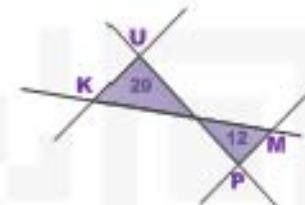




Zavod Republike Slovenije za šolstvo

K U P M 2 0 1 2



VIZUALIZACIJA I RAZINA APSTRAKCIJE

Petar Mladinić

petar.mladinic@zg.t-com.hr

Konferenca o učenju in poučevanju matematike, Maribor, 23. in 24. avgusta 2012

[Povežite s geometrije](#)

Geometrije s različitom metrikom

koza pase travu

[Povežite s koza](#)

taksist

[Povežite s tzona](#)

taksist i golub

[Povežite s taksi i golub](#)

definicija metrike [Povežite s metrika](#)

povijest [Povežite s povijest](#)

kad i gdje u srednjoj školi [Povežite sa sred. škola](#)

primjeri:

[Povežite s a.g.](#) • analitička geometrija

[Povežite s trig](#) • trigonometrija

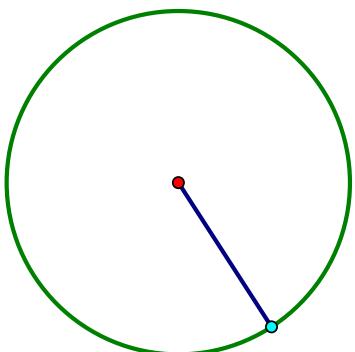
[Povežite s kompl.funkcije](#) • kompleksne funkcije



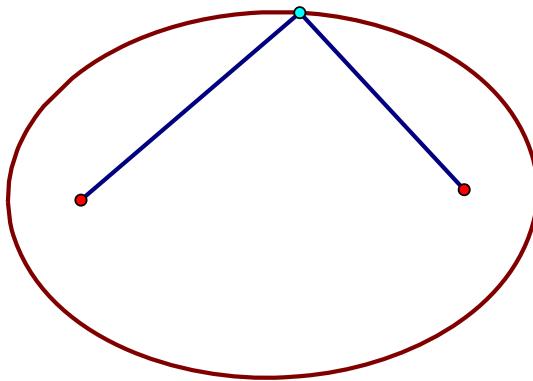
[Povežite sa zaključak](#)

[Povežite s naslovnicu](#)

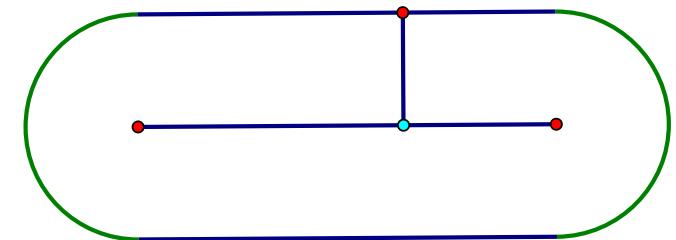
c



a)

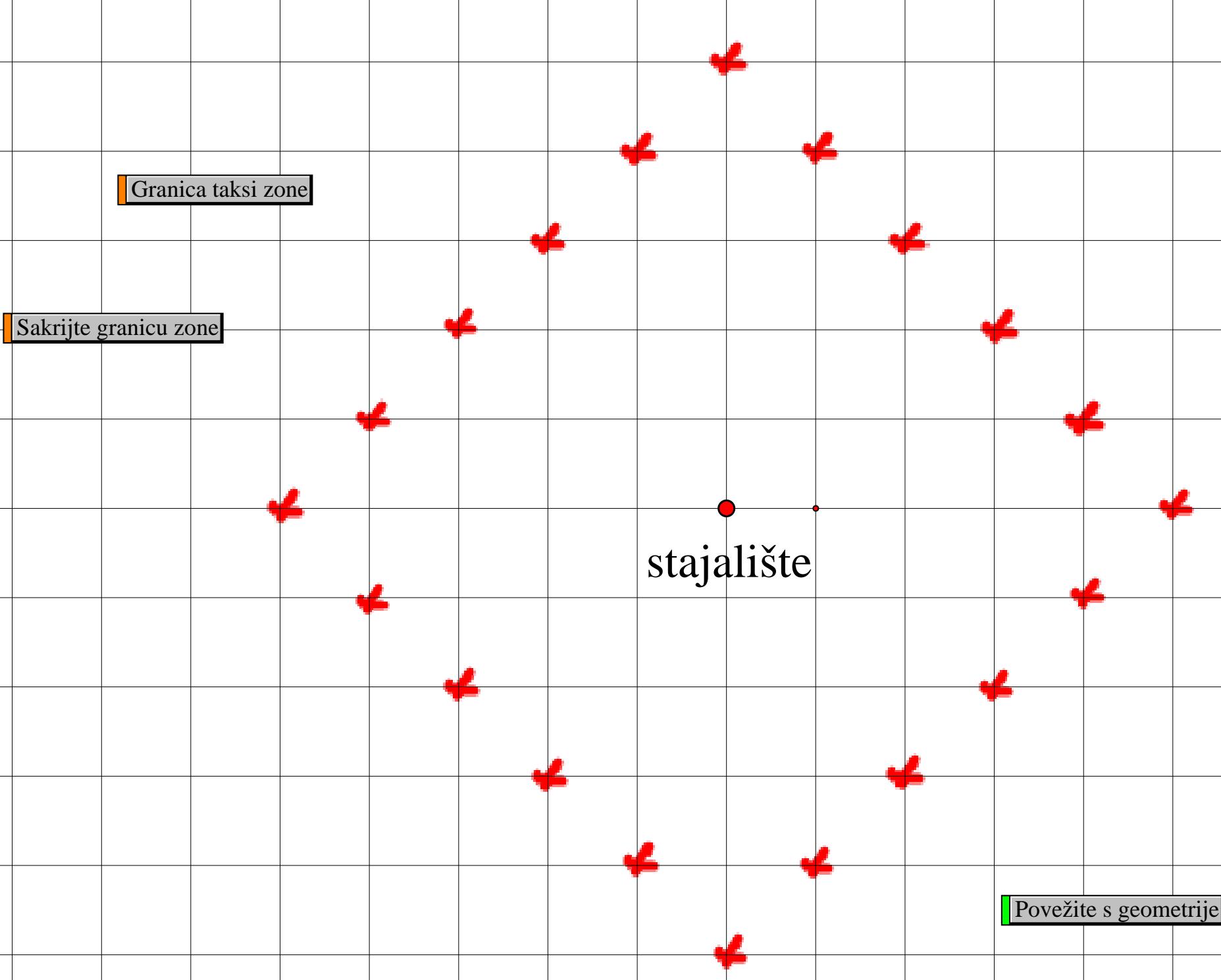


b)



c)

Povežite s geometrije

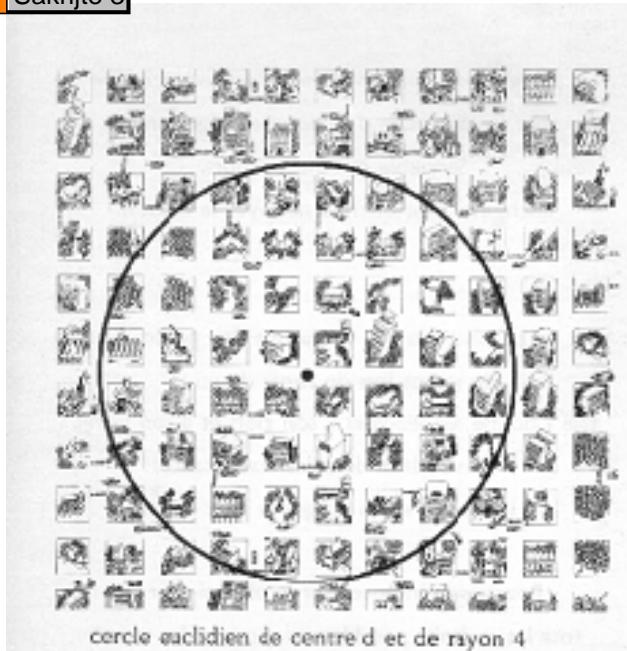


Sakrijte 1

Sakrijte 2

Ilustracije radi, navodim dva primjera snižavanja apstrakcije je namijenjena djeci od 10 do 100 godina, uvode koje su osmislili **Frédérique i George Papy**.

Sakrijte 3



Povežite s geometrijom

Sakrijte 4

U knjižici **Taximétrix**, Hachette, Paris 1973, koja djecu u svijet euklidske i pseudoeuklidske metrike i geometrije.

