Poučevanje matematike na razredni stopnji v luči sodobnih raziskav

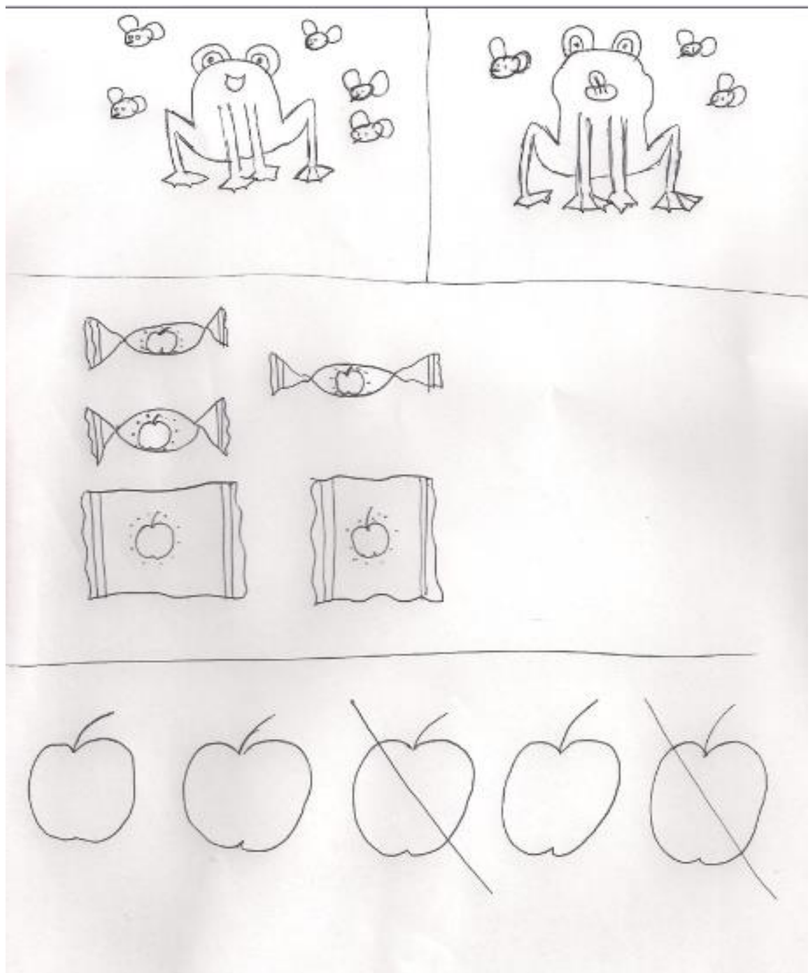
Tatjana Hodnik Čadež
Pedagoška fakulteta UL

Vsebina

- Razumevanje matematike v povezavi s prehajanjem med reprezentacijami matematičnih pojmov
- Različne vloge reprezentiranja
- Učitelj kot raziskovalec in akter sprememb pri poučevanju in učenju matematike

Razumevanje matematike in reprezentacije

- Reprezentacija je v prvi vrsti nekaj, kar stoji namesto nečesa drugega.
- Pri vsaki reprezentaciji moramo opredeliti: (1) reprezentirajoči svet, (2) svet, ki ga reprezentirajoči svet reprezentira, (3) kateri vidiki so reprezentirani, (4) kateri vidiki reprezentirajočega sveta reprezentirajo ter (5) **povezavo med svetom, ki ga reprezentira, in reprezentirajočim svetom.**



- Notranje reprezentacije, poznamo jih tudi pod izrazom kognitivne reprezentacije (Palmer, 1978), razumemo kot miselne predstave, ki so običajno osnovane na zunanjih reprezentacijah. Kognitivni razvoj temelji na dinamičnem procesu prepletanja miselnih predstav in okolja (Karmiloff-Smith, 1992).
- **Uspešno učenje je aktivno oblikovanje znanja v procesu interakcij med zunanjimi in notranjimi reprezentacijami.**

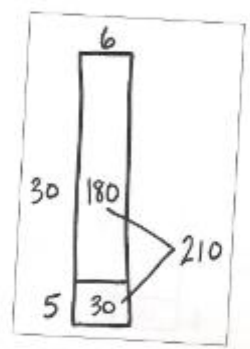
- Pouk matematike, **ki temelji na raziskovanju različnih reprezentacij določenega matematičnega pojma** in spodbuja učence, da tekoče in fleksibilno prehajajo med temi različnimi reprezentacijami, je bolj učinkovit in omogoča učencem boljše razumevanje matematičnih pojmov, kot pouk, ki tega ne omogoča (Duval, 2002; Griffin in Case, 1997; Kaput, 1989; Bieda in Nathan,2009; Heinze et al, 2009).

- Novejše raziskave kažejo, da so bolj kot zaporedje reprezentacij (Bruner (1966): najprej enaktivna, nato ikonična in nazadnje simbolična) pomembne relacije med reprezentacijami določenega matematičnega pojma (Chapman, 2010).
- Eisner (2004) poudarja pomen različnega reprezentiranja idej pri kreiranju razumevanja, ki se nadgradi v kreiranju novega/drugačnega razumevanja izbranega matematičnega pojma.

