Od neformalnega do formalnega učenja matematike NeFMat

Amalija Žakelj

Pedagoška fakulteta Koper

Univerza na Primorskem

3. mednarodna konferenca
o učenju in poučevanju matematike
KUPM 2016

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT

EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Naložbo sofinancira Evropski socialni sklad ter Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport, projekt Krepitev kompetenc strokovnih delavcev na področju vodenja inovativnega vzgojno-izobraževalnega zavoda v obdobju od 2016 do 2018

Iz vsebine

- Pristop učenja in poučevanja Od neformalnega do formalnega učenja matematike (NeFMat).

- V povezavi s pristopi učenja in poučevanja jezikovna dimenzija matematike kot integralna, nedeljiva komponenta matematike.

Opomba: *Neformalno, predformalno in formalno učenje bomo v prispevku uporabljali kot metodični/didaktični vidik pouka.*

Izhodišče (Truus Dekker, 2007)

Tako kot je nemogoče, da bi funkcionalno uporabljali jezik že, če bi se naučili le veliko besed ter poznali slovnična pravila

(Truus Dekker, 2007),

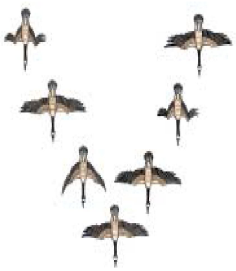
je prav tako malo verjetno, da bi razumeli in funkcionalno uporabljali matematiko,

če bi učenje matematike skrčili zgolj na formalno/abstraktno raven, brez izkušenj z neformalnim in predformalnim učenjem, brez izkušenj s pridobivanjem pojmovnih predstav znotraj realnih/življenjskih oz. matematičnih kontekstov,

ki so vir avtentičnosti, konkretizacije, izkušenjskega učenja.

Značilnosti (NeFMat)

- Proces matematizacije poteka praviloma znotraj **realnega/življenjskega konteksta**, ki postane **učno okolje oz. vir učenja matematike.**



Let ptic v nar 2007).

- Učenci postopno pridobivajo **baze neformalnih in predformalnih pojmovnih predstav**, ki jih opolnomočijo za razvoj formalnega znanja - formalnih/abstraktnih pojmovnih predstav (Truus Dekker, 2007).

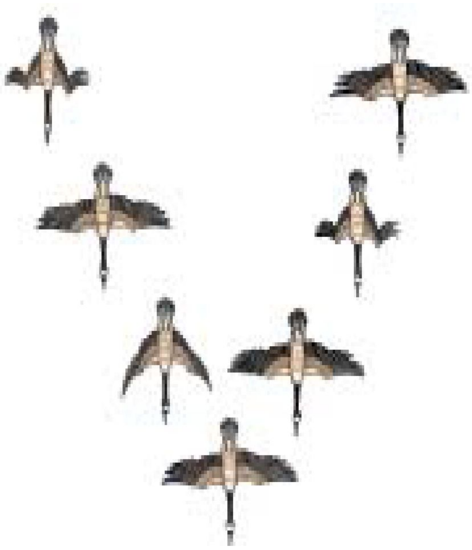
- Vrzeli med neformalnim in formalnim nadomeščajo **modeli.**

- Osnove NeFMat tudi v teoretičnih izhodiščih „Realistične matematike“- Freudenthalov institu.

Značilnosti (NeFMat)

Proces matematizacije poteka praviloma znotraj **r**ealnega/življenjskega/matematičnega **konteksta**, ki postane **učno okolje oz. vir učenja matematike.**

Primer: Realna življenjska situacija kot vir učenja matematike. ***Jata ptic (vzorci).***



Let ptic v naravi (Truus Dekker, 2007).

Značilnosti (NeFMat)

2. Učenci postopno pridobivajo **baze neformalnih in predformalnih pojmovnih predstav**, ki jih opolnomočijo za razvoj formalnega znanja - formalnih/abstraktnih pojmovnih predstav (Truus Dekker, 2007).

Neformalno učenje

Učne situacije, ki matematične pojme in zakonitosti vpletajo implicitno. Učenci ob konkretnih primerih manipulirajo s predmeti iz realnega okolja in z didaktičnimi pripomočki.

Predformalno učenje

Učne situacije, pri katerih uporabljamo matematične pojme in zakonitosti ob konkretnih primerih.

Učenci ob konkretnih primerih manipulirajo s predmeti iz realnega okolja in z didaktičnimi pripomočki.

Formalno učenje

Učne situacije, pri katerih razvijamo in uporabljamo matematične pojme in zakonitosti na formalnem/abstraktnem nivoju (formalno sklepanje, utemeljevanje, uporaba lastnosti matematičnih pojmov, definicij, trditev, izrekov idr.).

Podpora so **neformalne in predformalne pojmovne predstave.**

2. Učenci postopno pridobivajo **baze neformalnih in predformalnih pojmovnih predstav**, ki jih opolnomočijo za razvoj formalnega znanja

Primer: Od neformalne do formalne ravni pojmovne predstave *KVADER*

Neformalne pojmovne predstave

Kaj je kvader?

Npr.: Odgovor učenca na neformalnem nivoju: *“Npr. omara je lahko kvader.“*

Odg. se nanaša na konkretne primere.

Predformalne pojmovne predstave

Kaj je kvader?

Npr.: Odgovor učenca na predformalnem nivoju: *„Npr. omara je kvader, ker ima 6 ploskev, po dve in dve sta skladna in vzporedna pravokotnika“.*

Formalne pojmovne predstave

Kaj je kvader?

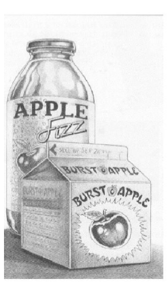
Kvader je oglato geometrijsko telo, ki ga omejuje šest mejnih ploskev. Po dve in dve mejni ploskvi sta skladna in vzporedna pravokotnika.

3. Vrzeli med neformalnim in formalnim nadomeščajo **modeli.**

Imamo dve enolitrski pločevinki. Prva je napolnjena do je $^{3}/_{10}$, druga pa do $^{1}/_{4}$.
V kateri je več soka?

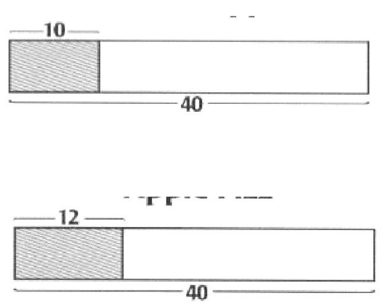
Neformalno razmišljanje

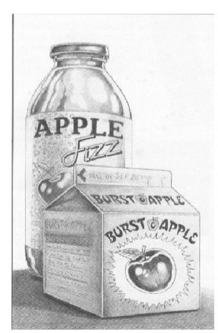
Neformalni modeli: pločevinke, steklenice.



Predformalno

Modeli so pravokotniki.





Formalno

$^{1}/_{4} = {}^{10}/_{40}$

$^{3}/_{10} = {}^{12}/_{40}$

$^{3}/_{10} > {}^{1}/_{4}$

Od neformalnega do formalnega uče

Kontekst: Življenjska situacija – sok v steklenici

Naloga: Imamo dve enolitrski pločevinki. Prva drži $\frac{3}{10}$ l soka, druga pa $\frac{1}{4}$ l soka. V kateri pločevinki je več soka?

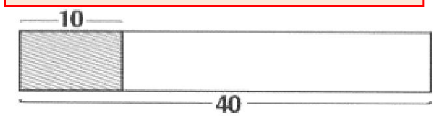
1. Neformalno razmišljanje/neformalne strategije:

Modeli: Najprej so modeli neformalni: npr. steklenica soka.

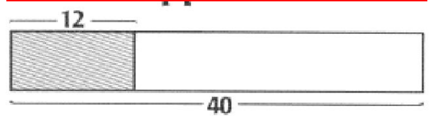
2. Predformalno razmišljanje/predformalne strategije:

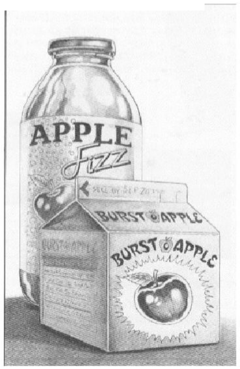
Model: Pravokotnik dolžine 40 enot omogoča primerjavo vsebine.

Jabolčni sok



Jabolčni sok





3. Formalna raven

$\frac{3}{10}$ l = $\frac{12}{40}$ l

$\frac{1}{4}$ l = $\frac{10}{40}$ l

$\frac{3}{}$ l > $\frac{1}{}$ l

Od neformalnega do formalnega učenja matematike

KONTEKST

Kontekst razumemo kot okolje, ki omogoča, da v nekem trenutku znaku, simbolu, besedi ali problemu pripišemo ustrezen pomen (Bezgovšek, 2009, Lipovec A. 2012).

Primer: AB je lahko daljica ali produkt dveh matrik A in B, vendar pa moramo v danem kontekstu vedeti, za kateri koncept gre.

Vloga konteksta in jezikovna dimenzija mate

(*Predmetna komisija za fiziko,* Nacionalno preverjanje znanje, 2014).

Pomembne so tudi izkušnje s kontekstom

„*Na uspešnost reševanja naloge pogosto* ***bolj kot vsebinsko*** *področje vplivata* ***formulacija naloge in kontekst.*** Kratko neposredno vprašanje o čemer koli je navadno precej uspešneje reševano od preverjanja enakega cilja v kontekstu neke daljše naloge ali obsežnejšega konteksta naloge.“

„Podobno se izkazuje, da so problematične naloge, v katerih do pravilnega odgovora učenci pridejo **le ob natančnem branju besedila naloge** in temeljitem premisleku o pojavu oziroma opisanem dogajanju (Nacionalno preverjanje znanje, 2014).“

Kontekst v raziskavi PISA

Izzivi (PISA 2012) so opredeljeni z vrsto konteksta in z matematično vsebino. Kontekstualne kategorije (vrste kontekstov) opredeljujejo tista področja življenja, kjer se problemi zastavljajo.

.

KONTEKST

REALEN/ŽIVLJENJSKI (PISA 2012)

ZNANSTVENI (PISA 2012)

OSEBNI KONTEKST

vključuje probleme ali izzive, s katerimi se srečuje posameznik, njegova družina ali vrstniška skupina.

DRUŽBENI KONTEKST

je osredinjen na posameznikovo skupnost– bodisi krajevno bodisi nacionalno ali globalno.

POKLICNI KONTEKST

je osredinjen na svet dela in poklic.

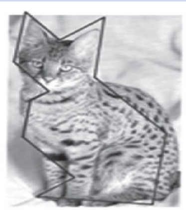
ZNANSTVENI KONTEKST,

ki je povezan s prilagajanjem matematike svetu narave, znanosti in tehnologije.

