).

Leta 1998 so ALA (American Library Association) in ACRL (Association of College and Research) objavili več različnih programov in pogledov na informacijsko pismenost. Kljub nekaterim razlikam je bila vsem skupna potreba po kritični evalvaciji in kritični interpretaciji informacij, podatkov in statističnih rezultatov (Schield, 2004).

Posameznik, ki je informacijsko pismen, ima sposobnost locirati, evalvirati in uporabiti potrebne informacije, razširja jih previdno ter razume njihovo kakovost, raz-

likuje med dejstvi, bistvom in mnenjem, identificira nepravilne in zavajajoče informacije (npr. oglaševanje, reklamna sporočila), selekcionira primerne informacije glede na problem (Schield, 2004).

Če bi povzeli, bi lahko rekli, da je informacijsko pismen posameznik sposoben kritično misliti o informacijah, ugotavljati in argumentirati, kadar bere, interpretira in evalvira informacije. Pomembna komponenta informacijske pismenosti je statistična pismenost, sposobnost kritično misliti o temeljih opisne statistike. Posebna veščina so analiziranje, interpretiranje in evalviranje statistike kot dokaza. Komponenta informacijske in statistične pismenosti je podatkovna pismenost, sposobnost dostopati do podatkov, jih ocenjevati, manipulirati z njimi, jih združevati in jih predstaviti.

Statistična pismenost

Velik del informacij vključuje statistiko. V 21. stoletju si težko predstavljamo biti informacijsko pismen, ne da bi bili statistično pismeni. Kako bi lahko govorili o veljavnih izsledkih raziskav v naravoslovju ali družboslovju brez uporabe statističnih orodij? In s prihodom računalnikov in interneta se vsak izmed nas vsak dan srečuje s poplavo statističnih informacij.

V gimnaziji naj bi si dijaki pridobili temelje statističnega razmišljanja in veščine kritičnega mišljenja pri branju in interpretiranju tekstov, ki vključujejo statistične podatke in analize. Pridobili naj bi izkušnje pri uporabi statističnih informacij in nekaterih preprostih statističnih metod. S praktičnimi primeri (iz vsakdanjih okoliščin) naj bi ugotovili, kako interpretirati statistične informacije, jih ovrednotiti in predstaviti ter kako v podatkih poiskati tiste informacije, ki so potrebne za nadaljnje procese odločanja.

Temeljno znanje statistično pismenega posameznika je:

- sposobnost izbire ustrezne statistične metode glede na cilj statistične analize (opisna, inferenčna) in vrsto podatkov (merska lestvica),
- razumevanje izpisov statističnih programov,
- sposobnost kritičnega ovrednotenja predstavitev in interpretacij statističnih podatkov v poročilih in medijih.

Joel Best (Joel Best 2001, 2004) meni, da je ključ do statistične pismenosti spoznanje, da je statistika v bistvu družbeni konstrukt. Statistika ugotavlja, meri, zbira, interpretira podatke o stvareh, za katere je zainteresirana družba.

Podatkovna pismenost

Del matematične pismenosti je tudi temeljno znanje o obdelavi podatkov. Finančno-ekonomske strani časopisov, reklame, politično argumentiranje in druga medijska sporočila navadno vsebujejo tudi preglednice, grafikone, primerjave povprečij. Podatkovna pismenost zahteva razumevanje tovrstnih sporočil ter kritični pogled na prikazane informacije. V temelju odgovarja na vprašanja, kako pridobiti in manipulirati s podatki.

Posameznik mora imeti široko paleto orodij za dostop, preoblikovanje in manipulacijo s podatki. To zahteva tudi razumevanje statističnih programov za obdelavo podatkov (SPSS, STAT, MINITAB, MS Excel, Fathom, TinkerPlot), pa tudi programov za prikazovanje podatkov (MS Excel, Fathom, TinkerPlot, MS Power Point, Gapminder). V slovenskih učnih načrtih (2008) govorimo o digitalni kompetenci in predvsem o dejavnostih za njihov razvoj, kot na primer, kako kritično uporabljati informacijsko-komunikacijsko tehnologijo (računalniške programe, e-učenje, uporabo spleta, e-pošte, videokonference idr.).

Podatkovna pismenost je veščina kritičnega iskanja, razumevanja, vrednotenja in uporabe podatkov pri reševanju problemov. Pripomore k učinkovitejšemu delovanju posameznika na različnih področjih, kjer je potrebno kritično presojanje podatkovnih osnov predstavljenih vsebin, v znanosti, pri izobraževanju in v vsakdanjem življenju (*http://sl.wikipedia.org/wiki/Podatkovna_pismenost*).

V primerjavi s splošno pismenostjo se podatkovni pismenosti namenja še vedno dokaj malo pozornosti v programih opismenjevanja na različnih ravneh izobraževanja.

Elementi podatkovne pismenosti

Če gre za probleme, pri katerih je treba zbrati tudi podatke, razvijamo podatkovno pismenost. Prvi element je **prepoznati in opredeliti problem** tako, da bo nakazana rešitev z uporabo podatkov. Seveda je pri opredelitvi problema pomembno tudi poznavanje drugih virov, kot so primerne teorije, pretekle študije istih ali sorodnih problemov ipd. Vendar je zmožnost anticipacije, s kakšnimi podatki in kako bi bil problem rešljiv, tudi temelj za prepoznanje potrebe po določenih podatkih.

Razgledanost po podatkovnih virih glede vrste podatkov in načinov iskanja ter dostopa je naslednji element podatkovne pismenosti. Arhivi podatkov so – podobno kot knjižnice za splošne informacije – eden od naslovov, kamor se lahko obrnemo. Producenti podatkov, kot so statistični uradi, mednarodne organizacije, npr. International Labour Organization (*http://www.ilo.org/global/lang--en/index.htm*), znanstveni inštituti, agencije in drugi, velikokrat z večjimi ali manjšimi omejitvami omogočajo dostop in uporabo njihovih podatkov.

Ovrednotenje podatkov je naslednji pogoj za njihovo uporabo, večina jih je namreč skonstruiranih s postopkom zbiranja, navadno z instrumenti. Ločiti je treba njihovo semantično in metodološko komponento. Prva govori o pomenu in vsebini podatkov glede na nastanek v odnosu do namena uporabe. Njihova metodološka kakovost se lahko preveri v toku analize, pomembna merila pri presoji kakovosti so tudi bibliografske in metodološke informacije o nastanku podatkov. Kadar je na voljo več virov podatkov, lahko izberemo enega najustreznejšega ali jih kombiniramo več hkrati.

Uporaba in razumevanje podatkov zahteva dodatne veščine **statistične pismenosti** za izbor ustreznih orodij in načinov za analizo podatkov, predstavitev rezultatov analiz in nezavajajočo interpretacijo. Zadnji vidik je povezan tudi s poznavanjem omejitev pri delu s podatki, ki izhajajo iz etičnih načel (zaupnost podatkov, upoštevanje avtorstva, kadar so stvari objavljene, pravica javnosti do resnice).

Medsebojna povezanost vseh treh pismenosti

Z uporabo osebnih računalnikov in z dostopom do spletnih strani zahteva informacijska pismenost oboje – statistično in podatkovno pismenost.

Informacijsko, statistično in podatkovno pismenost lahko v šoli razvijamo s skupnim problemom reševanja. Vse tri so bolj splošne kot specifične, vsaka od njih vključuje interdisciplinarnost. Informacijska in podatkovna pismenost naj bi vključevali kritično mišljenje in statistično pismenost.

Statistika povzema podatke. Statistične numerične vrednosti so posledice dejstev, kako podatke uredimo, transformiramo in z njimi manipuliramo. Transformiranje in manipuliranje podatkov je posebna veščina, ki zahteva veliko znanja. Tako so podatki pomembni elementi informacijske in podatkovne pismenosti. Kako medsebojno organizirati pismenosti, je odvisno od perspektive, iz katere gledamo.

Iz disciplinarne perspektive – posamezniki naj bi bili sposobni analizirati, interpretirati in evalvirati podatke v družboslovnih, naravoslovnih znanostih idr.

Podatkovna pismenost je potrebna za dostop, manipulacijo in povzemanje podatkov. Toda statistična pismenost je potrebna, da vidi v tem proces, medtem ko informacijska pismenost privede do celotnega konteksta za evalvacijo virov podatkov in primernih manipulacij. Bistveno je, da so informacijska, statistična in podatkovna pismenost povezane z vsakdanjimi, skupnimi problemi.

Informacijsko-komunikacijska tehnologija

Postopki in metode, ki jih uporabljamo pri obdelavi podatkov in statistiki, so povezani z dostopnimi tehnološkimi sredstvi. Poudarjeno navajanje in prikazovanje podatkov v sodobnem svetu sovpada z razcvetom računalniške oz. informacijske tehnologije. Uporaba tehnologije, informacijska pismenost, statistična pismenost in podatkovna pismenost je pričakovanje današnje in prihodnje družbe, pričakujejo jih pri nadaljnjem študiju, v vseh poklicih in na vseh delovnih mestih, so pa tudi sestavni del vsakdanjega življenja. Zato mora šola usposobiti učence za njeno uporabo. Pouk matematike usposablja predvsem za uporabo tehnologije pri spopadanju z matematičnimi problemi in posredno tudi za uporabo v vsakdanjem življenju.

Informacijsko-komunikacijska tehnologija odpira veliko možnosti za učinkovitejši razvoj matematičnega znanja dijaka/dijakinje ter omogoča različne pristope k poučevanju in učenju (npr. raziskovanje in reševanje matematičnih ter avtentičnih problemov).

Informacijsko-komunikacijska tehnologija je lahko sredstvo za razvoj matematičnih pojmov, sredstvo za ustvarjanje, simuliranje in modeliranje resničnih in učnih situacij, le učni pripomoček, metoda dela, komunikacijsko sredstvo.

Vrste tehnologij, ki jih že uporabljamo v šolah, so zelo pestre in različne: numerična računala, simbolna računala, osebni ali prenosni računalnik, programi, namenjeni razvoju matematičnih pojmov, avtomatiziranju in preverjanju znanja, e-gradiva in informacije na internetu (e-učilnica), orodja za prenos in zapis ter prikazovanje podatkov, postopkov, rezultatov (Učni načrt za matematiko za gimnazijo, 2008).

3.1.3 Obdelava podatkov v osnovni šoli

Obdelava podatkov je lahko v osnovni šoli učinkovit način razvijanja razumevanja količin in sklepanja. Tehnike dela s podatki so pomemben del problemskih znanj, saj omogočajo ali vsaj olajšujejo opažanje pravil in vzorcev, postavljanje hipotez in vprašanj, tudi v popolnoma matematičnih kontekstih. Delo s podatki je zelo naravna vez med poukom matematike in drugimi predmeti oz. zunajšolskimi izkušnjami. Aktivnosti, povezane z delom s podatki, so lahko kot prva izkušnja z verjetnostjo. V gimnaziji vsebino nadgradimo in razširimo. Poudarek je na razumevanju potrebnosti meril za sredino in razpršenost, standardni odklon ter izdelavo zahtevnejše statistične naloge.

V okviru osnovnošolskega učnega načrta matematike iz leta 1998 (Učni načrt za matematiko za osnovno šolo, 2002) in tudi v posodobljenem učnem načrtu za matematiko iz leta 2008 (Učni načrt za matematiko za osnovno šolo, 2009) govorimo le o obdelavi podatkov, in ne o statistiki.

Na tem mestu navajamo le cilje in vsebine o obdelavi podatkov od 6. do 9. razreda osnovne šole, čeprav se vsebine sistematično pojavljajo od prvega razreda in se spiralno nadgrajujejo v višje razrede.

Tabela: Cilji in vsebine pri obdelavi podatkov v osnovni šoli (Posodobljeni učni načrt za matematiko za OŠ, 2008).

CILJI	VSEBINA
6. razred	
• Sistematično beležijo štetje in meritve ter jih smiselno zapišejo v preglednico; • razporedijo izide meritev v smiselne skupine; • opredelijo in utemeljijo kriterij urejanja podatkov; • poznajo prednosti (linearno) urejenih podatkov pri delu s podatki; • razporejajo podatke po enem ali dveh kriterijih (tudi numeričnih); • dane (zbrane) podatke smiselno uredijo v preglednico; • spoznajo osnove računalniških preglednic; • uporabljajo računalniške preglednice (najosnovnejša znanja); • uporabijo računalniško preglednico za urejanje podatkov po velikosti (razvrščanje); • iz prikaza preberejo podatke in jih interpretirajo; • izberejo primeren prikaz za predstavitev podatkov; • berejo odnose med podatki; • razvijajo kritični odnos do interpretacije rezultatov.	Zbiranje podatkov (beleženje štetja, meritev) Strukturiranje podatkov (urejanje podatkov po velikosti (razvrščanje), razporejanje podatkov v skupine po enem ali dveh kriterijih) Predstavitev podatkov (v preglednicah, s prikazi) Računalniške preglednice Raziskava (uporaba znanja o obdelavi podatkov)

7. razred	
• Razberejo podatke iz prikazov in jih interpretirajo; • pri reševanju problemov izberejo in izdelajo primeren diagram za predstavitev podatkov; • uporabljajo primerne diagrame in tabele za prikaz življenjskih situacij (populacija, sprememba tečaja valute, bruto družbeni proizvod, rast prebivalstva itd.); • izdelajo diagram z računalniško preglednico; • kritično razmišljajo o orodjih za prikazovanje podatkov; • razvijajo kritični odnos do interpretacije rezultatov; • izdelajo empirično preiskavo.	**Zbiranje, urejanje in predstavitev podatkov** Krožni diagram Razsevni diagram Črtni (linijski) diagram Empirična preiskava
• Določijo aritmetično sredino; • razumejo in uporabijo aritmetično sredino pri reševanju (matematičnih) problemov.	**Merila za sredino in razpršenost** Aritmetična sredina
8. razred	
• Prikažejo odvisnost diskretnih spremenljivk z grafi; • prikažejo odvisnost zveznih spremenljivk z grafi; • izdelajo empirično preiskavo.	**Zbiranje, urejanje in predstavitev podatkov** Grafi Empirična preiskava
• Razumejo in uporabijo aritmetično sredino pri reševanju matematičnih problemov; • razumejo in uporabijo aritmetično sredino v realističnih kontekstih; • kritično ovrednotijo rešitev problema (pomen aritmetične sredine).	**Merila za sredino in razpršenost** Aritmetična sredina
9. razred	
• Poznajo osnovne vrste vprašanj (da–ne, izbirna, številski odgovori, prosti odgovori ipd.); • sestavijo vprašalnik; • uporabijo vprašalnik v empirični preiskavi; • kritično razmišljajo o orodjih za zbiranje, urejanje in prikazovanje podatkov; • izdelajo empirično preiskavo.	**Zbiranje, urejanje in predstavitev podatkov** Vprašalniki Uporaba orodij Empirična preiskava
• Določijo aritmetično sredino, modus in mediano za dane podatke; • smiselno določijo tip sredine (glede na tip podatkov); • kritično primerjajo sredine; • izračunajo sredino z žepnim računalom in s preglednico;	**Merila za sredino in razpršenost** Aritmetična sredina Modus Mediana Škatla z brki

• določijo in grafično ponazorijo »medčetrtinski« (interkvartilni) razmik. • Pridobijo izkušnje o numerično izraženi verjetnosti; • ocenijo verjetnost s sklepanjem in utemeljevanjem (življenjske situacije); • opravljajo poskuse (met kocke, met žebljičkov, met kovanca, met valja idr.), opazujejo izbrane dogodke, beležijo izide in napovedujejo verjetnost dogodka; • opravljajo poskuse in na osnovi analize s kombinatoričnim drevesom napovedujejo izide (npr. met kovanca); • zberejo, uredijo, analizirajo rezultate poskusa in ob konkretnih primerih (poskusih) spoznajo statistično verjetnost dogodka; • povežejo pojma statistična in matematična verjetnost.	**Izkušnje s slučajnimi dogodki** Pojmi: poskus, dogodek, izid Dogodek: nemogoč, gotov, slučajni dogodek Verjetnost dogodka (statistična verjetnost)

Navedeni cilji se po vsebini ujemajo z učnim načrtom za matematiko iz leta 1998, terminološko in didaktično pa so natančnejši.

Obdelava podatkov zajema kakršno koli delo s podatki. V osnovni šoli posebej poudarjamo zbiranje in urejanje podatkov, prikazovanje/reprezentiranje podatkov ter njihovo interpretiranje. Poudarek je na **razumevanju pojmov**, povezanih z obdelavo podatkov, in na **učenju strategij pri delu s podatki**. Tako npr. pri prikazovanju podatkov ni pomembno le, da učenec pozna različne prikaze in jih zna narisati, temveč da za dano situacijo izbere primeren diagram, da torej diagrame tudi razume. Z drugimi besedami, pri pouku matematike oz. pri pouku obdelave podatkov naj se ne bi učili le tehnik prikazovanja podatkov, temveč predvsem smiselne uporabe obdelave podatkov z razumevanjem. Tudi če si pri izdelavi diagrama pomagamo z računalniškimi programi, ki neizmerno poenostavijo tovrstno delo, je treba znati diagrame interpretirati ter izbrati primeren diagram glede na naravo podatkov.

Npr. naloga VSTOPNICE, ki jo navajamo v nadaljevanju, ne preverja risanja diagramov, ampak razumevanje spremenljivk, odnosa med količinami ter interpretiranje podatkov, v povezavi s tem pa sposobnost pravilne izbire diagrama.

Celovit postopek ugotavljanja dejstev, ki temeljijo na zbiranju in predstavitvi podatkov, predelavi podatkov, sklepanju in ugotavljanju zakonitosti, pa v osnovni šoli predstavimo učencem z empiričnimi preiskavami.

Poleg osnov o obdelavi podatkov naj bi se učenci pri pouku matematike srečali tudi s *slučajnimi dogodki* oziroma z verjetnostjo, vendar le na *izkustveni ravni*. S tem želimo olajšati učenje verjetnosti v srednji šoli, kjer je pomembna ovira pri razumevanju matematičnega pojmovanja verjetnosti prav pomanjkanje izkušenj s slučajnimi dogodki ter poznavanja dela s podatki. In pri vpeljavi empirične verjetnosti si pomagamo z znanjem o obdelavi podatkov.

3.1.4 Kaj prispeva obdelava podatkov k učenju in poučevanju matematike ter matematičnemu znanju

1. Obdelava podatkov je učinkovit način razvijanja količinskega razumevanja in sklepanja ter uporabe aritmetike pri reševanju problemov.
2. Tehnike dela s podatki so pomemben del problemskih znanj, saj omogočajo ali vsaj olajšujejo opažanje pravil in vzorcev, postavljanje hipotez in vprašanj, tudi v matematičnih kontekstih (učenje strategij, urejeni podatki lahko omogočijo uvid v rešitev problema).
3. Tehnike prikazovanja podatkov z diagrami je torej treba poznati iz več razlogov. S prikazi podatkov ali rezultatov **opišemo** oziroma **sporočimo drugim** v pregledni obliki. Pogosto primerno izbrani diagram omogoča **celovit vpogled** na zbrane podatke, kar lahko olajša **iskanje pravilnosti in zakonitosti**, povezanih z zbranimi podatki. Končno primerno izbrani diagrami omogočajo preprosto **primerjanje** podatkov.
4. Delo s podatki je zelo naravna vez med poukom matematike in drugimi predmeti oz. zunajšolskimi izkušnjami (funkcionalna pismenost, reševanje realističnih problemov). Za učitelje matematike pa je pomembno, da lahko prav z znanjem o obdelavi podatkov del matematike prikažemo bolj življenjsko.
5. Aktivnosti, povezane z delom s podatki, lahko služijo kot prva izkušnja z verjetnostjo.
6. **Številna znanja o obdelavi podatkov lahko vključimo v obravnavo običajnih matematičnih vsebin** (npr. ob merjenju časa se učimo o tabeli (voznem redu); kote urejamo po velikosti; trikotnike klasificiramo po enem ali dveh kriterijih; štirikotnike klasificiramo v drevesno strukturo).
7. Določena znanja je treba razvijati **celovito**, navadno v povezavi z drugimi matematičnimi in nematematičnimi znanji, kot integrativno **delo pri projektih oz. pri urah aktivnosti**. Projekte lahko uresničujemo v okviru pouka matematike ali v za to namenjenih dnevih. Preprost primer projekta je odločanje o končnem izletu (izdelava vprašalnika, zbiranje podatkov, analiza in predstavitev rezultatov).

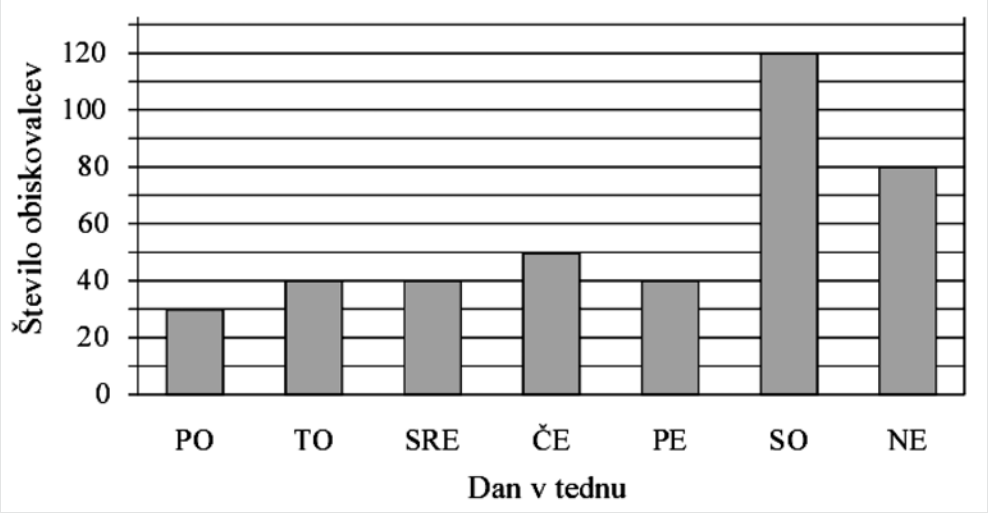
Tehnike dela s podatki so pomemben del problemskih znanj.

Podatke obdelujemo iz različnih razlogov in v okviru različnih, tudi matematičnih opravil. Vedenja o obdelavi podatkov so posebno pomemben del problemskih znanj, saj so nekakšno orodje, ki nam omogoča, da v obilici podatkov ugledamo zakonitosti in pravilnosti. Obdelava podatkov je učinkovit način razvijanja količinskega razumevanja in sklepanja ter uporabe aritmetike pri reševanju problemov.

Za zgled navajamo nalogo VSTOPNICE iz eksternega preverjanja znanja za devetošolce iz leta 2008 *(Nacionalno preverjanje znanja. Letno poročilo, 2008)*. Naloga preverja razumevanje odnosa med količinami in interpretiranje podatkov ter v povezavi s tem sposobnost pravilne izbire prikaza.

Naloga: **VSTOPNICE** *(http://www.ric.si/preverjanje_znanja/predmeti/matematika3/)*

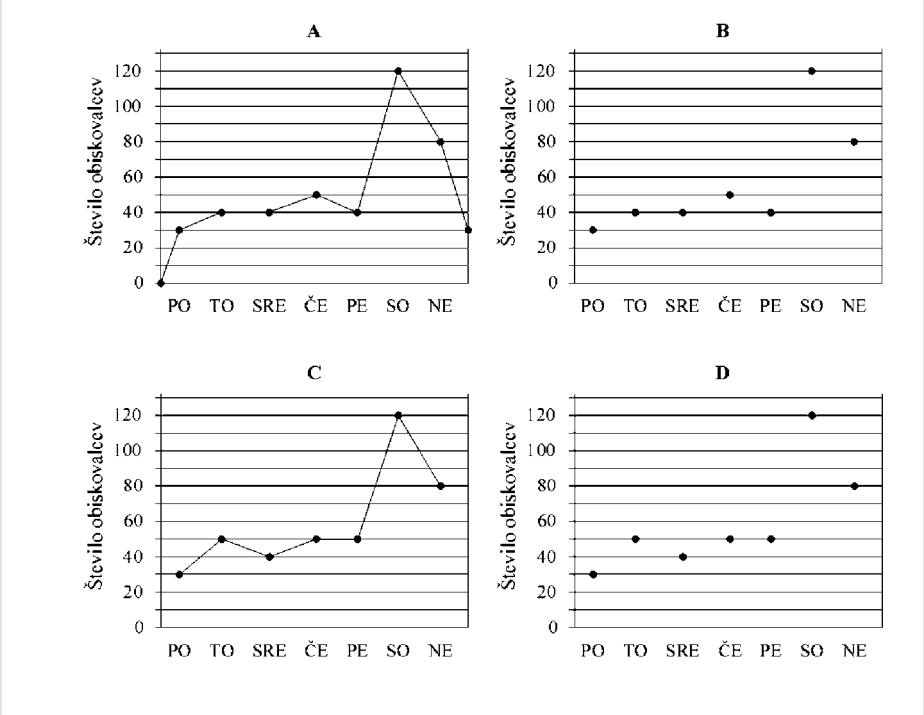
Stolpčni diagram kaže število obiskovalcev v kinu prejšnji teden.



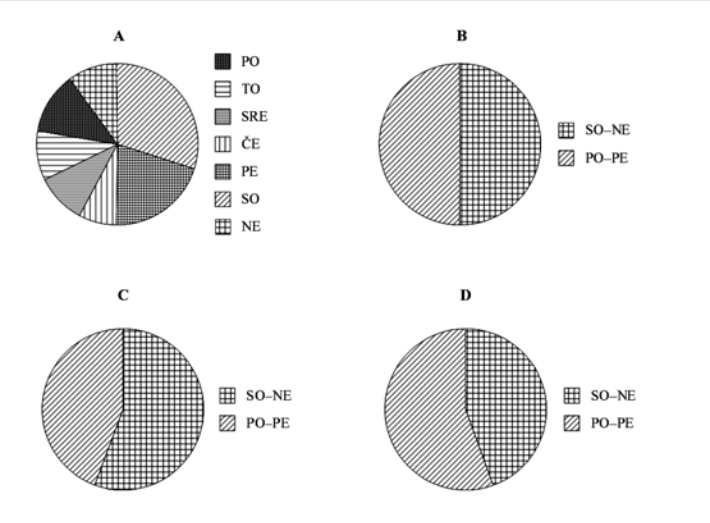
a) Kateri dan je bilo v kinu najmanj obiskovalcev?

b) Kateri izmed spodnjih prikazov pravilno kaže podatke iz zgornjega stolpčnega prikaza?