Primeri raziskav reprezentacij distributivnostnega zakona

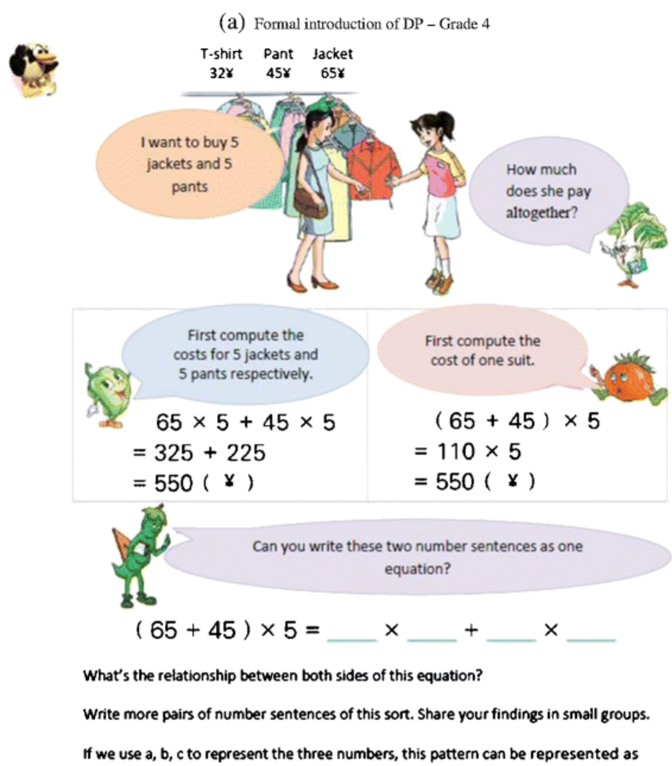
Fosnot, Dolks (2001)

1. ‘Mini lessons’: 5x6, 30x6, 35x6; 2x7, 40x7, 42x7
2. Ploščina prakovotnika



3. Raziskava Ding in Li (2014): 319 različnih reprezentacij distribut. zakona (besedilne naloge, grafične reprezentacije, simbolne). Vprašanje: katere spodbujajo prehod od konkretnih na abstraktne?

Primer ponazoritve prehoda med reprezentacijami – primerjanje rezultatov



Ugotovitve Ding, Li (2014):

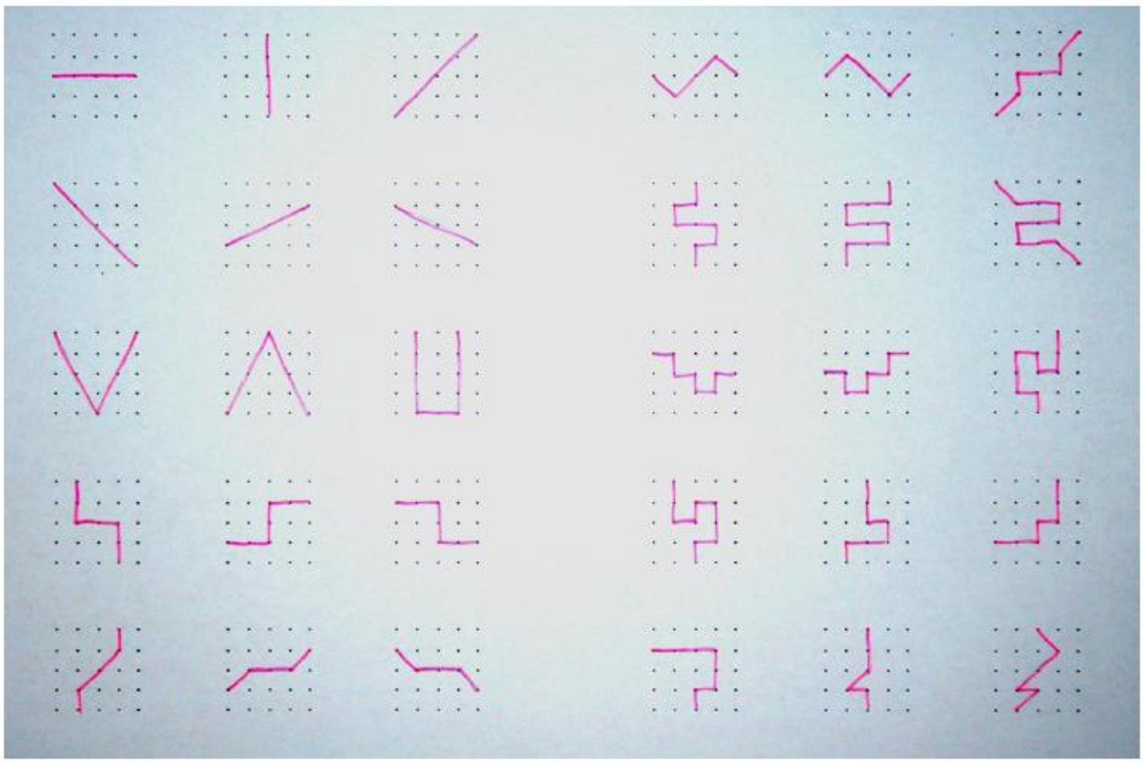
- Ponoven razmislek o pomenu besedilnih nalog oz. njihovi vlogi pri učenju. Te učencem pomagajo, da osmislijo abstraktne matematične ideje (Gerofsky, 2009; Palm, 2008 v Ding, Li, 2014).
- Pomembno vlogo pri razumevanju idej imajo besedilne naloge, ki neposredno ciljajo na matematično idejo, brez nepotrebnih oz. odvečnih zahtev v nalogi, ki bi učencem povzročale t.i. kognitivne težave.
- Pomen reprezentiranja, ki temelji na primerjanju npr. rezultatov, kot pomoč pri 'reprezentacijski tranziciji'.