Vloga realnega/življenjskega konteksta pri učenju matematike (De Lange, 1999, Meyer, 2001)

Kontekst kot MOTIVACIJA

- Tangram problem vezan na vizualen kontekst, ki služi kot motivacija (Lipovec A., Štukl, 2012).



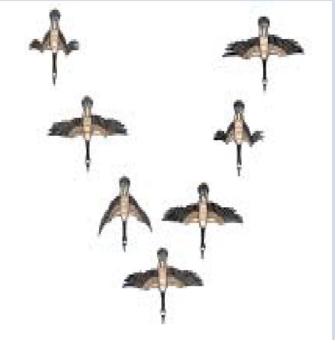
Kontekst kot UPORABA matematike

- Kovanci/krožnice (PISA 2006)
- Najmanjši kovanec naj ima premer 15 mm, serija pa naj vsebuje čim več različnih kovancev.

  ....
- Kolikšni bodo premeri kovancev v vaši seriji?

Kontekst kot UČNO OKOLJE in kot vir učenja matematike

- Učna situacija skozi kontekst zgodbe.
- Vizualni kontekst.
- Realna/življenjska situacija.



Kontekst kot **UPORABA** matematike

Primer: KROŽNICE/KOVANCI

Narišite krožnice: Prva ima premer 15 mm, vsaka naslednja krožnica ima vsaj za 1/3 večji premer od premera prejšnje krožnice.

Premer je lahko celoštevilski v mm in ne večji kot 45 mm.

Koliko **NAJVEČ** krožnic lahko narišete.

Zapišite vse premere krožnic v mm.

Primer: KOVANCI/KROŽNICE (PISA 2006)

Izbrani ste bili za oblikovanje nove serije kovancev. Vsi kovanci bodo okrogli in srebrne barve, a različnih velikosti. Strokovnjaki pravijo, da mora dober sistem kovancev ustrezati naslednjim zahtevam:

- premer kovancev ne sme biti manjši od 15 mm in večji od 45 mm,
- od danega kovanca mora imeti naslednji kovanec vsaj za 1/3 večji premer premera prejšnjega kovanca.

Kovnica lahko naredi le kovance s celoštevilskimi premeri v milimetrih. Izbrali so vas, da oblikujete serijo kovancev, ki ustreza zgornjim zahtevam. Najmanjši kovanec naj ima premer 15 mm, serija pa naj vsebuje čim več različnih kovancev. Kolikšni bodo premeri kovancev v vaši seriji?

Shematski prikaz učenja, ki uporabljajo kontekst kot motivacijo in uporabo znanja

UVOD

- **Kontekst kot motivacija**
- Kontekst kot motivacija za osmišljanje in navezovanje na predznanje.
- Primer: Pred uvedbo računskih operacij za motivacijo računamo z denarjem.

- Kontekst kot ozadje, ki vpliva na motivacijo.
- Primer: Fotografija kot kontekstualizacijsko ozadje, ki vpliva na motivacijo.

FORMALIZACIJA

UPORABA

- **Kontekst kot uporaba**
- Kontekst kot uporaba matematike v življenjskih problemih.
- Vpliv ozadja konteksta na rešitev problema.

Procesi učenja, ki uporabljajo kontekst le kot motivacijo in uporabo znanja

UVOD

- **Kontekst kot motivacija**
- Kontekst kot motivacija za osmišljanje in navezovanje na predznanje.
- **Primer: Pred uvedbo računskih operacij za motivacijo računamo z denarjem.**

- Kontekst kot ozadje, ki vpliva na motivacijo.
- Primer: Fotografija kot kontekstualizacijsko ozadje.

FORMALIZACIJA

- **Osrednji del učenja, usvajanje novih pojmov, postopkov, zakonitosti idr. , poteka izven konteksta oz. brez navezovanja na kontekst iz uvodne situacije.**

UPORABA

- **Kontekst kot uporaba**
- Kontekst kot uporaba matematike v življenjskih problemih.
- Vpliv ozadja konteksta na rešitev problema.
- **Primer: Pri uporabi se zopet vrnemo k prvotnemu kontekstu - k denarju.**

Procesi učenja, ki uporabljajo kontekst kot uporabo znanja

Vpliv ozadja konteksta na rešitev problema.

Primer:

Cestno podjetje položi 5 km asfalta v 4 urah. Koliko časa potrebuje za 1000 km asfalta?

Kaj pomeni rešitev 800 ur v matematičnem kontekstu in kaj v realnem življenju?

Uporaba matematike v realnem/življenjskem kontekstu

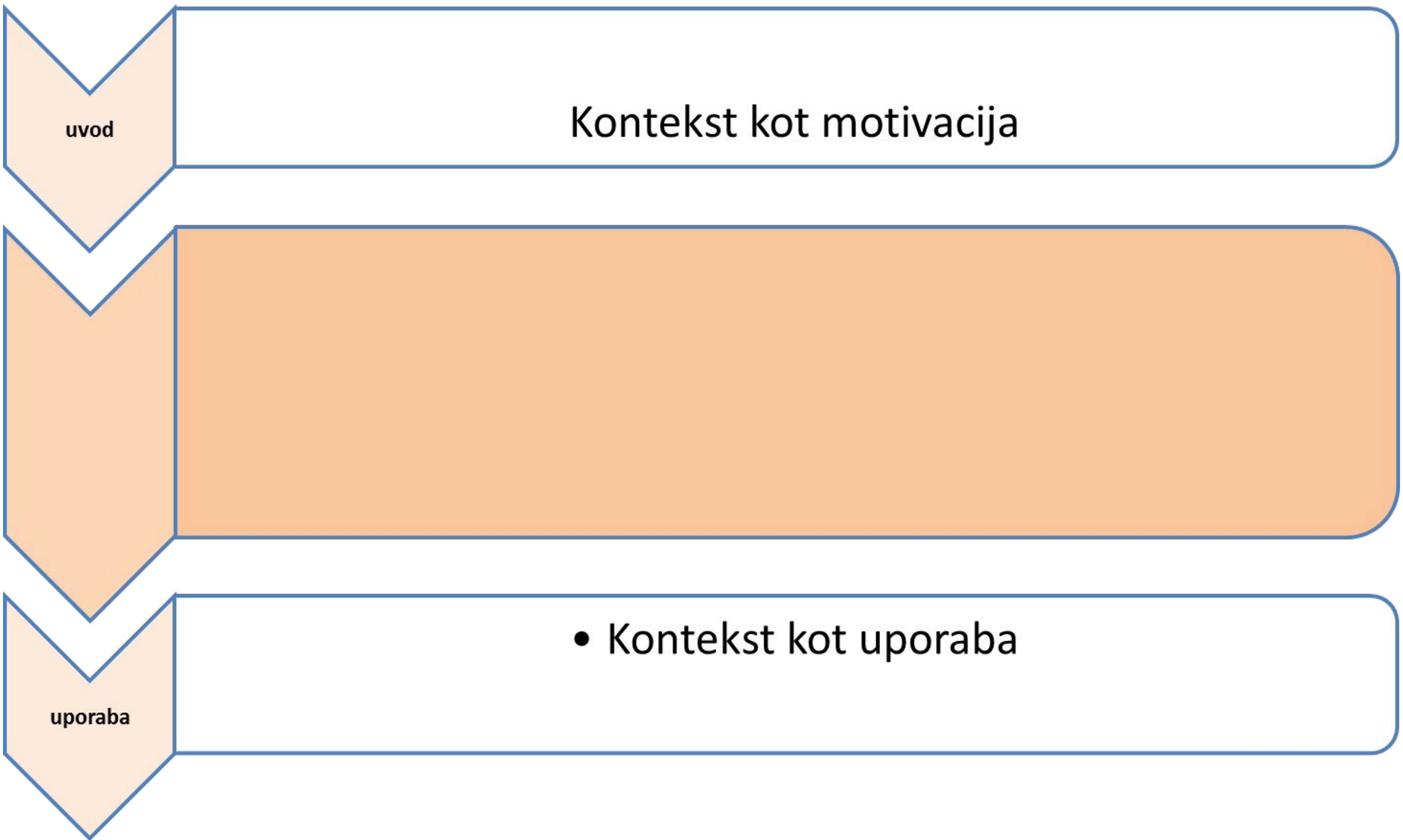
Primer: Kovanci/krožnice (PISA 2006)

Izbrani ste bili za oblikovanje nove serije kovancev. Vsi kovanci bodo okrogli in srebrne barve, a različnih velikosti. Strokovnjaki pravijo, da mora dober sistem kovancev ustrezati naslednjim zahtevam:

- premer kovancev ne sme biti manjši od 15 mm in večji od 45 mm,
- od danega kovanca mora imeti naslednji kovanec vsaj za 1/3 večji premer premera prejšnjega kovanca.

Kovnica lahko naredi le kovance s celoštevilskimi premeri v milimetrih. Izbrali so vas, da oblikujete serijo kovancev, ki ustreza zgornjim zahtevam. Najmanjši kovanec naj ima premer 15 mm, serija pa naj vsebuje čim več različnih kovancev. Kolikšni bodo premeri

Shematski prikaz učenja, ki uporabljajo kontekst kot motivacijo in uporabo znanja



Shematski prikaz, ki uporabljajo kontekst kot učno okolje in kot **vir učenja matematike**

uvod

Kontekst kot motivacija

od neformalnega do formalnega učenja matematike

Kontekst kot učno okolje:

- **Osrednji del učenja, usvajanje novih pojmov, postopkov, zakonitosti idr. , poteka znotraj konteksta, običajno na modelih, predvsem pa postopoma, od neformalnega do formalnega učenja matematike.**

uporaba

- Kontekst kot uporaba

Procesi učenja, ki uporabljajo kontekst kot učno okolje in kot vir učenja matematike

(Prirejeno po Using Realistic Mathematics Education in UK classrooms, Paul Dickinson and Sue Hough, 2012)

Modeli postopoma postajajo bolj matematični

Ko se formalne strategije razvite, se stalno vračamo v kontekst, da se prepričamo, da so strategije smiselne.

Neformalni modeli/razvoj strategij

Kontekst 1

Modeli/razvoj strategij

Kontekst 2

Modeli/razvoj strategij

Kontekst 3

Formalna matematika

Kontekst pomaga sprejemati odločitev in omogoča uvid v pomen/smisel. Kontekst postopoma postaja bolj matematičen.

Procesi učenja, ki uporabljajo kontekst kot učno okolje in kot vir učenja matematike

(Prirejeno po Using Realistic Mathematics Education in UK classrooms, Paul Dickinson and Sue Hough, 2012)

Ko se formalne strategije razvite, se stalno vračamo v kontekst, da se prepričamo, da so strategije smiselne.

