Zavod Republike Slovenije za šolstvo

K U P M 2 0 1 2

Uporaba koncepta simetrije

Alojz Grahor

Definicija (Leikin, 2000)

Simetrija je trojica (S, I, M), ki sestoji iz objekta S, specifičnih lastnosti I danega objekta S in transformacije M, ki zadošča naslednjima dvema lastnostma:

- objekt S pripada definicijskemu območju transformacije M,
- delovanje transformacije M na objekt S ne spremeni lastnosti I objekta S.

Primer 1

OBJEKT: Trikotnik

TRANSFORMACIJA

LASTNOST: Heronova formula:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

permutacije stranic:

(a ,b ,c)
(a ,c ,b)
(b ,a ,c)
(b ,c ,a)
(c ,a ,b)
(c ,b ,a)

Primer 2

OBJEKT: Trikotnik

TRANSFORMACIJA

permutacije parov
(stranica, kot)

LASTNOST: kosinusni izrek

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(a,α), (b,β), (c,γ)
(a,α), (c,γ), (b,β)
(b,β), (a,α), (c,γ)
(b,β), (c,γ), (a,α)
(c,γ), (a,α), (b,β)
(c,γ), (b,β), (a,α)

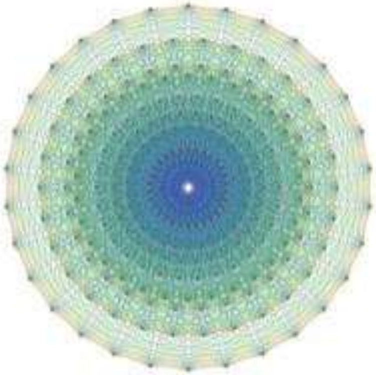
Uporaba koncepta simetrije

1. pri reševanju matematičnih problemov
2. pri odkrivanju novega znanja
3. sklepanje z analogijo

1. Uporaba koncepta simetrije pri reševanju matematičnih problemov

1. Rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami

$$3x + 2y + z = 30$$
$$x + 3y + 2z = 30$$
$$2x + y + 3z = 30$$



- 1a. Rešimo sistem enačb

  - **$3x + 2y + z = 30$**
  - **$x + 3y + 2z = 30$**
  - **$2x + y + 3z = 30$**

- po eni izmed standardnih poti

$3x + 2y + z = 30$

$-(x + 3y + 2z = 30) * 3$

$0 - 7y - 5z = -60$ $\quad$ $y = 60/7 - 5z/7$

$2x + y + 3z = 30$

$-(x + 3y + 2z = 30) * 2$

$0 - 5y - z = -30$ $\quad$ $y = 6 - z/5$

$60/7 - 5z/7 = 6 - z/5$

$60/7 - 42/7 = 25z/35 - 7z/35$

$(18/7 = 18z/35) *35$

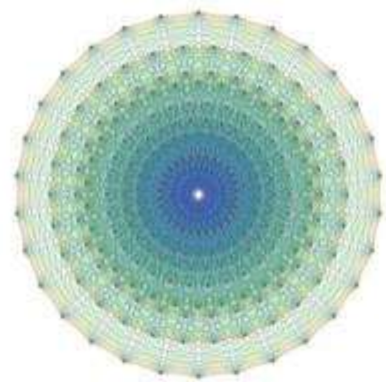
$(90 = 18z) /18$

z = …

$y = 6 - z/5 \quad (z = 5)$

$y = 6 – 1$

y = …



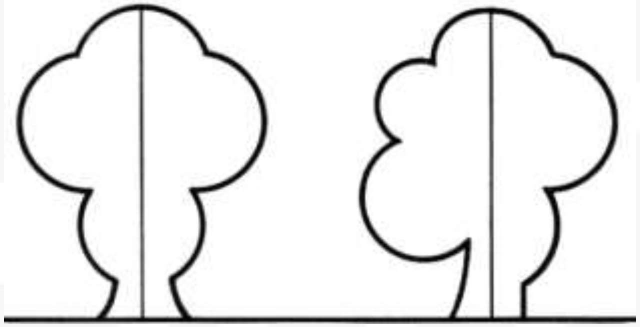
$3x + 2y + z = 30 \quad (z = 5, y = 5)$

$3x + 10 + 5 = 30$

$3x = 15$

x = …

- Če opazimo v problemu simetrijo, smo hitrejši …



$$3x + 2y + z = 30$$

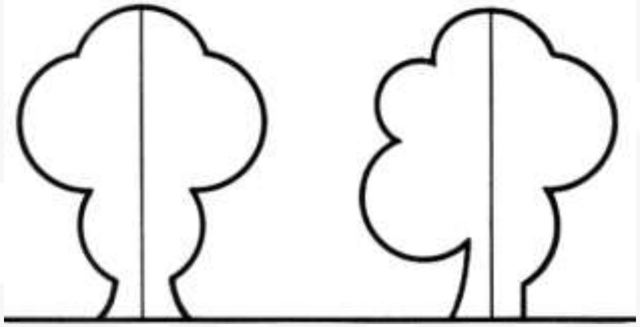
$$x + 3y + 2z = 30$$

$$2x + y + 3z = 30$$

AHA! Simetrija

3x + 2y + z = 30
x + 3y + 2z = 30
2x + y + 3z = 30

AHA! Simetrija



Permutacije spremenljivk (x,y,z) ohranjajo sistem

torej y = x in z = x

3x + 2x + x = 30 → 6x = 30

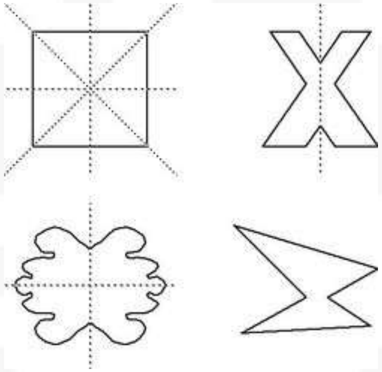
x = 5

→ y=5, z = 5

- 1b. Rešimo problem.

Spremenljivki x in y povezujeta enačbi:

$$2x + 5y = 48$$
$$5x + 2y = -13$$



Poiščimo vrednost izraza

$$2012x + 2012y.$$

- 1b. Dani sta enačbi

$2x + 5y = 48$
$5x + 2y = -13$

Poiščite **$2012x + 2012y$**.