Vloge reprezentiranja

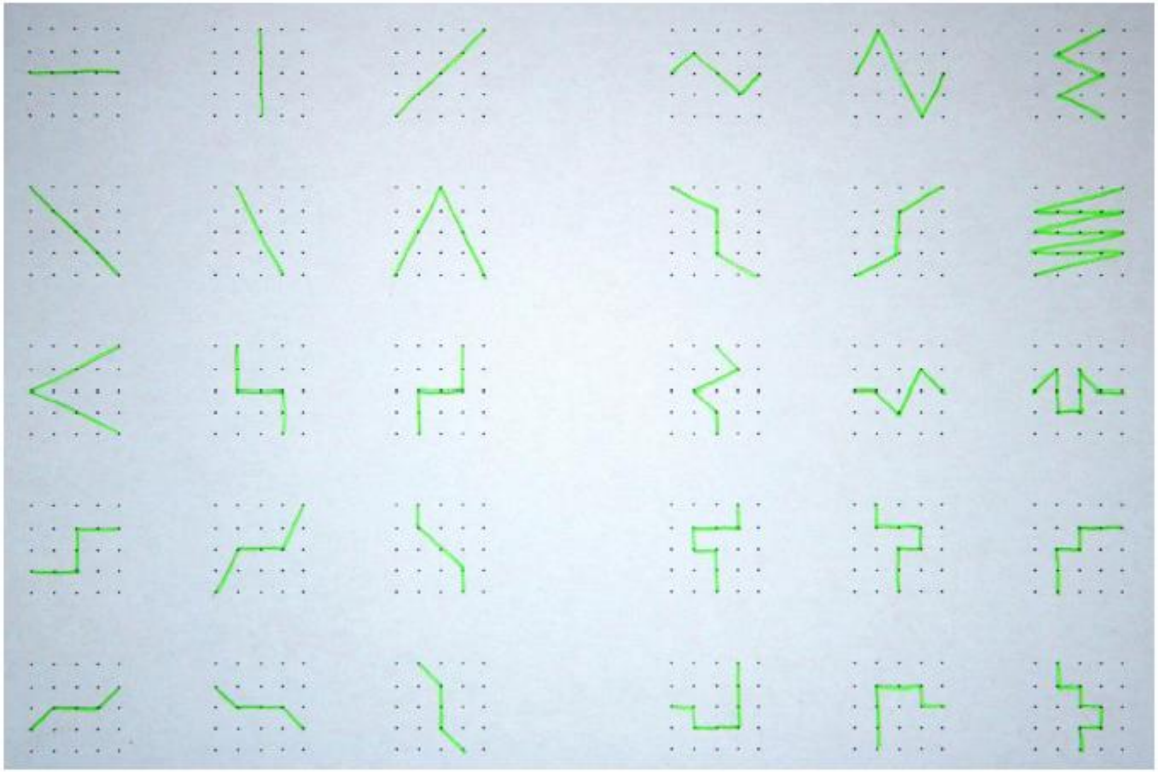
- način mišljenja (interpretiranje reprezentiranega, notranje reprezentacije),
- način zapisovanja, predstavljanja idej (reprezentiranje razmišljanja),
- sredstvo komunikacije (npr. razlagalna vloga) (Chapman, 2010).

I. Reprezentiranje razmišljanja

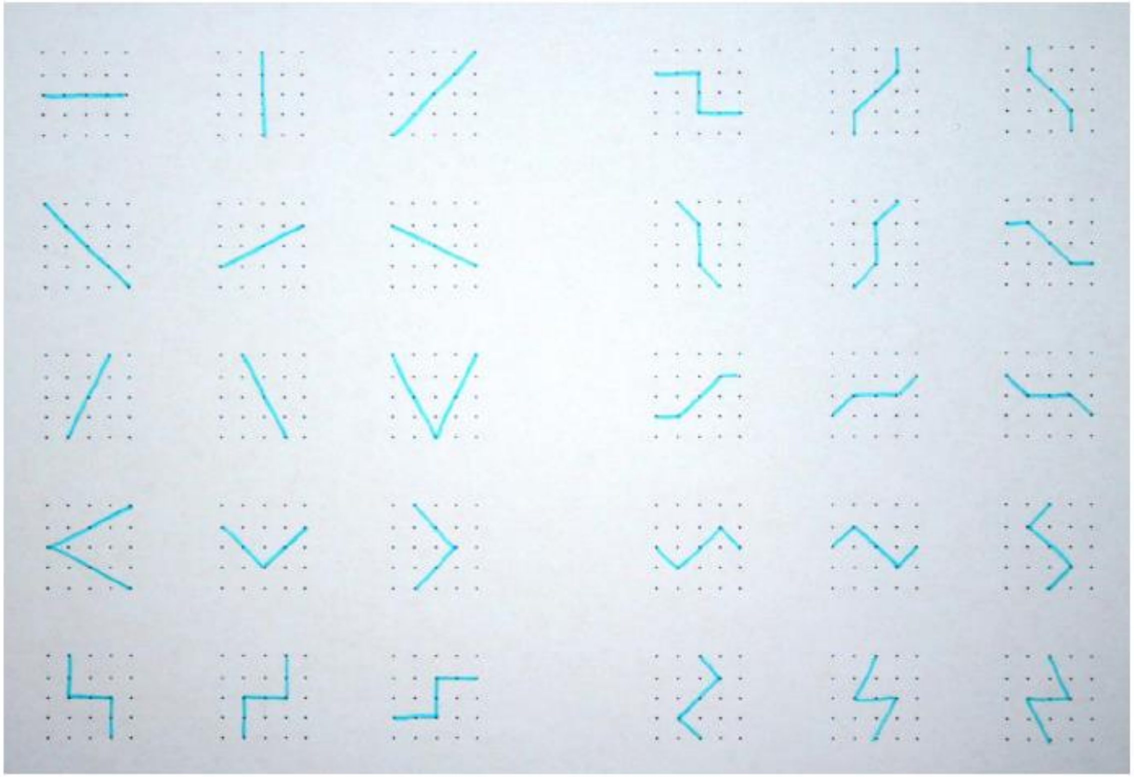
Primeri reprezentiranja polovice na geoplošči, L. Gačnik, 2013, diplomsko delo, PeFprints