Neformalni modeli/razvoj strategij

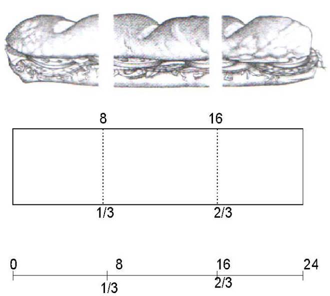
Kontekst

Modeli/razvoj strategij

Kontekst

Formalna matematika

Kontekst in modeli postopoma postajajo bolj matematični



Vrzeli med neformalnim in formalnim nadomeščajo modeli.

PRIMER: Žepnina

Jaka dobi vsak teden 6 € žepnine. Ker namerava varčevati, se je odločil, da bo vsak dan porabil za malico le 60 centov (kupil bo žemljico in malo mleko). Za koliko dni bi imel 6 €?

1. Neformalno razmišljanje/neformalne strategije:

6 € zmenja v cente po 10 centov.

MODEL: Denar/kovanci

Vrzeli med neformalnim in formalnim nadomeščajo modeli.

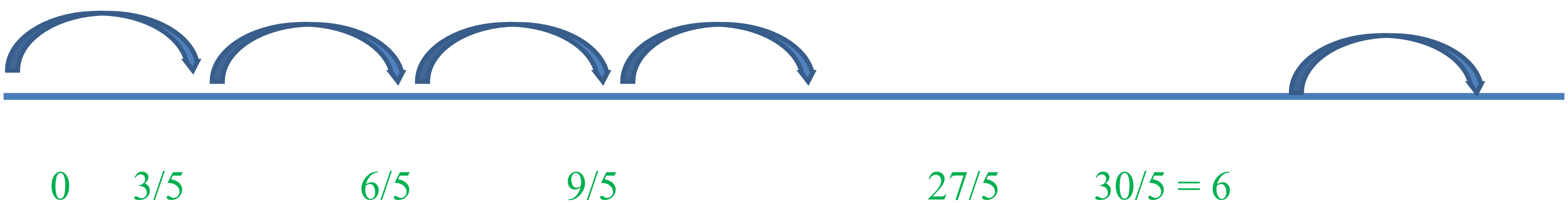
2. Predformalno razmišljanje/predformalne strategije:

60 centov = 60/100 € = 3/5 €

Model: številska os

6 ÷ 3/5 = ?

Model: številska os



3. Formalno razmišljanje/formalne strategije: 6 ÷ 3/5 =

Procesi učenja, ki uporabljajo kontekst kot učno okolje in kot **vir učenja matematike**

(prirejeno po Using Realistic Mathematics Education in UK classrooms, Paul Dickinson and Sue Hough, 2012)

Modeli postopoma postajajo bolj matematični

Ko se formalne strategije razvite, se stalno vračamo v kontekst, da se prepričamo, da so strategije smiselne.

Neformalni modeli/razvoj strategij

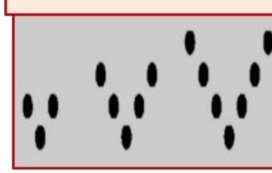
Kontekst 1

Modeli/razvoj strategij

Kontekst 2

Modeli/razvoj strategij

Kontekst 2



Formalna matematika

Kontekst pomaga sprejemati odločitev in omogoča uvid v pomen/smisel. Kontekst postopoma postaja bolj matematičen.

Kontekst kot učno okolje

Konteksti se lahko vzeti iz realnega sveta. Smiselno je, da so iz območja matematike, ki je učencem blizu.

- **Ubeseditev problema** skozi zgodbo je verjetno najbolj naravna oblika kontekstualizacije.
- **Vizualni kontekst**: fotografija kot kontekst.
- **Konkretna življenjska situacija** (npr.: vožnja z avtobusom, kot model za seštevanje (vstopanje potnikov- dodajanje) in odštevanje (izstopanje potnikov) (van den Brink, 1989).

KONTEKST KOT UČNO OKOLJE

Kontekst kot realna/življenjska situacija.

Primer 1: Učna situacija skozi kontekst zgodbe.

Vpeljavo količine denar, merske enote za denar (€, cent) ter računanje z denarnimi vrednostmi, lahko vpeljemo skozi kontekst zgodbe *»Sledenje 20-im evrom«.*

(Vir: iz gradiva projekta Izzivi podjetnosti za mlade, ZRSŠ).

YouthStart
ENTREPRENEURIAL
CHALLENGES

Učna situacija skozi kontekst zgodbe.

Cilji iz UN: Spoznajo merski enoti za denar (€, cent) in njune vrednosti; se navajajo na uporabo denarnih enot v vsakdanjem življenju.

Neformalno učenje: Na neformalni ravni še ne uporabljamo denarja kot količine in formalno še ne spoznavamo enote za denar. Učenje in usvajanje pojmov poteka skozi kontekst realne/življenjske situacije kot so kupovanje v trgovini, poraba dobrin v gospodinjstvu, delo v podjetju, plačevanje ... spoznamo kroženje denarja.

Dobrine/storitve in denar lahko izmenjujejo različni ljudje

Predformalno učenje

Cilj iz UN: Berejo zapisane denarne vrednosti (cene) v decimalnem zapisu.

Cilj iz UN: Seštevajo in odštevajo denarne vrednosti ob primerih iz vsakdanjega življenja.

Na predformalni ravni učenja smo postavljeni v vlogo potrošnika ter spoznavamo vlogo denarja, kroženje denarja, zakaj je denar potreben … **Denar spoznavamo kot količino, spoznavamo enoto** za denar (€, cent). Ob izdelkih na trgu, v trgovini, v katalogih idr.   beremo zapisane denarne vrednosti v evrih (v decimalnem zapisu)

Trgovina Ana	0,79	1,09	2,49	1,19	0,19	0,59
Pri Zmajčku	0,79	1,09	1,59	1,19	0,45	0,59
Vse na enem mestu	0,67	1,09	2,43	1,25	0,54	0,61
Pekarna Miška	0,76	1,09	2,75	1,31	0,49	0,62
Pri Lojzki	0,79	1,09	2,60	1,18	0,47	0,59

ABONMA	REDNA CENA	Študenti *
KOMEDIJA	89 € 79 €	64 € 54 €
KONCERTNI DVOJČEK ORKESTRSKI + KOMORNI CIKEL (10 koncertov)	139,50 €	48 €
ORKESTRSKI CIKEL		
ABONMA (5 koncertov)	99 €	30 €
POSAMEZNA VSTOPNICA	25 €	17 €
KOMORNI CIKEL		
ABONMA (5 koncertov)	56 €	18 €
POSAMEZNA VSTOPNICA	14 €	8 €

Koliko je vredno?

Učenci skozi izziv *Koliko je vredno*:

- spoznavajo cene različnih dobrin in storitev (ocenijo ceno posameznega izdelka)
- se učijo pojasnjevati in primerjati cene ter vrednosti izdelkov
- skozi primere spoznavati kaj določa vrednost dobrin in storitev
- brati zapisane denarne vrednosti (cene) v decimalnem zapisu (€, cent).

Koliko je vredno?
storitve

Klici na Hrvaškem

Storitev	Cena
Odhodni klici (dest. Slovenija)	0,89 €
Dohodni klici	0,15 €
Poslani SMSi	0,22 €
Odhodni klici (dest. GOSTUJOČA DRŽAVA)	0,89 €
Odhodni klici (dest. OSTALO)	0,89 €
Odhodni klici (dest. EU)	0,89 €

SLOVENSKO MLADINSKO GLEDALIŠČE V SEZONI

Formalna raven

Cilj iz UN: seštevajo in odštevajo količine v decimalnem zapisu (denar) ob primerih iz vsakdanjega življenja.

Na formalni ravni učenci berejo in zapisujejo denarne vrednosti z decimalnim zapisom, ustno in pisno računajo z denarnimi vrednostmi, seštevajo in odštevajo denarne vrednosti ob primerih iz vsakdanjega življenja, ocenjujejo vrednosti predmetov.

Neformalno

Še ne uporabljajo denarja kot količine.

Kupovanje v trgovini, poraba dobrin v gospodinjstvu, plačevanje idr.

Predformalno

Denar spoznavajo kot količino, spoznavajo enoto za denar (€, cent).

Berejo zapisane denarne vrednosti v evrih (npr. cene).

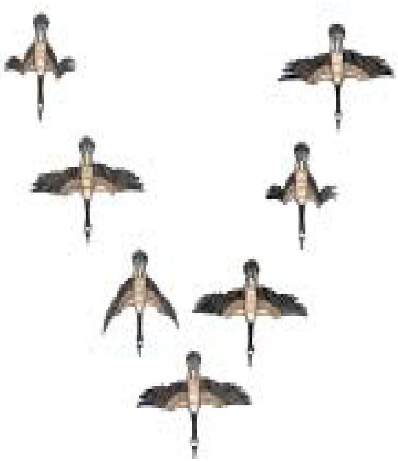
Formalno

Seštevajo in odštevajo količine v decimalnem zapisu.

KONTEKST KOT UČNO OKOLJE
Uporaba modelov

Primer: Učna situacija skozi kontekst realne /življenjske situacije

Realni kontekst: Let ptic v naravi (Truus Dekker, 2007).



(Vir: Truus Dekker, 2007)

Prepoznavanje in nadaljevanje vzorca je pomemben proces predalgebrskega razmišljanja in kot tak predstavlja osnovo novih pristopov k algebri, ki se pojavlja v učnih načrtih za matematiko v večini držav.

Proces predalgebrskega razmišljanja se lahko začne že zelo zgodaj, v nižjih razredih osnovne šole, prek prepoznavanja in nadaljevanja vzorca.

Učenje se začne z realistično situacijo, z opazovanjem jate ptic, s prepoznavanjem pravila v vzorcu.

Neformalne izkušnje z vzorci nadgradimo z modeli, ki so že manj konkretni, npr. namesto ptic rišemo simbole za ptice (npr. pike).

Modeli pomagajo pri neformalnem sklepanju in napovedovanju.

Izkušnje z neformalnimi in predformalnimi situacijami pomagajo pri formalnem sklepanju.

Do dejavnosti formalnega sklepanja (npr. do napovedovanja) oz. do ustvarjanja/izgrajevanja prvih algebrskih pojmovnih predstav (kot so npr. n-člen zaporedja, formalni simbolni zapis za n-ti člen zaporedja), do povezovanja pojmov znotraj matematike, ki jih dopuščajo obravnavane situacije, pridemo šele v zadnji fazi. V tem primeru, kot bomo videli v nadaljevanju, gre tudi za posploševanje in sposobnost se na abstraktni ravni navezati tudi na druge matematične pojme, kot npr. na pojem soda in liha števila.