- Izračunajmo x in y:

$2x + 5y = 48$
$x = 24 - 5y/2$

$5(24 - 5y/2) + 2y = -13$
$120 - 25y/2 + 2y = -13$
$133 = 21y/2$
$266 = 21y$

$y = 38/3$

$x = 24 - 5y/2$
$x = 24 - (5 * 38/3)/2$
$x = 24 - (190/3)/2$
$x = 24 – 190/6$
$x = 144/6 – 190/6$
$x = -46/6$
$x = -23/3$

$2012x + 2012y =$
$= 2012 * (\mathbf{-23/3}) + 2012*(\mathbf{38/3})=$
$= -46276/3 + 76456/3=$
$= 30180/3=$
$= \dots$

- Če pa opazimo simetrijo…

$$2x + 5y = 48$$

$$5x + 2y = -13$$

……

Izračunaj

$2012x + 2012y$.

AHA ! Simetrija

Začnemo pri simetriji:

$2012x + 2012y = 2012(x + y)$

Potrebujemo $x + y$:

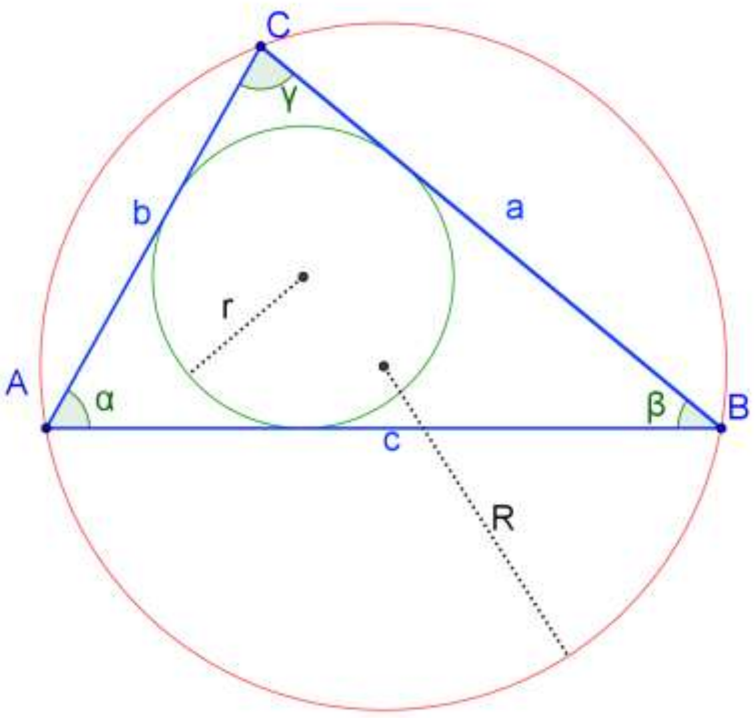
$$
\begin{aligned}
& 2x + 5y = 48 \\
+ (& 5x + 2y = -13) \\
\hline
& 7x + 7y = 35 \\
& 7(x + y) = 35 \\
& x + y = 5
\end{aligned}
$$

$2012(x + y) =$

$20012 * 5 = 10060$

»Vsaka simetrija, ki jo opazimo pri podatkih ali pogojih, se zrcali v rešitvi problema« (G.Polya)

2. Raziskujmo s simetrijo



$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

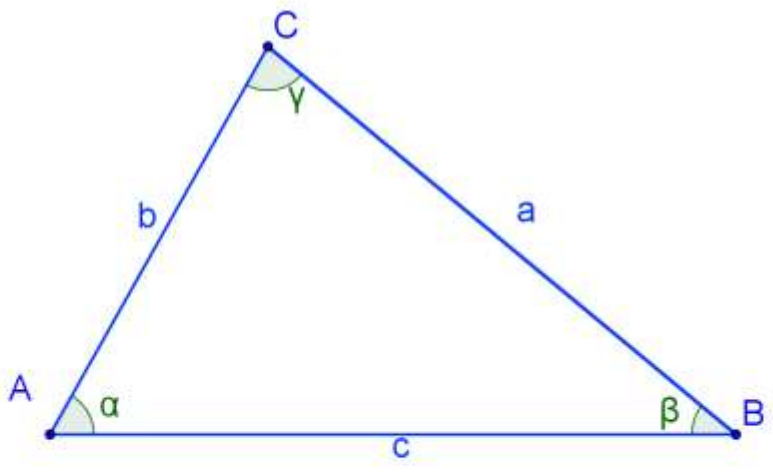
$$S=\sqrt{s(s-a)s-b)(s-c)}$$

$$r=\frac{S}{s} \qquad R=\frac{abc}{4S}$$

- r je polmer krogu včrtane krožnice
- R je polmer krogu očrtane krožnice

Vsaka izmed teh formul ***je simetrična*** *glede na permutacije stranic* ***a, b, c.***

KOSINUSNI IZREK



Posamezna formula (na primer)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

ni simetrična glede na permutacije parov (stranica, kot) (a,α), (b,β) in (c,γ),

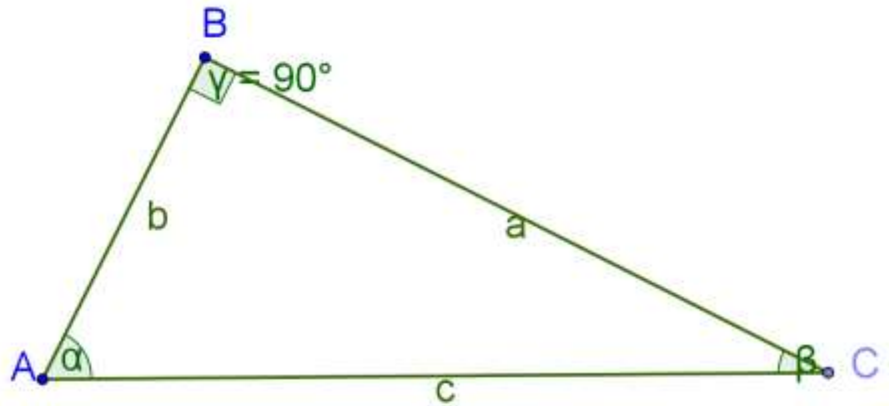
toda vse tri formule skupaj imajo lastnost popolne permutacijske **simetrije.**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Kotne funkcije v pravokotnrm trikotniku



tan α = a/b
cos α = b/c
sin α = a/c

niso simetrične formule.