Definicija metrike

Metrički prostor je uređeni par (H,d) gdje je H skup, a d je metrika na H tj. funkcija

$d: H \times H \rightarrow R$ takva da za svaki $x,y,z \in H$ vrijedi:

- [a)] a) $d(x,y) \geq 0,$
- [b)] b) $d(x,y) = 0$ akko je $x = y,$
- [c)] c) $d(x,y) = d(y,x),$
- [d)] d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Sakrijte

d ... funkcija udaljenosti ili udaljenost

Sakrijte ...

H je ravnina $\Rightarrow (D,d)$ je ravninska geometrija

Ako je udaljenost d ...

[d]

Povežite s geometrijom

Udaljenost d

$$d_L = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{1}{p}}, x, y \in R, p > 0$$

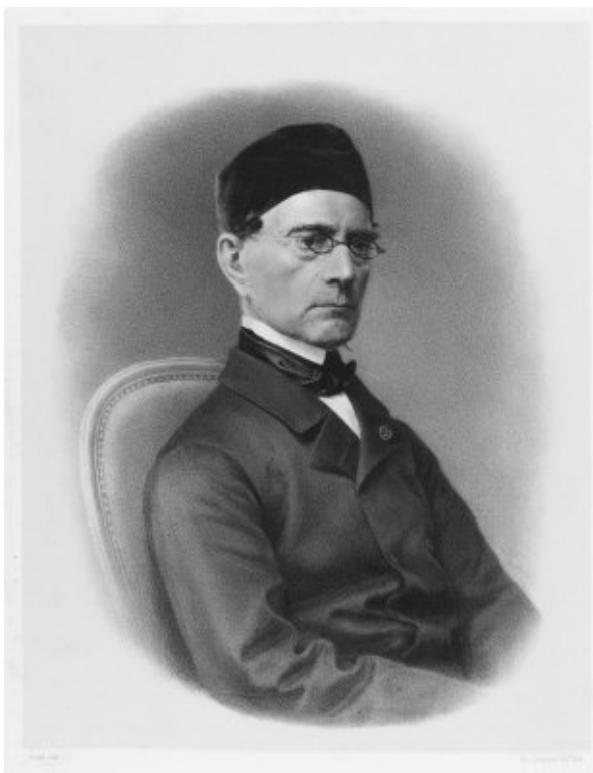
za $p = 1$... metrika Minkowskog: $d_M = |x| + |y| \Rightarrow$ udaljenost Minkowskog

za $p = 2$... euklidska metrika: $d_E = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$ euklidska udaljenost

općenito: za $p > 0 \Rightarrow$ Laméova udaljenost

Povežite s metrikama

Povežite s geometrijama



Gabriel Lamé
(1795. - 1870.)



Hermann Minkowski
(1864. - 1909.)



Karl Menger
(1902. - 1985.)

 Povežite s geometrije

Matematika u srednjoj školi

U Hrvatskoj u 2., 3. i 4. razredu gimnazije:

- analitička geometrija: Povežite s a.g.
 - udaljenost 2 točaka, udaljenost točke od pravca
 - pravac
 - krivulje 2. reda: kružnica, elipsa, hiperbola, parabola
- trigonometrija: Povežite s trig
 - trigonometrijska kružnica
 - trigonometrijske funkcije: sinus, kosinus, ...
- kompleksni brojevi Povežite s kompl.funkcije

Povežite s geometrije

Primjeri iz analitičke geometrije

Nacrtajmo:

- dužina Povežite s m-dužina
- simetrala dužine tj. para točaka Povežite s M-simetrala-dužine
- krivulje 2. reda:
 - kružnica, Povežite s mkruž
 - elipsa, Povežite s M-elipsa Povežite s M-elipsa&hiperbola
 - hiperbola, Povežite s M-hiperbola
 - parabola Povežite s M-parabola

█ Povežite s geometrije

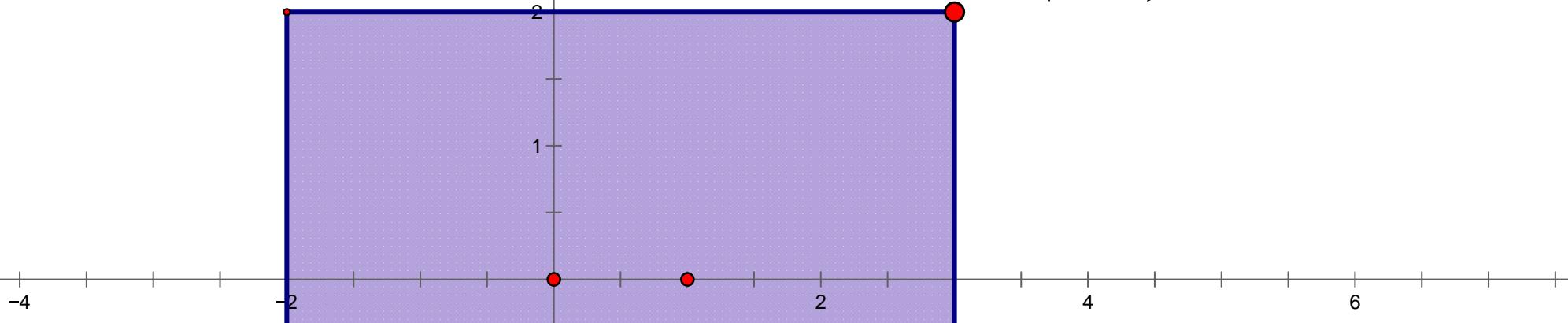
Dužina \overline{AB} je skup točaka *između* A i B

$$\{T \therefore |AT| + |TB| = |AB|\}$$

$$d_M(A, B) = d_M(A, T) + d_M(T, B)$$

$$|-2-x| + |-1-y| + |x-3| + |y-2| = 8$$

B (3,2)

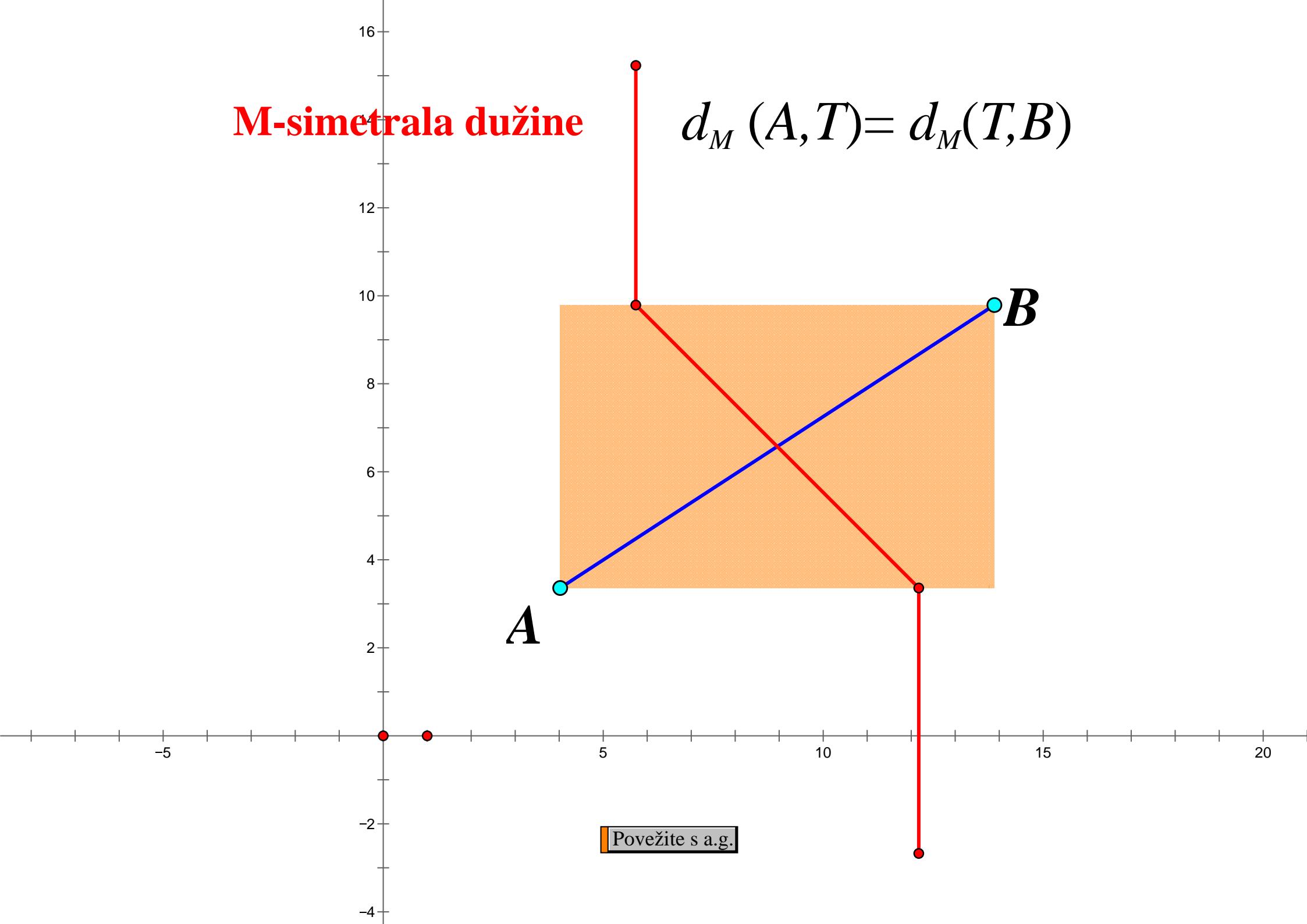


A (-2,-1)

Povežite s a.g.