KONTEKST KOT UČNO OKOLJE

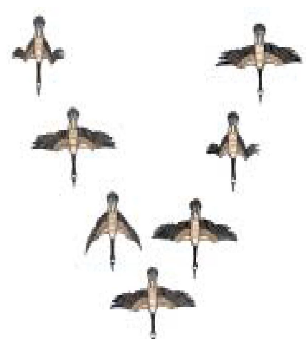
Vzorci, postavljeni v realni/Življenjski kontekst

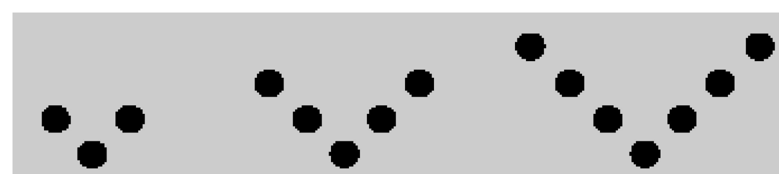
Cilji: prepoznati pravilo v vzorcu, nadaljevati vzorec, utemeljevati, napovedovati, poznati, prepoznati, ločevati liha in soda števila,

- Učenje se začne z realistično situacijo, z opazovanjem jate ptic, s prepoznavanjem pravila v vzorcu.
- Neformalne izkušnje z vzorci nadgradimo z modeli, ki so že manj konkretni, npr. namesto ptic rišemo simbole za ptice (npr. pike).

Modeli postajajo vedno bolj formalni.

(Vir: Truus Dekker, 2007)





Ali v vzorcu obstaja člen s 84 pikami? Utemelji.

Odgovori učencev (Povzeto po Threat or Treat?, Truus Dekker, 2007)

Neformalno sklepanje

„Ne, ker mora biti ena ptica spredaj.“

Obrazložitev se nanaša na ptice.

Predformalno sklepanje

„Ne, če 84 delimo z 2, dobimo 42 - to je število ptic na vsaki strani, vendar pa bi morali imeti še eno ptico, ki leti spredaj.“

Obstaja že razmišljanje o lastnostih števil, vendar še vedno s pomočjo konkretnih opor (ptic).

Formalno sklepanje

„Ne, vsak člen v V-vzorcu ima neparno število pik, 84 pa je sodo.“

Obrazložitev se nanaša na lastnosti števil.

Koliko pik je v 100. členu V-vzorca? Utemelji.

Odgovori učencev (Povzeto po Threat or Treat?, Truus Dekker, 2007)

Neformalno sklepanje

„Na eni strani 51 in na drugi 49 (napačen odgovor na podlagi neformalnih obrazložitev).“

„201, ker mora biti na vsaki strani V vzorca enako število ptic in ena ptica, ki vodi let.“

Obrazložitev se nanaša na ptice.

Predformalno sklepanje

„201, ker je število ptic v 100. členu V- vzorca dvakratnik števila 100 in še ena ptica.“

(predformalno sklepanje, na podlagi primera)

Obstaja že razmišljanje o lastnostih števil, vendar še vedno s pomočjo konkretnih opor (ptic).

Formalno sklepanje

$a_n = 2n + 1,\ n \in N$

$a_{100} = 201$

Formalno dokazovanje, npr. z algebrskim zapisom.

Dve skupini ptic letita v obliki V-vzorca. Obe skupini se združita. Je možno, da skupaj ponovno tvorijo vzorec v obliki V?

Odgovori učencev (Povzeto po Threat or Treat?, Truus Dekker, 2007

Neformalno sklepanje

„Ne vemo, kako ptice letijo.“

(nepravilno, neformalno)

Najprej moram vedeti, koliko je vseh ptic. (nepravilno, neformalno)

Neformalno sklepanje

„Ne, ni mogoče, manjka vodja leta.“

(pravilno, neformalno)

Formalno sklepanje

„Ne, ker je vsota dveh lihih števil sodo število.“

(pravilno, formalno, referira na lastnosti števil)

Izbrali smo dve celi števili. Če jih seštejemo, je rezultat liho število. Kaj veš o obeh številih, ki smo jih izbrali?

Odgovori učencev (Povzeto po Threat or Treat?, Truus Dekker, 2007)

Neformalno sklepanje

„Ne morem vedeti, kateri dve števili ste izbrali.“
(nepravilno, neformalno)

Neformalno sklepanje

„Vem, izbrali ste 3 in 8, ker je 3 + 8 = 11 liho število.“

Formalno sklepanje

„Eno število mora biti liho, drugo sodo.“

(sklepanje z uporabo lastnosti števil)

Shema: Od neformalne do formalne ravni pojmovnih predstav

Neformalno
obrazložitev, ki se nanaša na konkretne primere.

Predformalo

Obrazložitev, ki upošteva lastnosti matematičnih pojmov, vendar še vedno s konkretnimi primeri/oporami.

Formalno

Formalno sklepanje, utemeljevanje, uporaba lastnosti matematičnih pojmov, definicij, trditev, izrekov.

Primer: Od neformalne do formalne ravni pojmovne predstave *KVADER*

neformalne pojmovne predstave

Kaj je kvader?

Npr. omara je primer kvadra (se nanaša na konkretne primere)

predformalne pojmovne predstave

Kaj je kvader?

Npr. omara je kvader, ker ima 6 ploskev, po dve in dve sta skladna in vzporedna pravokotnika.

formalne pojmovne predstave

Kaj je kvader?

Kvader je oglato geometrijsko telo, ki ga omejuje šest mejnih ploskev. Po dve in dve mejni ploskvi sta skladna in vzporedna pravokotnika

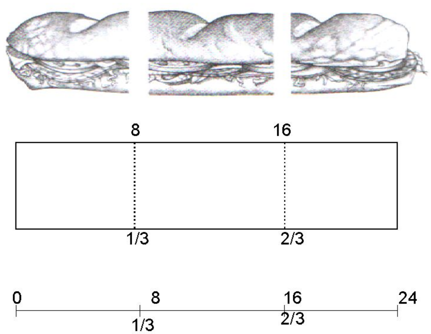
Model in kontekst

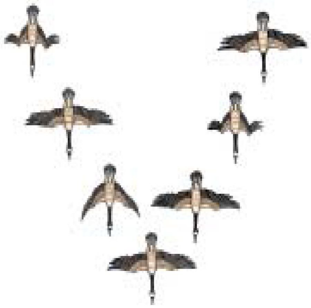
- Vrzeli med neformalnim in formalnim nadomeŠČajo modeli.
- V prvi fazi, na niŽji stopnji najprej uporabljamo neformalne modele, kasneje modeli postajajo bolj matematiČni.
- Sprva so malo več kot le predstavitve/reprezentacije, npr. slika, pozneje ti modeli postanejo bolj prefinjena matematiČna orodja kot npr. diagrami, Številska os, tabele idr.
- Ko so razvite tudi formalne strategije, se stalno vraČamo v kontekst, da se prepriČamo, da so strategije smiselne.

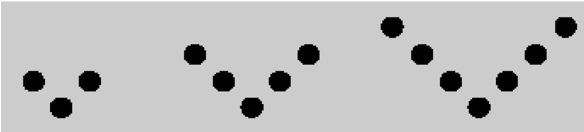
Vrzeli med neformalnim in formalnim nadomeščajo modeli.

- V prvi fazi, na nižji stopnji najprej uporabljamo neformalne modele, kasneje modeli postajajo bolj matematični.
- Sprva so malo več kot le predstavitve/reprezentacije, npr. slika, pozneje ti modeli postanejo bolj prefinjena matematična orodja kot npr. diagrami, številska os, tabele idr.

Modeli postopoma postajajo bolj matematični







Vrzeli med neformalnim in formalnim nadomeščajo modeli.

PRIMER: Žepnina

Jaka dobi vsak teden 6 € žepnine. Ker namerava varčevati, se je odločil, da bo vsak dan porabil za malico le 60 centov (kupil bo žemljico in malo mleko). Za koliko dni bi imel 6 €?

1. Neformalno razmišljanje/neformalne strategije:

6 € zmenja v cente po 10 centov.

MODEL: Denar/kovanci

Vrzeli med neformalnim in formalnim nadomeščajo modeli.

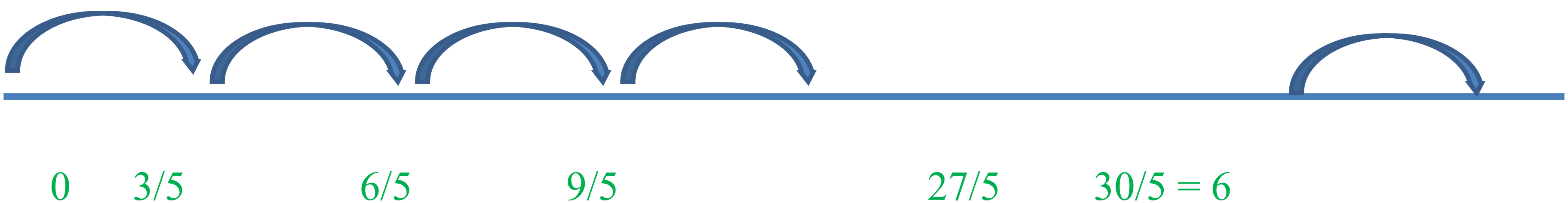
2. Predformalno razmišljanje/predformalne strategije:

60 centov = 60/100 € = 3/5 €

Model: številska os

6 ÷ 3/5 = ?

Model: številska os



3. Formalno razmišljanje/formalne strategije: 6 ÷ 3/5 =

Vrzeli med neformalnim in formalnim nadomeščajo modeli.

Primer: primerjati ulomke po velikosti

Prelivanje tekočine: Ali je mogoče vsebino enolitrske pločevinke kokosovega mleka, ki je napolnjena do 1/3 zliti v pločevinko z enako prostornino, ki je že napolnjena do 3/4?

1. Neformalno razmišljanje/neformalne strategije:

Uporabimo pločevinke.

2. Predformalno razmišljanje/predformalne strategije:

Model: pravokotni, kasneje pravokotnike zamenja številska os.

3. Formalno razmišljanje/formalne strategije (računske operacije)

Shema: Od neformalne do formalne ravni pojmovnih predstav

Neformalno
obrazložitev, ki se nanaša na konkretne primere.

Predformalo

Obrazložitev, ki upošteva lastnosti matematičnih pojmov, vendar še vedno s konkretnimi primeri/oporami.

Formalno

Formalno sklepanje, utemeljevanje, uporaba lastnosti matematičnih pojmov, definicij, trditev, izrekov.