pravokotni trikotnik

Poskušajmo
nesimetrično
formulo

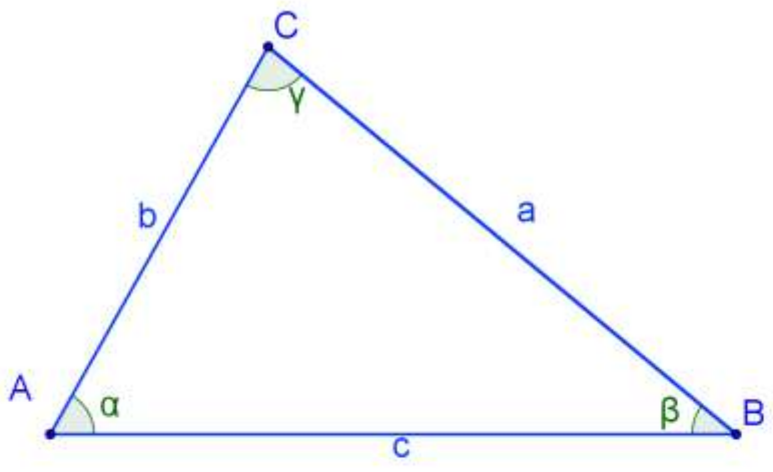
Odkrivajmo
s
simetrijo

spremeniti v
simetrično
formulo …

Poskušajmo
nesimetrično
formulo

Odkrivajmo
s
simetrijo

spremeniti v
simetrično
formulo …

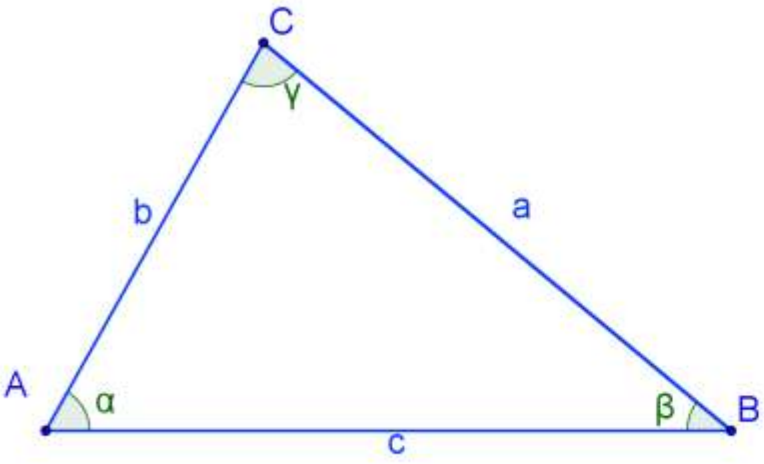


Simetrija deluje!

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{a}{c}\Rightarrow\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Simetrija deluje!
Odkrili smo sinusni izrek.

Sinusni izrek
je simetričen glede na permutacije vseh treh parov (stranica, kot)

(a,α), (b,β) in (c,γ).

Nova vprašanja, ideje za nove naloge

- Pokažite, da v pravokotnem trikotniku velja zveza. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b}.$

S pomočjo koncepta simetrije zapišite še ostale zveze med stranicami in koti v pravokotnem trikotniku. Posplošite, utemeljite.

- V pravokotnem trikotniku izračunajte razmerje $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$

S pomočjo koncepta simetrije zvezo posplošite in se prepričajte, ali velja ali ne.

- Dokažite, da v pravokotnem trikotniku velja $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{b}{a}$

S pomočjo koncepta simetrije zvezo posplošite. Ali je posplošitev resnična?

3. Analogija

Analogija je pomembna, abstraktna vrsta simetrije.

A je proti *B* tako kot *C* proti *D*.

Par „A,B“ in par „C,D“ sta analogna drug drugemu.

A : B = C : D

1. primer

:

Luna je proti Zemlji

kot

??? proti Marsu.

:

:

Luna : Zemlji

=

???? : Marsu.

:

:

Luna : Zemlji

=

Fobos : Marsu.

:

:

Luna je proti Zemlji

kot

??? proti Marsu.

:

:

Luna je proti Zemlji

kot

??? proti Marsu.

:

:

Luna : Zemlji

=

Deimos : Marsu.

:

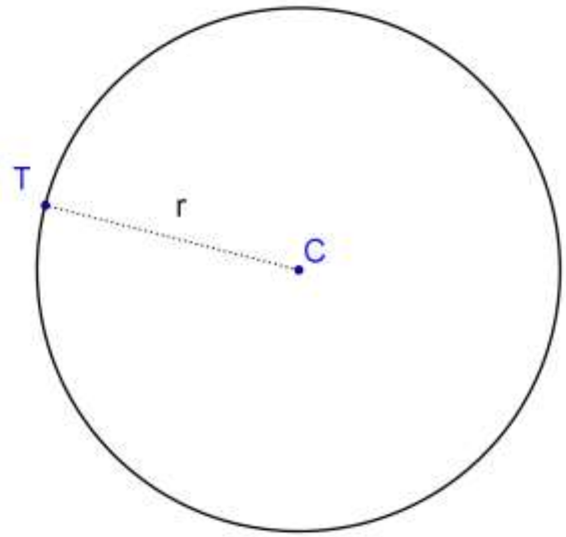
:

Luna je proti Zemlji
kot
??? proti Marsu.

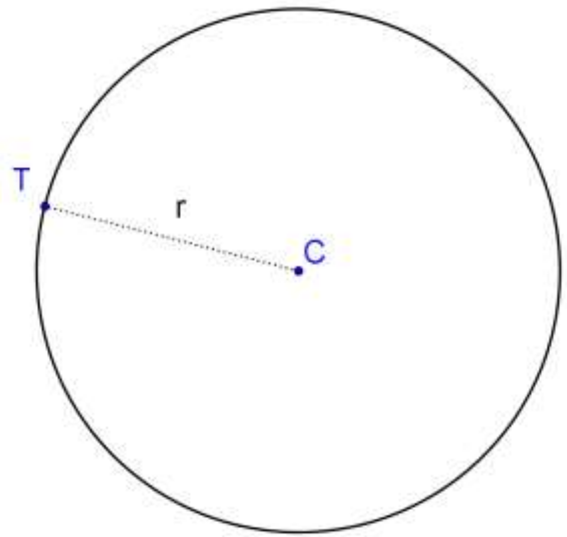
:

2. primer

Kaj je krožnica?



Kaj je krožnica?