Obkroži črko nad pravilnim odgovorom.



c) Ob sobotah in nedeljah je cena vstopnice 5 EUR, druge dni pa 4 EUR. Kateri tortni prikaz kaže razmerje med skupnim zaslužkom v soboto in nedeljo s skupnim zaslužkom preostalih dni v tednu? Obkroži črko nad pravilnim odgovorom.



Urejeni podatki olajšajo uvid v rešitev problema

Problemska znanja omogočajo, da znamo naučene pojme in postopke uporabiti v novih okoliščinah. Eden od vsakdanjih prijemov pri srečanju z novo situacijo je, da rezultate izračunov zberemo, primerno uredimo in jih poskušamo prikazati tako, da ugledamo neko zakonitost ali pot k rešitvi. Pri tem pa uporabimo znanje o obdelavi podatkov. Oglejmo si nalogo ŠTEVKE.

***Primer:* ŠTEVKE** *(Magajna, Žakelj, 2000)*

Raziščimo, s katerimi števkami se končujejo kvadrati naravnih števil.

Če k nalogi pristopimo sistematično, lahko iz urejenih podatkov ugledamo rešitev.

Ker nas zanimajo zadnje števke kvadratov, razporedimo števila v skupine glede na zadnjo števko njihovega kvadrata. V tabeli je zdaj laže ugledati vzorec in predvideti pravilo.

Tabela: Razporeditev števil med 0 in 49 v skupine glede na zadnjo števko njihovega kvadrata.

	Zadnje števke kvadratov									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Števila		1	...	...	2	5	4	...	...	3
		9			8	15	6			7
		11			12	25	14			13
		19			18	35	16			17
		21			22	45	24			23
		29			28	...	26			27
		31			32		34			33
		39			38		36			37
		41			42		44			43
		49			48		46			47
		...								

Z znanjem o obdelavi podatkov si pomagamo tudi v nalogah, kjer nastopa veliko podatkov, ki jih moramo nekako urediti, preden sploh začnemo reševati, lahko pa je podatkov preveč ali celo premalo in jih moramo zbrati (glej str. 268).

Vpeljava empirične verjetnosti z empiričnimi preiskavami

Izkušnje iz srednje šole kažejo, da je neposredno uvajanje matematične definicije verjetnosti za dijake zelo zahtevno, saj novih pojmov ne morejo opreti na lastne izkušnje. Te bi lahko dobili v osnovni šoli. Eden od namenov pouka obdelave podatkov je zato izoblikovanje empiričnega pojmovanja verjetnosti kot osnova za poznejše razumevanje matematične verjetnosti. V osnovni šoli naj bi učenec s poskusom ugotovil oz. ocenil verjetnost nekega dogodka, pri čemer naj bi se zavedal pomena števila poskusov. Spoznal naj bi, da se pri zelo velikem številu ponovitev poskusa relativne frekvence dogodka ustalijo blizu neke vrednosti, imenovane verjetnost dogodka. Učenci in učenke naj bi tudi z izkušnjami ugotovili, da ne smejo nekritično posploševati ugotovitve, dobljene na majhnem vzorcu (Magajna, Žakelj, 2000).

Ob takšnih primerih učenci opazujejo pojavljanje slučajnih dogodkov pri večkratnih ponavljanjih poskusov, pri zapisovanju in obravnavi opazovanj pa si pomagajo z znanjem o obdelavi podatkov. Tako dobijo določeno predstavo oz. vpogled v pojem verjetnost dogodka.

***Primer:* KOCKE** *(Žakelj, 2004)*

Sočasno vržemo dve igralni kocki. S poskusom oceni, kolikšna je verjetnost, da bo vsota pik na obeh zgornjih ploskvah večja od 6.

Poskus: Met dveh igralnih kock

Dogodek A: Vsota pik na obeh kockah je več kot 6.

a) **Zbiranje in beleženje izidov poskusa.** Če natančno beležimo vse izide (npr. (2,3), (4,1) ...), lahko ugotavljamo verjetnosti tudi drugih dogodkov. Seveda se pogovorimo, kaj je namen dejavnosti, in glede na cilj izberemo tudi način beleženja podatkov.

b) **Analiziranje podatkov.** Določitev relativne frekvence.

Tabela: Opis dogodka A

Št. ponovitev poskusa	Št. ugodnih izidov za dogodek A	Relativna frekvenca dogodka A
15		
30		
45		
60		
75		

c) **Ugotovitev:** Empirična verjetnost dogodka sledi iz rezultatov poskusa. Pri utemeljitvi si v osnovni šoli lahko pomagamo s tabelo vseh mogočih izidov pri metu dveh kock. Ugodni izidi dogodka so osenčeni. *(Matematična verjetnost: število vseh možnih izidov: 36, število vseh ugodnih izidov: 21, matematična verjetnost: P(A) = 21/36)*

1 ,1	2, 1	3 ,1	4 ,1	5,1	6, 1
1, 2	2, 2	3 ,2	4 ,2	5 ,2	6, 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
1, 4	2, 4	3 ,4	4, 4	4 ,5	4, 6
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5 ,5	5, 6
1, 6	2 ,6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

Slika: Vsi mogoči izidi pri metu dveh kock

V osnovni šoli naj bi se učenci srečali s slučajnimi dogodki na izkustveni ravni. Pojme, kot so dogodek, empirična verjetnost, relativna frekvenca dogodka, spoznajo ob empiričnih preiskavah, ob aktivnostih, ki jih tudi sami izpeljejo.

3.1.5 Empirična preiskovanja – pot do kompleksnih znanj

Celovit pristop obravnave podatkov lahko obravnavamo v okviru empiričnih preiskav. Primeri se nanašajo na vsakdanje življenje, torej na nematematične kontekste. Z njimi želimo prikazati, kako lahko učenci znanje o obdelavi podatkov uporabijo oz. utrdijo.

Primer:

Obravnavati želimo težo šolskih torbic učencev na razredni in predmetni stopnji. Podatke o teži šolskih torbic je treba zbrati, jih urediti, predstaviti in analizirati. Tako obravnavane podatke otroci interpretirajo v kontekstu šolske situacije, kot jo doživljajo sami. Da vse to lahko izvedejo, je treba prej narediti načrt dela.

Z izrazom *preiskovanje* (Žakelj, A., 2003) označujemo postopke za obravnavo problemskih situacij z nejasnimi izhodišči in cilji (lahko odprti problemi). Problemi morajo biti predstavljeni v kontekstu, ki ga učenci razumejo/prepoznajo in je pogosto iz vsakdanjih, življenjskih situacij. Poudarek je na praktični uporabi znanja, preiskovanju/raziskovanju, refleksiji, skupinskem delu in pripravljenih aktivnostih, pogosto je to lahko vodeno odkrivanje.

Mogoči primeri preiskav:

- Ali se bolj splača rezervirati počitnice v večjih ali manjših turističnih središčih?
- Ali bolje berejo fantje ali dekleta?
- Kako dolgo čakajo potniki na letališču?
- Obravnavaj presek dveh/treh krogov.
- Razišči delitelje števil.
- Katera števila imajo natanko tri delitelje?

Skoraj v vseh naštetih primerih je očitno, da so podana le izhodišča problemske situacije, ne pa vprašanja. Kaj pomeni, da nekdo bolje bere? Da prebere več knjig v določenem času ali da zna hitreje izluščiti bistvo iz besedila. Zato se preiskovanje vedno začne z uvidom v problemsko situacijo in postavitvijo raziskovalnega vprašanja. Faze in vrednotenje preiskovanj prikazujemo v nadaljevanju.

Postavitev vprašanja

Postavitev vprašanja je odvisna od številnih dejavnikov: Kaj želimo preiskati? Kako bomo dobili podatke? Katere podatke bomo morali zbrati? Kaj bomo naredili z zbranimi podatki? Ali predvidevamo kakšne težave? Je mogoče odgovoriti na vprašanje, ki smo si ga postavili? Kako bomo uporabili rezultate svojega dela?

Načrtovanje preiskave

Načrtovanje preiskave je pomembno zaradi nemotenega poteka preiskave. Pomembno je *zaradi razvoja metakognitivnih znanj*. Namen preiskovanja v šolski praksi je predvsem *učenje procesov*, manj pa ugotavljanje dejstev.

Zbiranje podatkov

Podatke lahko zbiramo različno. Način je odvisen od vrste podatkov, namena zbiranja, verodostojnosti podatkov in drugega. Naštejmo nekatere pristope zbiranja: intervju, štetje, merjenje, anketni vprašalnik, splet in drugo.

Urejanje in analiziranje podatkov – strukturiranje, povzemanje in prikazovanje podatkov

Pri zapisovanju navadno nismo pozorni na obliko zapisa, mogoče napake in tudi ne na nadaljnjo obdelavo. Zato jih je treba urediti. Urejene podatke je laže predstaviti, pogosto pa iz takšnih bolje razumemo pojav ali lastnosti, na katere se nanašajo.

- *Strukturiranje podatkov* (uredimo jih v skupine, jih razvrstimo po velikosti ipd.).
- *Povzemanje podatkov* (jih skrčimo, določimo sredine, razpršenost ...).
- *Prikazovanje podatkov* (grafično jih predstavimo z ustreznimi diagrami ...).
- *Oblikovanje ugotovitev.*

Temeljni postopki urejanja podatkov

- *Čiščenje zapisanih podatkov*. Neveljavne in nejasne zavržemo oziroma jih popravimo.
- *Kodiranje podatkov*. Podatke nadomestimo s kodami (kraticami); to seveda lahko naredimo že med zapisovanjem.
- *Tabeliranje podatkov.* Zbrane podatke prepišemo v urejeno preglednico.
- *Strukturiranje (urejanje) podatkov*. Uredimo jih glede na značilno lastnost proučevanega pojava, glede na preiskovane lastnosti ali kako drugače.

Najpreprostejše strukturiranje je:

- razvrščanje po velikosti,
- razvrščanje v frekvenčne razrede,
- razporejanje v skupine po enem, dveh ali več kriterijih,
- razporejanje v drevesno ali drugačno strukturo.

Interpretiranje rezultatov

Pri interpretiranju podatkov je treba paziti na posploševanje ugotovitev. Kaj pravzaprav pomenijo dobljeni rezultati? Bi lahko na vprašanje odgovorili z drugačnimi vrstami podatkov? Ali smo odgovorili na postavljeno vprašanje? So zbrani podatki verodostojni? Za interpretacijo rezultatov potrebujemo dobro izdelane kriterije.

Predstavitev preiskave

Glede na to, da je namen preiskovanj učenje procesov, naj poročilo odseva vse naštete faze preiskave.

Spremljanje in ocenjevanje preiskovanj

V spodnji tabeli prikazujemo faze preiskovanj, cilje in katere elemente pri preiskavi bi bilo smiselno spremljati oz. ocenjevati. V zadnjem stolpcu so nakazane rešitve in predlogi, ki pa jih učitelj za potrebe prakse oz. glede na dano nalogo ustrezno prilagodi.

Tabela: Spremljanje in ocenjevanje preiskovanj

Faze preiskave	Cilji	Pričakovani dosežek/ rezultat
Postavitev vprašanja	• uvid v problemsko situacijo, • izkazovanje razumevanja problema	• postavitev smiselnega vprašanja
Načrtovanje preiskave	• nemoten potek preiskave	• določitev smiselnega/ primernega/učinkovitega načina zbiranja, urejanja, prikazovanja podatkov, • določitev kriterija, po katerem bomo sprejeli odločitev
Zbiranje podatkov	• pridobiti relevantne in verodostojne podatke	• izbiranje primernega postopka zbiranja podatkov, • pravilna izpeljava postopkov
Urejanje in analiziranje podatkov	• pridobiti vpogled v podatke	• izbiranje smiselnega načina urejanja podatkov (v skupine, po velikosti ...), • pravilnost izpeljave urejanja podatkov, • zbiranje smiselnega prikaza, • oblikovanje ugotovitev

Interpretiranje rezultatov	• razvijati zavedanje o možnostih posploševanja, • razvijati kritični odnos do podatkov	• odgovor na postavljeno vprašanje, • zbrani podatki so verodostojni, • interpretacija je predstavljena na osnovi argumentov in prej določenih kriterijev
Predstavitev preiskave	• refleksija o opravljenem delu, • razvijati metakognitivna znanja, • učenje procesov	• strokovna pravilnost, • jezikovna pravilnost

3.1.6 Primera empirične preiskave

Za zgled pokažimo primer empirične preiskave, ki jo lahko izpeljemo že v osnovni šoli.

IZZIV 1: Najbolj priljubljen šport na šoli

Šola organizira pet vrst športnih dejavnosti. Razišči, kateri šport je med učenci najbolj priljubljen.

Razmislek o situaciji in postavitev vprašanja

Razmislimo, kaj vse lahko vpliva na priljubljenost posameznega športa, nato pa se odločimo, s kakšnimi vprašanji bomo raziskali dani izziv.

Kdaj potekajo posamezne dejavnosti? V katerih prostorih potekajo? Kakšna oprema je na voljo učencem? Koliko učencev se udeležuje posameznih dejavnosti? Kaj vpliva na njihovo odločitev? Katere učence bomo spraševali?

Pojavi se veliko vprašanj. Na vsa ne bomo mogli in znali odgovoriti. Odločimo se za eno vprašanje, in sicer *Koliko učencev trenira posamezni šport?* in v sklopu dobljenih rezultatov na koncu poskušajmo komentirati izsledke.

Zbiranje podatkov

Podatke lahko zberemo z vprašalnikom. Z anketo bomo zbrali, koliko učencev trenira posamezni šport, ter prikazali, v kakšnem razmerju so deleži posameznih športov. Med učenci, ki se ne udeležujejo nobenega športa, ne bomo delali ankete. Če se učenec ukvarja z več športi, se bo v anketi opredeli samo za enega, in sicer najljubšega.

Zbrane podatke o udejstvovanju učencev pri posameznem športu bomo prikazali s frekvenčno tabelo in krožnim diagramom.

Tabela 1: Frekvence o številu dejavnih učencev v posameznem športu

Vrsta športa	Število učencev
košarka	30
namizni tenis	15
nogomet	20
ples	15
plavanje	10

Analiziranje podatkov

Ker nas zanima predvsem, v kakšnem medsebojnem razmerju so posamezne športne zvrsti, bomo rezultate prikazali s krožnim diagramom. Zato je treba izračunati relativne deleže.

Za košarko je relativni delež *30/90*. Zato je ta razred *1/3* celotnega kroga. Središčni kot pripadajočega krožnega izseka je 1/3 od 360°, to je 120°.

Tabela 2: Relativni deleži po športnih zvrsteh

Vrsta športa	košarka	namizni tenis	nogomet	ples	plavanje
relativni delež	30/90	15/90	20/90	15/90	10/90
središčni kot	120 °	60 °	80 °	60 °	40 °

Krožni diagram

Za prikaz podatkov je pomembno, da izberemo primerni diagram. Če želimo poudariti razmerje med podatki, je izbira krožnega diagrama najprimernejša. Treba pa je poudariti, da je zaporedje vrednosti smiselno predstaviti s krožnim diagramom le, če so skupaj seštete vrednosti neka smiselna celota. V našem primeru so to vsi športno dejavni učenci.

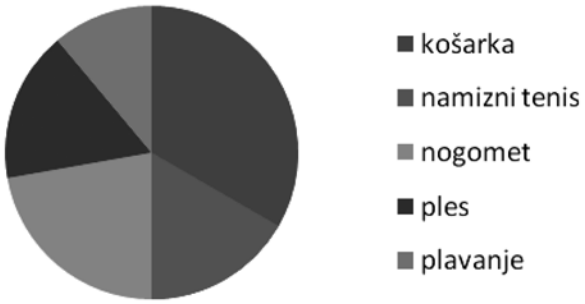


Diagram 1: Najbolj priljubljene športne zvrsti

Ugotovitve in interpretacija ugotovitev

S krožnim diagramom smo ponazorili razmerje med posameznimi športi ter deleže posameznih športov glede na učence, ki se s športom ukvarjajo. Največ učencev trenira košarko, in sicer kar 1/3 vseh športno aktivnih. Takoj za njo je nogomet, s katerim se ukvarja 2/9 vseh vprašanih, najmanj pa s plavanjem, in sicer le 1/9 športno dejavnih učencev. S plesom in namiznim tenisom se ukvarja enako število učencev. Glede na vse športnike, je to 1/6 vseh.

Razmislek in interpretacija: rezultati so pokazali, da največ učencev trenira košarko. Verjetno lahko sklepamo, da je ta precej priljubljena, ni pa to seveda dokaz

o priljubljenosti tega športa. Ali bi bilo treba zbrati še druge podatke? Mogoče za namizni tenis šola nima primerne opreme, plavanje pa je ob neprimernem času. Skoraj zagotovo na priljubljenost športa vplivajo še drugi dejavniki. Zato naj bo pogovor o kritičnem odnosu do interpretacije rezultatov vedno sestavni del interpretacije. Pri interpretaciji moramo biti zelo previdni ter upoštevati, katere podatke nam je uspelo zbrati in katerih ne.

IZZIV 2: Nova vas

Raziščimo, kako varne so ceste v naselju Nova vas.

Cilj: postavitev vprašanja, zbiranje, urejanje, analiziranje podatkov, izbiranje prikaza za prikaz rezultatov, interpretacija rezultatov.

Preiskava NOVA VAS je zahtevnejša. Rezultati so prikazani s škatlo z brki.

Postavitev vprašanja

Preden postavimo vprašanje, se pogovorimo o izhodiščni situaciji. Kdaj lahko govorimo, da so ceste varne? Ugotovimo, da za interpretacijo rezultatov potrebujemo kriterij varne ceste. Ker je varnost cest povezana s številnimi dejavniki in vseh ne moremo proučiti, se odločimo, da bomo v dani preiskavi s primerno zbranimi podatki odgovorili na vprašanje: *Kolikšne so hitrosti avtomobilov na Podpeški cesti in na Vilharjevi cesti med 7. in 8. uro zjutraj?* Zanimajo nas hitrosti vseh avtomobilov, ne le povprečje.

Načrtovanje preiskave

Zbrali bomo podatke o hitrosti avtomobilov na Podpeški cesti in Vilharjevi cesti med 7. in 8. uro zjutraj, in sicer z merjenjem. Pri merjenju hitrosti nas ne zanima le sredina podatkov, temveč tudi, kako so izmerjene vrednosti razpršene okoli sredine. Zato bomo zbrane podatke uredili, analizirali in jih prikazali s škatlo z brki.

Zbiranje in urejanje podatkov

Zbrali smo podatke o hitrosti avtomobilov na izbrani dan med 7. in 8. uro zjutraj. Rezultati meritev so podani v preglednici.

Tabela 1: Podatki o hitrosti avtomobilov v km/h na Podpeški cesti (A) in Vilharjevi cesti (B).

A	51	45	42	53	49	55	52	50	59	55	55	45	45	50	50	59	50	55	45
B	100	49	59	50	20	20	27	49	55	65	65	70	25	30	60	90	30	35	90

Urejanje podatkov

Za prikaz razpršenosti podatkov in izračun meril za razpršenost bomo podatke uredili po velikosti.

Tabela 2: Urejeni podatki o hitrosti avtomobilov v km/h s poudarjenimi sredinami in razmiki za Podpeško cesto (A) in Vilharjevo cesto (B).

	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	6.	7.	8.	9.	**10.**	11.	12.	13.	14.	**15.**	16.	17.	18.	19.
A	42	45	45	45	**45**	49	50	50	50	**50**	51	52	53	55	**55**	55	55	59	59
B	20	20	25	27	**30**	30	35	49	49	**50**	55	59	65	65	**60**	70	90	90	100

Analiziranje podatkov

Iz urejenih podatkov lahko določimo sredine in razmike. 1., 2., in 3. kvartil so na: $(n + 1)/4$, $2(n + 1)/4$ in $3(n + 1)/4$ mestu ($n = 19$).

Tabela 3: Urejeni podatki o hitrosti avtomobilov v km/h s poudarjenimi sredinami in razmiki za Podpeško cesto (A) in Vilharjevo cesto (B).

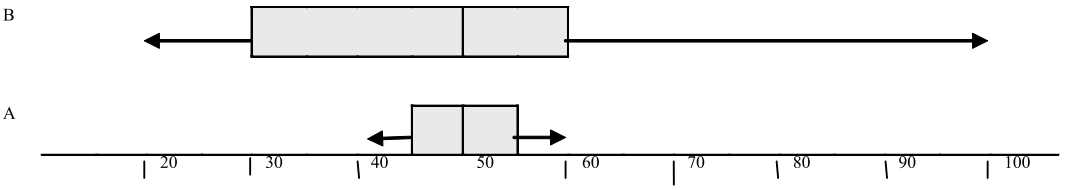
	1.	2.	3.	4.	**5.**	6.	7.	8.	9.	**10.**	11.	12.	13.	14.	**15.**	16.	17.	18.	19.
A	42	45	45	45	**45**	49	50	50	50	**50**	51	52	53	55	**55**	55	55	59	59
B	20	20	25	27	**30**	30	35	49	49	**50**	55	59	65	65	**60**	70	90	90	100

Tabela 4: Primerjava podatkov o hitrostih avtomobilov za Podpeško cesto in Vilharjevo cesto (v km/h).

	Podpeška cesta	**Vilharjeva cesta**
Povprečna vrednost	50,8	52
Mediana	50	50
Najmanjša vrednost	42	20
1. kvartil	45	30
3. kvartil	55	60
Največja vrednost	59	100
Medčetrtinski razmik	10	30

Razpršenost podatkov prikažemo s škatlo z brki.

Škatla z brki



Slika 1: Prikaz hitrosti avtomobilov za Vilharjevo cesto (B) in Podpeško cesto (A)s škatlo z brki

Interpretacija

Preprost izračun pokaže, da sta povprečni vrednosti hitrosti avtomobilov na Podpeški cesti in Vilharjevi cesti skoraj enaki (50,8 km/h in 52 km/h). Tudi mediani sta pri obeh nizih podatkov enaki (50 km/h). Vendar pozoren pogled na tabelo pokaže, da je na Podpeški cesti hitrost dokaj stalna, vedno okrog 50 km/h, na Vilharjevi cesti pa močno niha in doseže že nevarnih 100 km/h. Zato se je pri interpretaciji ugotovitev, katera cesta je varnejša oz. kako varne so ceste v naselju Nova vas, treba zavedati omejitev zbranih podatkov, saj smo zbirali odgovore na le eno vprašanje. Skoraj zagotovo na varnost cest vplivajo še drugi dejavniki (preglednost ceste, kakovost cestišča, ovinki ...). Zato naj bo pogovor o kritičnem odnosu do interpretacije ugotovitev vedno sestavni del interpretacije.

3.1.7 Statistika v gimnaziji

Statistika se ukvarja z obdelavo, analizo, predstavitvijo množičnih pojavov v znanosti, gospodarstvu, industriji, kmetijstvu, zdravstvu, socialnem življenju, šolstvu, biologiji, prometu, trgovini, varstvu okolja in vseh geografskih vedah.

Navajamo cilje in vsebino statistike, ki se obravnavajo v gimnazijskem programu in se nadgrajujejo iz osnovne šole (Učni načrt za matematiko za gimnazijo, 2008).

Tabela: Cilji in vsebine pri statistiki v gimnaziji (Posodobljeni učni načrt za matematiko za gimnazijo, 2008).

CILJI	VSEBINA
• Ločijo med proučevano značilnostjo (spremenljivko), enoto, vrednost spremenljivke, vzorec, populacijo; • prepoznajo proučevano značilnost enote; • razlikujejo med opisnimi ali kvalitativnimi podatki, vrstnimi ali ordinalnimi ter številskimi ali kvantitativnimi podatki; • zberejo podatke, jih uredijo in strukturirajo; • izberejo ustrezni diagram (prikaz) za prikaz podatkov; • berejo, izdelajo in interpretirajo statistične diagrame; • razvijajo kritični odnos do interpretacije rezultatov; • poznajo in uporabljajo različne načine povzemanja podatkov; • izberejo primeren način povzemanja podatkov glede na njihovo vrsto; • izračunajo, ocenijo in interpretirajo srednjo vrednost, modus in mediano kot mere osrednjenosti podatkov; • ocenjujejo preproste povezave med statističnimi spremenljivkami; • izračunajo, ocenijo in interpretirajo variacijski razmik, standardni odklon in medčetrtinski razmik kot mere razpršenosti podatkov; • uporabijo znanje o delu s podatki v celovitem postopku empiričnega preiskovanja (izberejo temo, postavijo preiskovalno vprašanje, zberejo podatke, jih uredijo in strukturirajo, analizirajo, prikažejo in interpretirajo rezultate).	Osnovni statistični pojmi. Vrste podatkov. Zbiranje podatkov. Urejanje in strukturiranje podatkov. Prikazovanje podatkov (stolpčni, pozicijski, tortni diagram (prikaz), histogram, razsevni diagram (prikaz), linijski in krivuljni diagram, škatla z brki). Aritmetična sredina, mediana, modus. Variacijski razmik, standardni odklon, medčetrtinski razmik. Statistična naloga.

V gimnaziji je poudarek na razumevanju in uporabi meril za osrednjost in razpršenost, standardnem odklonu in izdelavi zahtevnejše statistične naloge. Smiselno v pouk vpeljemo tudi *uporabo programov za statistično obdelavo podatkov*. Dijaki naj bi znali samostojno izdelati statistično nalogo pri različnih predmetih oz. v

okviru projektnega tedna na šoli. V nadaljevanju navajamo primer izdelane statistične naloge. Obravnavamo realne probleme iz vsakdanjega življenja, ki niso rešljivi z uporabo rutinskih postopkov in zahtevajo povezovanje med različnimi vsebinskimi področji (npr. psihologija, sociologija, biologija, športna vzgoja, IKT). Seveda pa najprej ugotovimo predznanje dijakov o obdelavi podatkov iz osnovne šole in vsebino nadgradimo in razširimo s kompleksnejšimi primeri.

Statistična obdelava podatkov oblikuje podatke na način, po katerem si je mogoče pridobiti predstavo o večji populaciji, ki jo predstavlja vzorec. Takšna obdelava vključuje preizkuse domnev (npr. anketna vprašanja z dvema mogočima odgovoroma), določanje lastnosti zbranih kvantitativnih podatkov, časovne vrste (npr. napovedovanje prihodnjih trendov), opisovanje povezanosti (korelacija), oblikovanje odnosov med spremenljivkami (regresija) in drugo.