Od neformalnega do formalnega uče

Kontekst: Življenjska situacija – sok v steklenici

- Naloga: Imamo dve enolitrski pločevinki. Prva drži $\frac{3}{10}$ l soka, druga pa $\frac{1}{4}$ l soka. V kateri pločevinki je več soka?

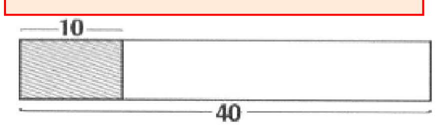
1. Neformalno razmišljanje/neformalne strategije:

Modeli: Najprej so modeli neformalni: npr. steklenica soka.

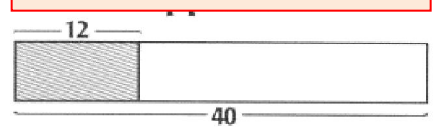
2. Predformalno razmišljanje/predformalne strategije:

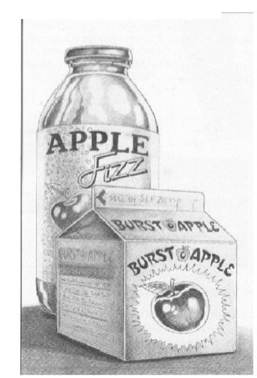
Model: Pravokotnik dolžine 40 enot omogoča primerjavo vsebine.

Jabolčni sok



Jabolčni sok





3. Formalna raven

$\frac{3}{10}$ l = $\frac{12}{40}$ l

$\frac{1}{4}$ l = $\frac{10}{40}$ l

$\frac{3}{}$ l > $\frac{1}{}$ l

Pristopi učenja in poučevanja in jezikovna dimenzija matematike

Pristopi učenja in poučevanja in jezikovna dimenzija matematike

Pri matematiki branje, pisanje, poslušanje in ustno sporočanje pogosteje razumemo in uporabljamo predvsem kot sredstva za

- pridobivanje matematičnih informacij za rešitev problema (iz besedil) ter
- kot načine izkazovanja znanja pri matematiki;

bistveno manj pa so dejavnosti branja in pisanja ter govorjenja usmerjene

- v izražanje matematičnih idej,
- interpretiranje matematičnih dejstev in konceptov,
- v interpretativno branje matematičnega besedila (Kwaku Adu-Gyamfi, 2014).

Vloga konteksta in jezikovna dimenzija mate

(*Predmetna komisija za fiziko,* Nacionalno preverjanje znanje, 2014).

Pomembne so tudi izkušnje s kontekstom

„Na uspešnost reševanja naloge pogosto ***bolj kot vsebinsko*** *področje vplivata* ***formulacija naloge in kontekst.*** Kratko neposredno vprašanje o čemer koli je navadno precej uspešneje reševano od preverjanja enakega cilja v kontekstu neke daljše naloge ali obsežnejšega konteksta naloge.“

„Podobno se izkazuje, da so problematične naloge, v katerih do pravilnega odgovora učenci pridejo **le ob natančnem branju besedila naloge** in temeljitem premisleku o pojavu oziroma opisanem dogajanju (Nacionalno preverjanje znanje, 2014).“

Jezikovna dimenzija matematike

Procesi pridobivanja matematičnih pojmov so povezani s procesi za razvoj (matematičnega) jezika.

Jezikovna dimenzija matematike je integralna, nedeljiva komponenta matematike.

Učenje matematike in jezikovna dimenzija matematike

Znanje maternega jezika in uspeh pri matematiki so povezani, ne glede na raso, narodnost, družbeni razvoj in jezik (Secoda, 1992).

Tako učenje maternega jezika kot tudi učenje matematike od učenca zahtevajo **pomnjenje in razumevanje abstraktnih simbolov, kognitivne procese in interakcijo s številnimi veščinami** (Greabell, 1992).

Napredovanje pri branju pomeni tudi napredovanje pri reševanju problemov, saj imajo v besedilnih problemih, oboji, matematično in nematematično besedilo vpliv na uspešnost reševanja (Clarkson, 1994).

Ključni dejavniki za učenje matematike so (MacGregor in Price , 1999):

- obseg besedišča,
- poznavanje in razumevanje števil, simbolov ter
- sposobnost branja in razumevanja besedilnih problemov.

Učenje matematike in jezikovna dimenzija matematike

- Raziskovalci Dawe (1983) ter MacGregor in Price (1999), ki navajajo povezave med jezikom in matematiko, te povezave vidijo predvsem na osnovni ravni, **na višji ravni pa se matematično procesiranje vedno bolj razlikuje od jezikovnega procesiranja.**

- Razhajanja so del razlik v **sintaksi, semantiki**, diskurzni ravni, tematsko koherentni ravni besedil (MacGregor in Price, 1999).

- Branje matematičnih besedil z razumevanjem pogojujejo obvladovanje **matematične terminologije, poznavanje in razumevanje matematičnih definicij, izrekov, zakonitosti, pravil** idr. ter zmožnosti spretnega in hitrega operiranja s simboli in z odnosi med njimi.

Učenje matematike in jezikovna dimenzija matematike
Kje se procesiranje v jeziku razlikuje od procesiranja v matematiki?

Razhajanja so del razlik v (MacGregor in Price, 1999):

- **sinatksi** (***Sintaktsa*** *določa pravilno strukturo jezika in njegovih posameznih simbolov, ukazov ali stavkov*.)
- **semantiki** (**Pomen** posameznih gradnikov (simbolov, ukazov, stavkov) je določen s **semantiko** *jezika.*).
- **diskurzni ravni** (npr. *sposobnost razumskega, logično razčlenjenega mišljenja …),*
- **tematsko koherentni ravni** besedil (medsebojno povezanost, odvisnost, deskriptivnost …).

Ker se matematika zelo pogosto predstavlja v simbolnem jeziku, se **zlasti ustna komunikacija** ne prepoznava kot pomembna dejavnost matematičnega izobraževanja (The National Council of Teachers of Mathematics,1996).

A Značilnosti matematičnega jezika

Wakefield (2000)

- **abstrakcija** (matematične zakonitosti, definicije, npr. binomski izrek, osnovni izrek o deljenju racionalnih števil ...)
- **simboli in pravila** ($p \parallel q$; $\sphericalangle ABC$ **...** pravila za računanje s potencami; pravila za tvorbo ekvivalentnih enačb idr.) $|a| = \begin{cases} a; & a \geq 0 \\ -a; & a < 0 \end{cases}$
- **nelinearnost in kompleksnost jezika,** $a^2 + b^2 = c^2$
- **urejenost** (npr. struktura dokazovanja zahteva natančnost in urejenost)
- Matematični teksti **so konceptualno gosti**, pogosto bolj kot druge zvrsti pisanja in so polni **jezikovnih in simbolnih konvencij** (Adams, 2003).

Strokovni jezik

Za razumevanje strokovnih besedil se moramo naučiti jezika strok.

Vsaka disciplina ima svoj **kodeks komunikacije, posebno terminologijo**, ki se uporablja za komunikacijo **idej v disciplini** in so ključni dejavniki v procesu komuniciranja.

Seveda se pri pouku matematike branje v določeni meri razlikuje od branja, ki se pričakuje v literaturi, učitelji matematike seveda težijo k razvoju jezikovnih matematičnih spretnosti.

Da učenec bere matematična besedila z razumevanjem, mora usvojiti matematično terminlogijo in simboliko, poznati in razumeti matematične definicije, izreke, zakonitosti, pravila idr.

Matematika je simbolni jezik

S**intaks**a matematičnega jezika opisuje **predpisane kombinacije simbolov** (+,-, ·, ÷, <, >, =, števke od 0 do 9 ...).

Čeprav, zlasti v prvem obdobju šolanja, ta množica simbolov ni velika, pa učencem simboli povzročajo težave.

Hodnik Čadež (2003) meni, da gre odgovor iskati v dejstvu, da **množica simbolov ponuja zelo veliko različnih kombinacij,** za katere veljajo določena pravila.

In prav ta pravila so tista, ki učencem pri matematiki povzročajo težave.

Značilnosti matematičnega jezika:

(Wakefield, 2000; Adams, 2003)

- **abstrakcija** (definicije, aksiomi, izreki idr.);
- **simboli in pravila** (*p*||*g*, ∑, √, ≠ …, npr. pravila za računanje s potencami idr.);
- **nelinearnost in kompleksnost jezika**;

$$|a| = \begin{cases} a; & a \geq 0 \\ -a; & a < 0 \end{cases}$$

- **urejenost** (npr. struktura dokazovanja zahteva nat urejenost);

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- **konceptualna gostost matematičnih besedil (**Matematični teksti so konceptualno gosti, pogosto bolj kot druge zvrsti pisanja in so polni jezikovnih in simbolnih konvencij (Adams, 2003). *»Če sta f in h funkciji, ki sta zvezni v točki x = c, potem je v tej točki zvezna tudi kvocient funkcij f/h.«*).

Procesi pridobivanja matematičnih pojmov v povezavi z jezikovno dimenzijo matematike

Značilnosti matematičnega jezika:

- abstrakcija,
- simboli in pravila,
- nelinearnost in kompleksnost jezika,
- urejenost,
- jezikovne in simbolne konvencije

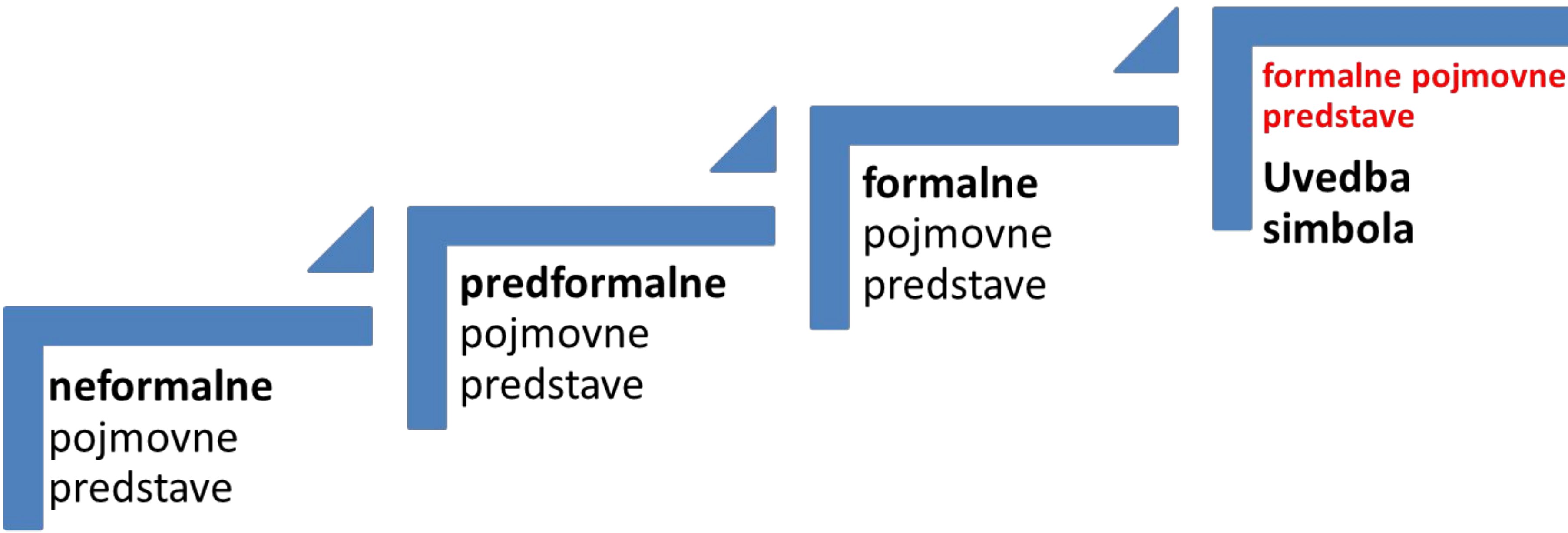
(Wakefield, 2000; Adams, 2003) idr.