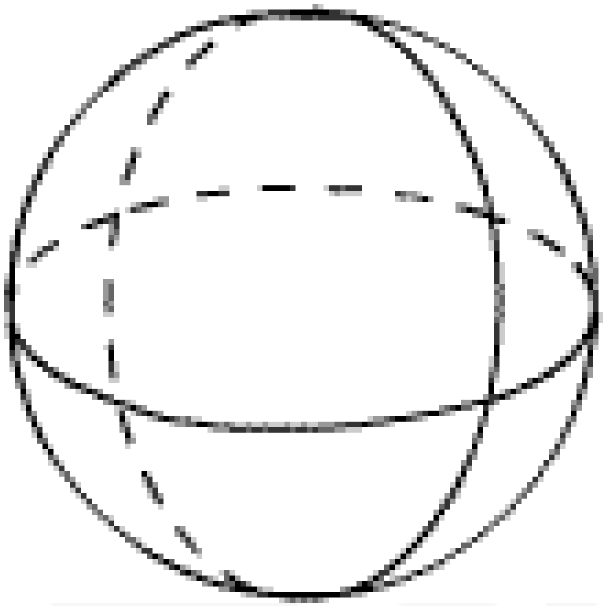


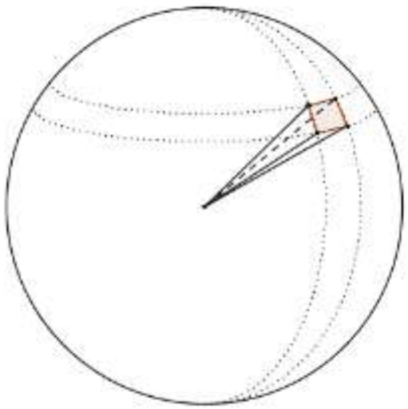
Krožnica s središčem C in polmerom r je množica točk v ravnini, ki so od točke C oddaljene za r.

Poiščimo analogijo krožnici v 3-razsežnem prostoru?

Množica vseh točk v 3-razsežnem prostoru, ki so od točke C oddaljene za r, je ???.

Množica vseh točk v 3-razsežnem prostoru, ki so od točke C oddaljene za r, je sfera.



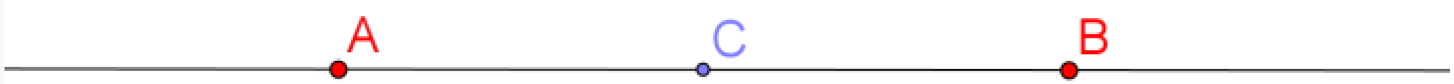


Kaj pa je analogija krožnici v 1-razsežnem prostoru?

Kaj pa je analogija krožnici v 1-razsežnem prostoru?

Množica vseh točk v 1-razsežnem prostoru, ki so od točke C oddaljene za r, je ???.

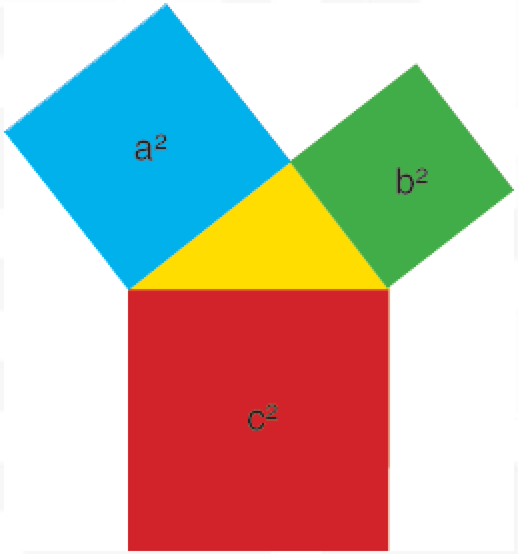
Množica vseh točk na premici, ki so od točke C (na premici) oddaljene za r, sta krajišči intervala s polmerom r in središčem C.



3. primer

Analogija Pitagorovega izraka v 3-razsežnem prostoru

2D --> 3D



$a^2 + b^2 = c^2$

Analogija Pitagorovega izreka

2D

ravnina

:

pravokotni trikotnik

3D

3 – razsežni prostor

:

____

Analogija Pitagorovega izreka

2D

3D

ravnina

3 – razsežni prostor

:

:

dve pravokotni daljici s skupnim ogliščem

Analogija Pitagorovega izreka

2D

ravnina

:

dve pravokotni daljici s skupnim ogliščem

3D

3 – razsežni prostor

:

tri pravokotne daljice s skupnim ogliščem

Analogija Pitagorovega izreka

2D

ravnina

:

vsota kvadratov dolžin

$a^2 + b^2 = c^2$

3D

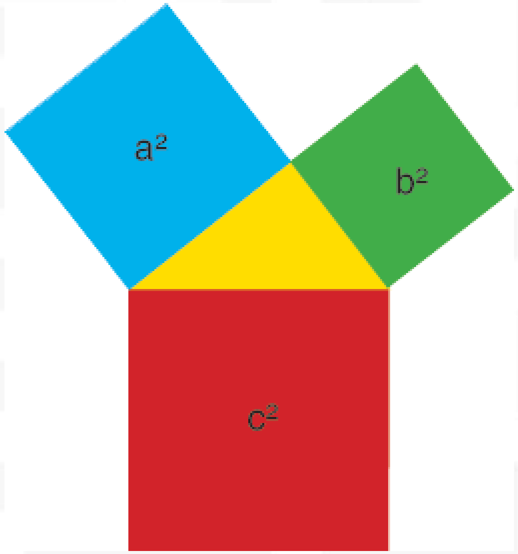
3 – razsežni prostor

:

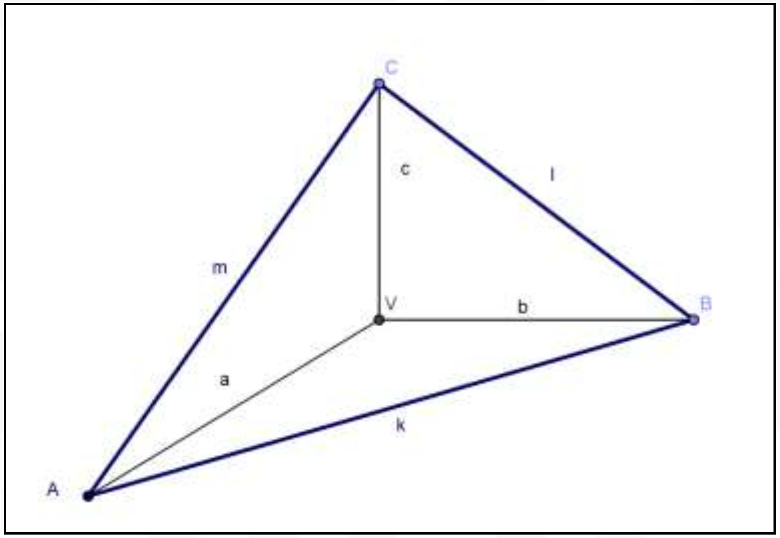
vsota kvadratov _____

Tri dimenzionalni Pitagorov izrek

2D --> 3D

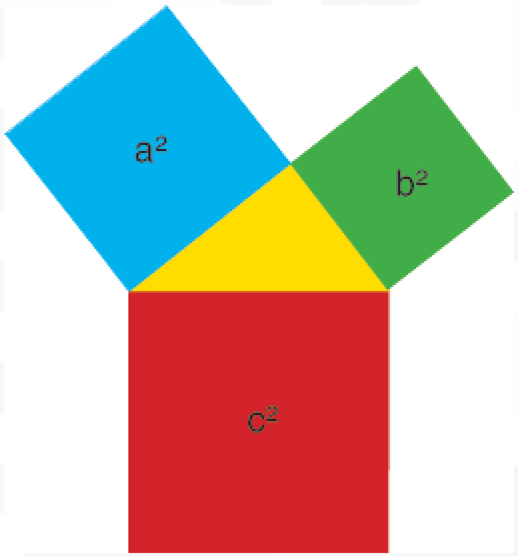


$a^2 + b^2 = c^2$

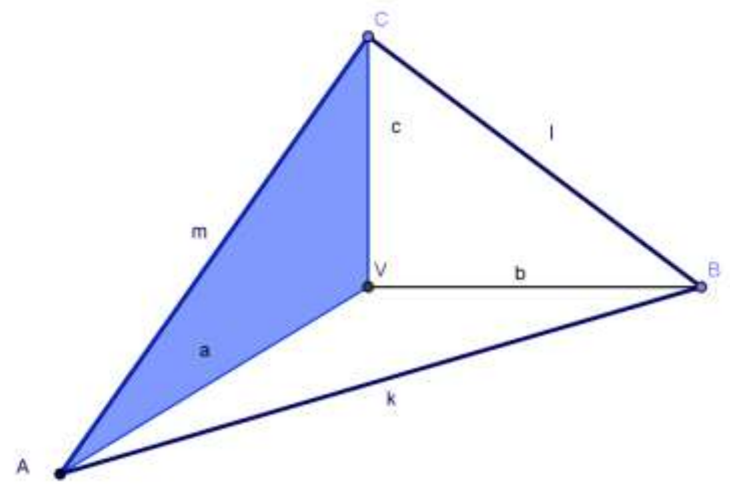


Tri dimenzionalni Pitagorov izrek

2D --> 3D

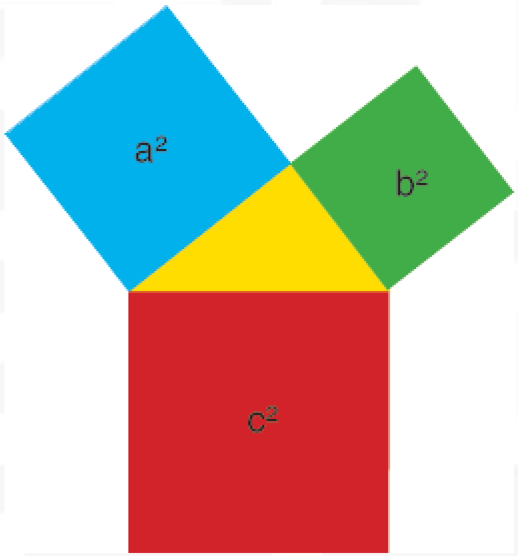


$a^2 + b^2 = c^2$

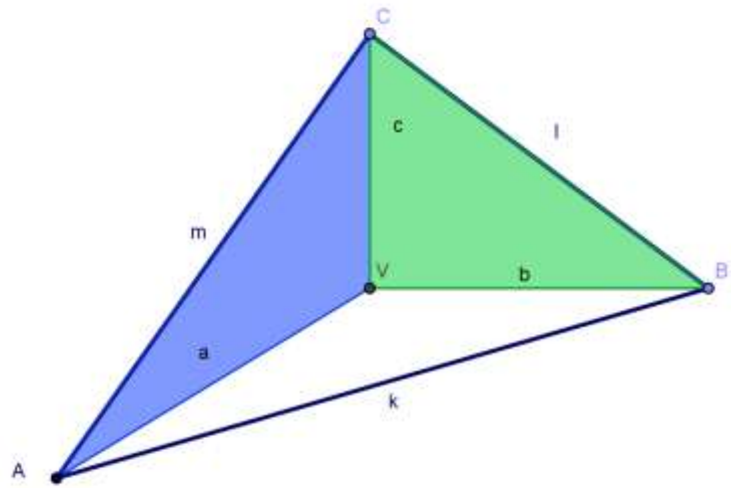


Tri dimenzionalni Pitagorov izrek

2D --> 3D

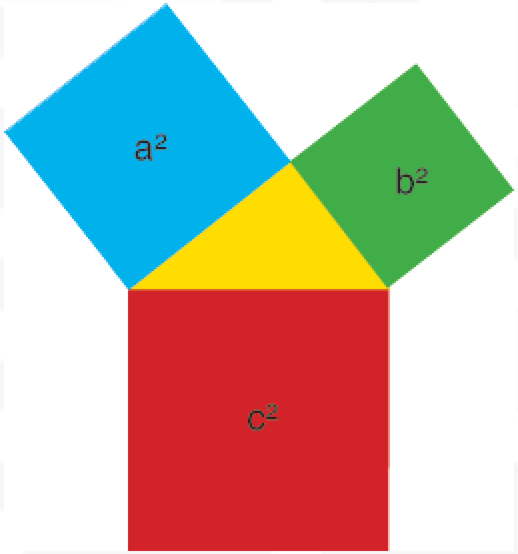


$a^2 + b^2 = c^2$

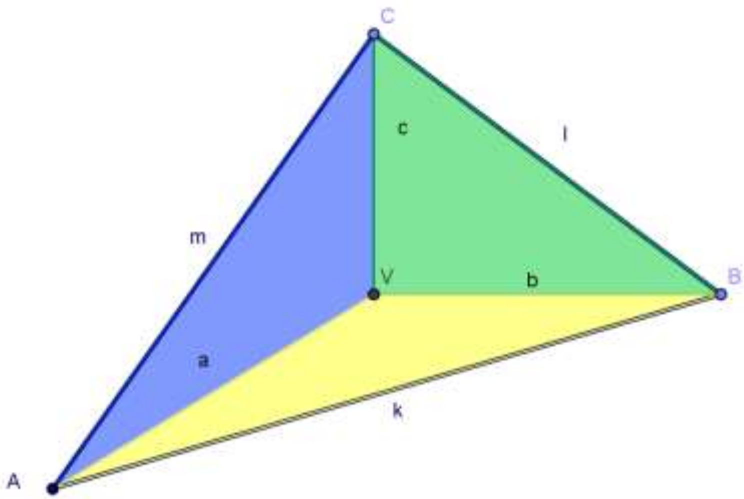


Tri dimenzionalni Pitagorov izrek

2D --> 3D



$a^2 + b^2 = c^2$



Analogija Pitagorovega izreka

2D

ravnina

:

vsota kvadratov dolžin

$a^2 + b^2 = c^2$

3D

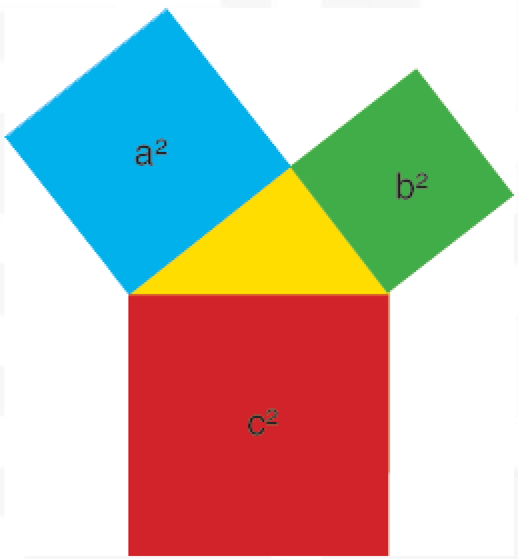
3 – razsežni prostor

:

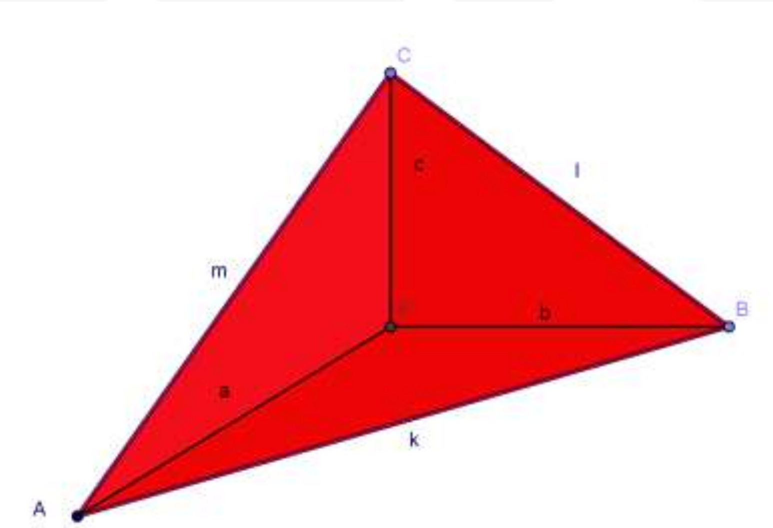
vsota kvadratov ???

Tri dimenzionalni Pitagorov izrek

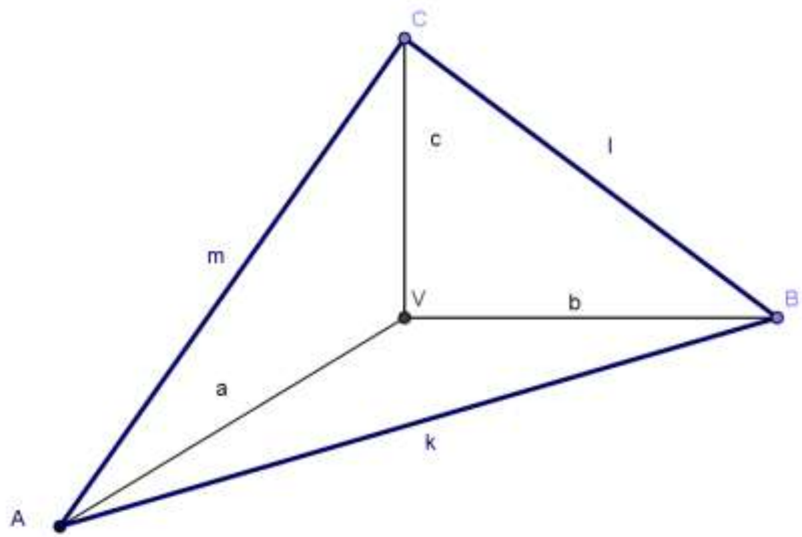
2D --> 3D



$a^2 + b^2 = c^2$



$$(S_{VAB})^2 + (S_{VAC})^2 + (S_{VBC})^2 = (S_{ABC})^2$$



Tridimenzionalni Pitagorov izrek

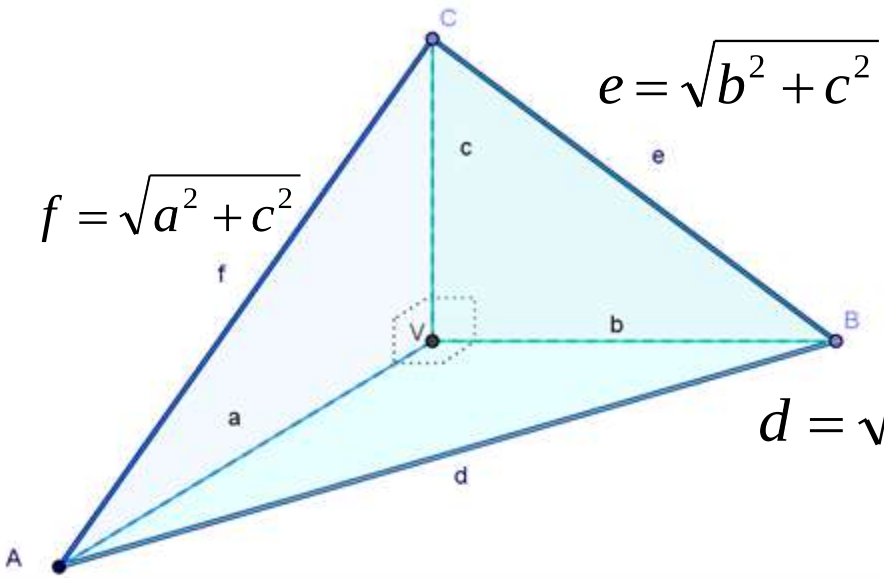
Vsota kvadratov ploščin tistih ploskev, ki imajo vrh v stičišču pravokotnih robov *(S_{VAB}, S_{VAC} in S_{VBC})*, **je enaka kvadratu ploščine ploskve, določene s tistimi stranicami stranskih ploskev, ki ležijo nasproti stičišča pravokotnic** *(S_{ABC})* **.**

$$(S_{VAB})^2 + (S_{VAC})^2 + (S_{VBC})^2 = (S_{ABC})^2$$

(Prvi dokaz: Jean Paul de Gua de Malves (1713—1785), *de Gua Theorem*.)