Naloga statistike je izluščiti »najboljšo« informacijo iz razpoložljivih podatkov. Tudi zato jo nekateri uvrščajo v teorijo odločanja. Osnovni koncepti so populacija, vzorci ter vzorčenje te in verjetnost domnev.

Pri statistiki delamo s podatki vedno z namenom, da nekaj izvemo o populaciji, ki jo statistično obdelujemo. Naloga opisne statistike je prikaz najmanj dveh lastnosti statistične populacije oziroma njenih gradnikov, statističnih enot. Prva izmed teh so skupne lastnosti statističnih enot, tj., kako se različne enote med seboj povezujejo oziroma kakšne skupne lastnosti ustvarjajo. Druga izmed dveh lastnosti je raznovrstnost statističnih enot, opisna statistika torej predstavi spremenljivost (variabilnost). Temeljni in največkrat uporabni podatki opisne statistike za prikaz skupnih lastnosti so aritmetična sredina, modus in mediana določene populacije, pa tudi nekatere druge vrednosti, kot kumulativne frekvence in kvantili. Spremenljivost statističnih enot v populaciji je mogoče predstaviti z varianco, standardnim odklonom in razponom vrednosti.

Pri **opisni statistiki** zbiramo podatke o dani populaciji in jih tudi tako ali drugače predstavimo oziroma poenostavimo z namenom, da populacijo opišemo. Pri opisni statistiki obravnavamo in smo pozorni na zbrane podatke ter jih želimo čim primerneje predstaviti, pri inferenčni statistiki pa poskušamo iz podatkov, zbranih na vzorcu, sklepati na to, kar je za podatki, poskušamo torej pojasniti načela, ki jih ti izražajo.

3.1.8 Zaključek

Informacijska, statistična in podatkovna pismenost oz. obdelava podatkov in statistika postopoma dobivajo pomembno vlogo tudi v šolskih kurikulih. Izhodišče za statistično delo je zbiranje podatkov z anketiranjem ali sistematskim opazovanjem, za tem pa je na vrsti povzemanje z opisno statistiko. Opisna statistika je skupina statističnih metod, ki se ukvarjajo s povzemanjem pridobljenih podatkov. Te metode iščejo opisne (meta) podatke o populaciji in njenih sestavnih delih, da bi ustvarile pregledni opis. Posameznik je informacijsko pismen, če je sposoben kritično misliti o konceptih in s koncepti, ugotavljati in argumentirati, kadar bere, interpretira in evalvira informacije. Statistična pismenost je pomembna komponenta informacijske pismenosti. Statistično pismen posameznik je sposoben kritično misliti o temeljih opisne statistike, ki se ukvarja z zbiranjem in opisovanjem podatkov. Posebna veščina so analiziranje, interpretiranje in evalviranje statistike kot dokaz. Podatkovna pismenost pa pomeni sposobnost dostopati do podatkov,

jih ocenjevati, manipulirati z njimi, jih združevati in jih predstaviti. Podatkovna pismenost je pomembna komponenta obeh pismenosti, informacijske in statistične.

Poleg zmožnosti branja, pisanja in računanja, ki veljajo za temeljne zmožnosti pismenosti, se poudarja tudi pomen drugih pismenosti, ki so pomembne za uspešno delovanje v družbi. Kot zmožnost in družbena praksa se pismenosti pridobivajo in razvijajo. Pridobljeno znanje in spretnosti ter razvite sposobnosti omogočajo posamezniku uspešno in ustvarjalno osebnostno rast ter odgovorno delovanje v poklicnem in družbenem življenju.

V nadaljnjih razdelkih si bomo ogledali primer sistematične vpeljave statističnih pojmov in razvoj različnih pismenosti v okviru pouka gimnazijske matematike.

3.1.9 Literatura

1 *Best, J. (2001). Damned Lies And Statistics: Untangling Numbers from the Media, Politicans, and Activists. University of California Press.*

2 *Best, J. (2001). More Domned Lies and Statistics: How numbers Confuse Public Issues. University of California Press.*

3 *Bucik, N. et all. (2006). Nacionalna strategija za razvoj pismenosti. Ljubljana: Nacionalna komisija za razvoj pismenosti, november 2006.*

4 *Magajna, Z., Žakelj, A. (2000). Obdelava podatkov pri pouku matematike 6–9, (Modeli poučevanja in učenja, Matematika). 1. natis. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.*

5 *Nacionalno preverjanje znanja. Letno poročilo 2007/2008 (2008). Ljubljana: Državni izpitni center.*

6 *Schield, M. (2004). Information Literacy, Statistical Literacy and Data Literacy. International Association for Social Science Information Service and Technology (IASSIST). Vol. 28, Nr. 2–3, 2004.*

7 *Tomšič, G., Cotič, M., Magajna, Z., Žakelj, A. (2002). Učni načrt: program osnovnošolskega izobraževanja, Matematika. 1. natis. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport: Zavod RS za šolstvo.*

8 *Žakelj, A. (2003). Kako poučevati matematiko. Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.*

9 *Žakelj, A. (2004). Procesno-didaktični pristop in razumevanje pojmovnih predstav v osnovni šoli. Doktorsko delo. Ljubljana: Filozofska fakulteta.*

10 *Žakelj, A., Lipovec, A., Perat, Z., Vršič, V., Repovž, B., Senekovič, J., Bregar, Z., Prinčič, A., (2009). Učni načrt, Matematika: osnovna šola. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo. Dostopno tudi na naslovu: http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/.*

11 *Žakelj, A., Bon Klanjšček, M., Jerman, M., Kmetič, S., Repolusk, S., Ruter, A. (2008): Učni načrt, Matematika: gimnazija: splošna, klasična in strokovna gimnazija: obvezni predmet in matura (560 ur). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo.*

12 *http://sl.wikipedia.org/wiki/Pismenost. (citirano 21. 1. 2010)*

13 *http://sl.wikipedia.org/wiki/Podatkovna_pismenost (citirano 27. 3. 2010)*

14 *http://www.ric.si/preverjanje_znanja/predmeti/matematika3/ (citirano 27. 3. 2010)*

15 *http://www.ilo.org/global/lang--en/index.htm (citirano 27. 3. 2010)*

3.2 Primeri dobre prakse s teorijo

3.2.1 Osnovni pojmi statistike

Simona Pustavrh, Šolski center Novo mesto

Osnovni podatki

Tema	Statistika
Enota	Osnovni pojmi statistike
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• prepoznajo vprašanja, na katera lahko statistika ponudi odgovor;
• spoznavajo in uporabljajo različne IKT-tehnologije kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov;
• uporabljajo svetovni splet kot pomoč pri iskanju informacij in se do njih kritično opredelijo;
• izražajo se ustno, pisno in v drugih izraznih oblikah;
• poznajo osnovne pojme statistike (populacija, statistična enota, spremenljivka, vzorec, parameter);
• prepoznajo proučevano značilnost enote;
• ločijo med proučevano značilnostjo (spremenljivko), enoto in vrednostjo spremenljivke;
• razlikujejo med opisnimi ali kvalitativnimi podatki, vrstnimi ali ordinalnimi ter številskimi ali kvantitativnimi podatki;
• zbirajo, kodirajo in čistijo podatke;
• znajo izbrati slučajni vzorec enot;
• podatke kodirajo in vnesejo v Excel (ali drugi program).</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
</table>

Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje • poznajo osnove dela s programom Excel.
Pričakovani dosežki/ rezultati	Dijaki/dijakinje: • poznajo osnovne statistične pojme z namenom uporabe pri medpredmetnih povezavah; • usvojeno znanje uporabijo pri analizi in izdelajo statistično nalogo; • na svetovnem spletu poiščejo ustrezne podatke in se kritično opredelijo do njih.
Didaktični pristop	• vodeno raziskovanje, • individualno delo – delo z učnim listom
Potek učnega procesa	*1. faza:* Učitelj predstavi dijakom statistiko kot vedo in jih seznani z osnovnimi pojmi statistike (populacija, statistična enota, spremenljivka, vrste spremenljivk, metode zbiranja podatkov, vzorec). *2. faza:* Dijaki individualno ali v parih rešujejo učni list.
Preverjanje dosežkov/ rezultatov	Učni list: Osnovni pojmi statistike
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Pri reševanju domače naloge dijaki potrebujejo računalnik in dostop do svetovnega spleta.
Gradivo na zgoščenki	UL_Osnovni_pojmi_statistike.doc RUL_Osnovni_pojmi_statistike.doc
Viri	1 *Čibej, J. A.(1997). Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika. Ljubljana: DZS.* 2 *Čibej, J. A. (1997). Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika: priročnik za učitelje. Ljubljana: DZS.* 3 *Šparovec, J. et al. (2004). Tempus. Ljubljana: Modrijan.* 4 *Ferligoj, A. (1997). Osnove statistike na prosojnicah. Ljubljana: samozaložba.* 5 *Sagadin, J. (2003). Statistične metode za pedagoge. Maribor: Obzorja.*

Iz teorije

Beseda statistika izvira iz latinske besede status, ki pomeni država. Statistika je kot metoda za zbiranje podatkov zelo stara, saj so že v starem veku zbirali podatke o prebivalstvu, pridelkih in drugem. Njen pravi razvoj se je začel v 18. stoletju, ko so znani matematiki tega obdobja postavili temelje verjetnostnega računa, na katerem temelji matematična statistika. Najbolj znana imena v statistiki so P. S. Laplace (1749–1827), S. D. Poisson (1781–1840), F. Galton (1822–1911), K. Pearson (1857–1936), R. A. Fischer (1890–1962). V 20. stoletju je postala z razvojem računalništva

statistika širše uporabljana.

Statistika je veda, ki se ukvarja s proučevanjem množičnih pojavov v določenem prostoru in času.

Poglavitni namen statistike je razumevanje pojavov iste vrste, ki se pojavljajo v velikem številu, zato jih imenujemo množični pojavi. To so na primer serijska proizvodnja določenega izdelka, ocenjevanje dijakov, merjenje višine dijakov na zdravniškem pregledu, promet skozi opazovano križišče (štetje avtomobilov) ...

Preden se posvetimo posameznim nalogam statistike, definirajmo njene temeljne pojme: populacija, statistična enota, vzorec, spremenljivka in parameter.

Populacija je množica, ki jo želimo statistično proučiti. **Statistična enota** je en element populacije.

Populacija je končna ali neskončna množica enot, ki so lahko predmeti, ljudje, dogodki ali kaj drugega. Opredeliti jo moramo **stvarno, geografsko in časovno**. S stvarno opredelitvijo natančno določimo, kdo ali kaj spada vanjo in kdo ne, z geografsko opredelitvijo povemo, kje je zajeta populacija, s časovno pa kdaj. **Število enot v populaciji** bomo označili z N.

Statistična spremenljivka opisuje lastnost enot.

Primeri statističnih spremenljivk so spol oseb, učni uspeh dijakov, višina dijakov, poraba goriva avtomobila na 100 km. V vseh opisanih primerih se izraz ''spremenljivka'' uporablja upravičeno, saj vsaka opazovana enota zavzame neko določeno vrednost. Te vrednosti so lahko med seboj različne, lahko pa ima nekaj enot enake vrednosti. Vrednosti spremenljivk bomo pogosto imenovali podatki.

Statistične spremenljivke delimo glede na način izražanja in glede na mersko lestvico.

Glede na način izražanja delimo spremenljivke (oziroma podatke) na:

1. **Opisne (ali kvalitativne)**: vrednosti le opišemo z besedami in jih ne moremo ovrednotiti numerično (npr. spol, kraj bivanja, barva avtomobila, izobrazba).
2. **Številske (ali kvantitativne)**: vrednosti izrazimo numerično oz. številsko. Ločimo diskretne in zvezne številske podatke:
   - **nezvezne (ali diskretne)**: zaloga vrednosti je končna ali neskončna množica celih števil (npr. število prometnih nesreč, št. prebranih knjig, št. dijakov v razredu),
   - **zvezne**: zavzamejo lahko vsako vrednost iz nekega intervala realnih števil (npr. višina ali masa dijaka, višina žepnine, cena knjig).

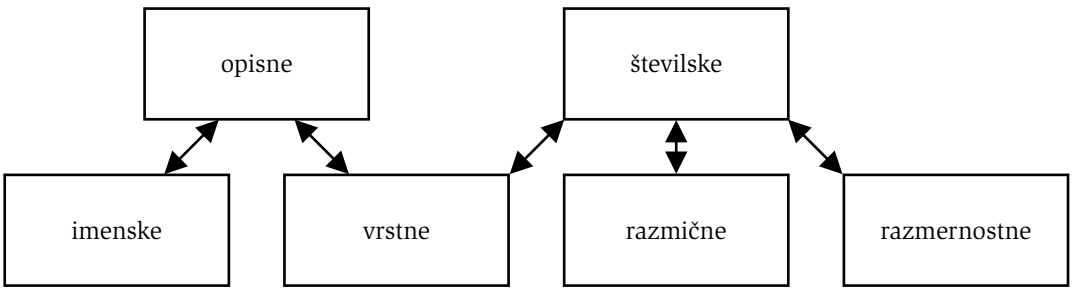
Glede na mersko lestvico delimo spremenljivke na:

1. **Imenske (nominalne)**, pri katerih ni nobene urejenosti (spol, kraj rojstva, barva las, tip avtomobila).
2. **Vrstne (ordinalne ali urejenostne)**, pri katerih lahko vrednosti uredimo po velikosti ali upoštevamo naravni vrstni red (izobrazba, šolska ocena, zadovoljstvo z malico).
3. **Razmične (intervalne)**, ki se izražajo številsko, njihove vrednosti pa je smiselno odštevati, ne pa deliti (letnik šolanja, leto rojstva).

4. **Razmernostne**, ki so številske in je smiselno računati razmerje poljubnih dveh njihovih vrednosti (višina dijaka, število prebranih knjig, cena izdelka).

Opisne spremenljivke so imenske ali vrstne, številske pa vrstne, razmične ali razmernostne.

Opomba: nekateri ne dopuščajo, da bi vrstne spremenljivke obravnavali kot številske (npr. šolska ocena).



Slika 1: Povezava spremenljivk glede na obe delitvi

Po posodobljenem učnem načrtu obravnavamo v srednji šoli **opisne in številske** spremenljivke ter **vrstne (ali ordinalne)** spremenljivke.

Parameter je statistična karakteristika populacije (npr. aritmetična sredina populacije).

Med osnovne naloge statistike štejemo zbiranje podatkov (s kodiranjem in čiščenjem podatkov), razvrščanje in urejanje podatkov, prikazovanje podatkov, izračunavanje parametrov (npr. aritmetična sredina, odstotki) ter sprejemanje sklepov, kot so npr. odkrivanje lastnosti in zakonitosti populacije in napovedovanje vrednosti.

Zbiranje, kodiranje in čiščenje podatkov

Podatke lahko zbiramo različno. Če želimo pridobiti mnenje ljudi o določeni temi, uporabimo **anketiranje**, ki poteka z vnaprej oblikovanimi anketnimi vprašalniki. Anketiranje lahko opravimo osebno, po telefonu, po pošti ali na spletni strani. Vsak od načinov ima svoje prednosti in slabosti. Drugi načini zbiranja podatkov so **opazovanje, merjenje** in **štetje**. Merjenje uporabljamo v številnih primerih, kot so merjenje porabe goriva avtomobila na 100 km, merjenje hitrosti ali prevoženega števila kilometrov, merjenje časa. Štetje pa se uporablja na primer za ugotavljanje števila dijakov v razredu, števila avtomobilov, ki prevozijo določeno križišče v določenem času, števila slabih izdelkov v serijski proizvodnji.

Pogosto ne moremo, ne želimo ali pa je predrago proučevati celotno populacijo, zato izberemo le podmnožico populacije, ki jo imenujemo **vzorec**, nato pa na osnovi lastnosti vzorca sklepamo o lastnostih populacije.

Vzorec je podmnožica (del) populacije, je **slučajen**, če imajo vse enote populacije enako možnost (enako verjetnost) biti izbrane v vzorec.

Slučajni vzorec dobimo s slučajnim izborom enot populacije v vzorec. S tem dosežemo, da je struktura vzorca kar najbolj podobna strukturi populacije. Pogosto rečemo, da slučajni vzorec najbolje predstavlja (reprezentira) celotno populacijo. Velikost vzorca bomo označili z n.

Naključni izbor lahko opravimo različno. Najpreprostejši način je **enostavno slučajno vzorčenje**, ki ga lahko opravimo z žrebanjem (loterijski način). Recimo, da želimo iz populacije z N enotami izbrati slučajen vzorec z n enotami. Zato zapišemo na N listkov števila od 1 do N, pri čemer vsak listek pripada natanko eni od enot populacije, listke damo v škatlo, jih dobro premešamo, nato pa na slepo izžrebamo n listkov. Tako zagotovimo, da imajo vse enote populacije enako verjetnost za izbor v vzorec. Pri tem ločimo vzorce s ponavljanjem, če je lahko enota, ki je bila že izbrana v vzorec, ponovno izbrana, in vzorce brez ponavljanja, pri katerih enota, ki je bila že izbrana v vzorec, ne more biti ponovno izbrana. Pri izboru enot z žrebanjem oštevilčenih lističev to pomeni, da dobimo vzorce s ponavljanjem, če izžrebani listič vsakokrat vrnemo v škatlo, in vzorce brez ponavljanja, če izžrebanih lističev ne vračamo v škatlo.

Poleg enostavnega slučajnega vzorčenja poznamo še sistematično vzorčenje, stratificirano vzorčenje, vzorčenje v skupinah, večstopenjsko vzorčenje, sorazmerno vzorčenje ..., vendar vse to presega srednješolsko snov.

Ne glede na to, ali smo zbrali podatke enot celotne populacije ali le podatke enot iz vzorca, jih ustrezno uredimo. Če za obdelavo podatkov uporabljamo računalniški program (npr. Excel), jih kodiramo in vnesemo.

Kako vnašamo podatke, ki smo jih zbrali z anketiranjem ljudi? Odgovore anketnih vprašanj kodiramo, če so opisni ali vrstni podatki. Kodirati pomeni, da opisni ali vrstni vrednosti dodelimo številske vrednosti, s katerimi odgovore le ločimo med seboj, številske vrednosti pa nimajo pomena. Primer kodiranja je npr. kodiranje spola. Kodiramo lahko moške z 0 in ženske z 1, ali pa izberemo dve drugi vrednosti. Številskih podatkov ne kodiramo.

Anketne liste najprej oštevilčimo od 1 naprej, da se lahko pozneje vrnemo in popravljamo napake pri vnosu. Vsaka vrstica v Excelu pripada eni anketirani enoti, v stolpce pa vnašamo vrednosti spremenljivk (podatkov, odgovore anketiranih). Primer vnesenih kodiranih podatkov v Excelovem dokumentu, kjer sta kodirani dve spremenljivki, in sicer spol, kot je bilo opisano že zgoraj, in zadovoljstvo z malico (1 – zelo nezadovoljen ..., 5 – zelo zadovoljen):

Zaporedna št. anketiranega dijaka	Spol dijaka	Letnik šolanja dijaka	Zadovoljstvo z malico	Višina dijaka (cm)
1.	0	1	1	174,3
2.	1	3	3	169,7
3.	1	1	5	164,2
4.	0	2	2	182,9
5.	0	3	3	186,2
6.	0	4	4	180,1
7.	1	4	4	172,8
8.	0	2	3	177,7

Po vnosu podatkov jih očistimo. To pomeni, da pregledamo, ali so vse vrednosti pravilno natipkane. Pri tipkanju se lahko zmotimo ali pa je anketiranec podal neustrezen odgovor. Napaka pri tipkanju je, če pri npr. spolu vnesemo vrednost 2, ki ne označuje nobenega od spolov. Napačen odgovor anketiranca pa je, če pri višini zapiše odgovor npr. 20 cm. Vse napake, ki jih odkrijemo, preverimo spet v anketnih vprašalnikih, zato je nujno vprašalnike oštevilčiti tako, da se ujemajo z zaporedno številko anketiranca v Excelovem dokumentu. Večini vnosnih napak se lahko izognemo, če vnos kontroliramo programsko (s stavkom if), ki ne dopušča nemogočih vrednosti.

Napake, ki smo jih storili pri tipkanju, lahko tako preprosto odpravimo, napak v odgovorih anketirancev pa ne moremo odpraviti, če so anketni vprašalniki anonimni. Takšne podatke izbrišemo iz Excelovega dokumenta in jih smatramo za manjkajoče. Z obravnavo manjkajočih vrednosti se na tem mestu ne bomo ukvarjali.

Naj le omenimo, čeprav to presega srednješolsko snov, da pri statističnem raziskovanju najprej zberemo podatke od posameznih enot vzorca, na njihovi osnovi pa izračunamo vzorčno statistiko, ki opisuje lastnost vzorca, nato pa s statističnim sklepanjem, ki temelji na matematični statistiki, sklepamo o parametru populacije. Tako ločimo pri statistiki **opisno statistiko**, ki se ukvarja z analizo podatkov celotne populacije, in **inferenčno** ali **sklepno statistiko**, ki zajema *statistično sklepanje* o lastnostih populacije na osnovi podatkov slučajnega vzorca. Inferenčna statistika ima izdelanih vrsto statističnih metod, s katerimi lahko opravimo sklepanje z vzorca na populacijo.

Načrtovanje statističnega raziskovanja

Statistično raziskovanje načrtujemo po naslednjih korakih:

1. Najprej določimo temo, ciljno populacijo, cilje in hipoteze raziskovanja. Naj bo na primer tema raziskovanja zadovoljstvo dijakov s šolsko malico. Ciljna populacija naj bodo vsi dijaki neke šole. Cilja raziskave sta ugotoviti, ali so dijaki zadovoljni s šolsko malico in ali jo jedo vsak dan. Oblikujemo domneve (ali hipoteze), ki jih bomo z raziskavo potrdili ali ovrgli (naj poudarim, da bomo to storili le na srednješolski ravni, sicer se v statistiki uporabljajo posebne metode za tovrstno sklepanje). Domneva ali hipoteza je preprosta trditev o lastnosti populacije, ki jo želimo preveriti. Primeri hipotez:
   - Večina dijakov je s šolsko malico zadovoljna ali zelo zadovoljna.
   - S šolsko malico je zadovoljnih manj deklet kot fantov.
   - Dijaki jedo šolsko malico vsak dan.
2. Nato določimo, kako velik bo vzorec (če ne bomo anketirali celotne populacije) in kako bomo izbrali anketirance, da bo vzorec slučajen.
3. Oblikujemo anketni vprašalnik. Zelo koristno je, da ga najprej testiramo. To pomeni, da ga razdelimo nekaterim dijakom, da ga izpolnijo, in tako ugotovimo, ali je ustrezen in razumljiv. Nato izpeljemo anketiranje.
4. Podatke kodiramo in vnesemo v Excelov dokument (ali v katerega od drugih ustreznih programov), če jih bomo obdelovali s tem programom. Podatke lahko obdelamo tudi ročno.

5. Podatke razvrstimo (če je treba), jih grafično prikažemo in izračunamo parametre (teme, ki sledijo).
6. Na osnovi rezultatov zapišemo sklepe (potrdimo ali ovržemo domneve).

Naj posebej opozorimo, da so poleg izbora ustreznega slučajnega vzorca največje težave pri obdelavi podatkov, če med njimi nekateri manjkajo, zato opozorimo dijake, naj v svojih statističnih raziskavah prosijo anketirance, da odgovorijo na vsa vprašanja, sicer pustimo v Excelovem dokumentu prazna polja.

Učni list

Osnovni pojmi statistike

1. naloga

Statistika je veda, ki se ukvarja s proučevanjem množičnih pojavov. Naštej tri primere množičnih pojavov in opredeli, kaj je v posameznem primeru populacija in kaj statistična enota.

Množični pojav	Populacija	Statistična enota

2. naloga

V statistiki poznamo več različnih metod za zbiranje podatkov. Opiši, kako bi zbral podatke v naslednjih raziskavah v tabeli. Uporabiš lahko anketiranje, štetje, merjenje, opazovanje ...

Raziskava o	Metoda zbiranja podatkov
Številu otrok v družini	
Mnenju ljudi o TV-programih	
Višini krvnega tlaka ljudi	
Številu avtomobilov skozi križišče	
Telesni višini dijakov	

3. naloga

V tabeli so naštete nekatere spremenljivke, ki jih lahko opazujemo v raziskavah. Pri vsaki spremenljivki zapiši, katere vrste so glede na način izražanja (opisne, vrstne, diskretne številske in zvezne številske podatke) in katere vrednosti lahko zavzamejo.

Spremenljivka	Vrsta spremenljivke	Vrednosti spremenljivke
Spol		
Višina plače zaposlenega		
Masa človeka		
Barva avtomobila		
Kraj rojstva		
Mnenje o TV-programih		
Ocena pri kontrolni nalogi		

4. naloga

Na šoli so v šolskem letu 2009/2010 med dijaki izvedli anketo. Izbrali so slučajni vzorec dijakov in jih vprašali o spolu, letniku šolanja, višini ter številu bratov in sester. V spodnji tabeli so zbrani odgovori vseh anketiranih dijakov.

a) Kaj je v tem primeru populacija? S katerimi pogoji je opredeljena (stvarno, časovno, krajevno)?

b) Kaj je statistična enota? Kako velik je vzorec?

c) Katere statistične spremenljivke so predstavljene v tabeli?

d) Kakšna je posamezna spremenljivka glede na način izražanja?

Zaporedna št. anketiranega dijaka	Spol dijaka	Letnik dijaka	Število dijakovih bratov in sester	Višina dijaka (cm)
1.	moški	1	1	174,3
2.	ženski	3	2	169,7
3.	ženski	1	0	164,2
4.	moški	2	2	182,9
5.	moški	3	3	186,2
6.	moški	4	1	180,1
7.	ženski	4	0	172,8
8.	moški	2	1	177,7

5. naloga

Raziskati želimo zadovoljstvo dijakov s šolsko malico. Ker je vseh dijakov na šoli 1500 se odločimo, da bomo oblikovali vzorec 150 dijakov. Ali bi bil ustrezen vzorec, ki bi zajemal dijake prvih in drugih letnikov? Odgovor utemelji.