Sporazumevalne dejavnosti, ki podpirajo razvoj pojmovnih predstav:

- razvijanje (matematičnega) besedišča;
- interpretiranje matematičnih besedil;
- kreativno in ustvarjalno mišljenje (npr. samostojno oblikovanje besedila problema);
- interpretiranje matematičnih definicij, izrekov;
- **tudi razvoj splošnih veščin** (kreativno pisanje pri matematiki, pisanje člankov, razlagalno pisanje, vrstniško ocenjevanje …).

Matematika je simbolni jezik

Matematika je simbolni jezik, zato so formalne pojmovne predstave pogosto povezane s simboli in simbolnim jezikom.



Matematika je simbolni jezik

Npr. *Geeno (1982) navaja napake učencev, ki so posledica* ***n*****erazumevanja strukturalnih lastnosti algebre**. *Pogoste napake, ki jih navaja:*

- *37x - 4 skrčijo v izraz 33x*
- *2xy - 2y skrčijo v izraz x*
- *Učence zmede: Če v a·b zamenjam a z (-a) je to -a·b, če pa v a·b zamenjam b z (-b), pa to ni a-b.*

Učenje matematike in jezikovna dimenzija matematike
Kje se procesiranje v jeziku razlikuje od procesiranja v matematiki?

Razhajanja so del razlik v (MacGregor in Price, 1999):

- **sinatksi** (***Sintaktsa*** *določa pravilno strukturo jezika in njegovih posameznih simbolov, ukazov ali stavkov*.)
- **semantiki** (**Pomen** posameznih gradnikov (simbolov, ukazov, stavkov) je določen s **semantiko** *jezika.*).
- **diskurzni ravni** (npr. *sposobnost razumskega, logično razčlenjenega mišljenja ...)*,
- **tematsko koherentni ravni** besedil (medsebojno povezanost, odvisnost, deskriptivnost …).

Ker se matematika zelo pogosto predstavlja v simbolnem jeziku, se zlasti ustna komunikacija ne

Od neformalne do formalne ravni pojmovne predstave *premo sorazmerje*

neformalne pojmovne predstave

Kaj je premo sorazmerje?

Npr.: Cena enega zvezka je 2 EUR-a, če kupimo tri zvezke plačamo 6 EUR, če jih kupimo 5, plačamo 10 EUR.

predformalne pojmovne predstave

Kaj je premo sorazmerje?

če se ena količina (število kupljenih zvezkov) poveča dvakrat, trikrat … , se tudi druga količina (znesek za plačilo teh zvezkov) poveča dvakrat, trikrat …, ker sta število kupljenih zvezkov in znesek za plačilo teh zvezkov premo sorazmerni.

Razmišljanje, ki uporablja lastnosti premega sorazmerja.

formalne pojmovne predstave

Kaj je premo sorazmerje?

Količini *a* in *b* sta **premo sorazmerni**, če povečanje ene količine pomeni hkratno sorazmerno povečanje druge torej če velja: $\mathbf{a_1 : a_2 = b_1 : b_2}$

Pisanje pri matematiki ne pomeni zgolj napisati odgovor k besedilni nalogi.

Kombinacija besed in simbolnega jezika

(Dr. Kevin P. Lee v A Guide to Writing Mathematics)

Sintaksa, semantika jezika

Upoštevati pravila slovnice.

Formule in enačbe sledijo slovničnim pravilom kot veljajo za besedni del teksta.

(npr. $\underline{3xy = 2}$. je stavek)

Dosledna in pravilna

uporaba simbolov.

Simboli in besede

Preglednost teksta

(npr. daljše formule ali enačbe pišemo v svoji vrstici).

Opis korakov reševanja.

Besedni ali simbolni zapis?

Jezikovna dimenzija matematike

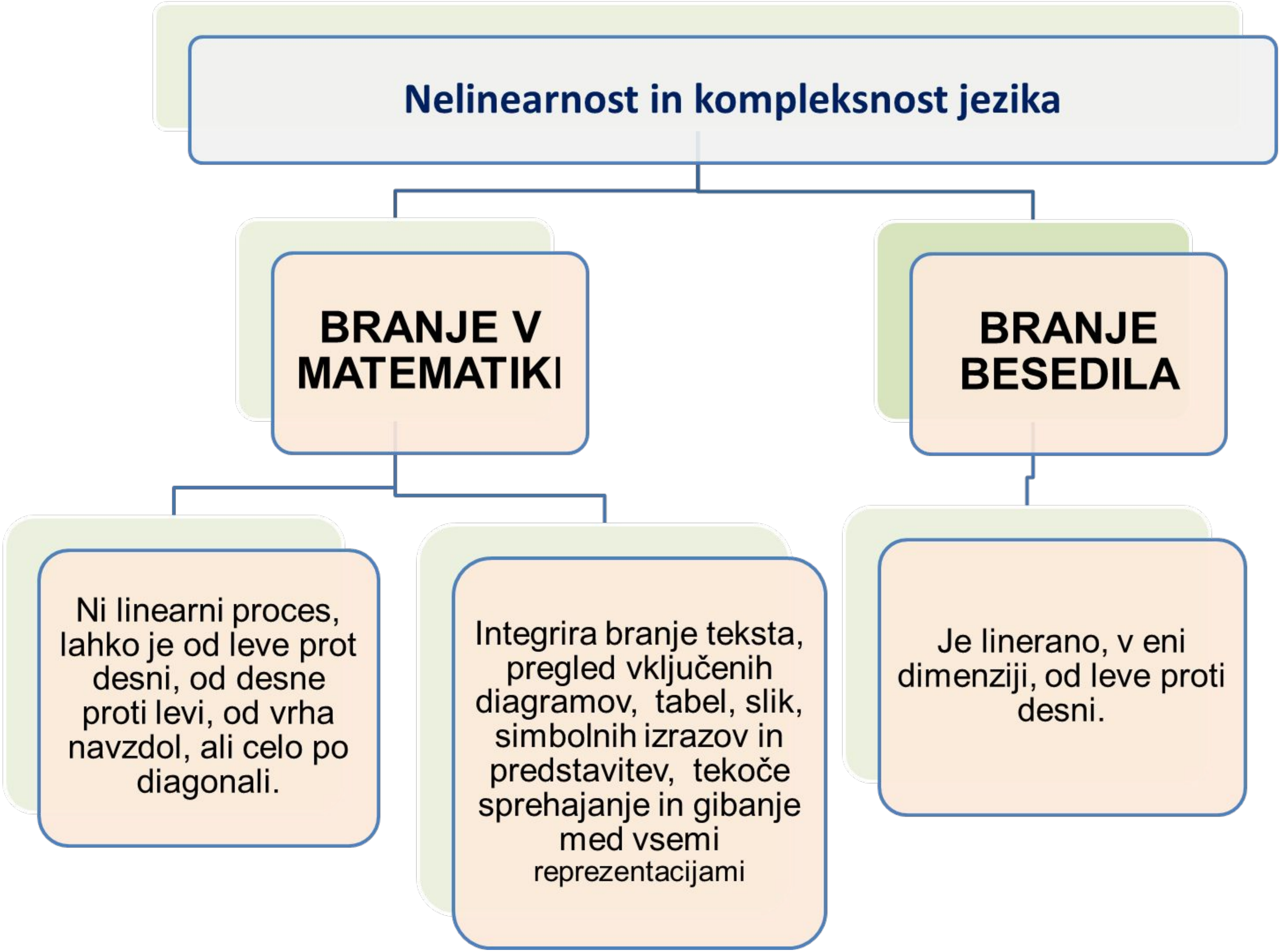
Ugotovitve nekaterih raziskav kažejo, da pri matematiki branje, pisanje in **ustno sporočanje** pogosteje razumemo in uporabljamo predvsem kot sredstva za

- pridobivanje matematičnih informacij za rešitev problema (iz besedil) ter
- kot načine izkazovanja znanja pri matematiki;

bistveno manj pa so dejavnosti branja in pisanja ter govorjenja usmerjene

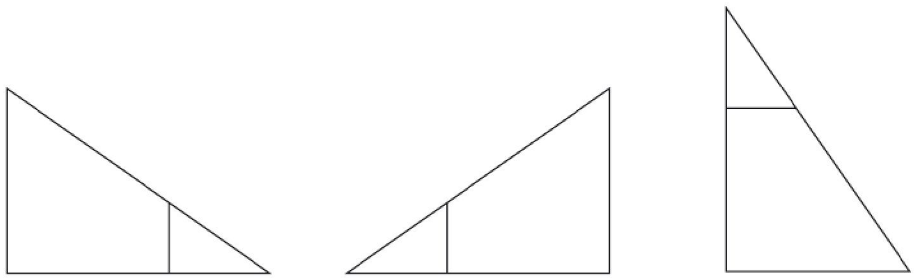
- v izražanje matematičnih idej,
- v interpretativno branje matematičnega besedila idr. (Kwaku Adu-Gyamfi, 2014).

Ker se matematika zelo pogosto **predstavlja v simbolnem jeziku**, se zlasti ustna komunikacija ne prepoznava kot pomembna dejavnost matematičnega izobraževanja (The National Council of Teachers of Mathematics,1996).


Nelinearnost in kompleksnost jezika
BRANJE V MATEMATIKI
BRANJE BESEDILA
Ni linearni proces, lahko je od leve prot desni, od desne proti levi, od vrha navzdol, ali celo po diagonali.
Integrira branje teksta, pregled vključenih diagramov, tabel, slik, simbolnih izrazov in predstavitev, tekoče sprehajanje in gibanje med vsemi reprezentacijami
Je linerano, v eni dimenziji, od leve proti desni.

