



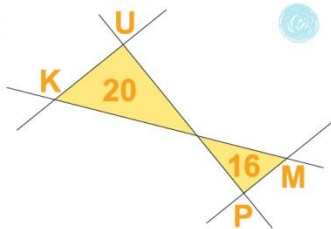
Pojem enakosti pri pouku matematike

The concept of equality in mathematics

Jaka Banko, Mateja Sirnik

jaka.banko@zrss.si, mateja.sirnik@zrss.si

Zavod RS za šolstvo



3. mednarodna konferenca
o učenju in poučevanju matematike

KUPM 2016



REPUBLIKA SLOVENIJA
**MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT**



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Kaj pomeni v matematiki simbol

=

Znak „je enako“ =

Robert Recorde (1510-1558)

1557 v knjigi *The Whetstone of Witte* piše o izumu znaka =

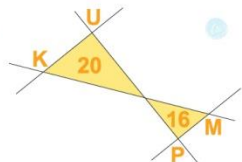
"To avoide the tedious repetition of these woordes: is equalle to: I will settle as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or gemowe [twin] lines of one lengthe: =, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle" (Smoller).

Relacija enakosti v matematiki

Lastnosti relacije „je enako“:

- refleksivnost
- tranzitivnost
- simetričnost

ekvivalenčna relacija



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SKLAD
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Pojem enakosti v učnem načrtu

Izračunaj (izračunaj vrednost številskega izraza)

= „**rezultat**“

2. razred: operacija dopolnjevanja

Poiščejo manjkajoče število: $a \pm \square = b$, $\square \pm a = b$ v množici naravnih števil do 20 vključno s številom 0

3. razred: operacija dopolnjevanja

Poiščejo manjkajoče število: $a \pm \square = b$, $\square \pm a = b$, $a \cdot \square = b$, $\square \cdot a = b$, $a : \square = b$, $\square : a = b$ v množici naravnih števil do 100

skrito število \Rightarrow neznano število \Rightarrow neznanka

Pojem enakosti v učnem načrtu

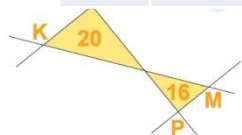
Enačbe in neenačbe

4.
 - spoznajo in razumejo pomen oznake x v enačbah: $a \pm x = b$, $x \pm a = b$, $a \cdot x = c$, $x \cdot a = c$, $a : x = c$, $x : a = c$, ($x \neq 0$, $a \neq 0$) in jih rešijo s premislekom v množici naravnih števil do 100,
 - spoznajo in razumejo pomen oznake x v neenačbi oblike $a \leq x$, $x \leq b$ in $a \cdot x \leq b$; $a, b \in \mathbb{N}$ in s poskušanjem rešijo neenačbo v množici naravnih števil do 100;
5.
 - rešijo s premislekom neenačbe
 - rešijo s premislekom in z diagramom enačbe (računske enakosti) oblike $a \pm x = b$, $x \pm a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$, $a \cdot x = b$, $a : x = b$, ($x \neq 0$, $a \neq 0$) in naredijo preizkus;
6.
 - s premislekom rešijo enačbe in neenačbe,
 - rešijo enačbe in neenačbe v dani osnovni množici s pomočjo tabele in določijo njeno množico rešitev,
 - s premislekom ali z diagramom rešijo enačbo, v kateri neznanka nastopi le enkrat.

Pojem enakosti v učnem načrtu

Enačbe in neenačbe

7.
 - ob besedilni nalogi oblikujejo enačbo in jo rešijo,
 - rešijo enačbe oblike: $a \pm x = b$, $x \pm a = b$, $a \cdot x = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$, $a : x = b$, ($a \neq 0$, $x \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Q}^+$),
 - rešijo enačbe (s tabelo, z diagramom in s premislekom),
 - rešijo neenačbo $q < x < r$, (x je naravno število, q in r sta racionalni števili);
8.
 - rešijo enačbe oblike: $a \pm x = b$, $x \pm a = b$, $a \cdot x = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$, $a : x = b$, ($a \neq 0$, $x \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Q}$) in naredijo preizkus,
 - prepoznajo identično ter ekvivalentno enačbo,
 - rešijo neenačbe: $a \leq x$, $x \leq a$, $a \leq x \leq b$ v množici celih števil;
9.
 - uporabljajo zakone o ohranitvi relacije = pri reševanju linearnih enačb in jih utemeljijo,
 - izrazijo neznanko iz formule,
 - rešijo linearno enačbo z realnimi koeficienti in napravijo preizkus,



Od neformalnega k formalnem

Formalno reševanje enačbe (z algebraičnimi manipulacijami) temeljito vpeljemo šele v 9. razredu. Enačbe lahko rešujemo tudi s ponazoritvijo s tehtnico, premislekom, preglednico, diagramom...

Timss 2011

$$4 \cdot \square = 28$$

Katero število moramo vpisati v kvadrateg, da bo račun pravi?

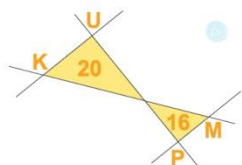
Odgovor: _____

Pravilni odgovori: 91,8%

$$3 + 8 = \square + 6$$

Katero število moramo vpisati v kvadrateg, da bo račun pravi?