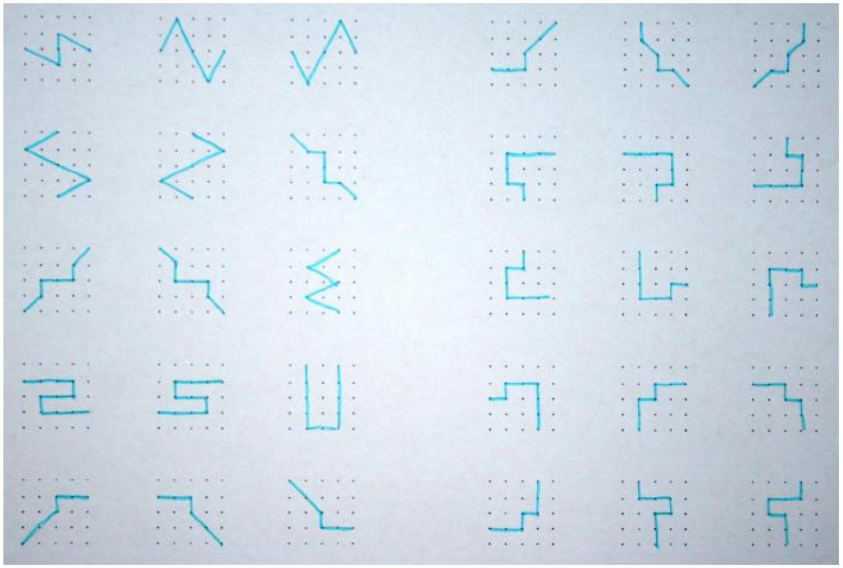
SLIKA 17: *Vse različne rešitve učencev 3. razreda*



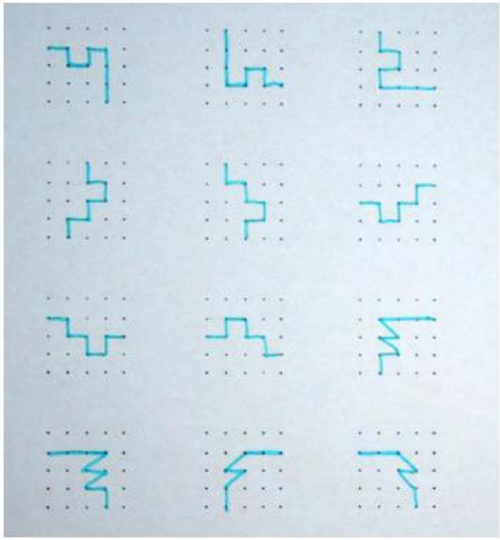
SLIKA 18: *Vse različne rešitve učencev 4. razreda*



SLIKA 19: *Različne rešitve učencev 5. razreda – 1. del*



SLIKA 20: *Različne rešitve učencev 5. razreda – 2. del*



SLIKA 21: *Različne rešitve učencev 5. razreda – 3. del*

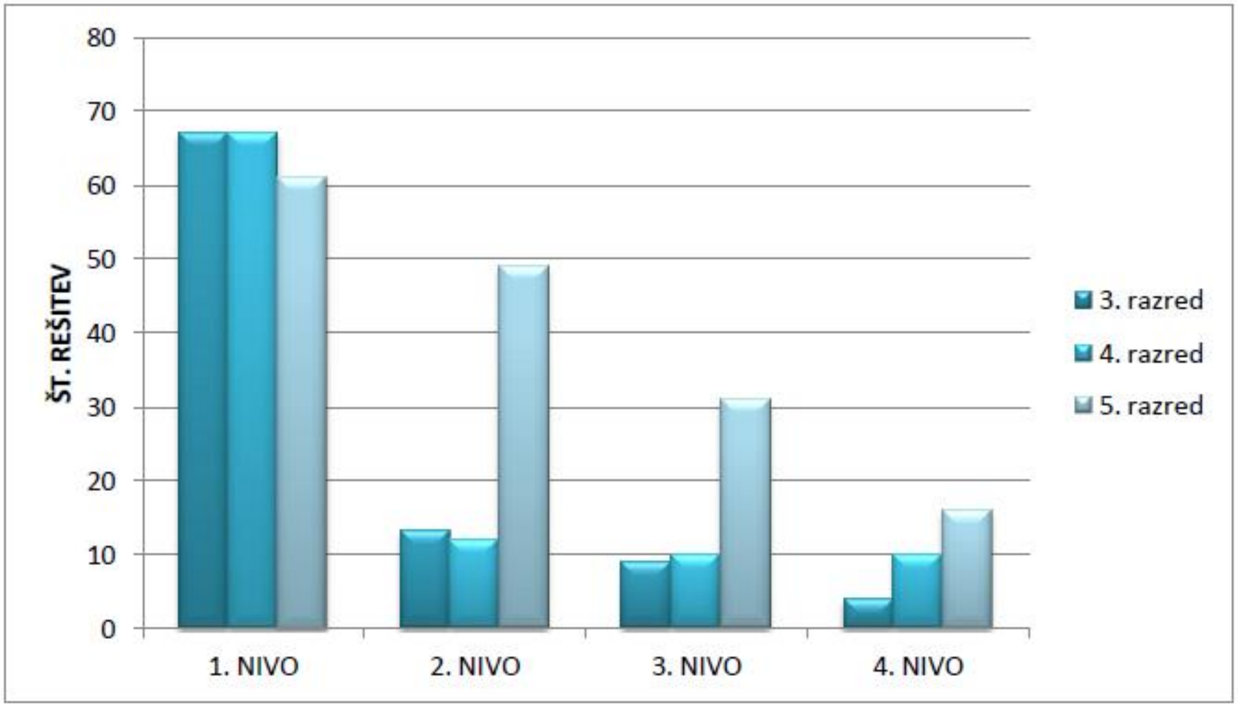
Na podlagi vključenosti teh dveh vrst poti v rešitev problema smo le-te razvrstili v 4 NIVOJE:

1. NIVO: Nelomljena črta, ki je sestavljena le iz poti tipa *žebljiček – sosednji žebljiček*.

2. NIVO: Lomljena črta, ki je sestavljena iz vodoravnih in/ali navpičnih poti tipa *žebljiček – sosednji žebljiček*.

3. NIVO: Lomljena črta, ki je sestavljena iz poti tipa *žebljiček – sosednji žebljiček*, od katerih vsaj ena poteka diagonalno.