M-simetrala dužine

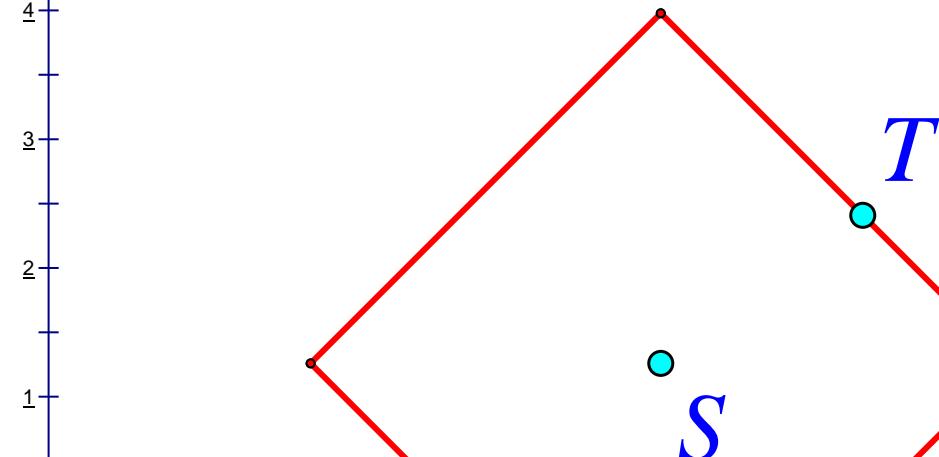
$$d_M(A, T) = d_M(T, B)$$



Povežite s a.g.

m-kružnica

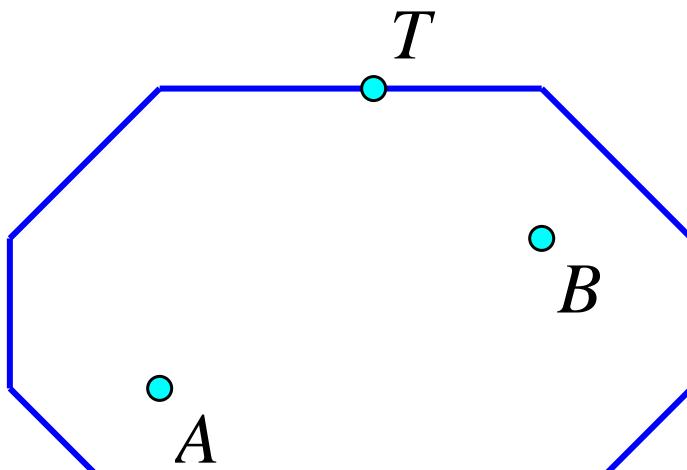
$$|ST| = r, r > 0$$



Povežite s a.g.

M-elipsa

$$|AT| + |TB| = t$$

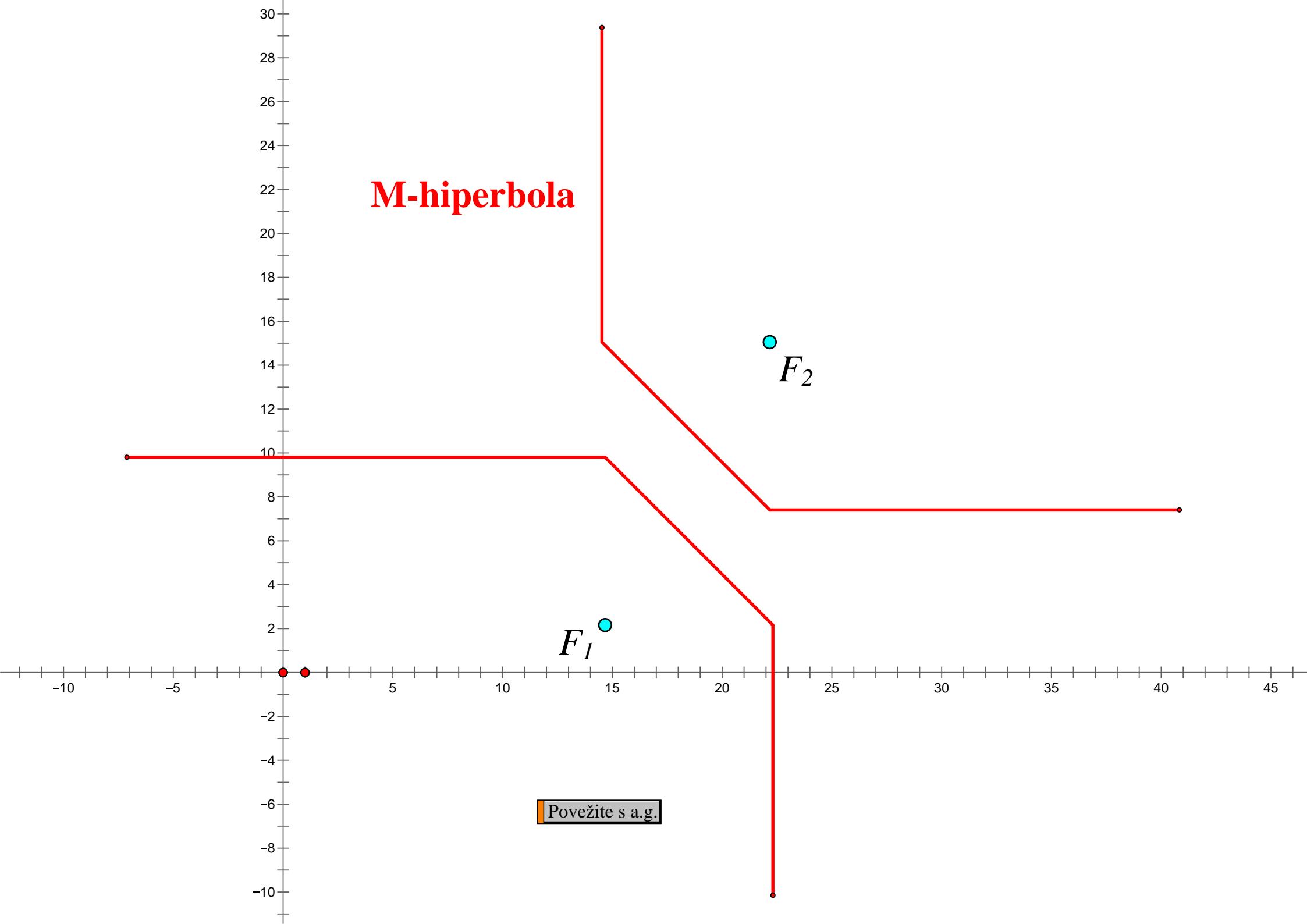


$$|x-a|+|y-b|+|x-c|+|y-d|=t$$

$$|a - c| + |b - d| = 7,04 \quad \leq \quad t = \boxed{11,00}$$

Povežite s a.g.