6. naloga

V manjšem bloku, v katerem živi 14 stanovalcev, smo izpeljali anonimno anketo. Povprašali smo jih o spolu, starosti, uporabi mestnega potniškega prometa in računu za mobilni telefon v prejšnjem mesecu. Odgovore stanovalcev smo zapisali v spodnji tabeli. Nekatere smo kodirali (spol: 0 – moški, 1 – ženski; uporaba mestnega prometa: 0 – ne, 1 – da), vendar so pri vnosu nekaterih odgovorov nastale napake. Odkrij jih v spodnji tabeli:

Zaporedna št.	Spol	Starost	Uporaba mestnega prometa	Račun za mobilni telefon (EUR)
1	0	15	1	23,15
2	1	34	0	43,80
3	1	56	0	35,20
4	0	23	-1	44,12
5	2	76	1	13,20
6	1	82	1	10,15
7	1	12	1	32,45
8	0	26	0	54,23

9	0	27	0	63,30
10	0	145	0	33,10
11	1	43	0	-23,45
12	1	42	1	Ppp
13	2	51	2	54,35
14	1	71	0	21,25

Kako bi lahko odpravil napake pri vnosu podatkov? Kdaj napak ne bi mogel odpraviti?

Domača naloga:

7. naloga

Oglej si spletno stran Statističnega urada Republike Slovenije (SURS) in spletno stran Statističnega urada Evropske unije (EUROSTAT). Katere podatke zbirajo in prikazujejo? Kaj se ti zdi posebno zanimivo?

8. naloga

Naredi mini raziskavo med sošolci. Izberi temo (npr.: o hobijih, življenjskih ali učnih navadah ...), oblikuj cilj raziskave in domneve ter oblikuj anketni vprašalnik (npr. do 5 vprašanj). Vprašanja naj bodo takšna, da bodo spremenljivke vseh treh tipov, kot smo jih definirali (opisna, ordinalna, številska).

Vprašanja so lahko zaprtega tipa, da anketiranec obkroži enega od ponujenih odgovorov (npr.: Obkroži spol: 1. moški, 2. ženski) ali odprtega tipa, da anketiranec zapiše odgovor (npr.: Kolikšen je bil račun za tvoj mobilni telefon v prejšnjem mesecu? _____).

Podatke ustrezno kodiraj, jih vnesi v Excelov dokument in jih očisti napak. Podatke boš uporabil v naslednjih poglavjih.

3.2.2 Urejanje in prikazovanje podatkov

Simona Pustavrh, Šolski center Novo mesto

Osnovni podatki

Tema:	Statistika
Enota:	Urejanje in prikazovanje podatkov
Predvideni čas izpeljave:	tri šolske ure

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• uporabljajo matematiko v resničnih situacijah iz življenja;
• spoznavajo in uporabljajo različne IKT-tehnologije kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov;
• izražajo se ustno, pisno in v drugih izraznih oblikah;
• razvrstijo podatke po velikosti ali jih uredijo v smiselne skupine (grupirajo) ter jih predstavijo grafično;
• iz frekvenčne tabele izračunajo relativne frekvence, kumulativne in relativne kumulativne frekvence, spodnjo in zgornjo mejo razreda, širino razreda, sredino razreda;
• izdelajo in interpretirajo statistične diagrame (izberejo ustrezni diagram);
• razvijajo kritični odnos do interpretacije rezultatov;
• izberejo primeren način povzemanja podatkov glede na vrsto podatkov.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
</table>

Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje: • ločijo med proučevano značilnostjo (spremenljivko), enoto, vrednost spremenljivke; • prepoznajo proučevano značilnost enote; • razlikujejo med opisnimi ali kvalitativnimi podatki, vrstnimi ali ordinalnimi ter številskimi ali kvantitativnimi podatki; • znajo uporabljati program Excel.
Pričakovani dosežki/ rezultati	Dijaki/dijakinje: • poznajo osnovne statistične pojme, statistiko uporabljajo pri medpredmetnih povezavah; • izdelajo statistično nalogo; • kritično ovrednotijo rezultate.
Didaktični pristop	• vodeno raziskovanje, • individualno delo – delo z učnim listom, • uporaba novih tehnologij
Potek učnega procesa	*1. ura:* Urejanje in grupiranje podatkov *2. ura:* Frekvenčna porazdelitev in frekvence *3. ura:* Grafično prikazovanje podatkov
Preverjanje dosežkov/ rezultatov	Učni list: Urejanje in prikazovanje podatkov *1. ura:* naloge od 1 do 5 *2. ura*: naloga 6 *3. ura:* naloga 7
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	program Excel
Gradivo na zgoščenki	UL_Urejanje_in_prikazovanje_podatkov.doc RUL_Urejanje_in_prikazovanje_podatkov.doc Grupiranje_podatkov_Exel.doc
Viri	1 *Čibej, J. A. (2007). Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika. Ljubljana: DZS.* 2 *Čibej, J. A.(1999). Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika: priročnik za učitelje. Ljubljana: DZS.* 3 *Žakelj, A. (2008). Kaj prispeva obdelava podatkov k učenju matematike in medpredmetnemu povezovanju. Matematika v šoli št. 3, 4, letnik XIV, str. 160–175. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.* 4 *Ferligoj, A. (1997). Osnove statistike na prosojnicah. Ljubljana: samozaložba.* 5 *Sagadin, J. (2003). Statistične metode za pedagoge. Maribor: Obzorja.*

Iz teorije

Po zbiranju podatkov je prvi korak pri njihovi obdelavi njihovo urejanje. Način je seveda odvisen od vrste podatkov glede na način izražanja. Najprej je na vrsti urejanje številskih podatkov, nato še opisnih.

Urejanje številskih podatkov po velikosti

Če je številskih podatkov malo, jih lahko uredimo po velikosti od najmanjše do največje vrednosti, ali nasprotno. V statistiki rečemo tako urejenim podatkom **ranžirna vrsta**.

Grupiranje podatkov

To je združevanje velikega števila podatkov v manjše skupine, ki jih imenujemo **razredi**. V posamezni razred uvrstimo enote s podobnimi lastnostmi, ki jih določimo vnaprej. Razvrščamo lahko opisne, vrstne in številske podatke.

- Najprej določimo skupne lastnosti enot v posameznih razredih. Priporočljivo je oblikovati od 5 do 20 razredov. Če je razredov premalo, smo z grupiranjem izgubili informacije, ki nam jih dajejo podatki, če jih je preveč, nismo pridobili preglednosti.
- Pri oblikovanju lastnosti razredov moramo paziti, da je vsaka enota v natanko enem razredu. Ne sme se zgoditi, da bi ista enota ustrezala lastnostim dveh razredov ali pa za kakšno enoto ne bi bilo razreda, v katerega bi jo uvrstili.
- Preštejemo enote po razredih. Število enot v posameznem razredu imenujemo **(absolutna) frekvenca razreda**.

Grupiranje številskih podatkov

Če zavzamejo številski podatki le nekaj različnih vrednosti, jih lahko razvrstimo po posamičnih vrednostih. Vsaka je en razred. Najpogosteje tako razvrščamo vrstne podatke, najlepši primer so šolske ocene. Prvi razred je ocena 1, drugi razred ocena 2 ...

Pri grupiranju številskih podatkov, ki lahko zavzamejo veliko različnih vrednosti (npr. višina dijaka, višina računa za telefon ...), za vsak razred določimo, katera je najmanjša vrednost in katera največja, ki še spada v posamezni razred.

Predpostavimo, da smo oblikovali r razredov in je $x_{i,\,min}$ najmanjša vrednost, $x_{i,\,max}$ pa največja, ki še spada v i-ti razred, $i = 1, 2, \ldots, r$. Naj bo f_i (absolutna) frekvenca razreda, N pa število vseh zbranih podatkov (enot).

Tabelo, v katero uredimo razrede in pripadajoče frekvence, imenujemo **frekvenčna tabela ali frekvenčna porazdelitev:**

Razred	Lastnost	Frekvenca f_i
1.	$x_{1,\,min} - x_{1,\,max}$	f_1
2.	$x_{2,\,min} - x_{2,\,max}$	f_2
3.	$x_{3,\,min} - x_{3,\,max}$	f_3
...	...	...
r.	$x_{r,\,min} - x_{r,\,max}$	f_r
Skupaj		N

Frekvenčno tabelo razširimo s stolpci, v katerih izračunamo relativno frekvenco, kumulativno in relativno kumulativno frekvenco, spodnjo in zgornjo mejo razreda, širino in sredino razreda:

- *Relativna frekvenca* $f_i°$ je delež enot v *i*-tem razredu glede na število vseh enot *N*, ki smo jih opazovali: $f_i° = f_i / N$
- *Strukturni odstotek* $f_i\%$ je odstotek enot v *i*-tem razredu glede na število vseh enot *N*, ki smo jih opazovali: $f_i\% = (f_i / N)\ 100\ \%$
- *Kumulativna frekvenca* F_i je število enot, ki imajo manjše vrednosti od spodnje meje *i*-tega razreda: $F_1 = 0$, $F_i = F_{i-1} + f_{i-1}$, (za $2 \le i \le r$).

  Opomba: mogoča je tudi definicija, da je F_i število enot, ki imajo vrednosti manjše od zgornje meje *i*-tega razreda.
- *Relativna kumulativna frekvenca* $F_i°$ je delež vseh opazovanih enot, ki imajo manjše vrednosti od spodnje meje *i*-tega razreda: $F_i° = F_i / N$
- *Spodnja meja* $x_{i,s}$ in *zgornja meja* $x_{i,z}$ *i*-tega razreda sta določeni tako, da se zgornja meja *i*-tega razreda ujema s spodnjo mejo (*i*+1)-vega razreda: $x_{i,z} = x_{i+1,s}$.
  - Če so podatki zvezne narave, je $x_{i,s} = x_{i,min}$ in $x_{i,z} = x_{i,max}$.
  - Če so podatki diskretne narave, običajno celoštevilski, velja $x_{i,\max} \neq x_{i+1,\min}$. Razrede pogosto oblikujemo tako, da se $x_{i,max}$ in $x_{i+1,min}$ razlikujeta za 1, kar imenujemo enotski razmik. Meji izenačimo tako, da izračunamo $x_{i,s} = x_{i,min} - 0{,}5$ in $x_{i,z} = x_{i,max} + 0{,}5$ za vsak $i = 1, 2, \ldots r$
- *Širina razreda* d_i je razlika med zgornjo in spodnjo mejo razreda: $d_i = x_{i,z} - x_{i,s}$.
- *Sredina razreda* x_i je aritmetična sredina spodnje in zgornje meje razreda: $(x_{i,s} + x_{i,z})/2$.

Dijake je dobro opozoriti, da z grupiranjem enot v frekvenčne razrede dodelimo vsem enotam v i-tem razredu isto vrednost x_i (sredina razreda), s čimer se izgubi nekaj natančnosti pri nadaljnji obdelavi podatkov, razen če jih razvrščamo po posamičnih vrednostih. Priporočljivo je oblikovati enako široke razrede.

Grupiranje opisnih podatkov

Opisne podatke razvrščamo podobno kot številske, le da razrede določimo z opisom lastnosti (npr. moški, ženske). Preštejemo, koliko enot je v posameznem razredu.

Razred	Lastnost	Frekvenca f_i
1.	*lastnost 1*	f_1
2.	*lastnost 2*	f_2
3.	*lastnost 3*	f_3

…	…	…
r.	*lastnost r*	f_r
Skupaj		N

Za opisne podatke ne moremo izračunati vseh količin kot pri številskih podatkih. Izračunamo lahko le relativne frekvence in strukturne odstotke razredov.

Grupiranje številskih in opisnih podatkov v Excelu je opisano na zgoščenki v datoteki *Grupiranje_podatkov_Exel.doc.*

Grafično prikazovanje podatkov

Histogram je prikaz grupiranih številskih podatkov v pravokotnem koordinatnem sistemu s stolpci, kjer vsak stolpec ustreza enemu razredu. Širina stolpca je enaka širini razreda, ploščina stolpca pa je premo sorazmerna s frekvenco razreda. Stolpci histograma se med seboj dotikajo.

Že pri grupiranju podatkov je priporočljivo oblikovati enako široke razrede, saj so potem višine stolpcev premo sorazmerne s frekvencami razredov. V srednji šoli je dijakom teže razumeti premo sorazmernost ploščin s frekvencami, zato je bolje, da to le omenimo, podatke pa razvrstimo v enako široke razrede. V Excelu uporabimo stolpčni grafikon (razvrstilni), pri katerem zapolnimo vrzeli med stolpci.

Frekvenčni poligon je linijski poligon v pravokotnem koordinatnem sistemu, ki povezuje točke, katerih abscise so enake sredinam frekvenčnih razredov, ordinate pa frekvencam: (x_i,f_i). Da grafikon povežemo z abscisno osjo, dodamo še točki $(x_0,0)$ in $(x_{r+1},0)$. V Excelu uporabimo črtni grafikon.

Krožni prikaz (ali strukturni krog) uporabljamo za prikaz strukturnih odstotkov. Delež enot v posameznem razredu je prikazan s krožnim izsekom. Velikost središčnega kota za vsak razred izračunamo kot odstotek polnega kota: $f_i\% \cdot 360°$. Posamezne krožne izseke ponavadi šrafiramo ali pobarvamo z različnimi barvami, zato za pojasnitev dodamo legendo. Najpogosteje ga uporabljamo za prikaz opisnih podatkov. Paziti moramo le, da vsi podatki skupaj predstavljajo celoto. V Excelu uporabimo tortni grafikon.

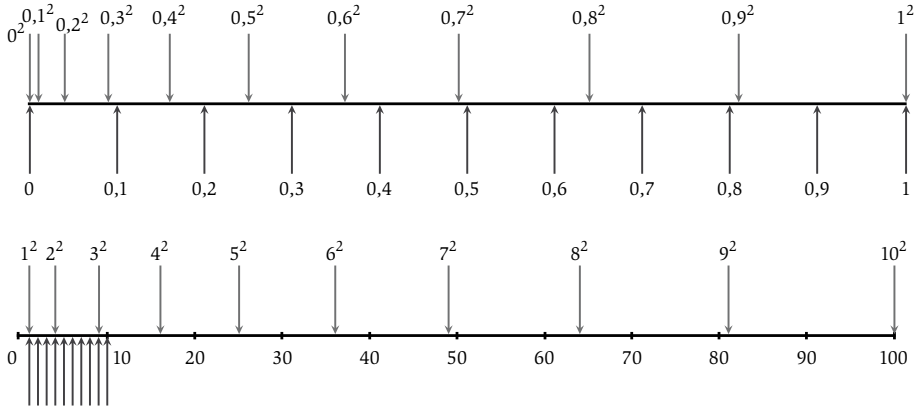
Strukturni stolpec uporabljamo za prikaz strukturnih odstotkov. Narišemo stolpec poljubne širine in poljubne višine. Višino stolpca razglasimo za 100 %, nato pa jo razdelimo v razmerju strukturnih odstotkov. Posamezne dele stolpca ponavadi šrafiramo ali pobarvamo z različnimi barvami, zato za pojasnitev dodamo legendo. V Excelu uporabimo stolpčni grafikon (navadno tretji po vrsti med ponujenimi v Excelu 2007).

Diagram s stolpci je podoben histogramu, uporabljamo pa ga lahko za prikaz grupiranih opisnih podatkov, vrstnih podatkov ali diskretnih številskih podatkov. Širina stolpca je poljubna, višina stolpca pa je premo sorazmerna s frekvenco razreda. Stolpci morajo biti enako široki in se med seboj ne dotikajo. V Excelu uporabimo stolpčni grafikon, v katerem ne zapolnimo vrzeli med stolpci.

Pozicijski diagram uporabljamo za predstavitev razpršenosti manjšega števila številskih in vrstnih podatkov. Z njim lahko prikažemo na številski osi eno ali več skupin podatkov. Vrednosti, ki jih želimo prikazati, ponazorimo kot primerno označene točke (puščice) na številski osi. (Žakelj, A.: Matematika v šoli XIV, št. 3, 4)

Razvijanje procesnih znanj

Urejanje podatkov je pomembno za statistiko, vendar lahko urejanje in sistematični pristop uporabimo pri številnih drugih primerih v matematiki in na drugih področjih. Kot primer navedimo nalogo, v kateri mora dijak ugotoviti, katera naravna števila imajo natanko tri delitelje, ali pa nalogo, v kateri na pozicijskem diagramu prikaže realna števila in njihove kvadrate (Žakelj, 2008 in str. 236):



Prva slika prikazuje nekatera števila med 0 in 1 ter njihove kvadrate, na drugi sliki pa lahko opazujemo naravna števila od 1 do 10 in njihove kvadrate. Več o pomenu tovrstnega znanja je zapisano v prvem poglavju tega priročnika in v uvodu tega poglavja.

Učni list

Urejanje in prikazovanje podatkov

1. naloga

V trgovini so imeli v zadnji uri 10 kupcev. Želeli so ugotoviti, koliko denarja porabijo kupci, zato so zbrali njihove račune in zapisali vrednosti v evrih:

12,15 34,10 54,55 32,15 78,80 120,30 68,35 15,68 27,62 29,18.

Podatke uredi po velikosti in preštej, koliko strank je plačalo račun manj kot 60,00 EUR.

2. naloga

V manjšem bloku živi 32 družin. Zaradi porazdelitve stroškov čiščenja bloka so za vsako stanovanje popisali, koliko ljudi živi v njem. Zbrani rezultati so:

3, 2, 1, 3, 4, 5, 2, 3, 3, 3, 4, 1, 1, 2, 1, 3, 4, 4, 4, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 4, 4, 3, 4, 2, 1, 5.

Podatke razvrsti v smiselne razrede. Kriterij za to si izberi sam.

3. naloga

Na železniški postaji so za zadnjih 40 dni spremljali dnevno število potnikov, ki so na tej postaji vstopali na vlak. Zbrani rezultati so:

1 21 22 15 15 14 25 26 28 29 8 12 12 19 19 18 18 32 35 17 17 17 14 4 7 8 36 42 22 25 25 8 9 9 11 30 3 4 13 13

Uredi podatke v razrede. Posebej razmisli o številu razredov in širini posameznega razreda.

4. naloga

Na gimnaziji so v 1. letnikih izmerili maso 50 dijakov. Rezultati merjenja v kg so:

47,6 48,0 57,2 56,6 51,4 58,3 59,3 53,8 51,9 57,3 52,5 58,4 63,2 55,3 56,3 56,7 56,9 57,3 67,0 69,3 55,0 54,3 50,7 54,2 61,5 65,3 58,2 59,4 49,3 62,3 64,2 58,4 58,5 54,1 62,3 59,4 59,5 60,2 61,2 54,3 57,8 62,1 60,2 58,1 65,6 65,2 59,2 60,6 68,7 68,4

Uredi podatke tako, da bodo preglednejši.

5. naloga – grupiranje opisnih podatkov

V ambulanti so pregledali 30 bolnikov. Zaradi analize podatkov so zapisali spol vsakega bolnika.

ženska moški moški ženska ženska moški ženska moški ženska moški moški ženska moški ženska ženska moški moški ženska moški moški ženska ženska moški moški ženska moški moški moški ženska moški

Podatke grupiraj. Koliko moških in koliko žensk so pregledali v bolnišnici?

6. naloga

Pri vsaki od 2. do 5. naloge izračunaj za vsak razred relativno frekvenco razreda, strukturni odstotek, kumulativno in relativno kumulativno frekvenco, spodnjo in zgornjo mejo razreda, širino razreda in sredino razreda. Vse vrednosti zapiši v razširjeni frekvenčni porazdelitvi. Razmisli, katero vrednost od navedenih je smiselno izračunati v nalogi 5. Rezultate pojasni.

7. naloga

Podatke iz nalog od 2 do 5 predstavi z ustreznimi grafikoni. Uporabi histogram, frekvenčni poligon, krožni diagram, strukturni stolpec ali stolpčni diagram. Premisli, kateri grafikon je primeren pri posamezni nalogi za predstavitev podatkov.

8. naloga

Podatke iz ankete med sošolci (UL_Osnovni_pojmi_statistike.doc, naloga 8) ustrezno uredi in grafično prikaži z uporabo programa Excel ali katerega od alternativnih mogočih programov.

3.2.3 Srednje vrednosti

Simona Pustavrh, Šolski center Novo mesto

Osnovni podatki

Tema	Statistika
Enota	Srednje vrednosti
Predvideni čas izpeljave	dve šolski uri

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• prepoznajo vprašanja, na katera statistika lahko ponudi odgovor;
• spoznavajo in uporabljajo različne IKT-tehnologije kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov;
• kritično ovrednotijo rezultate;
• izražajo se ustno, pisno in v drugih izraznih oblikah;
• poznajo pomen srednjih vrednosti (mediana, modus, aritmetična sredina) in izračunajo njihove vrednosti;
• mediano in modus izračunajo le za posamično podane podatke;
• aritmetično sredino izračunajo za posamično podane podatke in za razvrščene;
• razumejo, katere srednje vrednosti je smiselno izračunati za posamezno vrsto spremenljivke glede na njen način izražanja;
• srednje vrednosti izračunajo tudi s programom Excel.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
</table>

Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje: • poznajo osnovne pojme statistike (populacija, statistična enota, spremenljivka, vzorec, parameter); • prepoznajo proučevano značilnost enote; • ločijo med proučevano značilnostjo (spremenljivko), enoto, vrednostjo spremenljivke; • razlikujejo med opisnimi ali kvalitativnimi podatki, vrstnimi ali ordinalnimi ter številskimi ali kvantitativnimi podatki; • znajo uporabljati program Excel.
Pričakovani dosežki/ rezultati	Dijak/dijakinja: • poznajo in izračunajo srednje vrednosti; • znanje uporabijo pri medpredmetnih povezavah; • usvojeno znanje uporabijo pri analizi in izdelajo statistično nalogo; • kritično ovrednotijo rezultate.
Didaktični pristop	• individualno delo – delo z učnim listom, • uporaba novih tehnologij
Potek učnega procesa	*1. ura:* Učitelj dijakom obrazloži srednje vrednosti. Izračunajo jih iz posamično danih podatkov. Dijaki rešujejo naloge z učnega lista. *2. ura:* Učitelj dijakom obrazloži, kako izračunamo aritmetično sredino iz grupiranih podatkov. Dijaki rešijo preostale naloge iz učnega lista.
Preverjanje dosežkov/ rezultatov	Učni list: Urejanje in prikazovanje podatkov
Gradivo na zgoščenki	UL_Srednje_vrednosti.doc RUL_Srednje_vrednosti.doc
Viri	1 *Čibej, J. A. (1997). Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika. Ljubljana: DZS.* 2 *Čibej, J. A. (1999). Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika: priročnik za učitelje. Ljubljana: DZS.* 3 *Šparovec, J. et al. (2004). Tempus. Ljubljana: Modrijan.* 4 *Ferligoj, A. (1997). Osnove statistike na prosojnicah. Ljubljana: samozaložba.* 5 *Sagadin, J. (1003). Statistične metode za pedagoge. Maribor: Obzorja.* 6 *Fridman, D., Pisani, R., Purves, R. (2007). Statistics, 4th Edition. New York: W. W. Norton and Company.*

Iz teorije

Srednja vrednost je mera za osredinjenost podatkov. Obravnavali bomo tri srednje vrednosti (po učnem načrtu):

- mediano,
- modus,
- aritmetično sredino (povprečje).

Mediana (ali središčnica) je srednja vrednost, od katere ima polovica enot manjše ali enake vrednosti, polovica pa večje ali enake. Označili jo bomo z ***Me***.

Mediano lahko določimo za številske in za nekatere vrstne podatke, kjer je to smiselno, ne moremo pa je za opisne podatke.

Mediano za majhno število podatkov najhitreje določimo tako, da podatke najprej uredimo po velikosti, nato izračunamo mesto, na katerem je mediana: $(N + 1)/2$.

Če ta rezultat ni celo število, je mediana povprečje vrednosti na sosednjih dveh mestih.

Primer: Pet dijakov je v zadnjem mesecu po vrsti prebralo naslednje število knjig: 2, 2, 6, 7, 10. Določi mediano števila prebranih knjig. Kaj pove mediana?

Podatki so že urejeni po velikosti. Ker je $N = 5$, je mediana na $(5 + 1)/2 = 3$ tretjem mestu v vrsti, zato je $Me = 6$. Pomen mediane: Polovica dijakov je v zadnjem mesecu prebrala šest knjig ali manj, polovica pa šest knjig ali več.

Primer: Vzemimo zdaj šest dijakov, ki so v zadnjem mesecu po vrsti prebrali naslednje število knjig: 2, 2, 6, 7, 10, 11. Določi mediano števila prebranih knjig. Kaj pove mediana?

V tem primeru je $N = 6$, zato je $((6 + 1)/2 = 3{,}5)$. Mediano določimo tako, da izračunamo povprečje vrednosti, ki sta na 3. in 4. mestu v vrsti. Mediana je $Me = (6+7)/2 = 6{,}5$. Polovica dijakov je v zadnjem mesecu prebrala 6,5 knjige ali manj, polovica pa 6,5 knjige ali več.

Mediana je določena z mestom v vrsti, ko podatke uredimo po velikosti, zato ekstremno veliki (ali majhni) podatki ne vplivajo na njeno vrednost. Če bi v prvem primeru namesto podatka 10 imeli podatek 15, se mediana ne bi spremenila. V Excelu uporabimo funkcijo MEDIAN.

Modus (ali gostiščnica) je srednja vrednost, ki je enaka tisti vrednosti spremenljivke, ki se najpogosteje pojavlja. Označili jo bomo z ***Mo***.

Modus lahko določimo opisnim, vrstim in številskim podatkom.

Primer: Pet dijakov je v zadnjem mesecu po vrsti prebralo naslednje število knjig:

2, 2, 6, 7, 10. Določi modus števila prebranih knjig. Kaj pove modus?

Modus preprosto določimo tako, da pogledamo, katera vrednost se najpogosteje pojavlja. V tem primeru je *Mo = 2*. Največ dijakov je v zadnjem mesecu prebralo dve knjigi.

Med podatki je lahko tudi več vrednosti, ki se pojavljajo najpogosteje enako mnogokrat. V takšnem primeru imamo več modusov. Če se zgodi, da se vsaka vrednost pojavi natanko enkrat, potem med podatki ni modusa.

V Excelu določimo modus z uporabo funkcije MODE.

Opomba: Če se najpogosteje enako mnogokrat pojavlja več različnih vrednosti, nam Excel kot rezultat vrne le prvo takšno vrednost v seznamu. Zato imajo v tem programu ekvivalentni seznami podatkov (glede na urejenost) različne moduse.