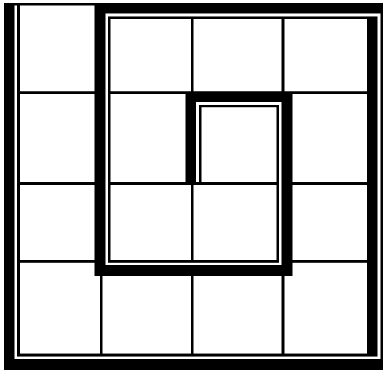
4. NIVO: Črta, ki vsebuje vsaj eno pot tipa *žebljiček – nesosednji žebljiček*.



GRAF 1: *Prikaz števila rešitev 1. naloge učencev 3., 4. in 5. razreda z vidika 1. kriterija*

Reprezentiranja razmišljanja pri reševanju

1. Problem s ‘spiralo’ (Hodnik Čadež, Slapar, Manfreda Kolar, 2012)



- Simbolni zapisi posplošitev za dolžino ‘spirale’, ki temeljijo na interpretaciji grafičnih repezentacij:

$(n+1)^2 – 1$;

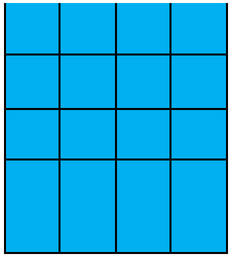
$n(n+2)$;

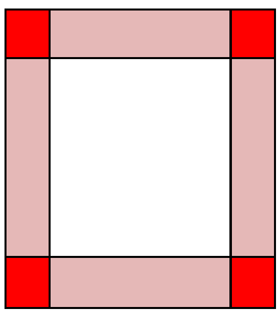
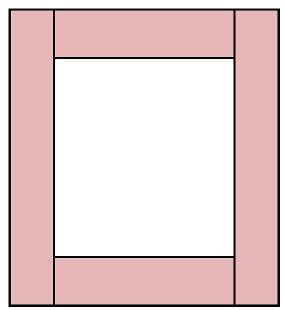
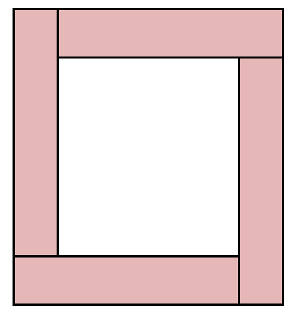
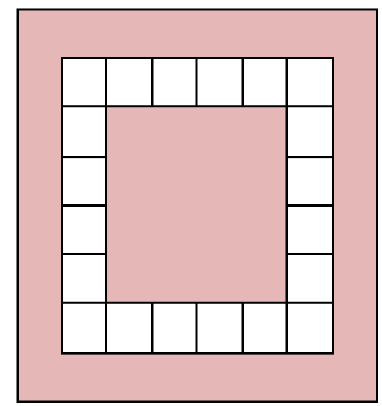
$n^2 + 2n$;

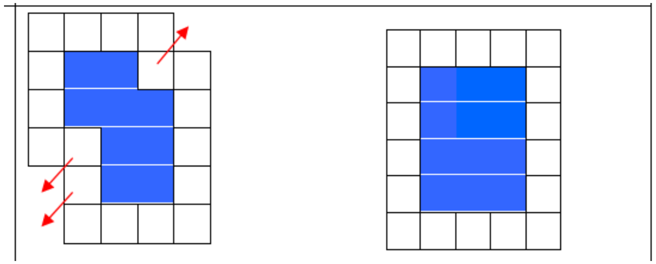
$3n + 2(n-1) – 2(n-2) ...+ 2x2 + 2x1$;

$4n + n(n-2)$

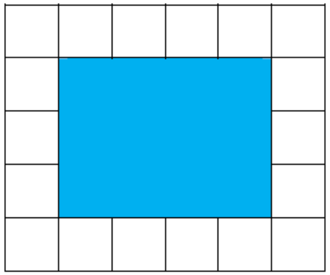
2. Tlakovanje okrog bazena (Hodnik Čadež, Manfreda Kolar, 2014)



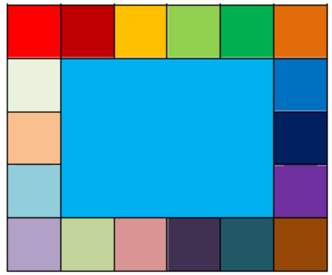
			
$4a + 4$	$2(a + 2) + 2a$	$4(a + 1)$	$(a+2)^2 - a^2$



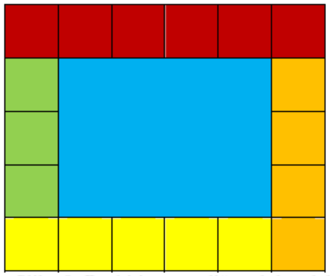
Primeri reševanja problema s tlakovanjem (M. Berus, 2013, diplomsko delo, učenci - petošolci, PeFprints)



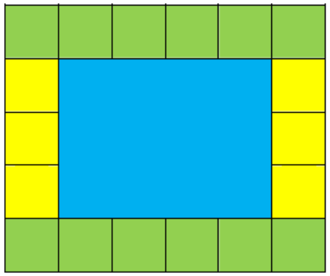
Slika 7: Ribnik številka 1



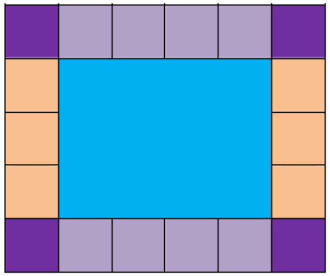
Slika 8: Način štetja ploščic pri prvem ribniku