M-hiperbola



M-elipsa

$$|x-a| + |y-b| + |x-c| + |y-d| = t$$

$$p = [5, 1] \leq |a - c| + |b - d| = 7,71$$

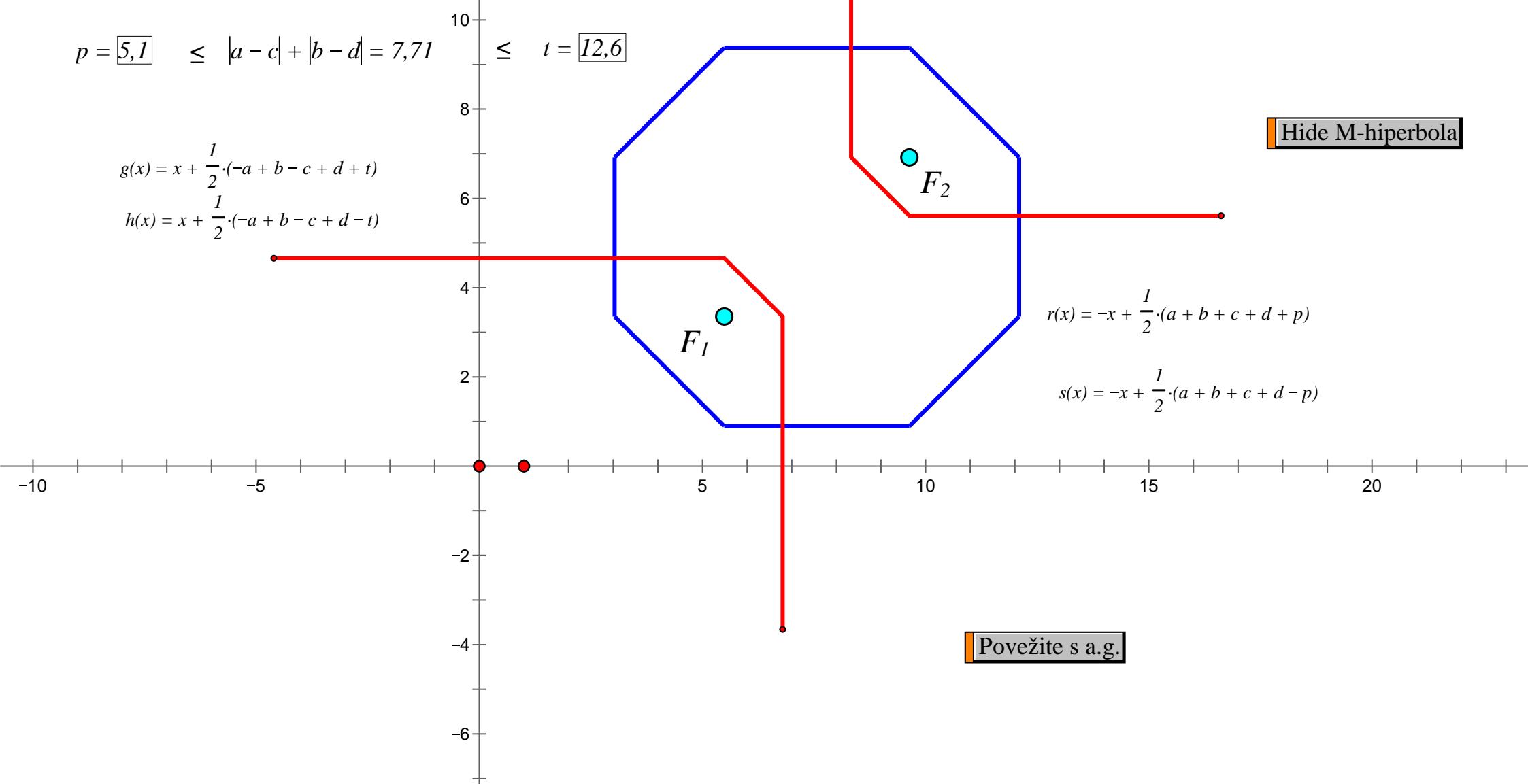
$$t = [12, 6]$$

$$g(x) = x + \frac{1}{2} \cdot (-a + b - c + d + t)$$

$$h(x) = x + \frac{1}{2} \cdot (-a + b - c + d - t)$$

M-hiperbola

$$|x-a| + |y-b| - |x-c| - |y-d| = p$$



M-parabola

(žarište $F(3,76, 1,72)$ je "ispod" ravnalice $y=kx+l$)

m-parabola za $k > 1$

$$k=2,00 \geq 1$$

$$k = [2,00] \quad l = [3,00]$$

$$y = k \cdot x + l$$



Show $k < 1$

Povežite s a.g.

Primjeri iz trigonometrije

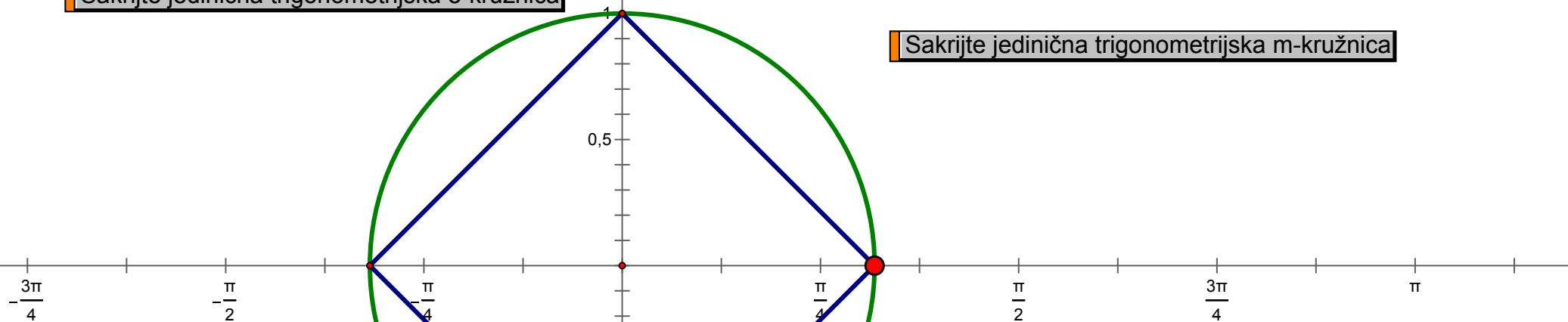
- jedinična trigonometrijska kružnica Povežite s trigkruž
- funkcija sinus
 - $p=2$ i $p=1$ Povežite sa sin
 - $p > 0$ Povežite s p-sin

Povežite s geometrije

Jedinična trigonometrijska kružnica

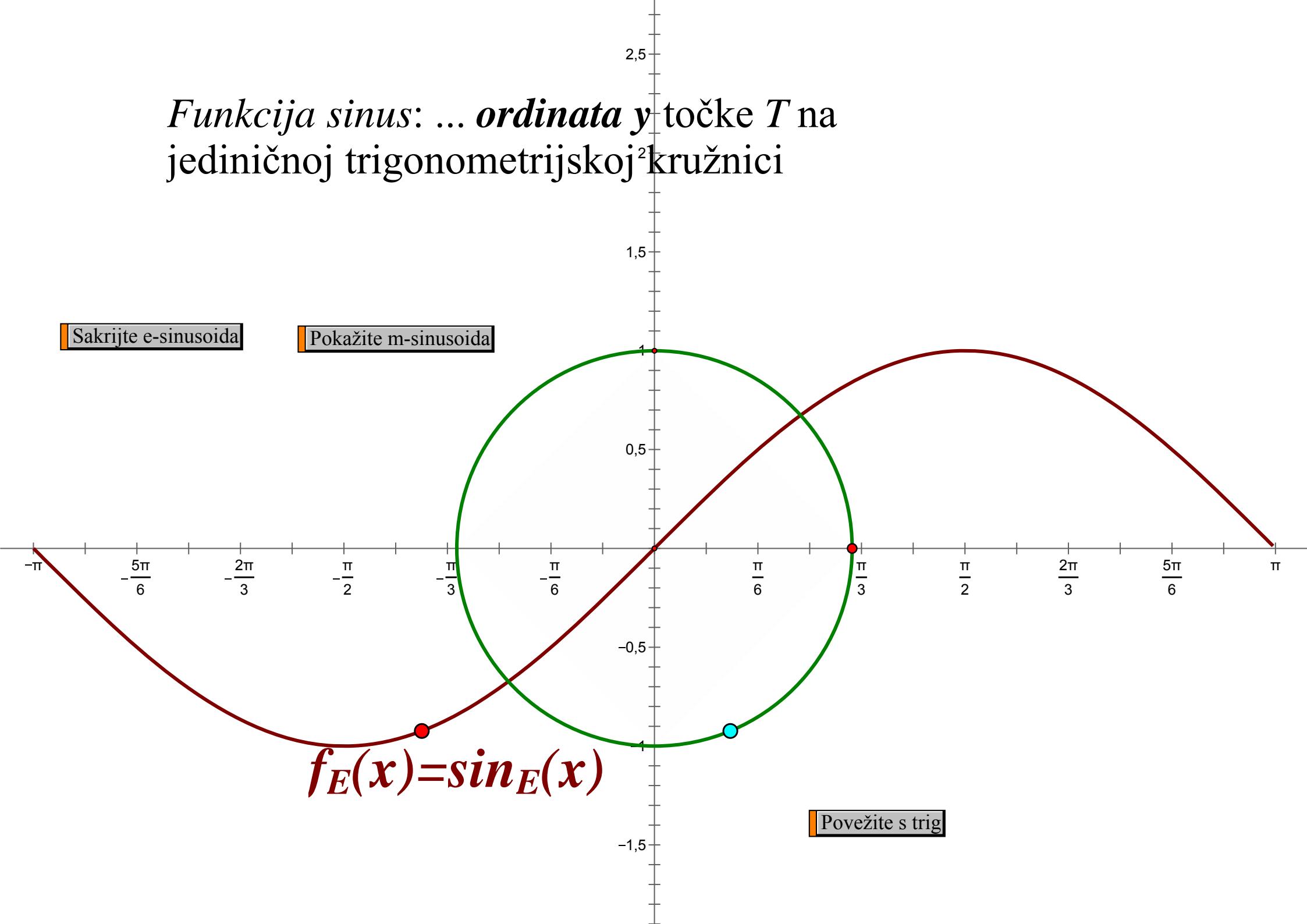
Sakrijte jedinična trigonometrijska e-kružnica