Matematični program Geogebra nam z uporabo funkcije Modus vrne vse najpogosteje enako mnogokrat ponavljajoče se vrednosti.

Aritmetična sredina (povprečje) je srednja vrednost, ki jo dobimo tako, da vsoto vseh podatkov delimo s številom podatkov *N*. Označili jo bomo z μ ali z $\overline{x}$.

Aritmetično sredino lahko izračunamo za številske podatke in nekatere vrstne (npr. šolska ocena, ki jo ovrednotimo številsko). Za opisne podatke je aritmetično sredino nesmiselno računati.

Aritmetično sredino posamičnih podatkov izračunamo po formuli:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} \text{ ali krajše } \mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Aritmetično sredino grupiranih podatkov (pogosto jo imenujemo tudi tehtana ali utežena aritmetična sredina) izračunamo po formuli:

$$\mu = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_r x_r}{N} \text{ ali krajše } \mu = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i x_i}{N},$$

kjer je *r* število razredov, f_i frekvenca *i*-tega razreda in x_i sredina *i*-tega razreda. Vsak podatek iz *i*-tega razreda nadomestimo torej s sredino razreda x_i, to pa upoštevamo tolikokrat, kot je frekvenca razreda f_i. Vsoto vseh podatkov delimo s številom vseh podatkov *N*, in ne s številom razredov *r*, kar je pogosta napaka dijakov. Učenje iz napake je učinkovit način za razvoj razumevanja in za zapomnitev dijakom podobnih formul.

Naj poudarimo, da aritmetična sredina, ki jo izračunamo iz posamičnih podatkov, ne bo enaka aritmetični sredini istih grupiranih podatkov, saj pri grupiranju vsem podatkom v razredu priredimo sredino razreda. Napako, ki smo jo dobili zaradi grupiranja, zanemarimo. O tem se naj dijaki prepričajo ob ustreznem primeru.

Lastnosti aritmetične sredine:

- Če vsakemu podatku prištejemo isto vrednost a, $a > 0$, se tudi aritmetična sredina poveča za a. Če vsakemu podatku odštejemo a, se aritmetična sredina zmanjša za a.
- Če vsak podatek pomnožimo z a, se tudi aritmetična sredina pomnoži z a.
- Če vsak podatek nadomestimo z aritmetično sredino, ostane vsota podatkov nespremenjena.
- Če od vsakega podatka odštejemo aritmetično sredino (izračunamo odklon od aritmetične sredine), je vsota vseh odklonov enaka 0.

Čeprav definiramo aritmetično sredino kot vrednost, ki jo dobimo, če vsoto vseh podatkov delimo s številom podatkov, pa je za razumevanje sredine boljša definicija, da je aritmetična sredina podatkov tista vrednost, ki bi jo imele vse enote enako pri pogoju, da je vsota vseh podatkov enaka prvotnim podatkom. Ali pa jo definiramo kot vrednost, za katero je vsota vseh odklonov podatkov od nje enaka 0.

V Excelu izračunamo aritmetično sredino z uporabo funkcije AVERAGE.

Zakaj je treba poznati tri srednje vrednosti? Odgovor je podan z naslednjim primerom.

Primer:

V časopisu smo prebrali, da je v nekem podjetju zaposlenih 200 ljudi in da je povprečna neto mesečna plača zaposlenih 900 EUR. Ob tem si lahko mislimo, da imajo zaposleni visoke plače. Če bi ob tem podali podatek, da je mediana neto mesečnih plač 550 EUR, se podoba spremeni. Povprečna plača je visoka, vendar ima polovica zaposlenih plačo nižjo kot 550 EUR. Na povprečje vplivajo visoke plače nekaterih zaposlenih. Če poleg tega povemo še, da je modus neto plač v tem podjetju 450 EUR, je podoba o plačah zaposlenih v podjetju še stvarnejša.

Učni list

Srednje vrednosti

1. naloga

Na zdravniškem pregledu so stehtali 13 dijakov. Njihove mase v kg so 52, 53, 55, 56, 60, 61, 64, 65, 67, 67, 67, 67, 73. Izračunaj mediano, modus in aritmetično sredino podatkov. Kaj povedo?

2. naloga

Na šoli smo na slepo izbrali 12 dijakov in jih vprašali, koliko knjig so prebrali v prejšnjem mesecu. Njihovi odgovori so 3, 1, 1, 3, 4, 5, 7, 10, 3, 5, 6, 1.

a. Katero število prebranih knjig se najpogosteje pojavlja? Kako imenujemo to vrednost?

b. Katera vrednost prebranega števila knjig je tista, za katero velja, da je polovica dijakov prebrala toliko knjig ali manj, polovica pa toliko ali več? Kako imenujemo to vrednost?

c. Koliko knjig bi prebral vsak dijak, če bi jih vsi prebrali enako in bi bilo skupno število prebranih knjig enako, kot so jih podali dijaki? Kako imenujemo to vrednost?

3. naloga

V treh razredih, T1A, T1B in T1C so pisali kontrolno nalogo iz matematike. V vsakem razredu so izračunali mediano, modus in aritmetično sredino ocen. Rezultate so zapisali v tabelo:

Razred	Mediana	Modus	Aritmetična sredina
T1A	3	3	2,90
T1B	2	1	2,81
T1C	3	4	2,87

Primerjaj rezultate po razredih. Kaj lahko poveš o uspešnosti posameznega razreda?

4. naloga

Pri spremenljivkah označi, ali je smiselno izračunati mediano, modus in aritmetično sredino:

Spremenljivka	Mediana	Modus	Aritmetična sredina
Spol			
Starost			
Razred			
Kraj rojstva			
Število bratov			

Učni uspeh			
Barva las			
Višina dijaka			

5. naloga

Na železniški postaji je v petih dneh vstopilo na vlak po vrsti 12, 15, 20, 22 in 25 potnikov.

a. Izračunaj povprečno dnevno število potnikov, ki so na tej postaji vstopili na vlak.

b. Kako bi se spremenila aritmetična sredina, če bi vsak podatek povečali za 5?

c. Kako bi se spremenila aritmetična sredina, če bi vsak podatek pomnožili s 5?

d. Kolikšna bi bila vsota podatkov, če bi vsakega nadomestili z aritmetično sredino?

e. Izračunaj odklone podatkov od aritmetične sredine tako, da od vsakega podatka odšteješ aritmetično sredino. Kolikšna je vsota vseh odklonov?

6. naloga

V skupini je 5 dijakov. Njihova povprečna starost je 15 let. Kaj lahko sklepamo?

a. Da je največ dijakov starih 15 let.

b. Da so vsi dijaki stari približno 15 let.

c. Da so vsi dijaki stari 15 let.

d. Da je polovica dijakov starih manj kot 15 let, polovica pa več kot 15 let.

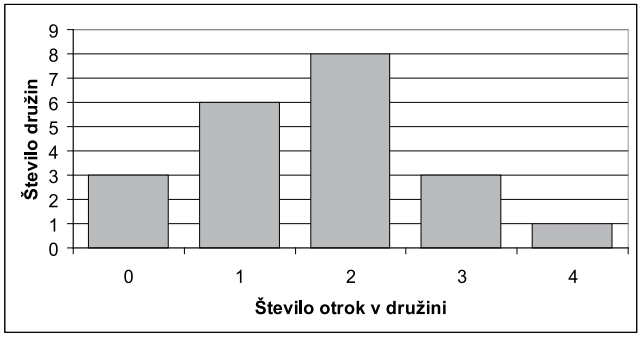
e. Da je vsota starosti vseh otrok v skupini 75 let.

7. naloga

V prvem podjetju z 20 zaposlenimi je povprečna plača 630 EUR, v drugem podjetju s 30 zaposlenimi 750 EUR in v tretjem podjetju z 32 zaposlenimi 920 EUR. Izračunaj povprečno plačo zaposlenih v vseh podjetjih skupaj.

8. naloga

V manjši soseski so zbrali podatke o številu otrok v družinah. Rezultate so prikazali s spodnjim stolpčnim diagramom. Izračunaj povprečno število otrok.



9. naloga

Na železniški postaji so za zadnjih 40 dni spremljali dnevno število potnikov, ki so na tej postaji vstopali na vlak. Zbrani rezultati so:

Razred	Število potnikov	Frekvenca f_i (število dni)
1	1 – 7	5
2	8 – 14	12
3	15 – 21	10
4	22 – 28	7
5	29 – 35	4
6	36 – 42	2
Skupaj		40

Izračunaj povprečno dnevno število potnikov, ki so na tej postaji vstopili na vlak.

Domača naloga

10. naloga

Sedem dijakov je primerjalo med seboj vrednost mesečnih računov za mobilni telefon. Zneske v EUR so zapisali po velikosti: 20,50; 20,50; 20,50; 26,70; 30,00; 30,00; 32,00.

Izračunali so mediano, modus in aritmetično sredino, nato pa ugotovili, da so zadnji podatek zapisali narobe. Namesto 32,00 EUR, je pravilen znesek 52,00 EUR.

a. Ne da bi izračunal, oceni, kako se spremenijo posamezne srednje vrednosti, ki so jih že izračunali, in odgovor utemelji.

b. Izračunaj tudi vse tri srednje vrednosti s prvotnimi in nato s popravljenimi podatki. Ali si v točki a) dobro ocenil nove srednje vrednosti?

11. naloga

Povprečna ocena pisne naloge iz matematike treh dijakov je 3. Razišči vse možnosti za ocene posameznih dijakov, da bo povprečna ocena 3.

12. naloga

Na gimnaziji so v 1. letnikih izmerili maso 50 dijakov. Rezultati merjenja v kg so:

Razred	Masa (kg)	Frekvenca f_i (število dijakov)
1	[46, 50)	3
2	[50, 54)	5
3	[54, 58)	14
4	[58, 62)	16
5	[62, 66)	8
6	[66, 70)	4
Skupaj		50

Izračunaj povprečno maso dijakov v 1. letnikih te gimnazije.

13. naloga

Kontrolno nalogo iz fizike je 5 dijakov pisalo 1, 6 dijakov 2, nekaj dijakov 3, 6 dijakov 4 in 3 dijaki 5. Koliko dijakov je pisalo kontrolno nalogo 3, če je bila povprečna ocena 2,84?

14. naloga

Podatke iz nalog 1 in 2 vnesi v Excelov dokument in z uporabo programa izračunaj mediano, modus in aritmetično sredino. (mediana – MEDIAN, modus – MODE, aritmetična sredina – AVERAGE). Nato eksperimentiraj s podatki in opazuj vpliv na posamezne sredine.

15. naloga

Za podatke iz ankete, ki si jo opravil med sošolci (UL_Osnovni pojmi statistike.doc, naloga 8), izračunaj ustrezne srednje vrednosti in jih komentiraj.

3.2.4 Razpršenost podatkov

Simona Pustavrh, Šolski center Novo mesto

Osnovni podatki

Tema	Statistika
Enota	Razpršenost podatkov
Predvideni čas izpeljave	dve šolski uri

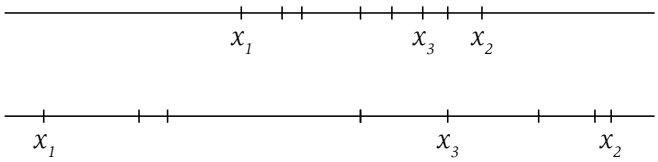
Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• prepoznajo vprašanja, na katera statistika lahko ponudi odgovor;
• spoznavajo in uporabljajo različne IKT-tehnologije kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov;
• kritično ovrednotijo rezultate;
• izražajo se ustno, pisno in v drugih izraznih oblikah;
• poznajo pomen variacijskega razmika in standardnega odklona ter ju znajo izračunati;
• variacijski razmik izračunajo le iz posamičnih podatkov, standardni odklon pa tudi iz grupiranih;
• razumejo, za katere vrste spremenljivke je smiselno izračunati mere razpršenosti;
• izračunajo standardni odklon tudi s programom Excel.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• razlikujejo med opisnimi ali kvalitativnimi podatki, vrstnimi ali ordinalnimi ter številskimi ali kvantitativnimi podatki;
• znajo izračunati aritmetično sredino podatkov;
• znajo uporabljati program Excel.</td></tr>
</table>

Pričakovani dosežki/ rezultati	Dijaki/dijakinje: • poznajo in izračunajo mere variabilnosti; • znanje uporabijo pri medpredmetnih povezavah; • usvojeno znanje uporabijo pri analizi in izdelajo statistično nalogo; • kritično ovrednotijo rezultate.
Didaktični pristop	• vodeno raziskovanje, • individualno delo – delo z učnim listom, • uporaba novih tehnologij
Potek učnega procesa	*1. ura:* Učitelj dijakom razloži mere variabilnosti. Skupaj rešijo nekaj uvodnih nalog z učnega lista. *2. ura:* Dijaki samostojno rešujejo naloge z učnega lista.
Preverjanje dosežkov/ rezultatov	Učni list: Urejanje in prikazovanje podatkov
Gradivo na zgoščenki	UL_Razprsenost_podatkov.doc RUL_Razprsenost_podatkov.doc
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Program Excel
Viri	1 *Čibej, J. A. (1997). Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika. Ljubljana: DZS.* 2 *Čibej, J. A. (1997). Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika: priročnik za učitelje. Ljubljana: DZS.* 3 *Šparovec, J. et al. (2004). Tempus. Ljubljana: Modrijan.* 4 *Ferligoj, A. (1997). Osnove statistike na prosojnicah. Ljubljana: samozaložba.* 5 *Sagadin, J. (2003). Statistične metode za pedagoge. Maribor: Obzorja.* 6 *Fridman, D., Pisani, R., Purves, R. (2007). Statistics, 4th Edition. New York: W. W. Norton and Company.*

Iz teorije

Razpršenost (ali variabilnost) je lastnost podatkov, da lahko zavzamejo različne vrednosti. Na prvi številski premici so podatki manj, na drugi pa bolj razpršeni.



Obravnavali bomo naslednje mere za razpršenost podatkov (po učnem načrtu):

- variacijski razmik,
- standardni odklon (ali standardna deviacija),
- medčetrtinski razmik (v naslednjem razdelku).

Variacijski razmik je razlika med največjim in najmanjšim podatkom. Označimo ga z ***VR.***

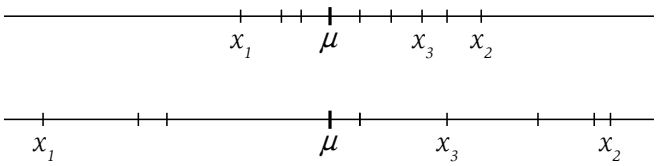
$VR = x_{max} - x_{min}$

Primer: Pet dijakov je v zadnjem mesecu po vrsti prebralo naslednje število knjig: 2, 2, 6, 7, 10. Izračunaj variacijski razmik za število prebranih knjig.

Variacijski razmik je VR = 10 – 2 = 8. Razlika med največjim in najmanjšim številom prebranih knjig je osem knjig.

Excel ne vsebuje funkcije za variacijski razmik, zato ga izračunamo tako, da s funkcijama MAX in MIN poiščemo največji oziroma najmanjši podatek, nato pa ju odštejemo.

Standardni odklon meri razpršenost podatkov okoli njihove aritmetične sredine. Razpršenost je večja, če so podatki bolj oddaljeni od aritmetične sredine, kar lahko tudi vidimo na spodnjih dveh številskih premicah.



Razpršenost okoli aritmetične sredine bi lahko izračunali tako, da bi od vsakega podatka odšteli aritmetično sredino in rezultate sešteli, vendar smo se že v prejšnjem razdelku prepričali, da je vsota odklonov od aritmetične sredine enaka 0. Lahko bi izračunali vsoto absolutnih vrednosti odklonov, vendar se izkaže, da je enostavneje izračunati vsoto kvadratov odklonov, s katerimi prav tako rešimo problem negativnih vrednosti. Ker je razpršenost odvisna tudi od števila podatkov, delimo vsoto kvadratov odklonov z *N*, nato pa rezultat še korenimo, da dobimo razpršenost, izraženo v istih enotah, kot so podatki. S tem smo že opisali definicijo standardnega odklona.

Standardni odklon (ali standardna deviacija) je enak korenu povprečja kvadratov odklonov podatkov od aritmetične sredine. Označimo ga s σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\ldots+(x_N-\mu)^2}{N}} \text{ ali krajše } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}}$$

Izkaže se, da je uporabnejša formula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \mu^2}$$

Preverimo ekvivalentnost obeh zapisov:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2)}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} 2x_i\mu + \sum_{i=1}^{N}\mu^2}{N}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{N} x_i + N\cdot\mu^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - 2\mu\cdot\mu + \mu^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \mu^2}$$

Tu smo upoštevali, da je $\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \mu$

Standardni odklon grupiranih podatkov v r razredov izračunamo po formuli:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{r} f_i(x_i - \mu)^2}{N}} \text{ ali } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{r} f_i x_i^2}{N} - \mu^2}$$

Lastnosti standardnega odklona:

- Standardni odklon je odvisen od posameznih vrednosti. Aritmetična sredina je tista vrednost, za katero je vsota kvadratov odklonov najmanjša.
- Standardni odklon se ne spremeni, če vsem podatkom prištejemo (ali odštejemo) isto vrednost.
- Če vsak podatek pomnožimo z istim številom, se tudi standardni odklon pomnoži z istim številom.

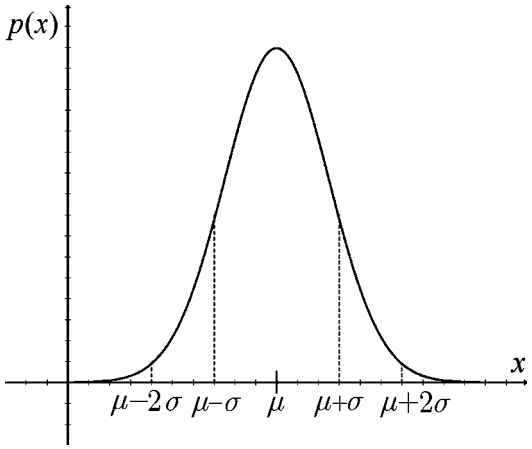
V Excelu uporabimo funkcijo STDEVP (poleg te funkcije nastopajo še druge, vendar naši definiciji ustreza ta).

Kaj pove standardni odklon?

Spoznajmo najprej normalno porazdelitev. Gostota normalne porazdelitve je funkcija

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},$$

ki je definirana na celotni realni osi, je simetrična glede na premico $x = \mu$ z maksimumom v $x = \mu$, njena asimptota je x os, σ pa določa njeno raztegnjenost. Graf gostote normalne porazdelitve ima značilno zvonasto obliko. Dijakom predstavimo normalno porazdelitev na intuitivni ravni.



Opomba: Didaktična priporočila glede obravnave normalne porazdelitve pri pouku matematike v gimnaziji so predstavljena v članku Marjana Jermana: Obravnava normalne porazdelitve v gimnaziji v reviji Matematika v šoli, letnik XIV(2008), številki 3, 4.

Na intuitivni ravni lahko razmišljamo takole: največ podatkov ima vrednosti okoli aritmetične sredine, tistih, ki pa odstopajo od nje, je malo. Povemo lahko tudi nekaj več: na intervalu $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ je približno 68 % podatkov (ali približek $\frac{2}{3}$), na intervalu $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ leži približno 95 % podatkov in na intervalu $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ kar 99 % podatkov.

Za uporabo je na srednješolski ravni dovolj, da dijaki vedo:

Če je porazdelitev podatkov približno normalna (pogledamo, ali je histogram simetričen), je približno $\frac{2}{3}$ podatkov na intervalu $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$.

Primeri normalno porazdeljenih podatkov:

- IQ-ljudi,
- masa odraslih ljudi,
- čas, ki ga potrebuje avtobus od Novega mesta do Ljubljane,
- dolžina žebljev pri serijski proizvodnji.

Učni list

Razpršenost podatkov

1. naloga

Dijake v razredu smo razdelili v tri skupine in izmerili njihovo višino v cm. Rezultati meritev so zbrani v tabeli:

1. skupina	163	165	167	174	175	175	176
2. skupina	166	167	184	185	187	191	192
3. skupina	170	173	177	180	181	182	183

1. Oceni, v kateri skupini je razpršenost višin dijakov na prvi pogled največja in v kateri najmanjša?
2. Izračunaj variacijski razmik in standardni odklon višin dijakov v vsaki od skupin. Ali si v točki a) dobro ocenil, v kateri skupini je razpršenost največja in v kateri najmanjša?

2. naloga

Pri spremenljivkah označi, ali je smiselno izračunati variacijski razmik in standardni odklon:

Spremenljivka	Variacijski razmik	Standardni odklon
Spol		
Starost		
Razred		
Kraj rojstva		
Število bratov		
Učni uspeh		
Barva las		
Višina dijaka		

3. naloga

V trgovini je bilo v zadnjih petih urah naslednje število strank: 15, 12, 25, 22 in 20.

a. Izračunaj aritmetično sredino in standardni odklon števila strank v zadnjih petih urah.
b. Kako bi se spremenil standardni odklon, če bi vsak podatek povečali za 5?
c. Kako bi se spremenil standardni odklon, če bi vsak podatek pomnožili s 5?

4. naloga

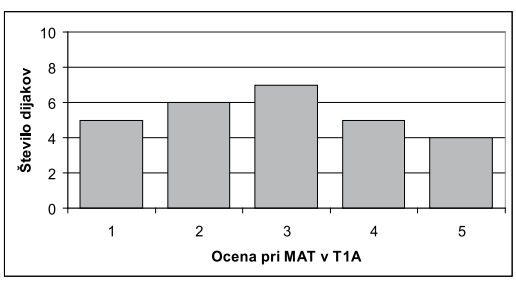
Na železniški postaji so za zadnjih 40 dni spremljali dnevno število potnikov, ki so na tej postaji vstopali na vlak. Zbrani rezultati so:

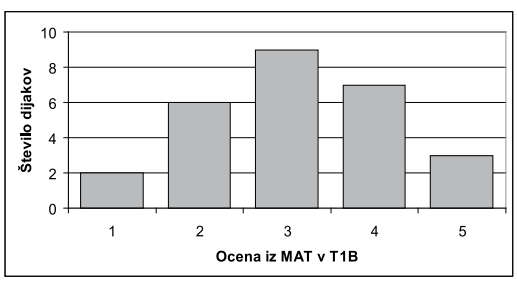
Razred	Število potnikov	Frekvenca f_i (število dni)
1	1 – 7	5
2	8 – 14	12
3	15 – 21	10
4	22 – 28	7
5	29 – 35	4
6	36 – 42	2
Skupaj		40

Izračunaj aritmetično sredino in standardni odklon števila potnikov, ki so na tej postaji vstopili na vlak.

5. naloga

Spodnja grafikona prikazujeta ocene dijakov T1A in T1B, ki so jih dosegli pri kontrolni nalogi iz matematike.





a. Iz grafikonov oceni, v katerem razredu je razpršenost ocen večja.

b. Izračunaj aritmetično oceno in standardni odklon ocen v vsakem od razredov. Ali si v nalogi a) pravilno ugotovil, v katerem razredu je razpršenost ocen večja?

Domača naloga

6. naloga

V bolnišnici ležita gospe Marija in Ana zaradi težav s krvnim tlakom. V tabeli so zbrani podatki o njunih zgornjih krvnih tlakih v mmHg v zadnjem tednu:

Gospa	1. dan	2. dan	3. dan	4. dan	5. dan	6. dan	7. dan
Marija	160	170	165	172	167	170	162
Ana	145	150	157	160	140	165	155

Krvni tlak katere gospe je stabilnejši?

7. naloga

Na gimnaziji so v 1. letnikih izmerili maso 50 dijakov. Rezultati merjenja v kg so:

Razred	Masa (kg)	Frekvenca f_i (število dijakov)
1	[46, 50)	3
2	[50, 54)	5
3	[54, 58)	14
4	[58, 62)	16
5	[62, 66)	8
6	[66, 70)	4
Skupaj		50

Izračunaj aritmetično sredino in standardni odklon mase dijakov v 1. letnikih te gimnazije.

8. naloga

Podatke iz naloge 1 vnesi v program Excel in s tem programom izračunaj variacijski razmik in standardni odklon podatkov.

9. naloga

Za podatke iz ankete med sošolci (UL_Osnovni pojmi statistike.doc, naloga 8) izračunaj ustrezne mere razpršenosti in jih komentiraj.

3.2.5 Uporaba aritmetične sredine in standardnega odklona

3.2.5.1 Analiza ustreznosti polnjenja embalaže za mazila

Romana Bohak Farič, Gimnazija in srednja kemijska šola Ruše

Osnovni podatki

Tema	Statistika
Enota	Aritmetična sredina in standardni odklon
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

Učni cilji (splošni, procesni in vsebinski)	Dijaki/dijakinje: • razvijajo problemska znanja; • znajo preveriti ustreznost vzorca; • uporabijo statistična pojma aritmetična sredina in odklon pri reševanju realnega problema.	
Kompetence	**K1 – sporazumevanje v slovenščini**	K5 – učenje učenja
	K2 – sporazumevanje v tujih jezikih	K6 – socialne in državljanske kompetence
	K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji	K7 – samoiniciativnost in podjetnost
	K4 – digitalna pismenost	K8 – kulturna zavest in izražanje
Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje: • poznajo aritmetično sredino in standardni odklon; • znajo uporabljati program za delo s preglednicami (Excel).	
Pričakovani dosežki/ rezultati	Dijaki/dijakinje: • kritično ovrednotijo rezultate.	
Didaktični pristop	• problemsko učenje, preiskovanje, raziskovanje, • uporaba tehnologije	
Potek učnega procesa	1. predstavitev problema in postavitev vprašanj 2. raziskovanje, reševanje 3. predstavitev in kritično vrednotenje ugotovitev	
Domača naloga	Dijaki preverijo ustreznost vzorca z danimi pogoji.	
Gradivo na zgoščenki	UL_Mazila.doc RUL_Mazila.doc R_Mazila.xls	

Kontekst problema	avtentična situacija v industriji
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	računalnik za vsakega dijaka s programsko opremo (Excel)

Učni list

Analiza ustreznosti polnjenja embalaže za mazila

V tovarni ROŽA polnijo mazila v različno velike posode. Na koncu proizvodne linije opravijo nadzor ustreznosti polnjenja.