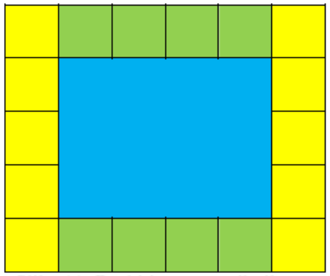
Slika 9: Razbitje na različno dolge dele pri prvem ribniku



Slika 10: Razbitje prvega ribnika na po dve enako dolgi stranici (prvi način)



Slika 12: Način prištevanja vogalov pri prvem ribniku



Slika 11: Razbitje prvega ribnika na po dve enako dolgi stranici (drugi način)

PRIKAZ RAZPOREDITVE POSAMEZNIH STRATEGIJ

Strategija	Preštevanje	Razbitje stranic		Prištevanje vogalov
		Na različno dolge dele	Po dve enako dolgi stranici	
Število učencev	8	2	6	4
Delež učencev (%)	40	10	30	20

Preglednica 4: Razporeditev uporabljenih strategij za prvi ribnik

II. Razlagalna vloga reprezentacij

1. Zunanje reprezentacije so lahko strukturirane ali nestrukturirane

Primer: Dienesove plošče – strukturiran material

- Obseg matematičnega znanja kot osnova za uporabo didaktičnega materiala (npr. Dienesove plošče oz. desetiške enote, neenotnost raziskav na tem področju: Labinowicz (1985), Fuson in Briars (1990), Thompson (1992), Resnick in Omanson (1987), Gravemeijer (1991)…)

- Resnick in Omanson (1987) sta ugotovila, da so bili učenci, ki so uspešno rokovali z Dienesovimi ploščami, neuspešni pri pisnem seštevanju. Prav tako so učenci, ki so pokazali najboljše rezultate pri odštevanju z Dienesovimi ploščami, najslabše reševali naloge pisnega odštevanja.

- Odziv RME na Nizozemskem (Anghileri, 2001):

Za učence je bolj ustrezno, da obravnavajo število v celoti in ne ločeno po posameznih desetiških enotah.

Primer 165 : 12

Učenec najprej zapiše nekatere večkratnike števila 12: 5 x 12 = 60, 10 x 12 = 120, 2 x 12 = 24…) in nato te večkratnike odšteva od deljenca.

- 165 : 12 = 13

-120	10
45	
- 24	2
21	
-12	1
9 ost	

Deljenje

$72 : 3 =$

$20 + 20 + 20 = 60$

$4 + 4 + 4 = 12$

$(60 + 12 = 72)$

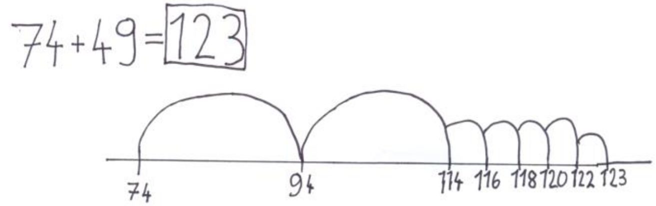
2. Če zunanje reprezentacije ne zagotavljajo določenega miselnega napora, so didaktično neustrezne; učenci naj uporabljajo didaktičen material toliko časa, dokler ga potrebujejo (Markovac, 1990).

3. Didaktične vrednosti materiala (npr. geoplošča – liki, deli celote, simetrija, reševanje problemov) in načini uporabe (prilagajanje materiala poučevanju ali obratno).

- Raziskava Hodnik Čadež, Manfreda Kolar (2010): večina učiteljev (56.58%, vzorec 170 učiteljev) se strinja s trditvijo, da konkreten material nima vpliva na njihov način poučevanja. Gellert (2004): učitelji prilagodijo material njihovemu načinu poučevanja in ne izkoristijo potencial materiala, npr. za reševanje problemov.

4. Ali aktivnost z zunanjo reprezentacijo podpira miselno aktivnost? V kolikšni meri? (Gravemeijer 1991)

- Številska os, ‘prazna številska os’



5. Ali grafična reprezentacija prikazuje tisto, kar vidim (npr. pravi kot v trikotniku ali je to lahko katerikoli kot)? V katerem primeru sliki lahko popolnoma verjamem?

6. Grafične reprezentacije kot most med konkretnimi reprezentacijami in reprezentacijami z matematičnimi simboli. Heedens (1986): grafične reprezentacije so bodisi semikonkretne bodisi semiabstraktne.

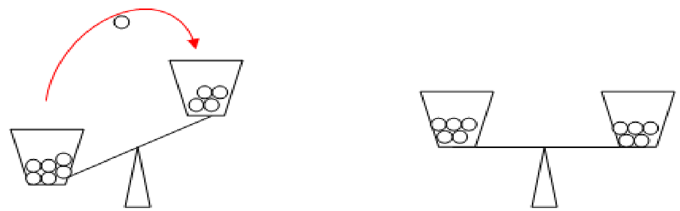
7. Relacij 'simbol – referenca za ta simbol‘ je lahko veliko. Npr. relacije za enačaj na začetku šolanja.

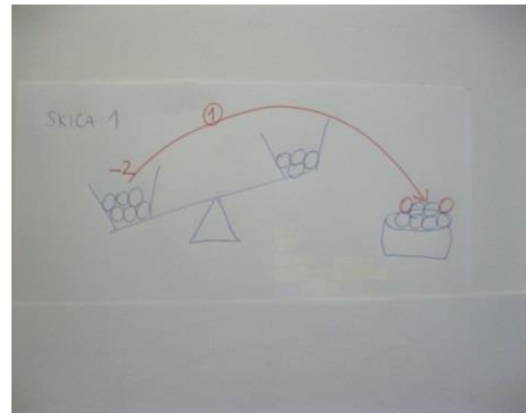
- Ta simbol se učencem prikazuje kot relacijski simbol (npr. že v prvem razredu, ko primerjajo števila po velikosti), a ga učenci pri obravnavanju računskih operacij, ki sledi obravnavi enačaja kot relacijskega znaka, razumejo kot operacijski simbol, ki jim pomeni 'je rezultat' (Cross et al, 2009).