Nelinearnost in kompleksnost jezika

Naloga: (TIMSS, povzeto po B. Japelj)



slika 1 slika 2 slika 3

Kateri od naslednjih transformacij, v navedenem vrstnem redu, lahko uporabimo, da slika 1 postane slika 2 in nato slika 3?

Ⓐ zrcaljenje in nato premik

Ⓑ zrcaljenje in nato $\frac{1}{4}$ obrata v smeri urnega kazalca

Ⓒ $\frac{1}{2}$ obrata in nato premik

Ⓓ $\frac{1}{4}$ obrata v smeri, nasprotni urnemu kazalcu, in nato zrcaljenje

- Branje matematičnega besedila pogosto ni linearni proces: gibanje med reprezentacijami od leve proti desni, od vrha navzdol in obratno, prehod od slik k besedilu; integrira branje **teksta, pregled vključenih slik**, **simbolov**.
- Potrebna je visoka koncentracija in vzdrževanje slik v spominu in ustvarjanje predstave problema v mislih (npr. **kaj se zgodi z likom po vsaki opisani transformaciji).**
- V pomoč si učenec lahko nariše skice za vsak možni odgovor.

Primer: nelinearnost in kompleksnost jezika
(Nacionalno preverjanje znanja, 2010)

Storitev		Cenik storitev v evrih		
		Ponudnik A	Ponudnik B	**Ponudnik C**
a	Mesečna naročnina	5,20	5,15	**5,09**
b	Klici v izbranem omrežju (cena za minuto pogovora)	0,05	0,07	**0,06**
c	Klici v druga mobilna omrežja (cena za minuto pogovora)	0,20	0,16	**0,18**
d	Klici v stacionarna omrežja (cena za minuto pogovora)	0,20	0,18	**0,20**
e	**Sporočila (SMS, MMS) (cena za eno sporočilo)**	**0,10**	**0,08**	**0,11**

Mobilni telefon
Kaja v povprečju mesečno opravi 200 minut pogovora v izbranem omrežju, 100 minut pogovora v druga mobilna omrežja, 50 minut pogovora v stacionarna omrežja in pošlje 60 sporočil.

- Kateri ponudnik ima najnižjo mesečno naročnino?
- Katerega ponudnika naj izbere, da bo za svojo mesečno uporabo plačala najnižjo ceno?
- Zapiši izraz za izračun Kajinih stroškov, če za storitve uporabiš oznake iz prvega stolpca preglednice.

Nelinearnost in kompleksnost jezika

- Reševanje naloge zahteva **nelinearno** branje podatkov iz besedila in tabele.
- Pri procesu reševanja **se gibljemo od vrha navzdol in nasprotno**, od besedila k tabeli in nazaj.
- Branje in reševanje naloge integrira branje teksta, pregled in branje tabele, izbiro pravih podatkov v tabeli, zapisovanje številskih in algebrskih izrazov idr.

Primer: nelinearnost in kompleksnost jezika
(Nacionalno preverjanje znanja, 2010)

	Storitev	Cenik storitev v evrih		
		Ponudnik A	Ponudnik B	**Ponudnik C**
a	Mesečna naročnina	5,20	5,15	**5,09**
b	Klici v izbranem omrežju (cena za minuto pogovora)	0,05	0,07	**0,06**
c	Klici v druga mobilna omrežja (cena za minuto pogovora)	0,20	0,16	**0,18**
d	Klici v stacionarna omrežja (cena za minuto pogovora)	0,20	0,18	**0,20**
e	**Sporočila (SMS, MMS) (cena za eno sporočilo)**	**0,10**	**0,08**	0,11

Mobilni telefon

Kaja je dobila nov mobilni telefon in odloča se, katerega operaterja naj izbere, da bodo povprečni mesečni stroški uporabe telefona najnižji. Kaja v povprečju mesečno opravi 200 minut pogovora v izbranem omrežju, 100 minut pogovora v druga mobilna omrežja, 50 minut pogovora v stacionarna omrežja in pošlje 60 sporočil. Na internetu je našla podatke o ponudnikih storitev, ki jih prikazuje tabela.

Primer: nelinearnost in kompleksnost jezika
(Nacionalno preverjanje znanja, 2010)

	Storitev	Cenik storitev v evrih		
		Ponudnik A	Ponudnik B	**Ponudnik C**
a	Mesečna naročnina	5,20	5,15	**5,09**
b	Klici v izbranem omrežju (cena za minuto pogovora)	0,05	0,07	**0,06**
c	Klici v druga mobilna omrežja (cena za minuto pogovora)	0,20	0,16	**0,18**
d	Klici v stacionarna omrežja (cena za minuto pogovora)	0,20	0,18	**0,20**
e	**Sporočila (SMS, MMS) (cena za eno sporočilo)**	**0,10**	**0,08**	**0,11**

Kateri ponudnik ima najnižjo mesečno naročnino?

Katerega ponudnika naj izbere, da bo za svojo mesečno uporabo plačala najnižjo ceno?

Zapiši izraz za izračun Kajinih stroškov, če za storitve uporabiš oznake iz prvega stolpca preglednice.

Nelinearnost in kompleksnost jezika

- Reševanje naloge zahteva **nelinearno** branje podatkov iz besedila in tabele.
- Pri procesu reševanja **se gibljemo od vrha navzdol in nasprotno**, od besedila k tabeli in nazaj.
- Ko beremo podatke v tabeli, jih beremo od leve proti desni ali od desne proti levi, od vrha navzdol ali nasprotno idr., saj je pri reševanju treba smiselno povezati prave podatke, ki jih dobimo iz besedila in tabele.
- Branje in reševanje naloge integrira branje teksta, pregled in branje tabele, izbiro pravih podatkov v tabeli, zapisovanje številskih in algebrskih izrazov idr.
- Pri zadnjem vprašanju je potreben še algebrski zapis rešitve, kar kompleksnost problema še poveča.

Povezava učenja in poučevanja z jezikovno dimenzijo matematike

- Namen konteksta v nalogi Mobilni telefon: Kontekst kot uporaba matematike v življenjskih problemih.
- Značilnost jezika v nalogi:
  - Nelinearnost in kompleksnost jezika
  - Branje integrira
    - branje teksta, pregled tabele
    - uporaba simbolov
    - tekoče sprehajanje in gibanje med vsemi reprezentacijami.

Pisanje pri matematiki ne pomeni zgolj napisati odgovor k besedilni nalogi.

Kombinacija besed in simbolnega jezika

(Dr. Kevin P. Lee v A Guide to Writing Mathematics)

- Sintaksa, semantika jezika
  - $3xy = 2$ je stavek
    $5x2z - 10y$ *ni stavek*
    .....
  - Dosledna in pravilna uporaba simbolov
- Simboli in besede
  - Preglednost teksta
    (npr. formule v svoji vrstici)
  - Opis korakov reševanja
    Besedni ali simbolni zapis?

Kako spodbujati razvoj branja, pisanja in ustnega sporočanja pri matematiki?

Kako spodbujati razvoj branja, pisanja, poslušanja in ustnega sporočanja pri matematiki?

Bratina in Lipkin (2003, str. 3-12) sta oblikovala priporočila, ki naj bi jih učitelji matematike vključili pri pouku:

- vključiti posebne jezikovne dejavnosti;
- opozoriti na besede, ki imajo v matematiki drugačen pomen kot v vsakdanjem življenju ali različne pomene znotraj matematike*;*
- poudarjati natančno rabo jezika;
- ustvarjati situacije za ocenjevanje učenčevih sposobnosti komuniciranja;
- spremljati napredek učencev;
- dovolj časa in priložnosti nameniti izražanju;
- podpirati vztrajnost.

Kako spodbujati razvoj branja, pisanja, poslušanja in ustnega sporočanja pri matematiki?

- Ediger (1997) predlaga, da naj si učenci delajo **matematični slovarček** izrazov, tako da izraze opredeliji s svojimi besedami ter le te ponazorijo s konkrtenimi ter semi-konkretnimi primeri, ki jim pomagajo povezati pomen abstraktnih in simbolnih izrazov.

- Učenci naj samostojno **oblikujejo besedilo problema** oz. problem.

- Učenci izrazijo **problem s svojimi besedami** (Hollanfder, 1990).

- Učenci samostojno navajajo **primere oz. protiprimere**, utemeljujejo, dokazujejo, samostojno oblikujejo probleme, interpretirajo matematična dejstva/ugotovitve idr..

Izražanje matematičnih idej

- Preiskovanje in predstavitev
- Povezovanje obstoječega znanja – poti do novih ugotovitev
- Samostojno oblikovanje matematičnega problema
- Izražanje razumevanja na ustvarjalen način
- Interpretiranje matematičnih definicij, izrekov.
- Interpretativno branje matematičnih besedil

Primer: Samostojno <u>navajanje primerov oz. protiprimerov</u>
(preverjanje pojma odvisni količini)

Preverjanje pojma pri **samostojnem navajanju primerov, izražanje** matematičnih dejstev.

***Primer**: Zapiši, katere količine so med seboj odvisne in katere neodvisne. Napiši nekaj primerov.*

Uspeh: 26 %

Preverjanje pojma pri **analiziranju dane situacije**

***Primer**: Obkroži črko pred parom količin, ki sta med seboj odvisni.*

A višina človeka in barva njegovih oči

B obseg pravokotnika in ploščina pravokotnika

C masa kruha in cena kruha

D število doseženih točk pri testu in ocena na testu

E največja dovoljena hitrost na cesti in znamka avtomobila

F prostornina kocke in dolžina diagonale kocke

Uspeh: 60 %

Primer: Samostojno **oblikovanje matematičnega problema**

Ta tehnika je usmerjena v **uporabo** znanih matematičnih definicij, izrekov, enačb idr., v **analizo** matematičnih situacij, **v ustvarjalno razmišljanje, izražanje matematičnih idej**.

Primer: Oblikuj realistični problem, katerega rešitev bo rešitev enečbe: $3x + 12 = 5x$.

Primer: Samostojno **oblikovanje matematičnega pro**blema

Ta pristop je usmerjen v uporabo znanih matematičnih definicij, izrekov, enačb idr., v analizo matematičnih situacij, **v ustvarjalno razmišljanje, izražanje matematičnih idej.**

Primer: Oblikuj realistični problem, katerega rešitev bo rešitev enečbe:

$3x + 12 = 5x$.

Primer: Samostojno **oblikovanje matematičnega pro**blema

Ta pristop je usmerjen v uporabo znanih matematičnih definicij, izrekov, enačb idr., v analizo matematičnih situacij, v ustvarjalno razmišljanje, izražanje matematičnih idej.