1. naloga

Pri preverjanju polnjenja 100 g mazil smo dobili podatke, prikazane v tabeli:

Masa m (g)	Število mazil f_i
80 – 89	19
90 – 99	86
100 – 109	103
110 – 119	37
120 – 129	5

Frekvenčna porazdelitev mase napolnjenih škatlic z mazilom

Izračunajte aritmetično sredino mas mazil in standardni odklon σ.

2. naloga

Naključno smo izbrali vzorec šestih škatlic mazila (100 g polnjenje) in pri tehtanju dobili naslednje rezultate, merjene v gramih: 98, 99, 101, 101, 102 in 104. Polnjenje je ustrezno, če povprečna masa ni manjša od predpisane in največ eno mazilo lahko odstopa od povprečja več kot ±1,05 σ*, vendar manj kot ±1,3* σ.

a. Ali je polnjenje glede na vzorec ustrezno?

b. Zapišite mase vsaj treh vzorcev s po šestimi mazili, da bi bilo polnjenje ustrezno.

3. naloga

Naključno smo izbrali vzorec z devetimi mazili (100 g polnjenje) in pri tehtanju dobili naslednje rezultate, merjene v gramih: 99, 99, 99, 99, 101, 101, 101, 102 in 102. Tokrat je kriterij za ustreznost polnjenja spremenjen. Polnjenje je ustrezno, če povprečna vsebnost ni manjša od predpisane in največ dve mazili lahko odstopata od povprečja več kot ±1,1, vendar manj kot ±1,3 σ.

a. Ali je polnjenje ustrezno?

b. Zapišite vsaj en vzorec z devetimi mazili, katerih povprečna masa ne zadostuje za ustrezno polnjenje, preostali pogoji pa so izpolnjeni.

c. Pri drugem vzorcu smo dobili naslednje rezultate, merjene v gramih: 97, 98, 98, 99, 100, 102, 102, 103 in 103. Ali je polnjenje pri istih pogojih ustrezno?

3.2.6 Kvartili in škatla z brki

Simona Pustavrh, Šolski center Novo mesto

Osnovni podatki

Tema	Statistika
Enota	Kvartili in škatla z brki
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• spoznajo vprašanja, na katera statistika lahko ponudi odgovor;
• spoznavajo in uporabljajo različne IKT-tehnologije kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov;
• kritično ovrednotijo rezultate;
• izražajo se ustno, pisno in v drugih izraznih oblikah;
• poznajo pomen kvartilov in kvartilnega razmika ter jih izračunajo;
• narišejo škatlo z brki in interpretirajo variabilnost podatkov;
• z uporabo škatel z brki primerjajo med seboj različne skupine enot.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• prepoznajo proučevano značilnost enote;
• razlikujejo med opisnimi ali kvalitativnimi podatki, vrstnimi ali ordinalnimi ter številskimi ali kvantitavnimi podatki;
• znajo uporabljati program Excel.</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki/ rezultati</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• znanje uporabijo pri medpredmetnih povezavah;
• znanje uporabijo pri izdelavi statistične naloge in kritično ovrednotijo rezultate.</td></tr>
</table>

Didaktični pristop	• individualno delo – delo z učnim listom, • uporaba novih tehnologij
Potek učnega procesa	Učitelj dijakom razloži pomen kvartilov, kvartilnega razmika in škatle z brki. Dijaki utrjujejo snov z reševanjem primerov z učnega lista. Učitelj pokaže dijakom, kako z uporabo programa Excel ali katerega od alternativnih mogočih programov. izdelajo škatlo z brki. Če je na voljo računalniška učilnica, dijaki samostojno rešijo kakšno nalogo. Potem je potrebna ena učna ura več.
Preverjanje dosežkov/ rezultatov	Učni list: Kvartili in škatla z brki
Gradivo na zgoščenki	UL_Kvartili_in_skatla_z_brki.doc RUL_Kvartili_in_skatla_z_brki.doc Navodila_za_kvartile_in_sk_brki_Excel.doc
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Program Excel
Viri	1 *Šparovec, J. et al. (2004). Tempus. Ljubljana: Modrijan.* 2 *Ferligoj, A. (1997). Osnove statistike na prosojnicah. Ljubljana: samozaložba.* 3 *Sagadin, J. (2003). Statistične metode za pedagoge. Maribor: Obzorja.* 4 *http://mathforum.org/library/drmath/view/60969.html (citirano 25. 2. 2010)* 5 *http://www.cms.murdoch.edu.au/areas/maths/statsnotes/samplestats/quartilesmore.html#HowSPSSdoesQuartiles (citirano 25. 2. 2010)*

Iz teorije

Kvartili in škatla z brki

Kvartili

V statistiki so kvartili definirani kot vrednosti, ki razdelijo številske podatke, urejene po velikosti, v štiri skupine tako, da je v vsaki enako število podatkov:

- **prvi kvartil** Q_1 je tista vrednost, od katere je 25 % podatkov manjših (ali enakih) in 75 % podatkov večjih (ali enakih),
- **drugi kvartil** Q_2 je tista vrednost, od katere je 50 % podatkov manjših (ali enakih) in 50 % podatkov večjih (ali enakih) – mediana,
- **tretji kvartil** Q_3 je tista vrednost, od katere je 75 % podatkov manjših (ali enakih) in 25 % podatkov večjih (ali enakih).

Poleg te definicije pogosto srečamo tudi definicijo, da je drugi kvartil Q_2 mediana vseh po velikosti urejenih podatkov, prvi kvartil Q_1 je mediana podatkov, ki so levo od Q_2, tretji kvartil Q_3 pa je mediana podatkov, ki so desno od Q_2. Če je podatkov liho število, upoštevamo mediano pri obeh polovicah podatkov.

Opomba: To definicijo je razvil John Tukey in jo bomo uporabljali v nadaljevanju (*http://mathforum.org/library/drmath/view/60969.html*). Uporabljajo jo tudi številni računalniški programi (SPSS, SAS, Fathom). Različica te definicije je, da mediane pri lihem številu podatkov ne štejemo ne k levi ne k desni polovici podatkov. Ta definicija je navedena v večini osnovnošolskih učbenikov, uporablja pa jo tudi matematični program Geogebra.

Primer 1:

Štirinajst dni zapored so od 16.00 do 17.00 opazovali promet v križišču. V tej uri je skozi križišče peljalo naslednje število avtomobilov: 6, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 22, 23. Izračunaj kvartile števila avtomobilov, ki so v opazovani uri peljali skozi križišče.

Najprej izračunamo mesto, na katerem je mediana. $(N+1)/2 = (14+1)/2 = 7{,}5$. Mediana leži med sedmim in osmim podatkom, zato je $Q_2 = (14+15)/2 = 14{,}5$ avtomobilov. Levo od te vrednosti so preostali podatki: 6, 6, 7, 10, 11, 12, 14. Njihova mediana leži na sredini, zato je $Q_1 = 10$ avtomobilov. Desno od $Q_2 = 14{,}5$ ležijo podatki 15, 17, 20, 21, 22, 22, 23, njihova mediana pa je $Q_3 = 21$ avtomobilov.

Primer 2:

Trinajst dni zapored so od 16.00 do 17.00 opazovali promet v križišču. V tej uri je skozi križišče peljalo naslednje število avtomobilov: 6, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 22 avtomobilov. Izračunaj kvartile števila avtomobilov, ki so v opazovani uri peljali skozi križišče.

Podatki so že urejeni po velikosti, zato določimo najprej mediano. Ta je na sredini podatkov, torej na 7. mestu, zato je $Q_2 = 14$ avtomobilov. Leva polovica podatkov z mediano vred je: 6, 6, 7, 10, 11, 12, 14. Mediana teh podatkov je 10, zato je $Q_1 = 10$ avtomobilov.

Desna polovica podatkov z mediano vred je: 14, 15, 17, 20, 21, 22, 22. Mediana teh podatkov je 20, zato je $Q_3 = 20$ avtomobilov.

Opomba: Glede na različne definicije kvartilov poznamo nekaj različnih metod za njihovo določanje, ki so poleg decilov in centilov le poseben primer **kvantilov.** Med metodami je najbolj znana linearna interpolacija, ki jo spoznajo študenti na fakultetah, na katerih predavajo statistiko, vendar bi bila za srednješolsko raven prezahtevna. Tudi različni računalniški programi vrnejo zaradi različnih metod pri istih podatkih različne vrednosti kvartilov. Za nobeno od znanih metod ne moremo reči, da je napačna, le rezultati, ki jih dobimo, se včasih med seboj razlikujejo, včasih pa ujamejo. Pri statističnih raziskavah ponavadi obravnavamo veliko število podatkov, zato različne definicije ne motijo, če pa je podatkov malo, so razlike očitne.

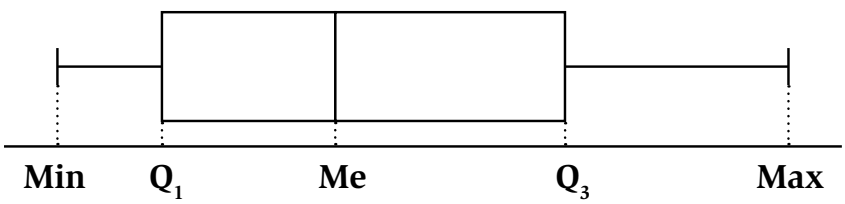
Metodo, ki jo uporablja Excel, sta razvila Freund in Perles, vendar je ne uporablja skoraj nihče drug *(vir: http://mathforum.org/library/drmath/view/60969.html)*. Na spletni strani *http://www.cms.murdoch.edu.au/areas/maths/statsnotes/samplestats/quartilesmore.html#HowSPSSdoesQuartiles* pa si lahko ogledate nekaj različnih metod, ki jih uporabljajo računalniški programi.

Medčetrtinski razmik Q je razlika med tretjim in prvim kvartilom: $Q = Q_3 - Q_1$. Obsega torej 50 % vrednosti podatkov. 25 % najmanjših in 25 % največjih vrednosti podatkov leži zunaj medčetrtinskega razmika. Nanj ne vplivajo skrajno majhne ali skrajno velike vrednosti podatkov.

Zakaj so kvartili pomembni? Z njimi, z najmanjšo in največjo vrednostjo ter medčetrtinskim razmikom prikažemo razpršenost podatkov.

Škatla z brki

S kvartili lahko nazorno pokažemo razpršenost podatkov tako, da narišemo škatlo z brki, za katero potrebujemo poleg kvartilov še najmanjšo in največjo vrednost med podatki.

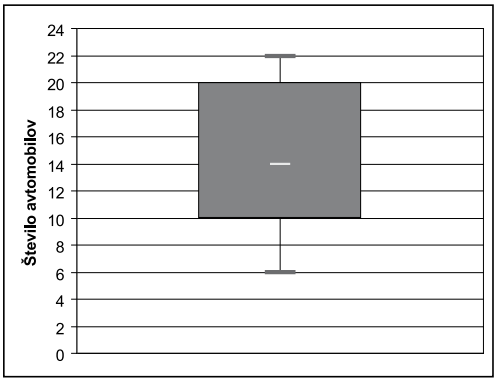


Škatlo z brki imenujemo tudi okvir z ročaji ali grafikon kvartilov (ang. box and whiskers plot ali box plot). Navadno jo narišemo pokončno tako, da na navpično os v pravokotnem koordinatnem sistemu nanesemo vrednosti spremenljivke.

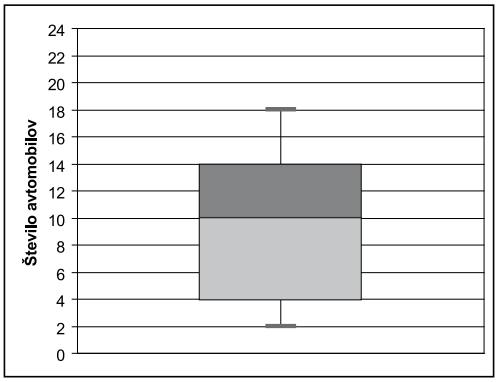
Škatle z brki so uporabne predvsem pri primerjanju več skupin podatkov iste vrste (npr. po spolu).

Škatle z brki lahko narišemo tudi z različnimi računalniškimi programi. Naj poudarimo, da Excel nima vgrajenega grafikona za risanje škatel z brki, zato jih narišemo s kombinacijo drugih grafikonov. Opis postopka za Excel 2003 in 2007 je podan na zgoščenki v datoteki *Navodila_za_kvartile_in_sk_brki_Excel.doc*.

Prikaz podatkov s škatlo z brki iz primera 2:



Excel 2003



Excel 2007

Opomba: Če želimo biti natančnejši, škatlo z brki narišemo tako, da upoštevamo tudi osamelce in ekstremne osamelce. Osamelci so podatki, ki ležijo zunaj intervala $(Q_1 - 1{,}5Q; Q_3 + 1{,}5Q)$ in jih na sliki označimo s krožcem (○). Ekstremni osamelci so podatki, ki ležijo zunaj intervala $(Q_1 - 3Q; Q_3 + 3Q)$ in jih na sliki označimo z zvezdico (*). Minimum in maksimum v tem primeru imenujemo pogojni minimum in pogojni maksimum na intervalu $(Q_1 - 1{,}5Q; Q_3 + 1{,}5Q)$. Računalniški programi ponavadi upoštevajo tudi osamelce (npr. SPSS). Tudi to presega srednješolsko raven.

Učni list

Kvartili in škatla z brki

1. naloga

V tabeli so podane količine padavin v nekaterih slovenskih krajih julija 2008. Podatke uredi po velikosti, določi najmanjšo in največjo količino padavin, izračunaj vse tri kvartile, medčetrtinski razmik in nariši škatlo z brki. Na grafikonu preberi in analiziraj podatke. Kaj lahko poveš o razpršenosti podatkov?

Kraj	Skupna mesečna količina padavin v mm
Celje	215
Črnomelj	180
Kočevje	169
Kredarica	256
Ljubljana	188
Maribor	149
Murska Sobota	168
Novo mesto	141
Portorož	46
Postojna	103
Rateče	197

2. naloga

V manjši trgovini so imeli v zadnjih 22 dneh naslednje število strank: 23, 14, 35, 20, 21, 21, 31, 29, 28, 29, 35, 40, 15, 24, 24, 36, 38, 42, 26, 17, 30, 18. Podatke prikaži s škatlo z brki. Koliko je medčetrtinski razmik in kaj pove? Rezultate komentiraj.

3. naloga

V podjetju so opazili slabšo storilnost zaposlenih, zato so opravili raziskavo, s katero so želeli ugotoviti, kaj vpliva na slabšo storilnost. Eno od vprašanj je bilo tudi, koliko ur spijo na dan, rezultate so ločeno za ženske in moške prikazali s škatlama z brki.

Odgovori na naslednja vprašanja:

a. Približno koliko je najmanjše in koliko največje število ur spanja za posamezen spol?

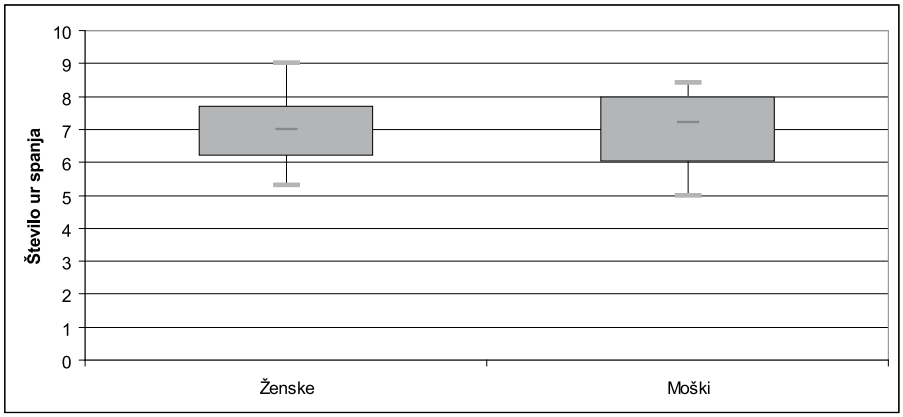
b. Približno koliko ur spanja je mediana za vsakega od spolov? Odgovor komentiraj.

c. Približno koliko sta prvi in tretji kvartil ur spanja za vsakega od spolov? Odgovor komentiraj.

d. Približno koliko je kvartilni razmik ur spanja za vsakega od spolov? Odgovor komentiraj.

e. Primerjaj število ur spanja za moške in ženske. Kaj lahko sklepamo?

f. Ali je število ur spanja na dan zaposlenih lahko razlog za slabšo storilnost? Odgovor pojasni.



4. naloga

Pri športni vzgoji je 15 dijakov in 10 dijakinj skakalo v daljavo z mesta. Rezultati dijakov v metrih so 2,1; 1,8; 2,2; 2,3; 1,7; 2,5; 2,6; 2,2; 2,4; 2,3; 2,1; 2,0; 2,3; 2,5; 2,2, rezultati dijakinj v metrih pa 1,6; 1,8; 2,0; 1,7; 1,5; 1,9; 1,7; 1,8; 1,9; 1,8. Rezultate dijakov in dijakinj predstavi s škatlama z brki in jih primerjaj med seboj. Kaj opaziš?

Domača naloga

5. naloga

Na maturi je 15 dijakov doseglo naslednje število točk: 13, 18, 21, 14, 17, 22, 25, 33, 28, 22, 20, 20, 12, 17, 16. Določi najmanjše in največje število točk, izračunaj vse tri kvartile števila točk na maturi in medčetrtinski razmik. Podatke prikaži s škatlo z brki. Rezultate komentiraj.

6. naloga

Dijaki gimnazije so s statistično preiskavo zbrali podatke o višinah žepnin, ki jih dobijo od staršev. Zanimalo jih je, ali se ti razlikujejo med seboj po letnikih. V vsakem letniku so naključno izbrali po 14 dijakov in višine žepnin v evrih zapisali v tabeli:

1. letnik	2. letnik	3. letnik	4. letnik
32	30	50	75
35	38	52	65
40	35	56	60
30	25	60	55
30	40	65	62
45	40	50	58
42	45	45	70
60	50	75	85

55	55	80	68
50	52	85	95
52	35	70	70
48	30	65	65
50	36	55	76
40	55	90	80

Višine žepnin po letnikih predstavi s škatlami z brki. Kaj lahko sklepaš?

7. naloga

Uporabi podatke, ki si jih izračunal pri posamezni nalogi, in nariši pri vsaki nalogi škatlo (ali škatle) z brki še s programom Excel.

8. naloga

Za podatke iz ankete med sošolci (UL_Osnovni_pojmi_statistike.doc, naloga 8) izračunaj kvartile in nariši škatle z brki (za tiste spremenljivke, za katere je smiselno). Rezultate komentiraj.

3.2.7 Uporaba srednjih vrednosti

3.2.1.7 Izbira zdravila

Romana Bohak Farič, Gimnazija in srednja kemijska šola Ruše

Osnovni podatki

Tema	Statistika
Enota	Srednje vrednosti
Predvideni čas izpeljave	ena šolska ura

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

Učni cilji (splošni, procesni in vsebinski)	Dijaki/dijakinje: • razvijajo problemska znanja; • primerjajo srednje vrednosti; • poznajo pomen srednjih vrednosti; • narišejo škatlo z brki; • zapišejo utemeljitve.	
Kompetence	**K1 – sporazumevanje v slovenščini**	K5 – učenje učenja
	K2 – sporazumevanje v tujih jezikih	K6 – socialne in državljanske kompetence
	K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji	K7 – samoiniciativnost in podjetnost
	K4 – digitalna pismenost	K8 – kulturna zavest in izražanje
Potrebno predznanje in izkušnje	Dijaki/dijakinje: • poznajo srednje vrednosti (modus, mediano, aritmetično sredino); • poznajo kvartile; • poznajo škatlo z brki; • poznajo delo s programom GeoGebra ali Excelom.	
Pričakovani dosežki/ rezultati	Dijaki/dijakinje: • znajo izdelati preprosto statistično analizo.	
Didaktični pristop	• problemsko učenje, preiskovanje, raziskovanje, • uporaba tehnologij	
Potek učnega procesa	1. predstavitev problema in postavitev vprašanj, 2. reševanje, raziskovanje, 3. predstavitev ugotovitev	
Domača naloga	Dijaki preverijo ustreznost vzorca z danimi pogoji.	

Gradivo na zgoščenki	UL_Zdravila.doc RUL_Zdravila.doc 01_zdravila.ggb 02_zdravila.ggb
Kontekst problema	avtentična situacija v farmaciji
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	računalnik za vsakega dijaka s programsko opremo (Excel in GeoGebra)
Viri	1 *Mousoulides, N.(et al) (2006). Improving mathematical knowledge through modelling in elementary schools, in Novotna, J. (et al). Proceedings 30th PME conference, Vol. 4, p. 201–208.* 2 *Watson, M. J. (2006). Statistical Literacy at School. London, LEA.*

Učni list

Izbira barvila

1. naloga

V tovarni zdravil Moje zdravje izdelujejo štiri različna zdravila proti bolečinam. Radi bi ugotovili, katero je najboljše. Zato so pridobili podatke o času (v minutah), ko zdravilo začne delovati. Za tovarno zdravil Moje zdravje izdelajte poročilo z utemeljitvami.

Podatki:

Kanatol	Saracetamol	Ralpol	Kefapol
20	10	8	10
18	19	14	12
19	13	15	17
22	11	9	22
15	11	7	10
14	12	15	7
23	10	9	22
12	9	8	17
11	8	12	19
10	8	15	7
7	14	19	17
9	13	10	10
10	12	10	18
17	17	23	14
13	11	24	7
12	11	23	19
14	13	10	10
14	20	8	21
8	25	17	10
9	13	19	12
14	17	20	16

3.2.8 Odnos in povezanost spremenljivk

Simona Pustavrh, Šolski center Novo mesto

Osnovni podatki

Tema	Statistika
Enota	Odnos in povezanost spremenljivk
Predvideni čas izpeljave	dve šolski uri

Didaktični podatki o načrtovanju učnega procesa

<table>
<tr><td>Učni cilji
(splošni, procesni in vsebinski)</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• spoznajo vprašanja, na katera statistika lahko ponudi odgovor;
• spoznavajo in uporabljajo različne IKT-tehnologije kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov;
• izražajo se ustno, pisno in v drugih izraznih oblikah;
• podatke prikažejo v dvorazsežni tabeli;
• izračunajo odstotke in jih prikažejo grafično;
• raziskujejo povezanost dveh številskih spremenljivk, spremenljivki prikažejo v razsevnem diagramu.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Kompetence</td><td>K1 – sporazumevanje v slovenščini</td><td>K5 – učenje učenja</td></tr>
<tr><td>K2 – sporazumevanje v tujih jezikih</td><td>K6 – socialne in državljanske kompetence</td></tr>
<tr><td>K3 – matematična kompetenca ter osnovne kompetence v znanosti in tehnologiji</td><td>K7 – samoiniciativnost in podjetnost</td></tr>
<tr><td>K4 – digitalna pismenost</td><td>K8 – kulturna zavest in izražanje</td></tr>
<tr><td>Potrebno predznanje in izkušnje</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• razlikujejo med opisnimi ali kvalitativnimi podatki, vrstnimi ali ordinalnimi ter številskimi ali kvantitativnimi podatki;
• znajo uporabljati program Excel.</td></tr>
<tr><td>Pričakovani dosežki/ rezultati</td><td colspan="2">Dijaki/dijakinje:
• usvojeno znanje uporabijo pri analizi in izdelajo statistično nalogo;
• kritično ovrednotijo rezultate.</td></tr>
<tr><td>Didaktični pristop</td><td colspan="2">• vodeno raziskovanje,
• individualno delo – delo z učnim listom,
• uporaba novih tehnologij</td></tr>
</table>

Potek učnega procesa	Učitelj dijakom na primeru razloži prikaz podatkov v dvorazsežni tabeli in njihov prikaz s strukturnimi stolpci. Nato spet na primeru razloži povezanost dveh opisnih spremenljivk in grafični prikaz povezanosti v razsevnem diagramu. Dijakom prikaže uporabo ustreznih računalniških programov.
Preverjanje dosežkov/ rezultatov	Učni list: Odnos in povezanost spremenljivk
Gradivo na zgoščenki	UL_Odnos_in_povezanost_spremenljivk.doc RUL_Odnos_in_povezanost_spremenljivk.doc
Potrebna programska oprema/učna tehnologija	Program Excel
Viri	1 *Ferligoj, A. (1997). Osnove statistike na prosojnicah. Ljubljana: samozaložba.* 2 *Sagadin, J. (2003). Statistične metode za pedagoge. Maribor: Obzorja.* 3 *Fridman, D., Pisani, R., Purves, R. (2007). Statistics, 4th Edition. New York: W. W. Norton and Company.*

Iz teorije

V statistiki je zelo zanimiva analiza povezanosti spremenljivk. Če opazujemo povezanost dveh spremenljivk, jo imenujemo **bivariatna analiza**, če pa povezanost ene spremenljivke z več spremenljivkami, jo imenujemo **multivariatna analiza**.

Glede na način izražanja spremenljivk ločimo več tipov povezanosti. V nadaljevanju se bomo osredotočili na povezanost dveh opisnih (in vrstnih) spremenljivk in povezanost dveh številskih spremenljivk. Povezanost opisnih spremenljivk bomo poenostavili v odnos opisnih spremenljivk.

Odnos dveh opisnih spremenljivk (ali opisne in vrstne)

Odnos dveh opisnih spremenljivk (in tudi vrstnih) najlaže raziščemo z dvorazsežno tabelo, ki jo imenujemo **kombinacijska** ali **kontingenčna tabela**. V tabelo zapišemo frekvence po dveh spremenljivkah. Vrednosti primerjamo med seboj tako, da izračunamo odstotke (po prvi ali po drugi ali po obeh spremenljivkah). Odnos grafično prikažemo s strukturnimi stolpci. V statistiki seveda poznamo metode, s katerimi preverimo povezanost spremenljivk, vendar tudi to presega srednješolsko snov.