- Težave z razumevanjem enakosti na različnih stopnjah izobraževanja so izpostavljene v različnih (npr. Knuth at al., 2006, McNeil in Alibali, 2005). Precej raziskav potrjuje, da so te težave povezane z izkušnjam učencev na začetku šolanja (npr. McNeil et al., 2011).

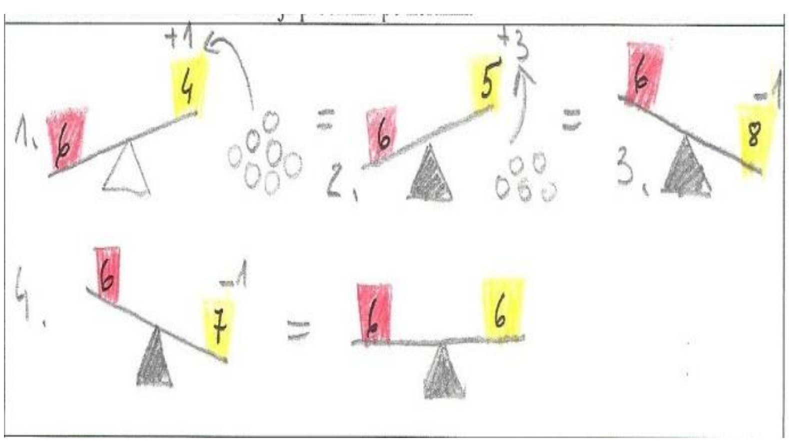
- Raziskava Hodnik Čadež, Mastnak, Manfreda Kolar (2014)

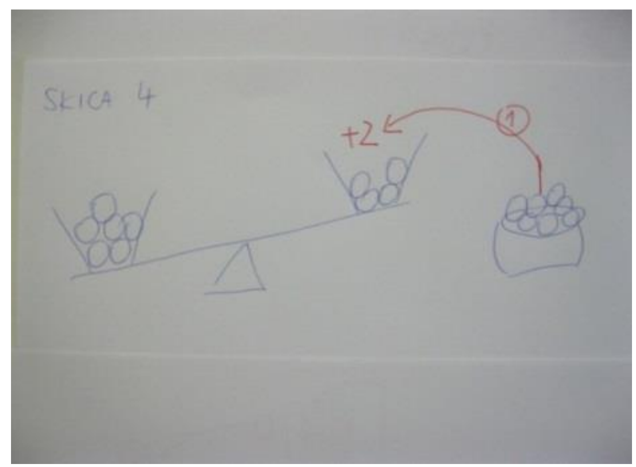
Vzorec 172 otrok, 85 deklic in 87 dečkov, starih od 5 do 6 let





SKICA 1





SKICA 4

Strategija		Frekvenca [f]	Odstotek [f%]
	Vpogled, + in -	42	24
	Vpogled, +	29	17
	Vpogled, -	24	14
	Koraki, + in -	34	20
	Koraki, +	27	16
	Koraki, -	11	6
	Drugo	4	2
	Ni odgovora	1	1
	Skupaj	172	100,0

- Učencem je zahtevno uporabljati iste simbole za različne ideje (referenčni svet za veliko črko v matematiki je nekaj čisto drugega kot pri jeziku).

Črke abecede in črke za označevanje oglišč

Povzetek: povezovanje reprezentacij

- Idejo povezovanja zunanjih reprezentacij je prikazal že Piaget (*1952*) – od konkretnega k abstraktnemu. Davydov (1988) je npr. predlagal obratno pot, a novejše raziskave so bolj naklonjene raziskovanju prehajanja med reprezentacijami.

- Tudi teorija realistične matematike na Nizozemskem daje velik poudarek prehajanju med reprezentacijami in ga definira kot matematiziranje – proces učenčevega preoblikovanja neformalne specifične situacije v formalno splošno (Gravemeijer, 1994).

- V procesu prehajanja med reprezentacijami, je konkretna reprezentacija ‘baza’, abstraktna reprezentacija pa cilj. V procesu ustvarjanja relacij med njima, se od učenca pričakuje, da zazna podobnost strukture obeh reprezentacij. Relacija pa je največkrat skrita… . (Ding, Li, 2014)

Odkriti relacijo je ključno pri učenju matematike z razumevanjem.

Dva ključna kriterija za vzpostavitev relacije med reprezentacijami:

1. Reprezentacije izbranega pojma morajo temeljiti na ‘strukturni podobnosti’.
2. Zagotoviti moramo ustrezen (postopen) proces vzpostavljanja povezav med temi reprezentacijami. (postopno zmanjševanje ‘konkretnega’)

Učitelj in vnašanje sprememb

- Učitelj največkrat ne izhajajo iz lastnega matematičnega znanja, ampak iz učbeniških gradiv in drugih materialov (Brown in Borko 1992), ki so lahko problematična z vidika reprezentiranja matematičnih pojmov.
- Potrebno je pomagati učiteljem, da ponovno premislijo o njihovem matematičnem znanju in o temeljih, na katerih je osnovano njihovo poučevanje matematike (Llinares in Krainer 2006, Herbel-Eisenmann in Phillips 2008, Feiman-Nemser in Buchman 1985).

- Učiteljeva refleksija dela v razredu je nujna komponenta učenja in poučevanja, ki vodi do kakovostnih sprememb znanja o poučevanju in učenju (Llinares in Krainer 2006).
- Učitelj v vlogi raziskovalca (Jakku Sihvonen in Niemi, 2006)

Literatura

- Anghileri, J. (2001) Contrasting Approaches that Challenge Tradition. V: Anghileri, J. (Ur.) *Principles and Practices in Arithmetic Teaching.* Buckingham: Open University Press.
- Brown, C. A., Borko, H. (1992) Becoming a Mathematics Teacher. V: Grouws, D. A. (Ur.) *Handbook on Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Company. Str. 209-239.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. and Alibali, M.: 2006, Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations, *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 297-312.
- McNeil, N. M. and Alibali, M.: 2005, Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations, *Child Development*, 6, 883-899.
- McNeil, N. M., Fyfe, E. R., Petersen, L. A. and Dunwiddie, A. E.: 2011, Benefits of practicing 4 = 2 + 2: non-traditional problem formats facilitate children's understanding of mathematical equivalence, *Child Development*, 82, 162-1633.