Sakrijte jedinična trigonometrijska m-kružnica



Povežite s trig

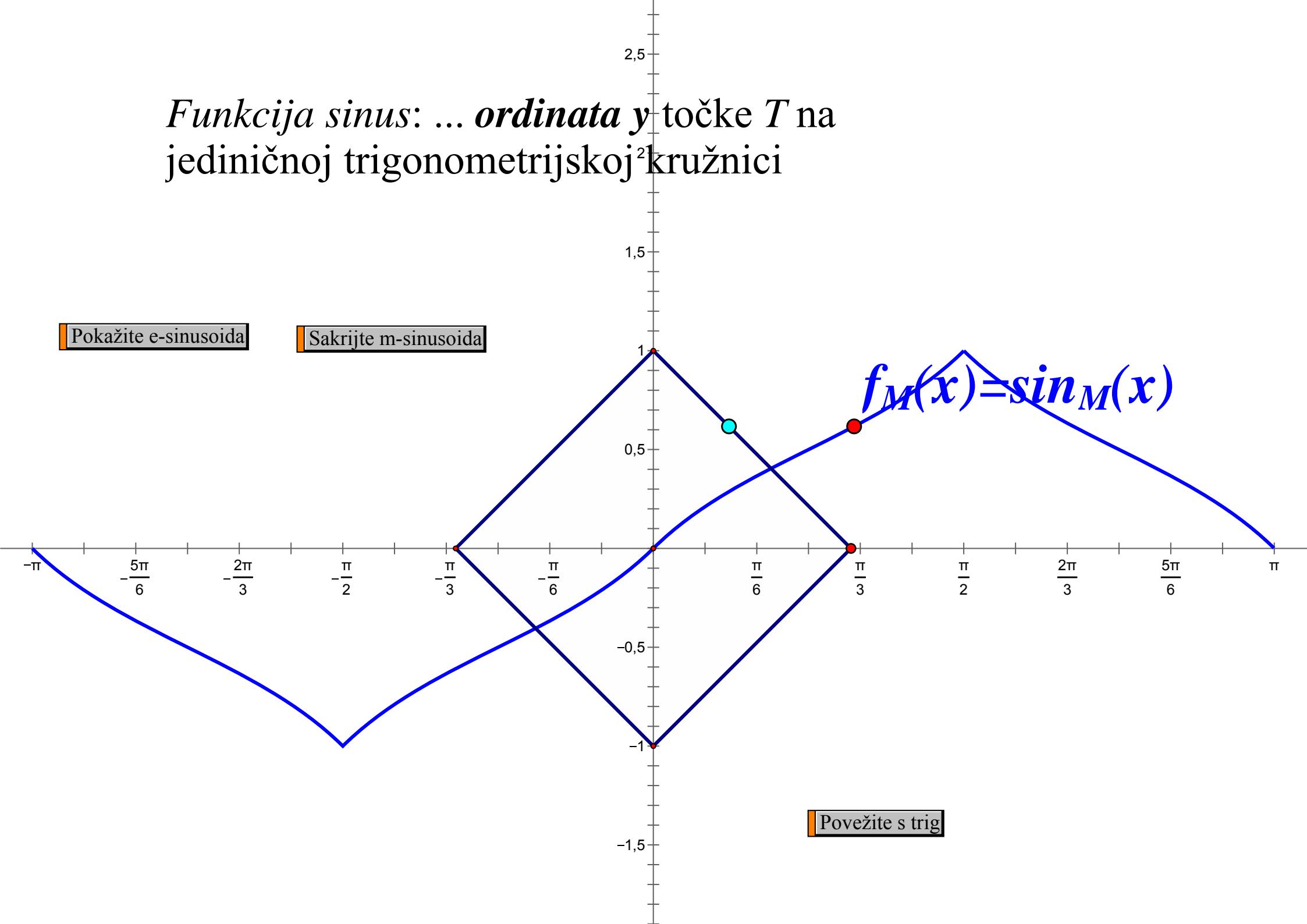
Funkcija sinus: ... ordinata y točke T na jediničnoj trigonometrijskoj kružnici