Dokaz z Geogebro

Dokaz z uporabo Heronove formule



$$e=\sqrt{b^2+c^2}$$

$$f=\sqrt{a^2+c^2}$$

$$d=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$S_{VAB}=\frac{ab}{2}$$

$$S_{VAC}=\frac{ac}{2}$$

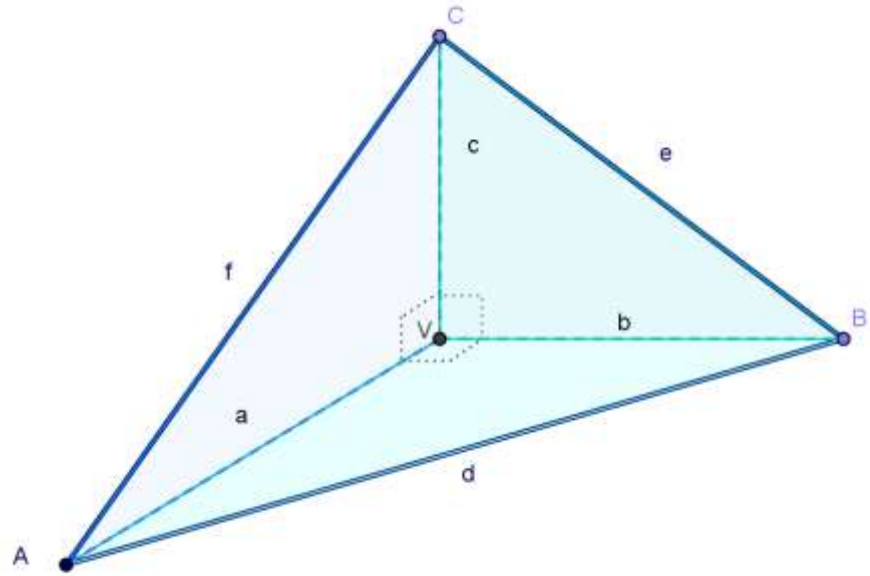
$$S_{VBC}=\frac{bc}{2}$$

$$S=\sqrt{s(s-d)(s-e)(s-f)}$$

$$s=\frac{d+e+f}{2}$$

$$S_{ABC}=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{4}}$$

Dokaz z uporabo vektorskega produkta



$$\vec{r}_A = (a,\ 0,\ 0),$$

$$\vec{r}_B = (0,\ b,\ 0)$$

$$\vec{r}_C = (0,\ 0,\ c).$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (-a,\ b,\ 0)$$

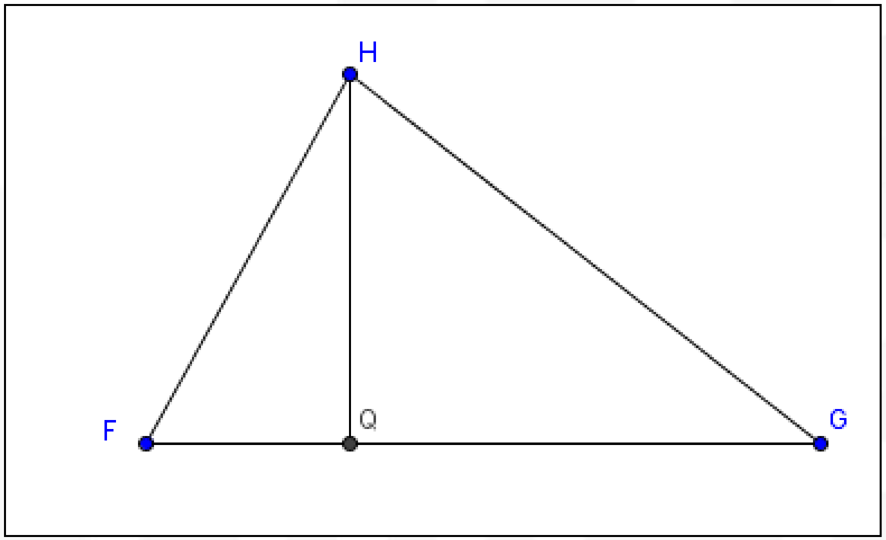
$$\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (-a,\ 0,\ c)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(-a,b,0)\times(-a,0,c)| = \frac{1}{2}|(bc,ac,ab)| = \frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}$$

4. primer

Analogija Evklidovega izreka

2D --> 3D



?