Pojasnimo s primerom:

Raziščimo strukturo zaposlenih moških in žensk po stopnji izobrazbe v tekstilnem podjetju, v katerem je zaposlenih 150 žensk in 50 moških (podatki so izmišljeni). Podatki o spolu in stopnji izobrazbe so zbrani v tabeli:

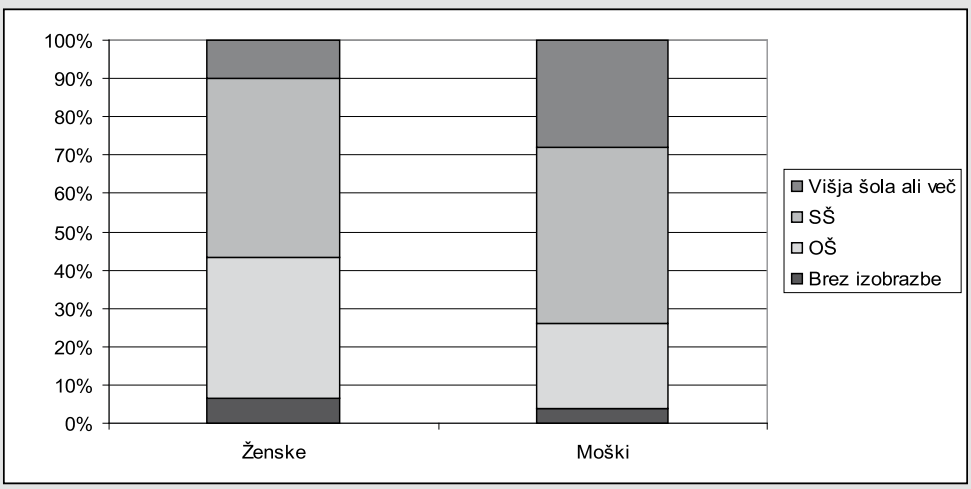
	Ženske	**Moški**
Brez izobrazbe	10	2
OŠ	55	11
SŠ	70	23
Višja šola ali več	15	14

Iz podatkov težko razberemo, kakšna je sestava po izobrazbi za vsakega od spolov, zato dodamo stolpec in vrstico 'skupaj' ter izračunamo odstotke po izobrazbi za vsak spol:

	Ženske	**%**	**Moški**	**%**	**Skupaj**	**%**
Brez izobrazbe	10	6,7	2	4,0	12	6,0
OŠ	55	36,7	11	22,0	66	33,0
SŠ	70	46,7	23	46,0	93	46,5
Višja šola ali več	15	10,0	14	28,0	29	14,5
Skupaj	150	100	50	100	200	100

Iz tabele lahko razberemo, da ima približno enak odstotek žensk in moških srednješolsko izobrazbo. Večji odstotek moških kot žensk ima višješolsko izobrazbo ali več. Manjši odstotek moških kot žensk ima osnovnošolsko izobrazbo ali manj.

Strukturo prikažimo še grafično:



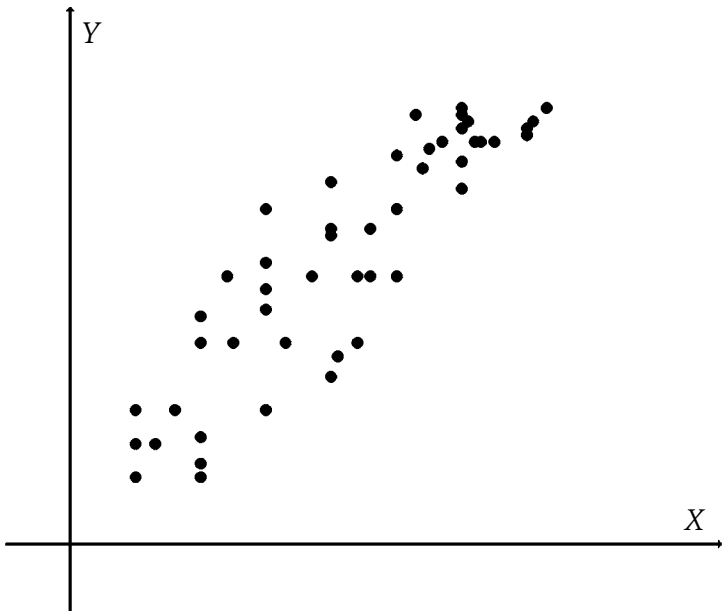
Če so podatki v Excelovi datoteki že urejeni v dvorazsežni tabeli, narišemo grafikon z izbiro stolpčnega grafikona (100 % naložen). Če so podatki o spolu in izobrazbi vsakega posameznega človeka vneseni po vrsticah, najprej izdelamo dvorazsežno tabelo s funkcijo *vrtilna tabela*. Grafični prikaz naredimo z vrtilnim grafikonom.

Opomba: Lahko bi izračunali tudi odstotke po spolu za vsako izobrazbeno stopnjo.

Povezanost dveh številskih spremenljivk

Primer voznika, ki si zapisuje vsakodnevno porabo goriva za vožnjo s svojim avtomobilom. Vemo, da bo tisti dan, ko bo prevozil več kilometrov, porabil več goriva kot tisti dan, ko jih bo prevozil manj, vendar poraba goriva ni povezana le s številom prevoženih kilometrov. Nanjo vplivajo tudi hitrost vožnje, čakanje na semaforjih ali v koloni, število obratov in drugi naključni dejavniki. Zaradi različnih dejavnikov bo voznik v dveh vožnjah, v katerih bo prevozil enako število kilometrov, porabil različno količino goriva. V nadaljevanju bomo opazovali le povezanost porabe goriva s številom prevoženih kilometrov.

Povezanost dveh številskih spremenljivk lahko nazorno prikažemo grafično v pravokotnem koordinatnem sistemu. Naj bo X neodvisna spremenljivka. Njene vrednosti bomo predstavili na vodoravni osi, vrednosti spremenljivke Y pa na navpični. V pravokotnem koordinatnem sistemu pripada vsakemu urejenemu paru vrednosti spremenljivk X in Y natanko ena točka. V Excelu je to raztreseni diagram:



Glede na lego točk v diagramu ločimo med spremenljivkama naslednje povezanosti:

- **funkcijsko povezanost** med spremenljivkama X in Y, kadar ležijo točke na določeni krivulji (funkcije, kot jih obravnavamo pri analizi),
- **korelacijsko povezanost**, kadar točke ne ležijo na krivulji, ampak se od nje bolj ali manj odklanjajo (razsevni diagram),

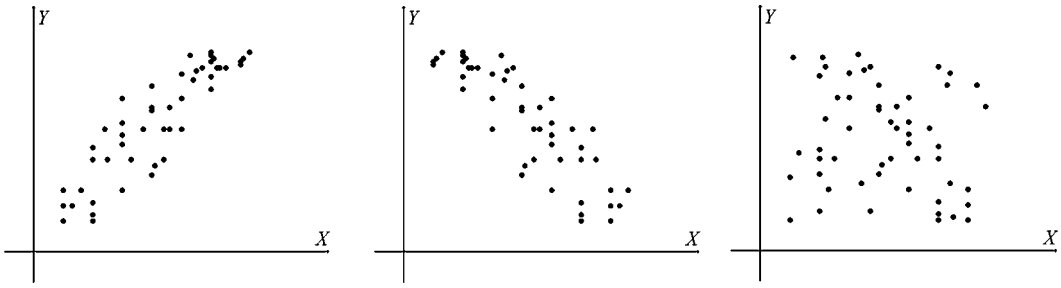
- **nepovezane točke** (razsevni diagram).

Kot pri funkcijski povezanosti ločimo linearno, kvadratno, eksponentno, potenčno funkcijo, ločimo pri korelacijski povezanosti linearno, kvadratno, eksponentno, potenčno povezanost ...

V prvem letniku gimnazije se omejimo na linearno povezanost, v višjih letnikih pa obravnavamo tudi preostale (v okviru modeliranja s funkcijami). O linearni povezanosti spremenljivk govorimo, če ležijo točke na isti premici ali pa se od nje bolj ali manj odklanjajo. V razsevnem diagramu prepoznamo linearno povezanost po ovalni obliki množice točk.

Pri linearni povezanosti ločimo pozitivno in negativno linearno povezanost:

- Spremenljivki X in Y sta **pozitivno linearno povezani**, če so večje vrednosti spremenljivke X povezane z v povprečju večjimi vrednostmi spremenljivke Y. Grafično gledano je premica, okoli katere ležijo točke, naraščajoča.
- Spremenljivki X in Y sta **negativno linearno povezani**, če so večje vrednosti spremenljivke X povezane z v povprečju manjšimi vrednostmi spremenljivke Y. Grafično gledano je premica, okoli katere ležijo točke, padajoča.



pozitivna linearna povezanost | **negativna linearna povezanost** | **ni povezanosti**

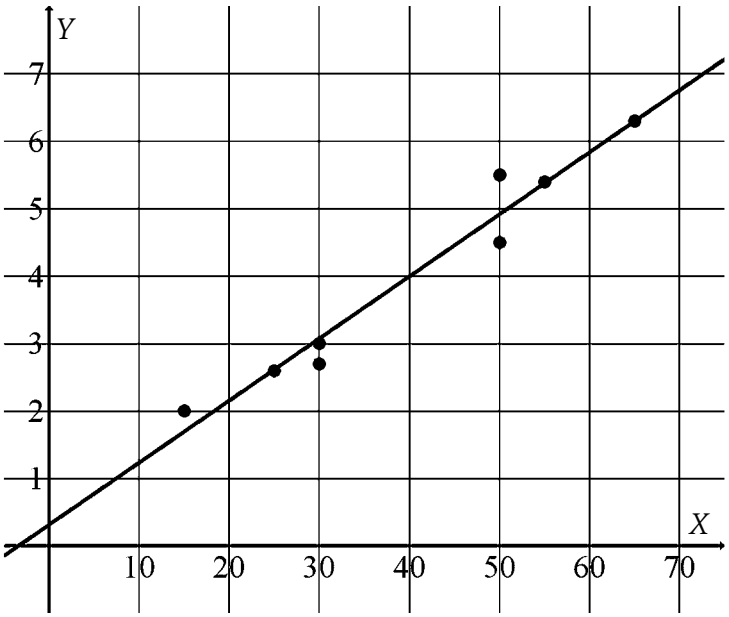
Regresijska ali prilagoditvena krivulja

Kadar med spremenljivkama X in Y obstaja funkcijska povezanost, lahko poiščemo predpis funkcije, katere graf poteka skozi vse točke v diagramu, kadar pa velja le korelacijska povezanost, ležijo točke raztresene okoli krivulje. Poiščemo lahko funkcijo, katere graf se točkam kar najbolje prilega. Vsak posameznik bi lahko v takšnem primeru našel svojo najboljšo prilegajočo se funkcijo f, vendar je med vsemi funkcijami najboljša tista, za katero velja, da je vsota kvadratov razlik $f(x_i) - y_i$ najmanjša, kjer so (x_i, y_i) točke. Poiščemo jo po *metodi najmanjših kvadratov*, kar presega srednješolsko snov, naredi pa namesto nas računalniška tehnologija.

Krivuljo, ki se podatkom najbolje prilega po metodi najmanjših kvadratov, imenujemo **prilagoditvena ali regresijska krivulja**. Glede na tip povezanosti med spremenljivkama ločimo regresijsko premico, regresijsko parabolo, regresijsko eksponentno krivuljo ...

V srednji šoli si bomo pri določanju regresijske krivulje pomagali z ustreznimi

računalniškimi programi, ki uporabljajo metodo najmanjših kvadratov (Graph, Excel). Naj poudarimo še to, da imenujemo regresijsko krivuljo, kadar je neodvisna spremenljivka čas, **trendna krivulja** (ali tudi črta). Excel uporablja izraz trendna črta za vse vrste regresijskih krivulj. Na spodnji sliki je vrisana regresijska premica s programom Graph, ki jo tudi imenuje trendna črta.

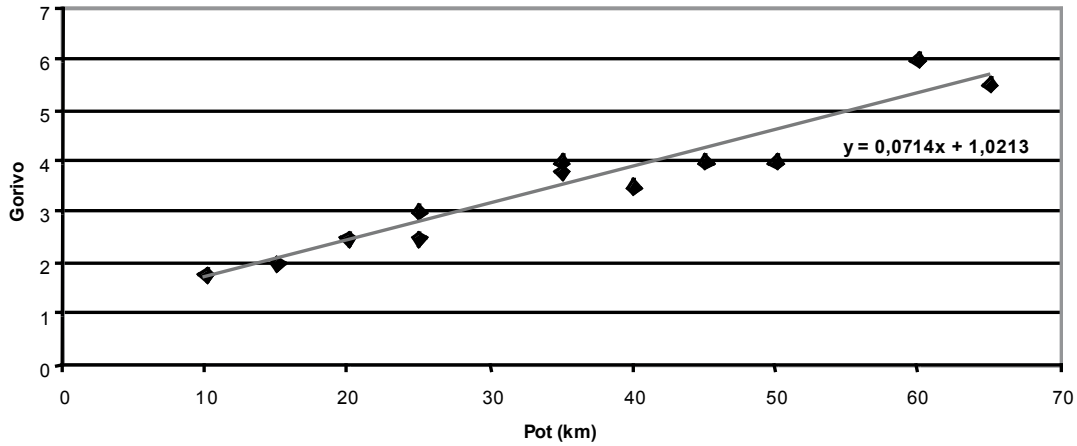


Poglavitni namen regresije je **napovedovanje** vrednosti odvisne spremenljivke iz znanih vrednosti neodvisne spremenljivke. Kadar torej določimo enačbo regresijske krivulje iz danih podatkov, lahko enačbo uporabimo za napoved vrednosti odvisne spremenljivke pri novih vrednostih neodvisne spremenljivke. Najpogosteje to uporabimo, če je neodvisna spremenljivka čas, saj lahko napovemo, kakšne bodo vrednosti odvisne spremenljivke v prihodnosti. Seveda to ne pomeni, da bodo vrednosti natanko takšne, kot jih izračunamo, ampak le napoved, ki je odvisna še od številnih dejavnikov, ki jih ne poznamo. Natančnost napovedi je odvisna od ustreznosti matematičnega modela, ki smo ga uporabili.

Prilagoditvena krivulja v Excelu

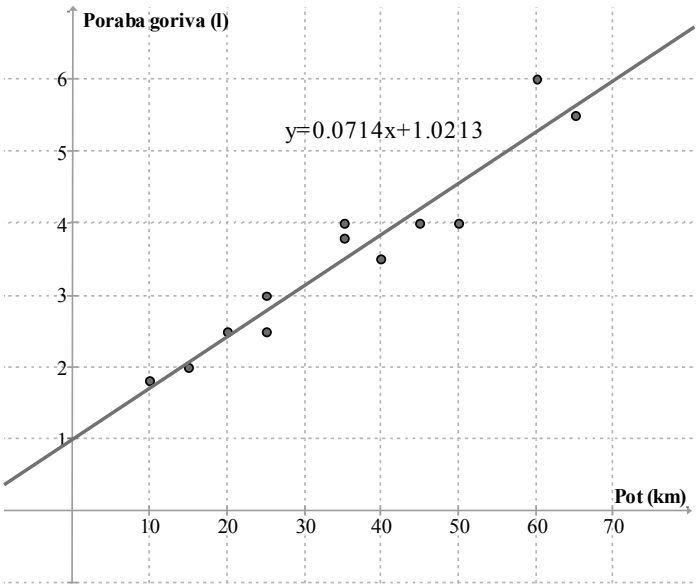
Podatke vnesemo v Excelov dokument v dveh stolpcih (vsak stolpec ena spremenljivka), nato uporabimo *XY (raztreseni) grafikon*, da narišemo točke. Nato pokažemo z desnim gumbom miške na eno od točk v diagramu in izberemo dodaj trendno črto. Tu izberemo ustrezno krivuljo, pod možnostmi pa še *prikaži enačbo na grafikonu*, da zapiše enačbo krivulje.

Primer:



Prilagoditvena krivulja krivulja v Graphu

Podatke vnesemo kot zaporedje točk in dodamo trendno črto. Na levi strani se izpiše tudi enačba krivulje.



Program Graph ima na izbiro nekaj več funkcij kot Excel, oblikujemo pa lahko tudi svoje funkcije, zato je zelo uporaben pri modeliranju z različnimi funkcijami.

Učni list

Odnos in povezanost spremenljivk

1. naloga – odnos dveh opisnih spremenljivk

Z anketo smo želeli raziskati zadovoljstvo srednješolcev s šolsko malico, zato smo anketirali 225 dijakov. Rezultati so zbrani v tabeli:

	1. letnik	**2. letnik**	**3. letnik**	**4. letnik**
Št. zadovoljnih	35	45	35	20
Št. nezadovoljnih	15	15	10	50

a. Izračunaj vsote po stolpcih in vrsticah, nato pa še izrazi zadovoljstvo s šolsko malico za vsak letnik z odstotki. Izpolni spodnjo tabelo in rezultate interpretiraj:

Letnik in delež	**1.**	**%**	**2.**	**%**	**3.**	**%**	**4.**	**%**	**Skupaj**	**%**
Št. zadovoljnih	35		45		35		20			
Št. nezadovoljnih	15		15		10		50			
Skupaj										

b. Strukturne odstotke prikaži tudi s strukturnimi stolpci. Ali se zadovoljstvo dijakov s šolsko malico razlikuje po letnikih?

2. naloga – povezanost dveh številskih spremenljivk

Voznik je želel raziskati povezanost med dolžino prevožene poti in porabo goriva pri vožnji s svojim avtomobilom, zato je za 12 voženj zapisal število prevoženih kilometrov in porabo goriva v litrih. Rezultati so prikazani v tabeli:

Pot (km)	20	35	60	35	65	50	40	25	25	45	15	10
Gorivo (l)	2,5	3,8	6	4	5,5	4	3,5	2,5	3	4	2	1,8

a. Z izbranim računalniškim programom prikaži podatke v koordinatnem sistemu. Ustrezno poimenuj in označi obe koordinatni osi.

b. Katera krivulja bi se podatkom (točkam) najbolje prilegala?

c. Z uporabo računalniškega programa določi enačbo krivulje, ki se podatkom najbolje prilega.

d. Z uporabo enačbe krivulje napovej, približno koliko goriva bo v povprečju porabil voznik za 42 km?

Domača naloga

3. naloga

Sošolce in sošolke v razredu vprašaj, kakšno oceno so dobili pri zadnji kontrolni nalogi iz matematike in kakšno pri zadnji kontrolni nalogi iz tujega jezika. Pri vsakem dijaku zapiši tudi njegov spol.

a. Razišči odnos med spolom in oceno kontrolne naloge pri matematiki. Podatke uredi v dvorazsežni tabeli in jih predstavi grafično. Kaj si ugotovil?

b. Razišči odnos med spolom in oceno kontrolne naloge pri tujem jeziku. Kaj si ugotovil?

c. Razišči še odnos med ocenama matematike in tujega jezika. Kaj si ugotovil?

4. naloga

Angleški matematik in statistik Karl Pearson (1857–1911) je bil eden prvih, ki so se ukvarjali s povezanostjo dveh spremenljivk. Raziskoval je povezanost višin odraslih moških in višin njihovih očetov. Ugotovil je, da med njima obstaja pozitivna linearna povezanost. Opravi manjšo raziskavo, v kateri boš raziskal povezanost višin odraslih žensk in višin njihovih mater. Izberi najmanj 15 odraslih žensk in jih vprašaj, kolikšna je njihova višina in višina njihovih mater. Pri reševanju naloge si pomagaj z računalniškim programom. Kakšna je povezanost?

5. naloga

Za podatke iz ankete med sošolci (UL_Osnovni_pojmi_statistike.doc, naloga 8) poskušaj poiskati povezanost med pari spremenljivk, kjer je to seveda smiselno. Rezultate komentiraj.

3.3 Primer statistične naloge

Simona Pustavrh, Šolski center Novo mesto

K razvoju kompleksnih znanj lahko pripomore izdelava statistične naloge. Nastajajo lahko v okviru medpredmetnih povezav oziroma projektnih tednov.

Na naslednjih straneh navajamo primer izdelane statistične naloge.

ŠOLA

Poročilo o raziskavi

Učne navade dijakov prvih letnikov pri matematiki in njihovo zadovoljstvo z znanjem matematike

Ime in priimek: Janez Novak
Razred: 1A
Predmet: matematika
Učitelj: Jožica Novak

Kraj, datum

KAZALO

1 UVOD
2 REZULTATI
2.1 Vprašanje 1: Spol dijakov
2.2 Vprašanje 2: Pogostost opravljanja domačih nalog
2.3 Vprašanje 3: Število ur na teden za domače naloge
2.4 Vprašanje 4: Zadovoljstvo dijakov s svojim znanjem matematike
2.5 Vprašanje 5: Ocene dijakov pri zadnji pisni nalogi pri matematiki
2.6 Vprašanje 6: Število ur na teden pred računalnikom
3 POVEZANOST ODGOVOROV NEKATERIH VPRAŠANJ
3.1 Odnos med zadnjo oceno pri pisni nalogi in pogostostjo opravljanja domačih nalog
3.2 Povezanost med številom ur pred računalnikom in številom ur za domače naloge na teden
3.3 Analiza števila ur pred računalnikom za posamezne ocene
4 ZAKLJUČEK
5 PRILOGA: Anketni vprašalnik

Kazalo tabel

Tabela 1: Spol dijakov
Tabela 2: Pogostost opravljanja domačih nalog
Tabela 3: Število ur na teden za domače naloge
Tabela 4: Zadovoljstvo dijakov s svojim znanjem matematike
Tabela 5: Ocene dijakov pri zadnji pisni nalogi pri matematiki
Tabela 6: Število ur na teden pred računalnikom
Tabela 7: Odnos med zadnjo oceno pri pisni nalogi in pogostostjo opravljanja domačih nalog

Kazalo slik

Slika 1: Spol dijakov
Slika 2: Pogostost opravljanja domačih nalog
Slika 3: Število ur na teden za domače naloge
Slika 4: Zadovoljstvo dijakov s svojim znanjem matematike
Slika 5: Ocene dijakov pri zadnji pisni nalogi pri matematiki
Slika 6: Število ur na teden pred računalnikom
Slika 7: Odnos med zadnjo oceno pri pisni nalogi in pogostostjo opravljanja domačih nalog
Slika 8: Povezanost med številom ur pred računalnikom in številom ur za domače naloge na teden
Slika 9: Analiza števila ur pred računalnikom za posamezne ocene

1 UVOD

Matematika – za nekatere dijake najljubši predmet, za nekatere nočna mora, saj imajo ob vstopu v srednjo šolo mnogi velike težave pri njenem razumevanju. Pogosto so razlogi slabo predznanje iz osnovne šole, slabe učne navade ali pa drugačen način poučevanja v srednji šoli, zato sem v prvih letnikih gimnazijskega programa opravil anketo na temo učne navade dijakov prvih letnikov pri matematiki in zadovoljstvo dijakov s svojim znanjem matematike.

Cilj raziskave je bil ugotoviti, kako in koliko se dijaki učijo matematiko, kako so zadovoljni s svojim znanjem, kakšno oceno so dobili pri zadnji pisni nalogi pri matematiki in koliko časa na teden uporabljajo računalnik za igranje igric, brskanje po spletu, poslušanje glasbe in drugo.

V prvih letnikih gimnazijskega programa naše šole je v šolskem letu 2009/2010 vpisanih 96 dijakov, v anketo pa je bil vključen slučajni vzorec 32 dijakov, in sicer tako, da je anketo izpolnil vsak tretji dijak v razredu po redovalnici. Dijaki so anketo izpolnjevali med uro matematike.

Anketni vprašalnik je bil sestavljen iz 6 vprašanj, od tega so bila 4 zaprtega tipa, 2 pa odprtega. Anketni vprašalnik je v prilogi.

V prvem delu poročila so predstavljeni rezultati posameznih vprašanj, v drugem delu povezanost med odgovori nekaterih vprašanj.

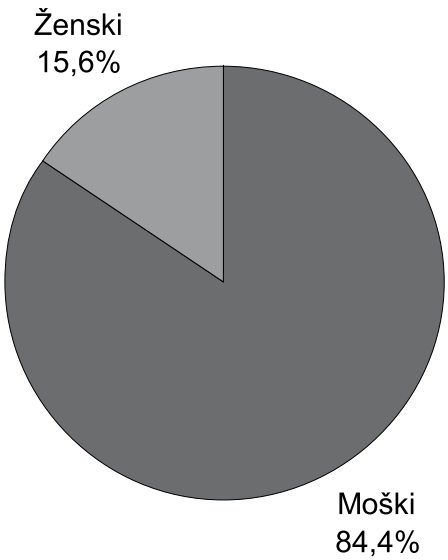
2 REZULTATI

2.1 Vprašanje 1: Spol dijakov

Pri prvem vprašanju so dijaki zapisali svoj spol. Obkrožili so M (moški spol) ali Ž (ženski spol).

Tabela 1: Spol dijakov

Razred	Spol	Število dijakov	Odstotek
1	Moški	27	84,4
2	Ženski	5	15,6
Skupaj		32	100,0



Slika 1: Spol dijakov

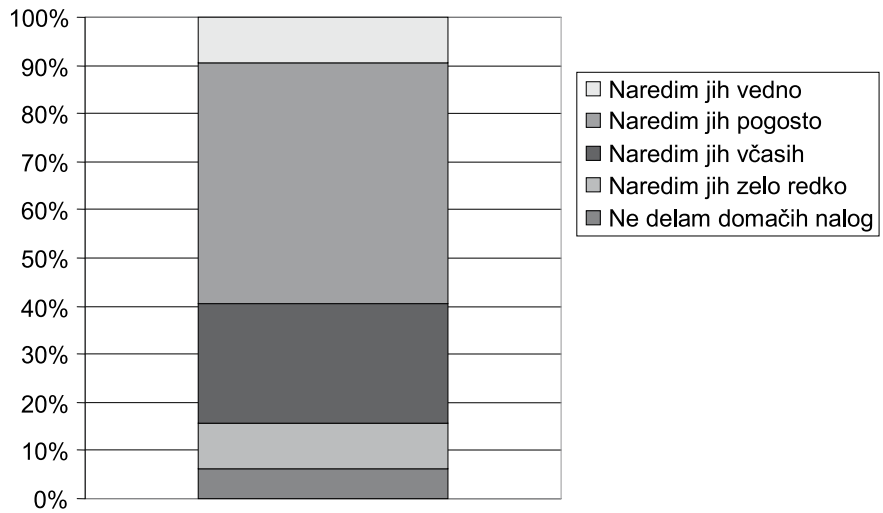
Vzorec je vključeval 32 dijakov prvih letnikov gimnazijskega programa. Od tega je 5 (15,6 %) deklet in 27 (84,4 %) fantov.

2.2 Vprašanje 2: Pogostost opravljanja domačih nalog

Dijaki so ocenili pogostost opravljanja svojih domačih nalog pri matematiki. Odgovore so podali na petstopenjski lestvici, kot je videti v tabeli 2.