Funkcija sinus: ... ordinata y točke T na jediničnoj trigonometrijskoj kružnici

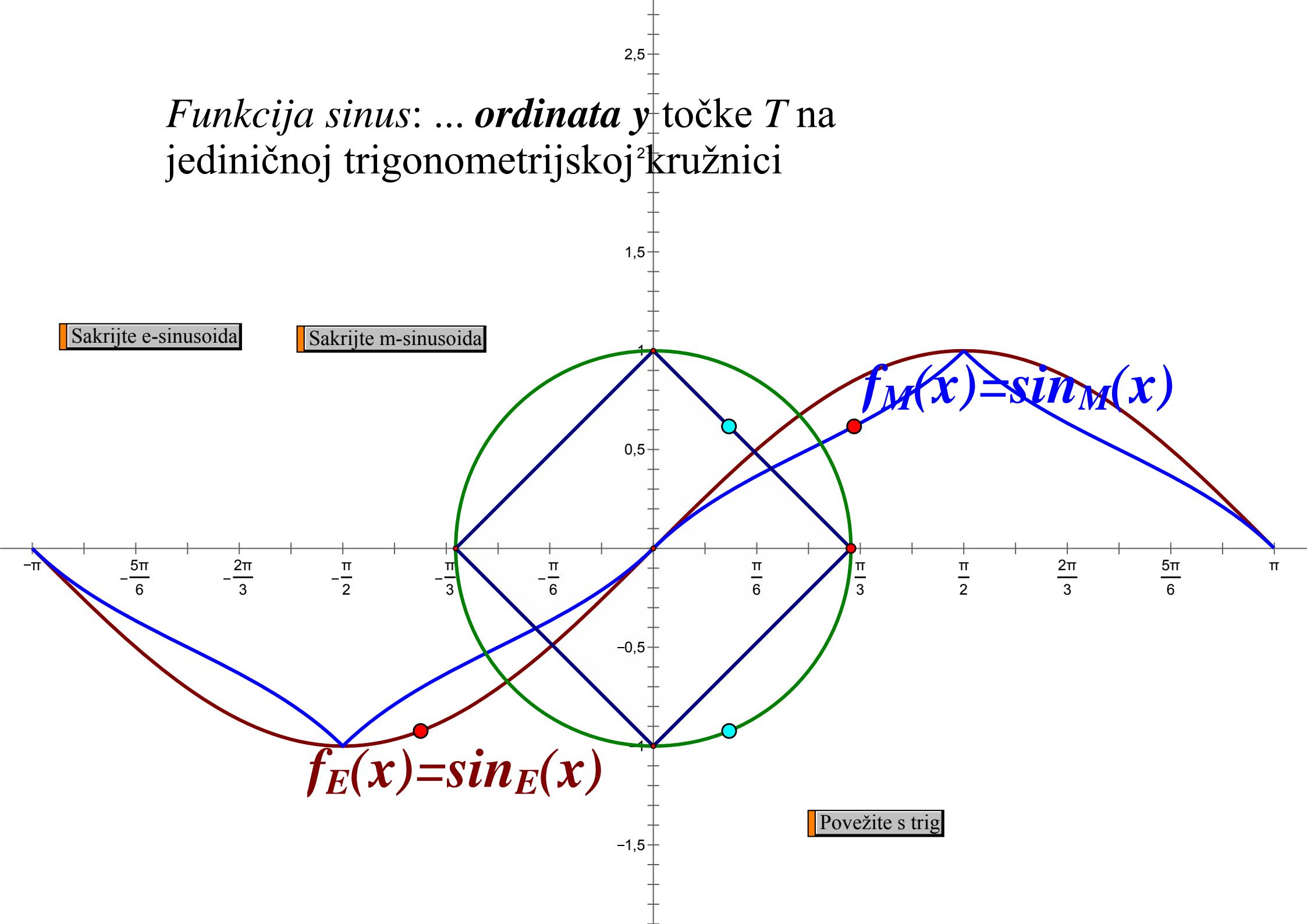
Pokažite e-sinusoida

Sakrijte m-sinusoida



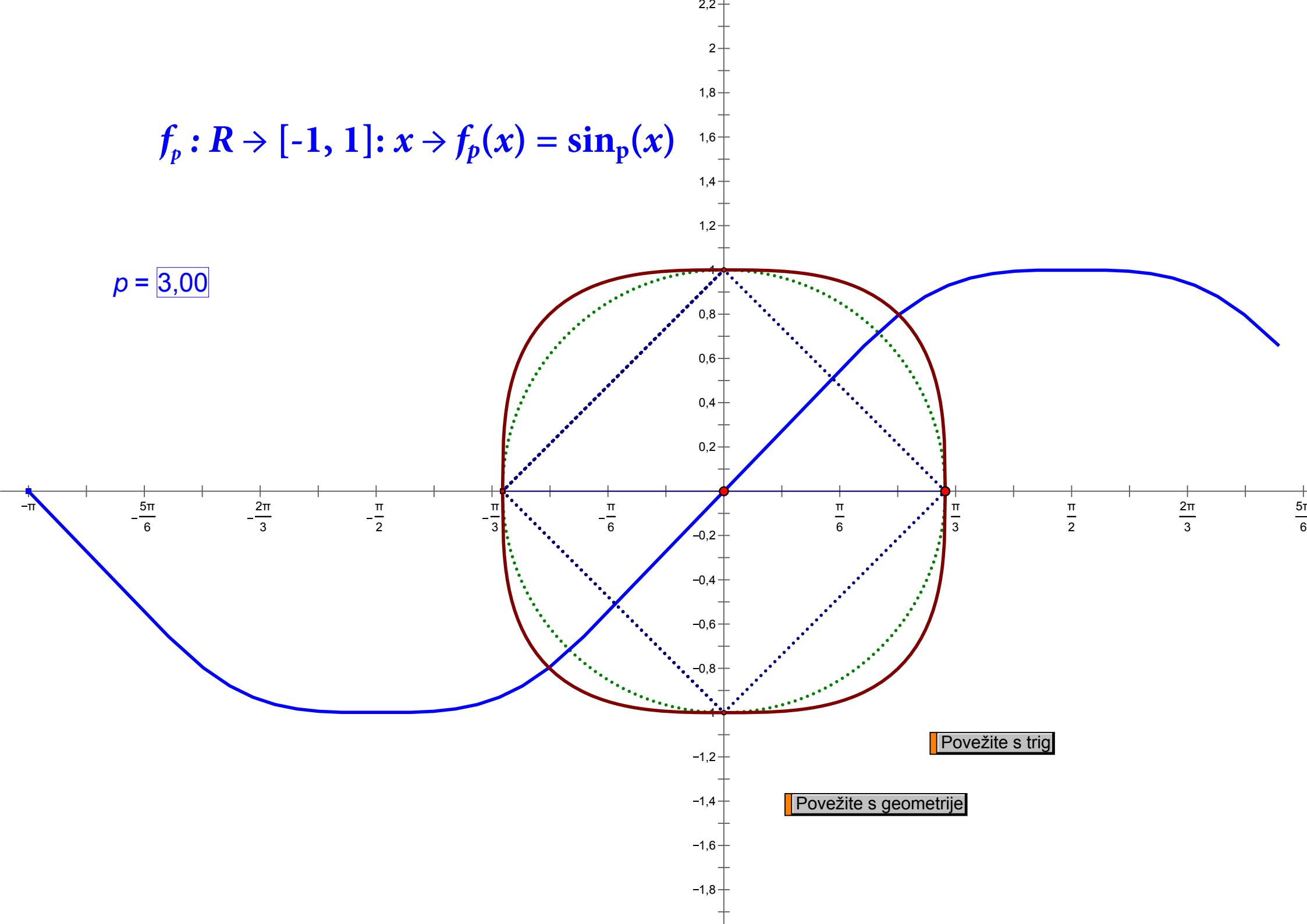
Povežite s trig

Funkcija sinus: ... ordinata y točke T na jediničnoj trigonometrijskoj kružnici



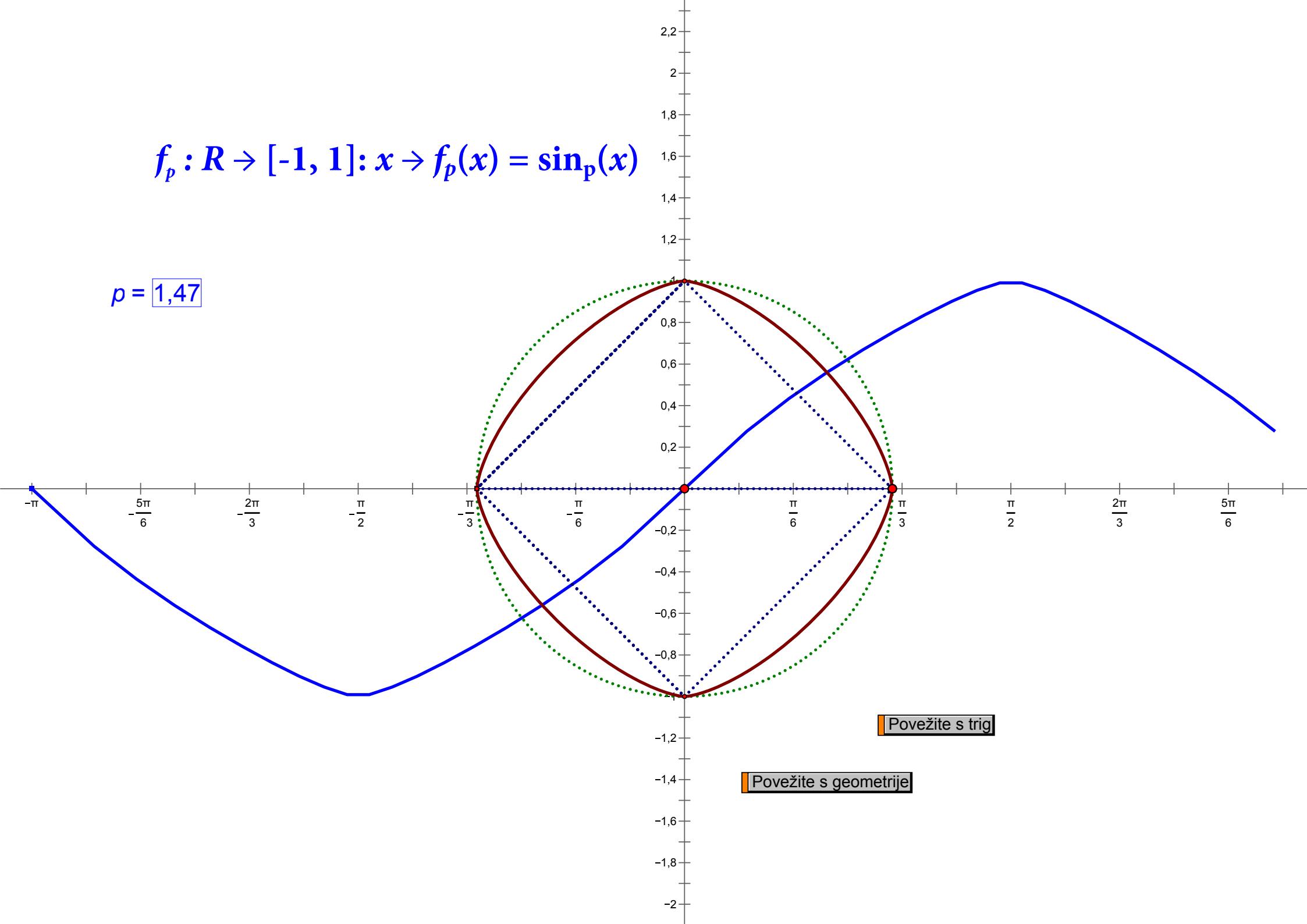
$$f_p : R \rightarrow [-1, 1]: x \mapsto f_p(x) = \sin_p(x)$$