Primer: Oblikuj realistični problem, katerega rešitev bo rešitev enečbe:

$3x + 12 = 5x$.

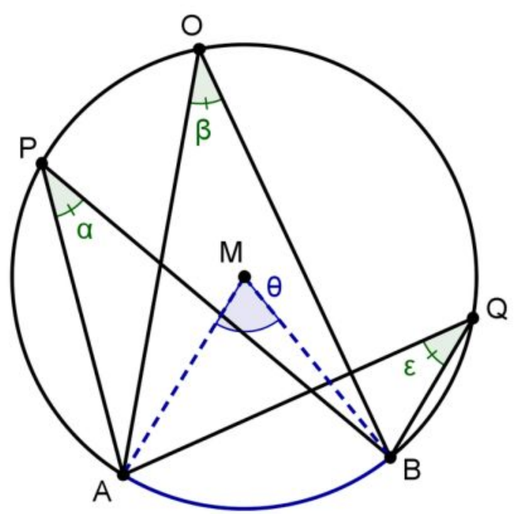
Maj in Vid sta varčevala denar za nakup računalniške igrice. Jan ima 12 evrov, namerava pa vsak teden privarčevati 3 evre. Vid trenutno nima še nič denarja, namerava pa vsak teden privarčevati 5 evrov. Če se bosta oba varčeval tako, kot sta se dogovorila, kdaj bosta imela enako denarja?

Primer: **Interpretiranje** matematičnih definicij, izrekov.

Pri tem pristopu učenci prepoznavajo matematične koncepte, ideje, izreke **prek grafičnih predstavitev** ali v matematičnih besedilih in **jih nato ubesedijo** (Borasi et al, 1998).

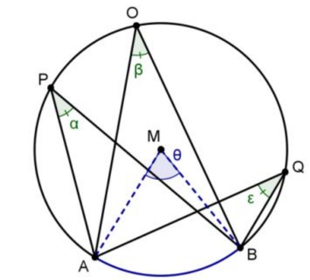
Pristop združuje prepoznavanje matematičnih konceptov, zakonitost idr. in **formalno ter kreativno matematično pisanje in izražanje** .

Primer: Napišite izrek, ki ga prikazuje slika.



Interpretiranje matematičnih definicij, izrekov.

Pristop i**nterpretiranje matematičnih definicij, izrekov** združuje **formalno in kreativno matematično pisanje in izražanje** .



Napišite izrek, ki ga prikazuje slika.

Odgovor: Izrek o središčnm in obodnem kot

•da so vsi obodni koti nad istim lokom med sabo skladni: $\alpha = \beta = \varepsilon$

in

•da je središčni kot dvakrat večji od obodnega kota nad istim lokom: $\theta = 2\alpha$

Primer: Interpretiranje matematičnih besedil

Za pridobivanje izkušenj z interpretiranjem matematičnih besedil je lahko učinkovito **tudi branje kratkih zahtevnih besedil**, pri katerih učenci **interpretirajo besedilo z vidika matematike** (besedno in/ali na slikovni/grafični ravni).

Med takšna besedila lahko spadajo **definicije in preprosti izreki** v matematiki, ki naj jih učenci ne bi znali na pamet, ampak bi jih morali biti **sposobni prebrati in si na konkretnem primeru predstavljati,** kaj pomenijo.

Primer: Trditev »*Presečišče simetral katerih koli dveh nevzporednih tetiv kroga je središče kroga*.«

lahko predstavijo s sliko/grafično in zraven glasno interpretirajo/razlagajo situacijo.

Razvijanje matematičnega jezika skozi branje, pisanje, poslušanje in ustno sporočanje

Pogosteje uporabljamo predvsem kot sredstva za

- *Pridobivanje matematičnih informacij za rešitev problema (iz besedil) ter*
- *kot načine izkazovanja znanja pri matematiki,*

Redkeje uporabljamo za

- *Artikulacijo matematičnega razumevanja,*
- *Za izražanje matematičnih idej,*

  za Interpretativno branje matematičnega besedila

Metode za razvijanje ustvarjalnosti pri pouku slovenščine, ki pa so lahko s primernimi prilagoditvami uporabne tudi pri drugih predmetih (Petač (2011)

- metoda pogovora, diskusije;
- monološka metoda oz. metoda samostojnega pisanja, ustvarjanja, pripovedovanja,
- metoda poročanja
- metoda dela z besedilom, kamor sodijo tiho branje, glasno interpretativno branje ter analiziranje besedila,
- metoda pisnih izdelkov, kamor sodijo pisanje ustvarjalnih in polustvarjalnih besedil,
- motoda vodenja, kjer im učitelj vlogo spobujevalca oz. mentorja svojim učencem. Odnos ni avtoritaren temveč demokratičen.

Razvijanje besedišča/strokovnega jezika

- **matematično mišljenje**
  - **besedna fluentnost**
    Petač (2011)
    - Je sposobnost lahkotnega produciranja besed, fluentnost izražanja spodbujamo z vajami, pri katerih učenci dopolnjujejo besede z izbranimi besedami ter
    - s številnimi vajami za bogatitev besedišča in povezovanje besed v smiselne povedi.
  - **fleksibilno oz. prožno mišljenje**
    Petač (2011)
    - je sposbnost lahkotnega menjavanja strategij v mišljenju (Pogačnik, 1995: 171).

Razvijanje besedišča/strokovnega jezika
Frayerjev model

Frayerjev model je **učna aktivnost, ki temelji na kategorizacji besed**, namenjena razvijanju/poglabljanju **razumevanja pojmov**.

- Učenci oblikujejo definicijo, navedejo značilnosti in našteje nekaj primerov, kaj koncept **JE** in kaj koncept **NI**.

Frayerjev model

Definicija (z lastnimi besedami)	**Značilnosti**
BESEDA	
Primeri	**Proti-primeri**

Frayerjev model za pravilni n--kotnik

Definicija (z lastnimi besedami)	**Značilnosti**
Pravilni n -kotnik je n -kotnik s skladnimi stranicami in skladnimi notranjimi koti.	Vse stranice so enako dolge. Vsi koti so med seboj skladni. Dva pravilna *n*-kotnika sta vedno podobna; če imata enako dolgi stranici ($a' = a$), sta tudi skladna. Pravilni mnogokotnik je konveksen ali pa je zvezdni mnogokotnik.

Pravilni n -kotnik

Primeri	**Proti-primeri**
enakostranični trikotnik kvadrat	romb pravokotni trikotnik pravokotnik (a < b)

Primer: Od neformalne do formalne ravni pojmovne predstave *KVADER*

neformalne pojmovne predstave

Kaj je kvader?

Npr. omara je primer kvadra (se nanaša na konkretne primere)

predformalne pojmovne predstave

Kaj je kvader?

Npr. omara je kvader, ker ima 6 ploskev, po dve in dve sta skladna in vzporedna pravokotnika.

formalne pojmovne predstave

Kaj je kvader?

Kvader je oglato geometrijsko telo, ki ga omejuje šest mejnih ploskev. Po dve in dve mejni ploskvi sta skladna in vzporedna pravokotnika

Kako spodbujati razvoj branja, pisanja in ustnega sporočanja pri matematiki?

(Borasi & Rose (1989); (Negotov, 1992); (Clarke, Negotov, & Stephens, 1993)

1. Splošne veščine

Pisanje člankov.

Pojasnjevalno ali razlagalno pisanje.

Pisanje strokovnih ocen in recenzij.

Vrstniško ocenjevanje.

Dvostopenjski test.

Porfolio.

Pisanje člankov.

2. Dejavnosti, ki razvijajo /ugotavljajo globino učenčevega razumevanja

Raziskovanje, analiziranje, dokazovanje, pojasnjevanje,

intepretiranje,

interpretativno branje, povezovanje idr.

Zančilnosti dejavnosti:

Ustvarjalnost, izražanje razumevanja na ustvarjalen način,

širjenje besedišča, uvid v razumevanje matematičnih dejstev in konceptov.

Glasno interpretativno branje vzpodbuja bralno kulturo, hkrati pa je tudi lepa priložnost za navajanje učencev na aktivno poslušanje.

Vrstniško ocenjevanje.

Učenci napišejo strokovno oceno na predstavitev izdelka sošolca na določeno matematično nalogo ali vprašanje.

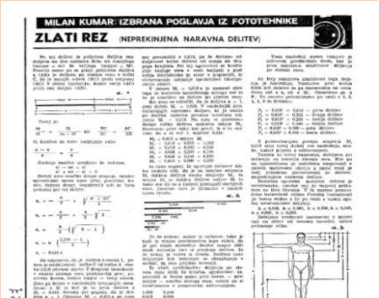
Ta tehnika ocenjevanja omogoča spremljanje znanja vseh: **učencev, ki so ocenjevani kot tistih, ki ocenjujejo**, postavljajo vprašanja, berejo, interpretirajo svoje lastne ideje in ideje vrstnikov.

Dvostopenjski test

K povratni informaciji, ki jo **prejmejo učenci od učiteljev** o preizkusih in nalogah, učenci sami napišejo komentarje na učiteljevo oceno.

Portfolijo

Se že dolgo spodbuja kot orodje za ocenjevanje in vpogeld v učenčevo učenje. Portfolijo omogoča učencu s pomočjo namensko izbranih izdelkov dokumentirati njegovo delo, njegovo razumevanje in



Pisanje člankov je mogoče uporabiti za spodbude učencem, da pišejo o specifičnih temah (npr. zgodovina matematike, simetrija v naravi, zlati rez, matematiki v vsakdanjem življenju …).

Prav tako se lahko uporablja kot orodje za učence, da reflektirajo vsebino, ki so se je učili, refleksijo na prebrano, na učno temo ali odprte probleme.

Namesto zaključka

V povezavi s pristopi učenja in poučevanja, ki upoštevajo značilnosti *„Od neformalnega do formalnega učenja matematike“,* matematične dejavnosti premišljeno *dopolnjujemo z jezikovno dimenzijo matematike*, ki jo celostno razvijamo skozi vse štiri sporazumevalne dejavnosti: branje, pisanje, poslušanje in govorjenje.

HVALA ZA POZORNOST.

Zaključek

Učencem bomo lahko v veliki meri pomagali spoznati, razumeti, usvojiti in funkcionalno uporabljati matematiko, če jih bomo vodili skozi učni proces postopoma,

od neformalnega, predformalnega in do formalnega učenja,

pri čemer matematične dejavnosti premišljeno **doponjujemo z jezikovno dimenzijo matematike**,

ki jo celostno razvijamo skozi vse štiri sporazumevalne dejavnosti: branje, pisanje, poslušanje in govorjenje.