Tabela 2: Pogostost opravljanja domačih nalog

Razred	Pogostost opravljanja DN	Število dijakov	Odstotek
1	Ne delam domačih nalog.	2	6,3
2	Naredim jih zelo redko.	3	9,4
3	Naredim jih včasih.	8	25,0
4	Naredim jih pogosto.	16	50,0
5	Naredim jih vedno.	3	9,38
Skupaj		32	100,0



Slika 2: Pogostost opravljanja domačih nalog

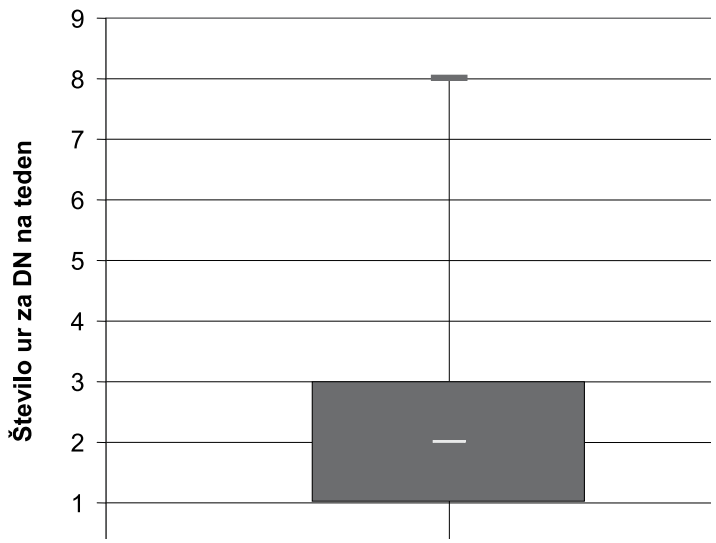
Od 32 dijakov domačo nalogo naredijo vedno 3 (9,38 %) dijaki, 16 (50 %) dijakov jo naredi pogosto, 8 (25 %) dijakov včasih, 3 (9,4 %) dijaki zelo redko in 2 (6,3 %) dijaka nikoli ne naredita domače naloge.

2.3 Vprašanje 3: Število ur na teden za domače naloge

Pri tretjem vprašanju so dijaki podali svojo oceno števila ur, ki jih namenijo izdelavi domače naloge pri predmetu matematika. Vprašanje je bilo odprtega tipa, zato so dijaki zapisali število ur. Podatki so bili razvrščeni v 4 razrede, kot je videti v tabeli 3.

Tabela 3: Število ur na teden za domače naloge

Razred	Število ur	Število dijakov	Odstotek
1	0 – 2	13	40,6
2	2 – 4	14	43,8
3	4 – 6	2	6,3
4	6 – 8	3	9,4
Skupaj		32	100,0



Slika 3: Število ur na teden za domače naloge

Anketirani dijaki porabijo za domače naloge od 0 do 8 ur na teden. 14 (43,8 %) dijakov potrebuje od 2 do 4 ure, sledi 13 (40,6 %) dijakov, ki porabijo od 0 do 2 uri, 2 (6,3 %) dijaka potrebujeta od 4 do 6 ur in 3 (9,4 %) dijaki od 6 do 8 ur na teden.

Povprečno število ur, ki jih dijaki namenijo domači nalogi iz matematike, je 2,3 ure s standardnim odklonom 1,8 ure. Mediana števila ur je 2, kar pomeni, da polovica dijakov porabi za domačno nalogo 2 uri ali manj na teden, polovica dijakov pa 2 uri ali več. Modus števila ur za domačo nalogo je enak 2 uri.

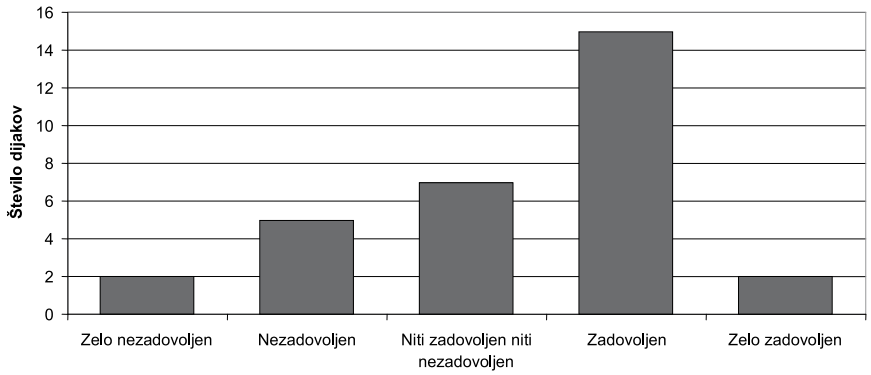
Iz slike 3 lahko preberemo, da polovica dijakov porabi za domačo nalogo iz matematike od 1 do 3 ure na teden.

2.4 Vprašanje 4: Zadovoljstvo dijakov s svojim znanjem matematike

Dijaki so pri četrtem vprašanju na petstopenjski lestvici izrazili svoje zadovoljstvo s svojim znanjem matematike. Mogoči odgovori so razvidni iz tabele 4.

Tabela 4: Zadovoljstvo dijakov s svojim znanjem matematike

Razred	Zadovoljstvo z znanjem	Število dijakov	Odstotek
1	Zelo nezadovoljen	2	6,5
2	Nezadovoljen	5	16,1
3	Niti zadovoljen niti nezadovoljen	7	22,6
4	Zadovoljen	15	48,4
5	Zelo zadovoljen	2	6,5
Skupaj		31	100,0



Slika 4: Zadovoljstvo dijakov s svojim znanjem matematike

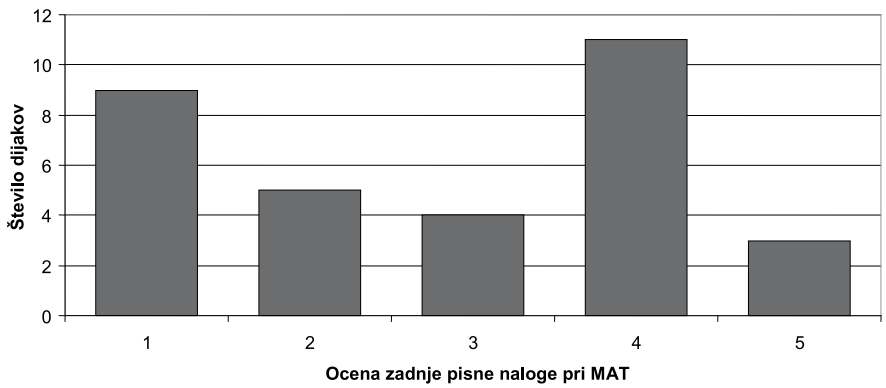
Na vprašanje je odgovorilo le 31 dijakov. Od tega sta 2 (6,5 %) zelo nezadovoljna s svojim znanjem matematike, 5 (16,1 %) dijakov je nezadovoljnih, 7 (22,6 %) dijakov ni niti zadovoljnih niti nezadovoljnih, 15 (49 %) dijakov je zadovoljnih in 2 (6,5 %) dijaka sta zelo zadovoljna.

2.5 Vprašanje 5: Ocene dijakov pri zadnji pisni nalogi pri matematiki

Pri petem vprašanju so anketirani dijaki zapisali svojo oceno pri zadnji pisni nalogi pri matematiki.

Tabela 5: Ocene dijakov pri zadnji pisni nalogi pri matematiki

Razred	Ocena	Število dijakov	Odstotek
1	1	9	28,1
2	2	5	15,6
3	3	4	12,5
4	4	11	34,4
5	5	3	9,4
Skupaj		32	100,0



Slika 5: Ocene dijakov pri zadnji pisni nalogi pri matematiki

Od 32 anketiranih dijakov je 9 (28,1 %) dijakov dobilo oceno 1, 5 (15,6 %) dijakov oceno 2, 4 (12,5 %) dijaki oceno 3, 11 (34,4 %) dijakov oceno 4 in 3 (9,4 %) dijaki oceno 5.

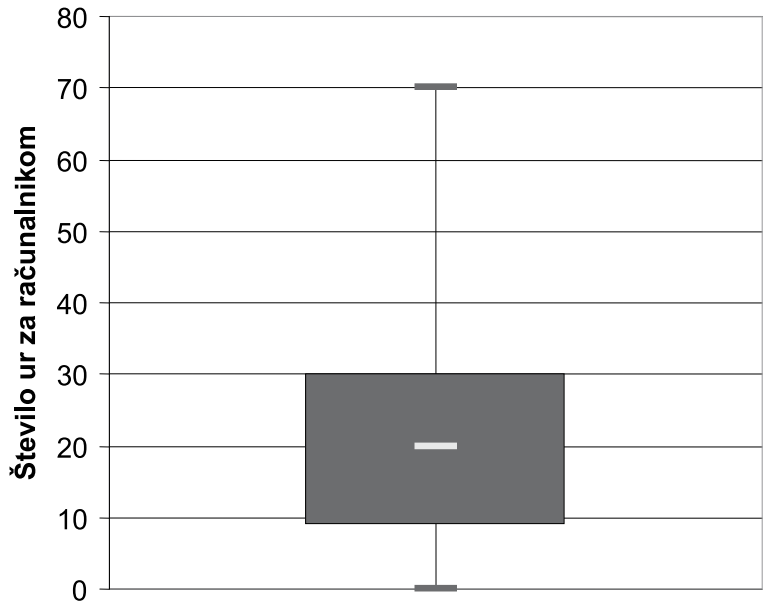
Povprečna ocena je bila 2,8 s standardnim odklonom 1,4. Mediana ocen je bila 3, modus pa 4.

2.6 Vprašanje 6: Število ur na teden pred računalnikom

Pri šestem vprašanju so anketirani dijaki zapisali, koliko ur na teden preživijo pred računalnikom za igranje igric, brskanje po spletu, poslušanje glasbe ... Odgovori so bili razvrščeni v 5 razredov, kot je videti v tabeli 6.

Tabela 6: Število ur na teden pred računalnikom

Razred	Število ur	Število dijakov	Odstotek
1	0 – 14	14	43,8
2	14 – 28	9	28,1
3	28 – 42	7	21,9
4	42 – 56	1	3,1
5	56 – 70	1	3,1
Skupaj		32	100,0



Slika 6: Število ur na teden pred računalnikom

Anketirani dijaki preživijo pred računalnikom različno število ur na teden, in sicer od 0 do 70 ur. 14 (43,8 %) dijakov nameni temu od 0 do pod 14 ur na teden, 9 (28,1 %) dijakov od 14 do pod 28 ur, 7 (21,9 %) dijakov od 28 do pod 42 ur, 1 (3,1 %) dijak od 42 do pod 56 ur in 1 (3,1 %) od 56 do 70 ur.

Povprečno tedensko število ur pred računalnikom je 20 ur s standardnim odklonom 14,9 ur. Mediana števila ur pred računalnikom je 20 ur, prav tako tudi modus.

Iz slike 6 lahko razberemo, da je polovica dijakov pred računalnikom od 10 do 30 ur na teden.

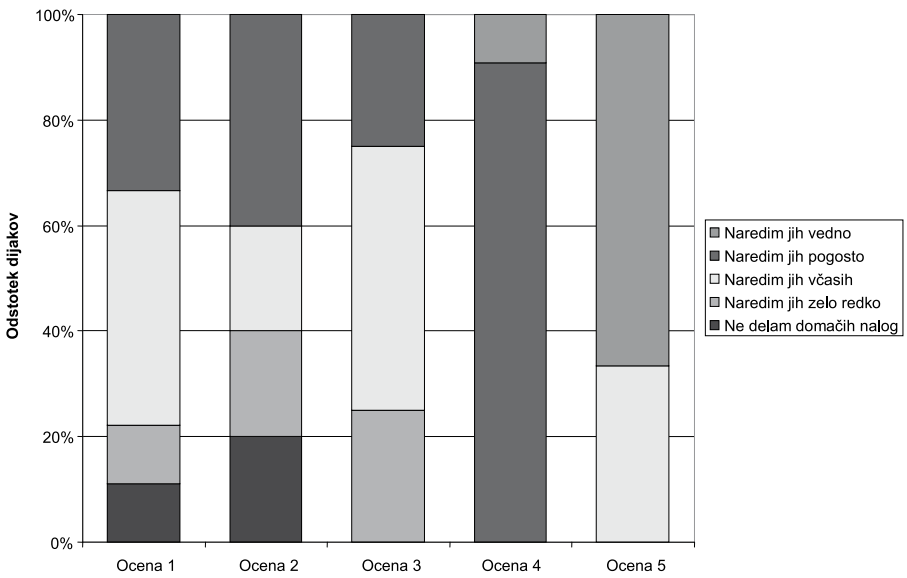
3 POVEZANOST ODGOVOROV NEKATERIH VPRAŠANJ

3.1 Odnos med zadnjo oceno pri pisni nalogi in pogostostjo opravljanja domačih nalog

Zanimalo me je tudi, kako je ocena pri zadnji pisni nalogi pri matematiki povezana s pogostostjo opravljanja domačih nalog. Podatke sem uredil v dvorazsežni tabeli in izračunal odstotke pogostosti opravljanja domačih nalog za vsako od ocen. Podatke sem nato prikazal še s strukturnimi stolpci.

Tabela 7: Odnos med zadnjo oceno pri pisni nalogi in pogostostjo opravljanja domačih nalog

	Ocena pisne naloge pri matematiki										Skupaj	
Pogostost DN	1		2		3		4		5			
Ne delam DN	1	11,1 %	1	20,0 %	0	0,0 %	0	0,0 %	0	0,0 %	2	6,3 %
Zelo redko	1	11,1 %	1	20,0 %	1	25,0 %	0	0,0 %	0	0,0 %	3	9,4 %
Včasih	4	44,4 %	1	20,0 %	2	50,0 %	0	0,0 %	1	33,3 %	8	25,0 %
Pogosto	3	33,3 %	2	40,0 %	1	25,0 %	10	90,9 %	0	0,0 %	16	50,0 %
Vedno	0	0,0 %	0	0,0 %	0	0,0 %	1	9,1 %	2	66,7 %	3	9,4 %
Skupaj	9	100 %	5	100 %	4	100 %	11	100 %	3	100 %	32	100 %

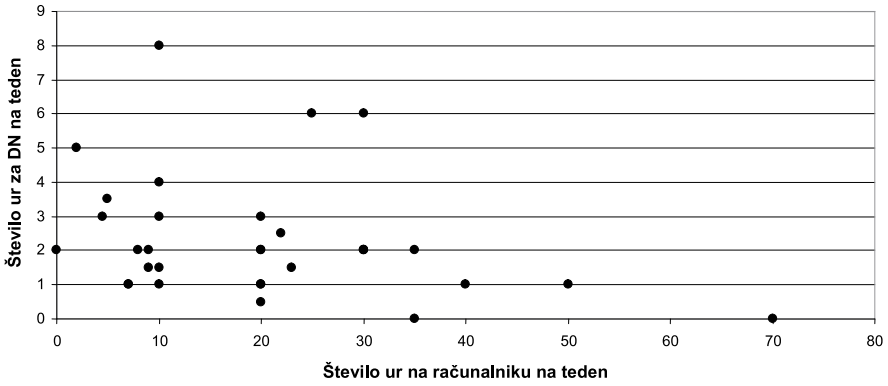


Slika 7: Odnos med zadnjo oceno pri pisni nalogi in pogostostjo opravljanja domačih nalog

Iz tabele 7 in slike 7 lahko razberemo, da večina dijakov, ki so dobili oceno 1, ne piše domačih nalog ali jih naredi zelo redko ali včasih. Le 33,3 % dijakov, ki so pisali 1, delajo domačo nalogo pogosto. Podobno je pri dijakih, ki so dobili oceno 2. Pri dijakih, ki so pisali pisno nalogo 3, je opaziti, da med njimi ni nikogar, ki nikoli ne dela domače naloge, jih pa večina naredi domačo nalogo redko ali včasih. Dijaki, ki so pisali pisno nalogo 4 ali 5, naredijo domačo nalogo zelo pogosto ali vedno. Izjema je en dijak, ki je pisal 5, pa naredi domačo nalogo včasih.

3.2 Povezanost med številom ur pred računalnikom in številom ur za domače naloge na teden

Dijaki veliko časa preživimo pred računalnikom, zato drugim dejavnostim posvetimo manj časa. Podatke o številu ur uporabe računalnika in o številu ur za domače naloge na teden sem vnesel v diagram, da bi ugotovil, ali je med njima kakšna povezanost. Dobil sem razsevni diagram.

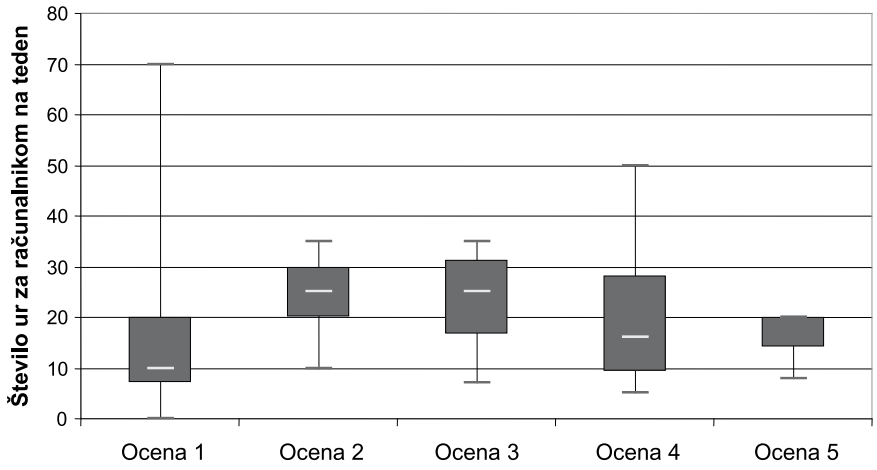


Slika 8: Povezanost med številom ur pred računalnikom in številom ur za domače naloge na teden

Iz slike 8 lahko razberemo, da dijaki, ki preživijo pred računalnikom več kot 35 ur, namenijo domačim nalogam zelo malo ur. Med dijaki, ki uporabljajo računalnik 30 ur ali manj, nekateri namenijo domačim nalogam veliko časa, nekateri pa zelo malo.

3.3 Analiza števila ur pred računalnikom za posamezne ocene

Nekateri dijaki uporabljajo računalnik veliko časa, drugi spet manj. Hotel sem ugotoviti, ali so ocene pri matematiki povezane s številom ur, ki jih dijaki preživijo pred računalnikom. V spodnjem grafikonu sem število ur pred računalnikom za vsako od ocen prikazal s škatlo z brki.



Slika 9: Analiza števila ur za računalnikom za posamezne ocene

Slika 9 kaže, da je pred računalnikom veliko dijakov, ki imajo oceno zadnje pisne naloge med 2 in 4. Dijaki, ki so pisali matematiko 5, so pred računalnikom manj kot 20 ur, prav tako dijaki z oceno 1. Med dijaki, ki so pisali 1, je nekaj dijakov, ki so največ pred računalnikom v razredu.

4 ZAKLJUČEK

V anketo o učnih navadah dijakov pri matematiki in njihovem zadovoljstvu s svojim znanjem je bil vključen slučajni vzorec 32 dijakov prvih letnikov gimnazijskega programa. V vzorcu je bilo 5 dijakinj in 27 dijakov.

Anketa je pokazala, da 13 (40,7 %) anketiranih dijakov ne dela domačih nalog, jih dela le redko ali pa včasih, kar je skrb vzbujajoče, preostali delajo domače naloge pogosto ali vedno. Za domače naloge porabi 13 (40,6 %) anketiranih dijakov od 0 do 2 uri na teden, 14 (43,8) anketiranih dijakov pa od 2 do 4 ure. Preostali dijaki porabijo več kot 4 ure na teden.

S svojim znanjem matematike je zelo nezadovoljnih ali nezadovoljnih 7 (22,6 %) anketiranih dijakov, prav toliko jih ni niti nezadovoljnih niti zadovoljnih, 17 (54,9 %) anketiranih dijakov pa je s svojih znanjem zadovoljnih ali zelo zadovoljnih.

Zadnjo pisno nalogo so pisali vsi anketirani dijaki. Med njimi je 14 (43,8 %) dijakov pisalo oceno 4 ali 5, preostali pa manj. Povprečna ocena je bila 2,8, s standardnim odklonom 1,4. Čeprav je veliko dijakov dobilo visoko oceno, je povprečna ocena nizka, saj je kar 9 (28,1 %) dijakov pisalo 1.

Zelo skrb vzbujajoči so odgovori na vprašanje o številu ur, ki jih anketirani dijaki preživijo pred računalnikom, saj je povprečno tedensko število ur pred računalnikom 20 s standardnim odklonom 14,9 ur. Kar 9 (28,1%) dijakov preživi pred računalnikom več kot 28 ur na teden.

Nadaljnja analiza podatkov je pokazala, da imajo anketirani dijaki, ki ne delajo domačih nalog ali pa jih delajo zelo redko, nizko oceno zadnje pisne naloge pri matematiki, dijaki, ki delajo domačo nalogo pogosto ali vedno, pa višjo oceno.

Prav tako lahko ocenimo, da anketirani dijaki, ki preživijo zelo veliko časa pred računalnikom, manj časa namenjajo domačim nalogam, kar se pokaže pri ocenah, saj imajo oceno 5 dijaki, ki preživijo pred računalnikom manj časa.

Menim, da je za uspeh pri matematiki zelo pomembno redno opravljanje domačih nalog, ki jim posvetimo dovolj časa, in manjše število ur pred računalnikom.

5 PRILOGA

Anketni vprašalnik

Učne navade dijakov prvih letnikov pri matematiki

Pozdravljen sošolec, sošolka!

Matematika je moj najljubši predmet, zato sem se odločil narediti manjšo raziskavo, s katero želim ugotoviti, koliko se dijaki v prvih letnikih gimnazije učimo matematiko in kako smo zadovoljni s svojim znanjem. Prosim te za sodelovanje in iskrene odgovore. Anketa je anonimna, če pa želiš, se lahko podpišeš.

Hvala za sodelovanje.

Janez Novak

1. Obkroži spol: M Ž

2. Kako pogosto delaš domače naloge iz matematike? (obkroži odgovor)
   1. ne delam domačih nalog
   2. naredim jih zelo redko
   3. naredim jih včasih
   4. naredim jih pogosto
   5. naredim jih vedno

3. Približno koliko ur na teden porabiš za izdelavo domače naloge iz matematike?
_____

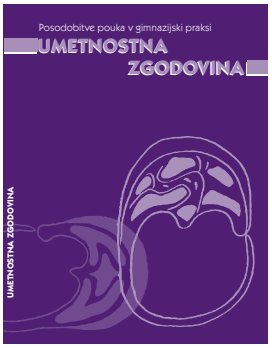
4. Kako si zadovoljen s svojim znanjem matematike? (obkroži odgovor)
   1. zelo nezadovoljen
   2. nezadovoljen
   3. niti zadovoljen niti nezadovoljen
   4. zadovoljen
   5. zelo zadovoljen

5. Obkroži svojo oceno zadnje pisne naloge iz matematike: 1 2 3 4 5

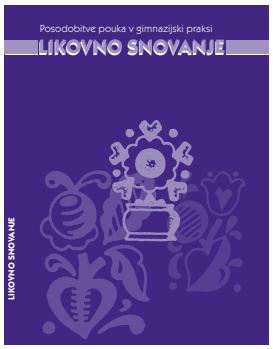
6. Približno koliko ur na teden na računalniku igraš igrice, brskaš po internetu, poslušaš glasbo? _____

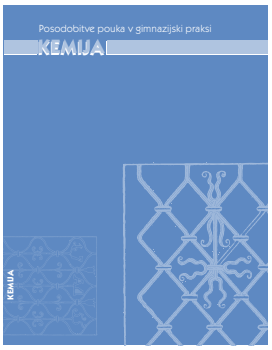
V zbirki Posodobitve pouka v gimnazijski praksi bodo izšle naslednje knjige:

Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
ZGODOVINA
ZGODOVINA

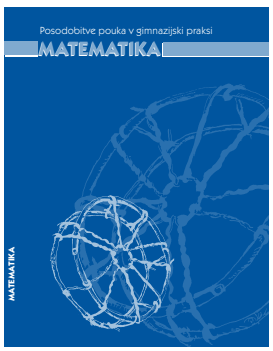

Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
UMETNOSTNA ZGODOVINA
UMETNOSTNA ZGODOVINA

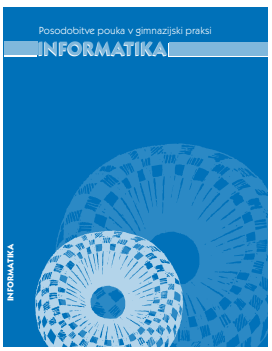
Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
GLASBA
GLASBA


Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
LIKOVNO SNOVANJE
LIKOVNO SNOVANJE

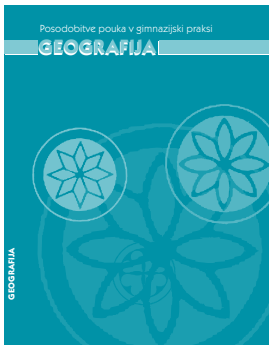

Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
KEMIJA
KEMIJA

Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
FIZIKA
FIZIKA

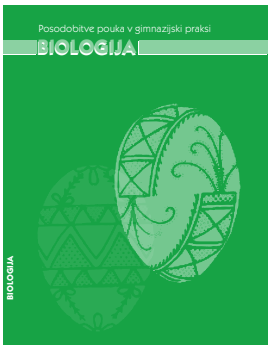

Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
MATEMATIKA
MATEMATIKA


Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
INFORMATIKA
INFORMATIKA

Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
EKONOMIJA
EKONOMIJA


Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
GEOGRAFIJA
GEOGRAFIJA

Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
OKOLJSKA VZGOJA
OKOLJSKA VZGOJA


Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
BIOLOGIJA
BIOLOGIJA

Posodobitve pouka v gimnazijski praksi
SMERNICE POSODABLJANJA
SMERNICE POSODABLJANJA

Na naslovnici

BRENCELJ, iz palic in šib spletena krošnja za nošnjo listja, tudi mrve in trave; Banjška planota, 1968.

(povzeto po: Baš, A. (ur.) (2004): Slovenski etnološki leksikon. Ljubljana: Mladinska knjiga, str. XXX)

ISBN 978-961234908-0
9 789612 349080