$p = 3,00$



$$f_p : R \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto f_p(x) = \sin_p(x)$$

$$p = 1,47$$

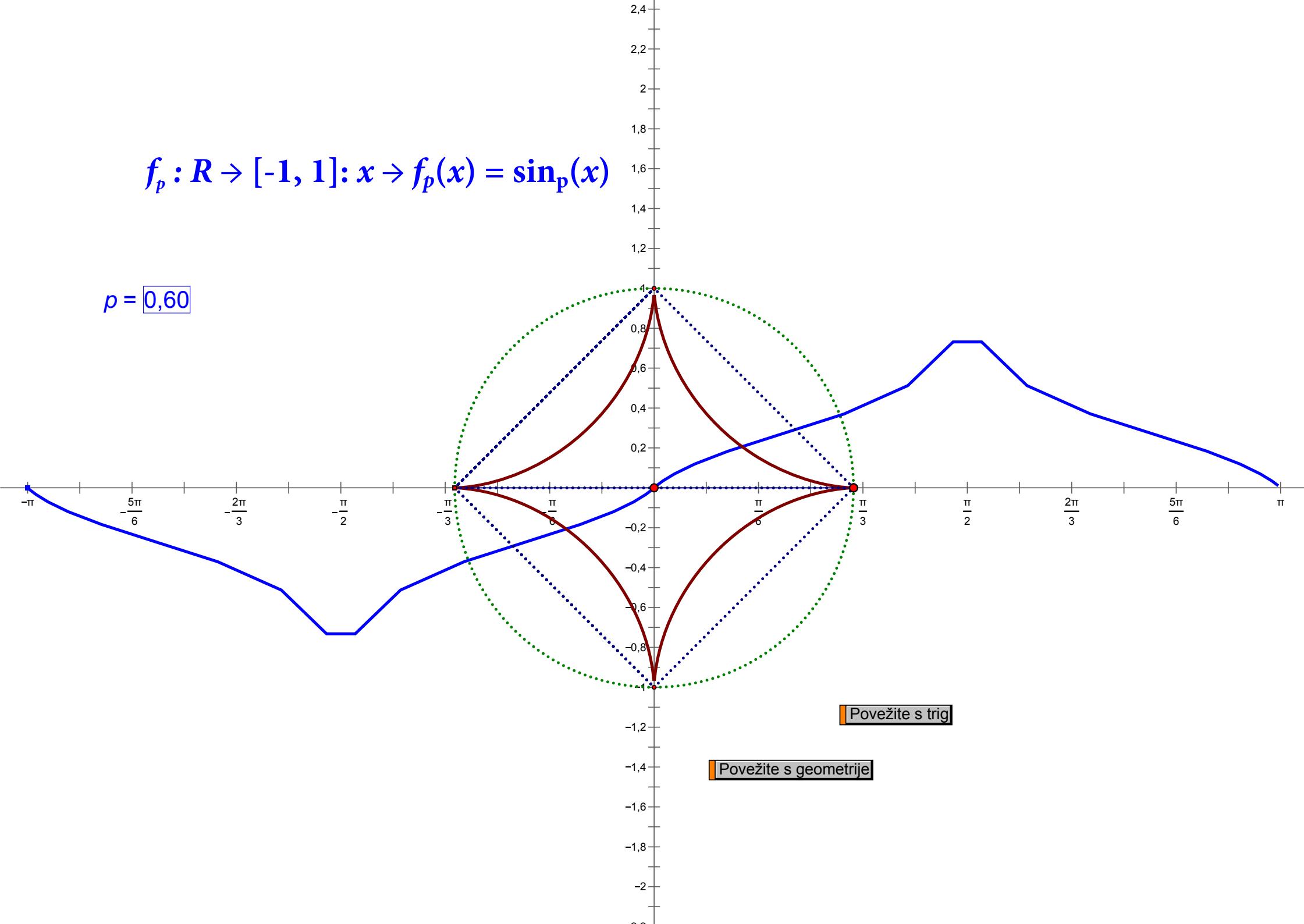


Povežite s trig

Povežite s geometrije

$$f_p : R \rightarrow [-1, 1]: x \mapsto f_p(x) = \sin_p(x)$$

$p = 0,60$

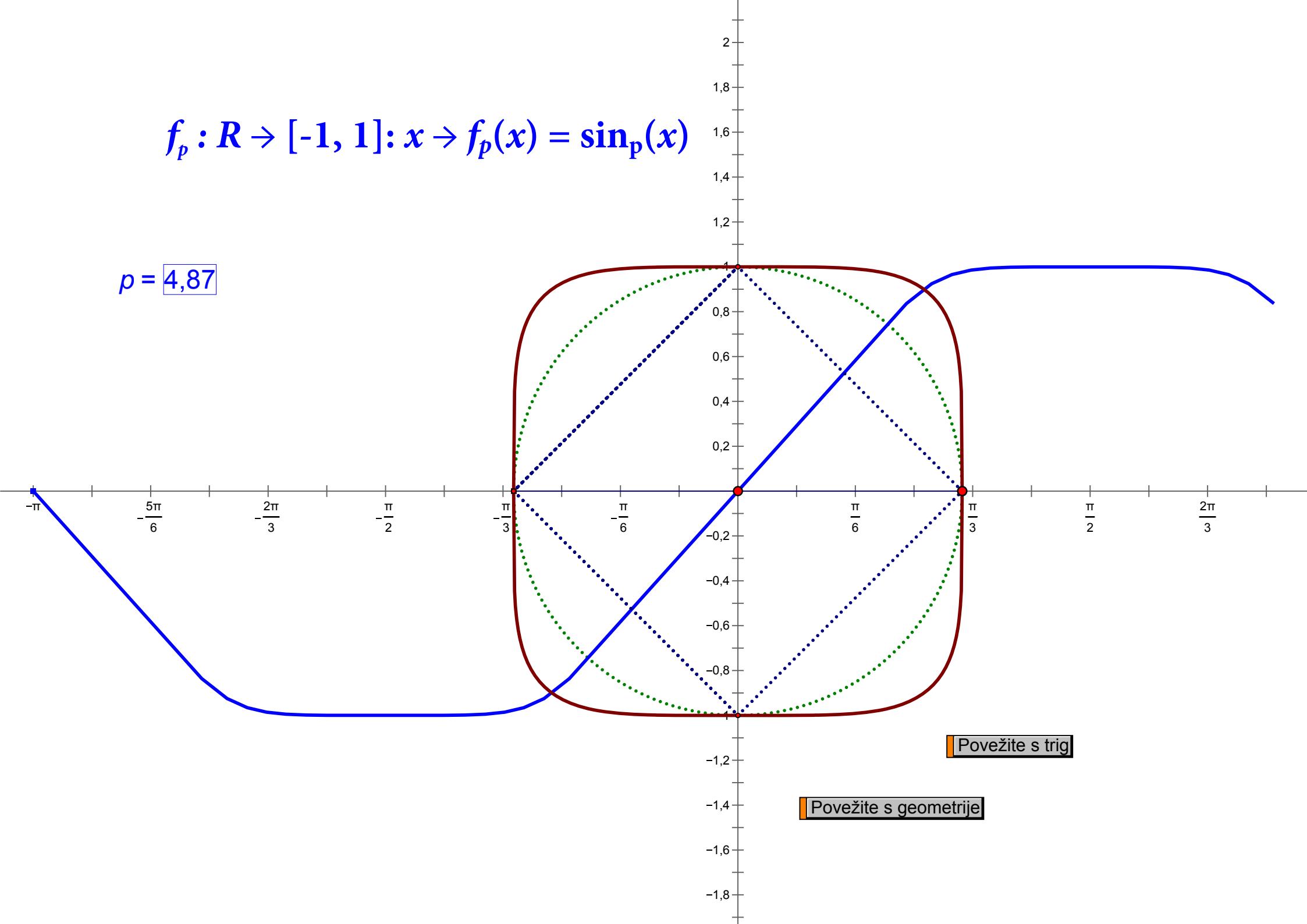


Povežite s trig

Povežite s geometrije

$$f_p : R \rightarrow [-1, 1] : x \rightarrow f_p(x) = \sin_p(x)$$

$$p = 4,87$$



Kompleksne funkcije

- . Linearna funkcija [f\(z\)= az+b](#)
- . Linearna razlomljena funkcija [Povežite f\(z\)=\(az+b\)/\(cz+d\)](#)
- . Kvadratna funkcija [Link to primjer az^2+bz+c](#)
- . Eksponencijalna i logaritamska funkcija
- . Kompleksna potencija
- . Trigonometrijske i hiperbolične funkcije [Link to f\(z\)= sin\(z\)](#) [Link to f\(z\)= sh\(z\)](#)
- . Primjene [Link to vektorsko polje](#) [Link to Juliaovi skupovi](#)
- . Vizualizacija funkcija: reljefne plohe [Link to ploha |z|](#)
 [Link to ploha |z^2|](#)
 [Link to ploha |sin\(z\)|](#)
 [Link to ploha |sh\(z\)|](#)
- [Povežite s ssš](#)
- [Povežite s geometrijel](#)

Funkcija $f(z) = az + b$ kao poseban slučaj funkcije $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

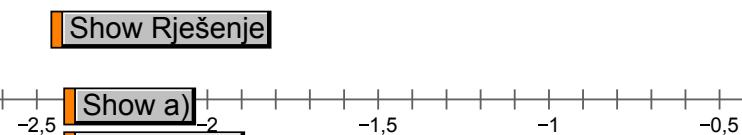
Show Primjer

Preslikajmo/transformirajmo kompleksnom linearnom funkcijom $f(z)$:

- a) pravac kroz ishodište,
- b) trokut,
- c) pravac,
- d) kružnicu sa središtem u ishodištu,
- e) kružnicu sa središtem različitim od ishodišta,
- f) grb Republike Hrvatske.

Što se može zaključiti o transformaciji?