- | | | |
|-----------|-----------|--------------|
| A) | 17 | 21,5% |
| B) | 11 | 38,7% |
| C) | 7 | 0,6% |
| D) | 5 | 36,4% |



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SKLAD
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Napake pri učencih

$$7 + 6 = \underline{\quad} + 5$$

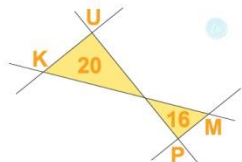
- $7 + 6 = 13 + 5$
- $7 + 6 = 18 + 5$

Timss Advanced 2011

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

Katere vrednosti med 0° in 360° lahko zavzame x ?

- | | |
|---|--------------|
| A) $30^\circ, 150^\circ$ | 20,2% |
| B) $195^\circ, 345^\circ$ | 5,9% |
| C) $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ | 25,5% |
| D) $15^\circ, 75^\circ, 195^\circ, 255^\circ$ | 36,6% |



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



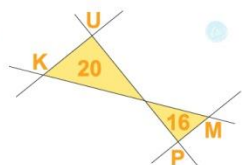
EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SKLAD
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

NPZ 2. junij 2008

Za enačbo $3x + 7 = 8x - 3$ izpolni preglednico in določi vrednost spremenljivke x , ki je rešitev enačbe.

Vrednost spremenljivke x	Vrednost leve strani enačbe	Vrednost desne strani enačbe
0		
1		
2		
3		

Rešitev enačbe $3x + 7 = 8x - 3$ je število _____.

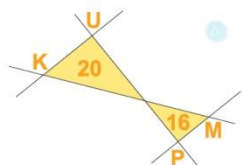


KUPM 2016

O učenju in poučevanju

Pri pouku matematike je dejavnost reprezentiranja abstraktnih matematičnih pojmov najpomembnejša (T. Hodnik Čadež)

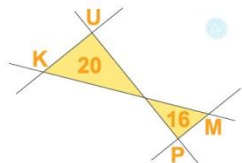
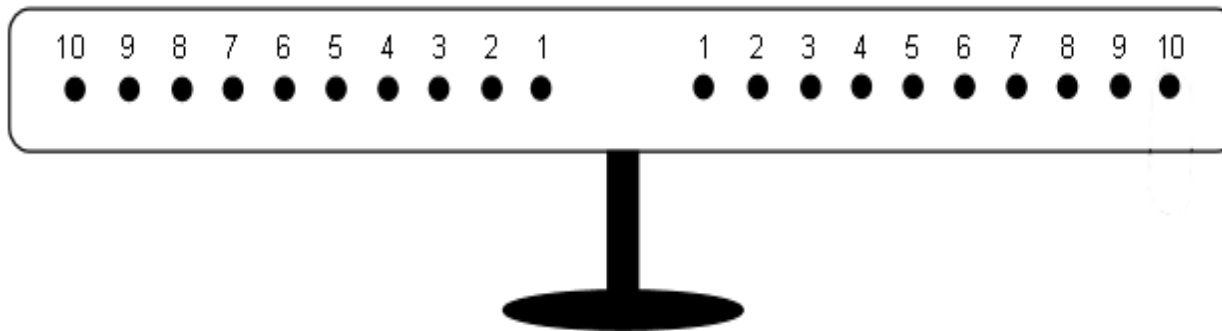
- neformalno obdobje
- predformalno obdobje
- formalno obdobje



KUPM 2016

Rešimo delovni list

Delovni list



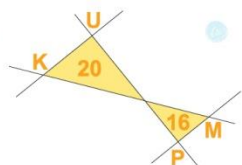
KUPM 2016

Uporaba dinamičnih slik - apletov

<http://url.sio.si/rXv>

<http://url.sio.si/rXx>

E-učbenik



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo

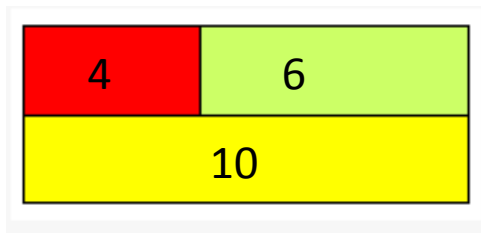


REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT

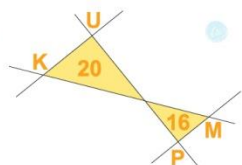


EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SKLAD
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Drugi modeli



Prazna številna premica



KUPM 2016

Viri

- [http://mathserver.neu.edu/~bridger/U201/History of Math Mathematical Symbols.htm](http://mathserver.neu.edu/~bridger/U201/History_of_Math_Mathematical_Symbols.htm)
- <http://www.nctm.org/Publications/Mathematics-Teacher/2015/Vol108/Issue9/Mathematical-Conversations-to-Transform-Algebra-Class/>
- <http://www.fmf.uni-lj.si/~hlnadnik/ZgodMat/ZGODMAT.pdf>
- http://www.learnalberta.ca/content/mepg2/html/pg2_equalityandinequality/pdf/pg2_equalityandinequality.pdf
- http://www.learnalberta.ca/content/mepg2/html/pg2_equalityandinequality/pdf/pg2_equalityandinequality.pdf
- [http://www.ncca.ie/en/Curriculum and Assessment/Post-Primary Education/Project Maths/Teachers/Understanding-Equality.pdf](http://www.ncca.ie/en/Curriculum_and_Assessment/Post-Primary_Education/Project_Maths/Teachers/Understanding-Equality.pdf)
- <http://tidal.northwestern.edu/media/files/pubs/87.pdf>
- National Library of Virtual Manipulatives. Virtual Balance Scale Applet.: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_201_g_4_t_2.html?open=instructions