- Herbel-Eisenmann, B., Phillips, E. D. (2008) Analyzing Students’ Work: A context for Connecting and Extending Algebraic Knowledge for Teaching. V: Greenes, C. E., Rubenstein, R. (Ur.) Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth yearbook. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. Str. 295-311
- Llinares, S., Krainer, K. (2006) Mathematics (student) Teachers and Teacher Educators as Learners. V: Gutie´rrez, A., Boero, P. (Ur.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present, and Future*. Rotterdam: Sense Publishers. Str. 429-459.
- Feiman-Nemser, S., Buchman, M. (1985) Pitfalls of Experience in Teacher Preparation. *Teachers College Record 87(1)*. Str. 53–65.
- Cross, C. T., Woods, T. A., Schweingruber, H. (2009) *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths toward Excellence and Equity*. National academic press: Washington. Str. 162-187.

- Hodnik Čadež, T., Mastnak, A., Manfreda Kolar, V. (2014) Assessing preschool children’s understanding of mathematical equivalence through problem solving. V: Pytlak, M. (ur.) Communication in the mathematics classroom. Rzeszov: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
- Heddens, J. W. (1986) Bridging the Gap between the Concrete and the Abstract. *Arithmetic Teacher 33(6)*. Str. 14-17.
- Gravemeijer, K. P. E. (1991) An Instruction – Theoretical Reflection on the Use of Manipulatives. In: Streefland, L., (Ur.) *Realistic Mathematics Education in Primary School*, On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute.
- Fuson, K. C., Briars, D. J. (1990) Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for First and Second Grade Place Value and Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education 21*. Str. 180-206.
- Markovac, J. (1990) *Metodika početne nastave matematike*. Zagreb: Školska knjiga.
- Thompson, P. W. (1992) Notations, Conventions, and Constraints: Contributions to Effective Uses of Concrete Materials in Elementary Schools. *Journal for Research in Mathematics Education 25*. Str. 297-303.

- Resnick, L., Omanson, S. (1987) Learning to Undrestand Arithmetic. V: Glaser, R. (Ur.) Advances in Instructional Psychology 3. Hillsdale, N.Y.: Lawrence Erlbaum Assocciates. Str. 41-95.
- Labinowicz, E. (1985) *Learning from Children: New Biginnings for Teaching Numerical Thinking*. California: Addison-Wesley Publishing Co.
- Hodnik Čadež, T., Manfreda Kolar, V. (2014) Comparison of Types of Generalizations and Problem-solving Schemas Used to Solve a Mathematical Problem. V postopku objave v ESM.
- Manfreda Kolar, V., Hodnik Čadež, T. (2010) Didactic material as a mediator between physical manipulation and thought processes in learning mathematics. V: MAJ, Božena (ur.), SWOBODA, Ewa (ur.), TATSIS, Konstantinos (ur.). *Motivation via natural differentiation in mathematics*. Rzseszów: Wydawnicteo Uniwersytetu, cop. Str. 342-353. [COBISS.SI-ID 8426825]
- Chapman, J. O. (2010) Teachers’ Self-representations in Teaching Mathematics. *Mathematics Teacher Education 13*. Str. 289–294

- Palmer, S. E. (1978) Fundamental Aspects of Cognitive Representation. V: Rosch, E., Lloyd, B. B. (Ur.) Cognition and categorization. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates. Str. 259-303.
- Karmiloff-Smith, A. (1992) *Beyond Modularity: A Developmental Perspective on Cognitive Science*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Duval, R. (2002) The Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education 1(2)*. Str. 1–16.
- Griffin, S., Case, R. (1997). Re-thinking the Primary School Math Curriculum: An Approach Based on Cognitive Science. *Issues in Education 3*. Str. 1–49.
- Kaput, J. J. (1989) Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. V. Wagner, S., Kieran, C. (Ur.) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Hillsdale, NY: Erlbaum. Str. 167–194.
- Bieda, K. N., Nathan, M. J. (2009). Representational Disfluency in Algebra: Evidence from Student Gestures and Speech. *ZDM—The International Journal of Mathematics Education 41*
- Heinze, A., Star, J. R., Verschaffel, L. (2009) Flexible and Adaptive Use of Strategies and Representations in Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education 41*. Str. 535–540.

- Bruner, J. S. (1966) Toward a Theory of Instruction. Cambridge, MA: Belkapp Press.
- Eisner, E. (2004) Preparing for Today and Tomorrow. *Educational Leadership 61(4)*. Str. 6–10.
- Manfreda Kolar, V., Slapar, M., Hodnik čadež, T. (2012) Comparison of competences in inductive reasoning between primary teacher students and mathematics teacher students. V: MAJ-TATSIS, Božena (ur.), TATSIS, Konstantinos (ur.). *Generalization in mathematics at all educational levels*. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego. Str. 299-311.
- Gellert, U.: 2004, Didactic material confronted with the concept of mathematical literacy, *Educational Studies in mathematics*, **55**, pp. 163 – 179.
- Jakku Sihvonen, R., Niemi, H. (2006) Research-based teacher education in Finland – Reflections by Finnish teacher educators. Turku: Finnish Educational Research Association.
- Ding, M., Li, X. (2014) Transition from concrete to abstract representations: the distributive property in a Chinese textbook series. Educational Studies in Mathematics, 87, pp 103-121.
- Fosnot, C. T., Dolk, M. (2001) Young mathematicians at work. Constructing multiplication and division. Portsmouth: Heinemann.