$|FH|^2=|FQ|\cdot|FG|$

$|GH|^2=|GQ|\cdot|FG$

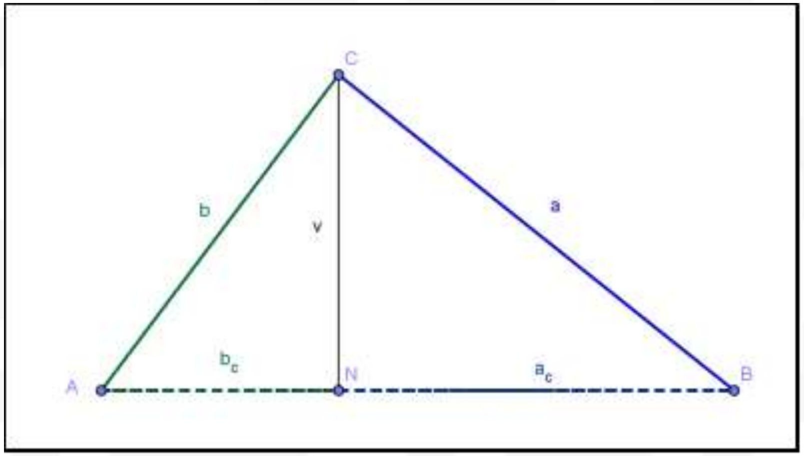
oziroma

$a^2 = a_1 \cdot c$

$b^2 = b_1 \cdot c$

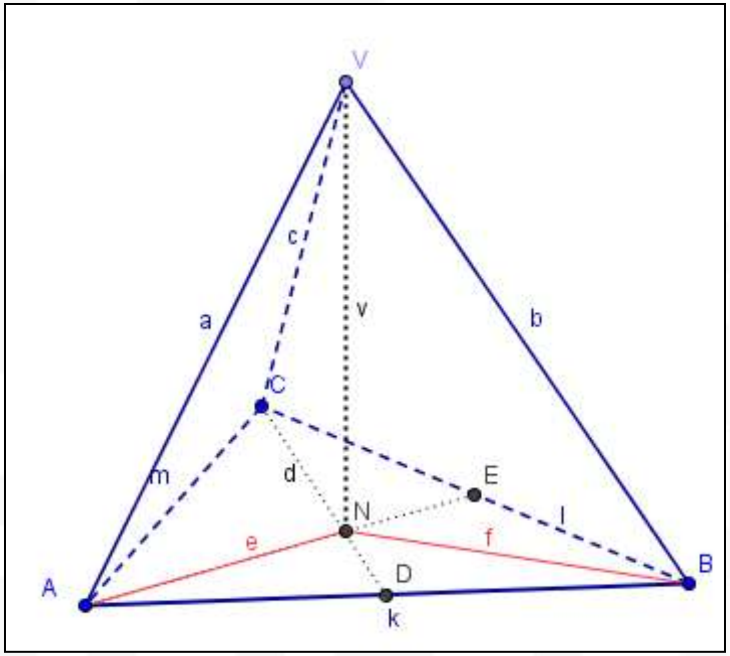
Analogija Evklidovega izreka

2D --> 3D



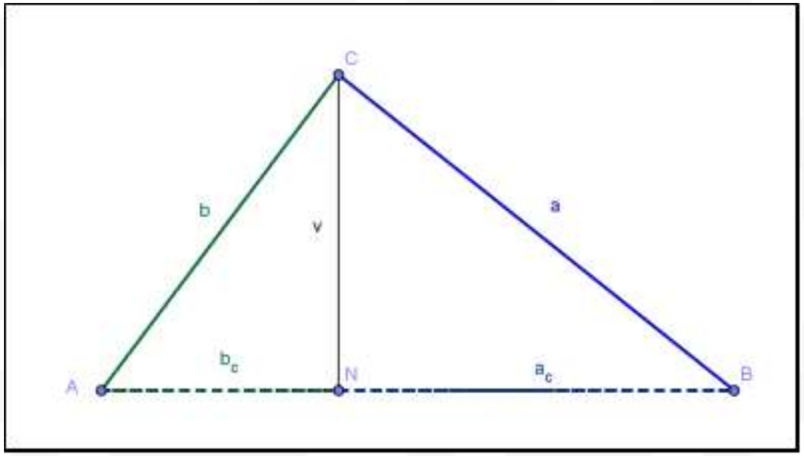
$b^2 = b_c \cdot c$

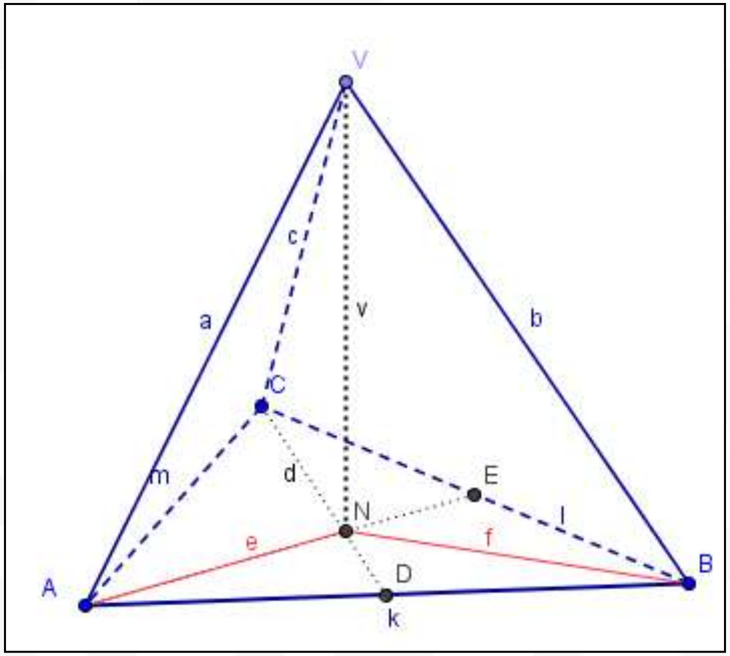
$a^2 = a_c \cdot c$



Analogija Evklidovega izreka

2D --> 3D





$b^2 = b_c \cdot c$

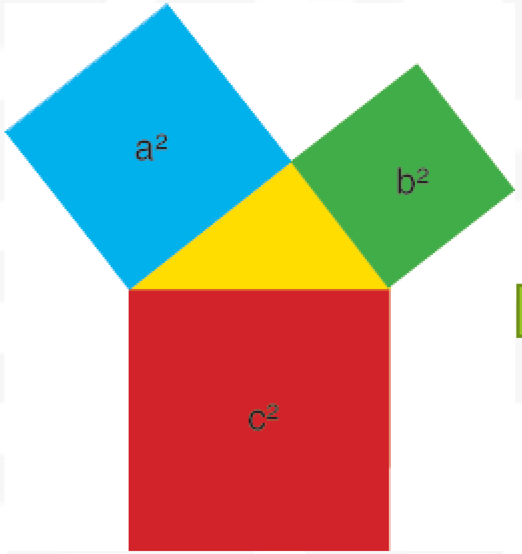
$a^2 = a_c \cdot c$

$(S_{VAB})^2 = S_{ABN} \cdot S_{ABC}$

5. primer

Analogija Pitagorovega izreka v 4-razsežnem prostoru

2D



$a^2 + b^2 = c^2$

4D

?

1. Leikin, R.; Berman, A.; and Zaslavsky, O.; 2000, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.,* Vol. 31, No. 6, 799-809.
2. http://www.artofproblemsolving.com/Forum/blog.php?b=27
3. [2] Levi, M. 2009: *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems*. Princeton University Press, Princeton.
4. Alvarez, S. A.: *Note on an n-dimensional Pythagorean Theorem*. [online], [citirano 25. 11. 2009]. Dostopno na spletnem naslovu: http://www.cs.bc.edu/~alvarez/NDPyt.pdf
5. Frohman, C. 2010: *The Full Pythagorean Theorem*. [online], [citirano 7. 2. 2010]. Dostopno na spletnem naslovu: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1001/1001.0201v1.pdf
6. Wong, W. W. 2002: *A Generalized N-Dimensional Pythagorean Theorem.* [online], [citirano 15. 2. 2010]. Dostopno na spletnem naslovu: http://www.dpmms.cam.ac.uk/~ww278/papers/gp.pdf

Zaključek

Koncept simetrije

- je pogosto prisoten v matematiki,
- sodi pa tudi med problemska znanja, ker
  - je strategija (je orodje) za reševanje (nekaterih) matematičnih problemov,
  - pomaga odkrivati nova spoznanja,
  - z njegovo pomočjo zastavljamo nove probleme.

Hvala simetriji

in Vam za pozornost.