Show Rješenje



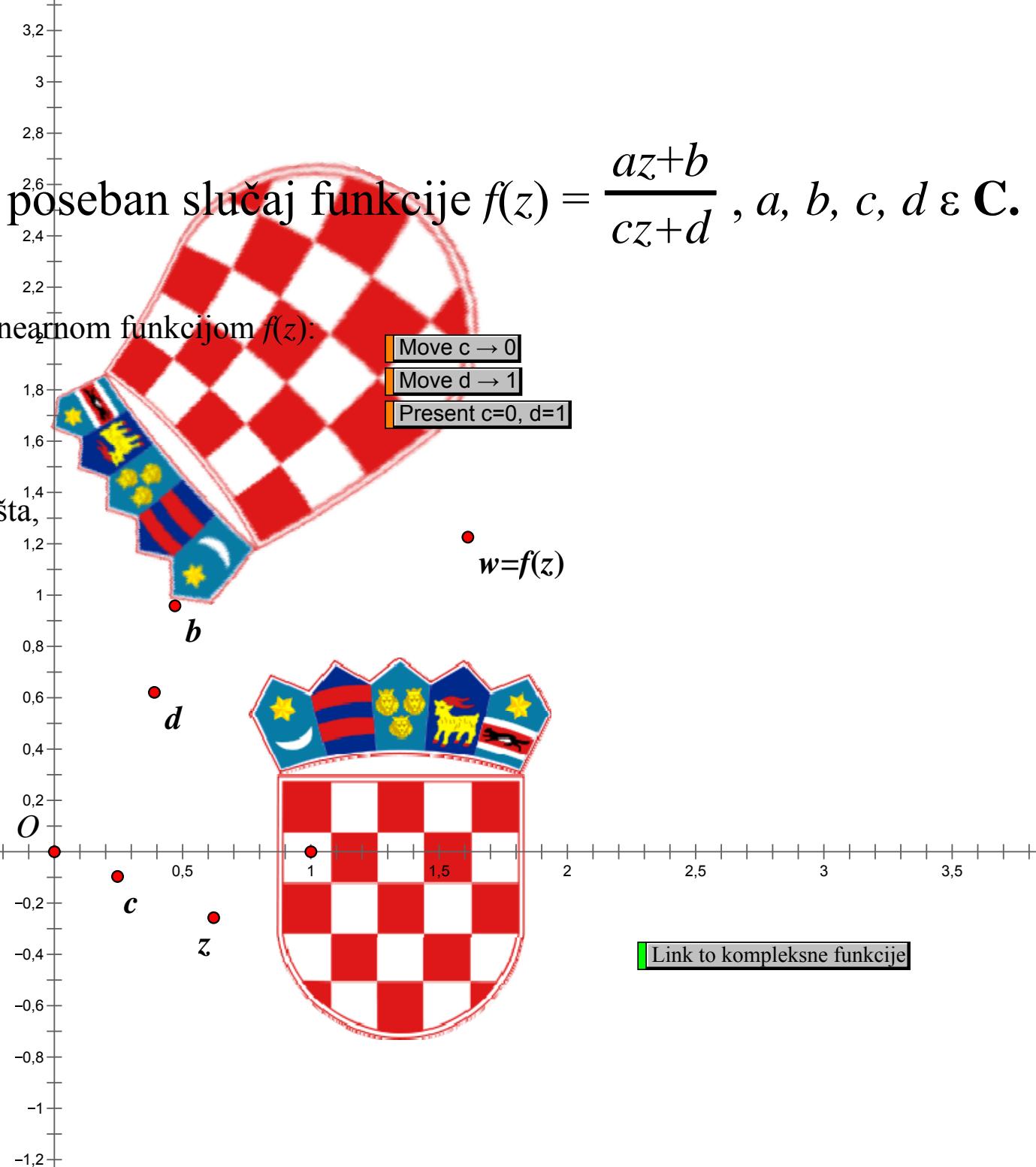
Show a)

Show b) i e)

Show c)

Show d)

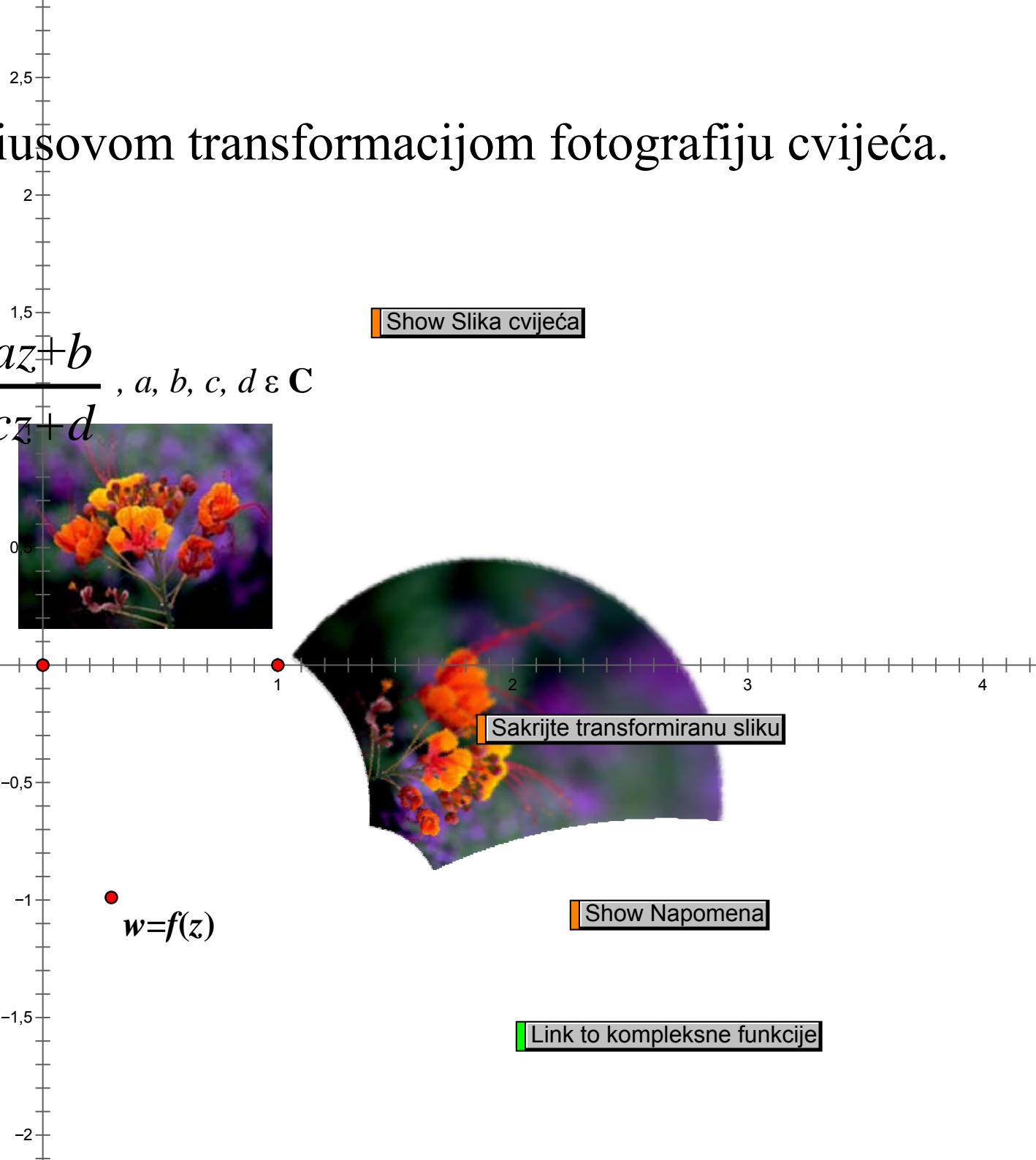
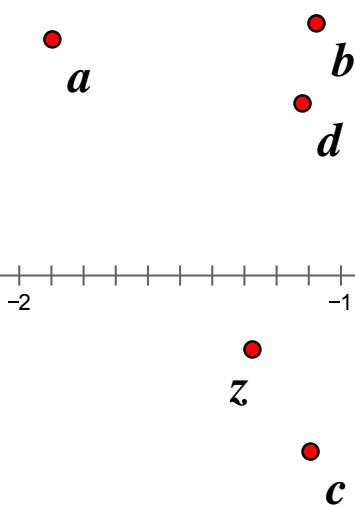
Show f)



Preslikajmo Möbiusovom transformacijom fotografiju cvijeća.

Show Möbiusova transformacija

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$



$$f(z) = a \cdot z^2 + b \cdot z + c, a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

[Hide Primjer](#)

Preslikajmo/transformirajmo kompleksnom kvadratnom funkcijom $f(z)$

- a) pravac,
- b) trokut,
- c) kružnicu sa središtem u ishodištu,
- d) kružnicu sa središtem različitim od ishodišta,
- e) grb Republike Hrvatske.

Što se može zaključiti o transformaciji?

[Show Rješenje](#)

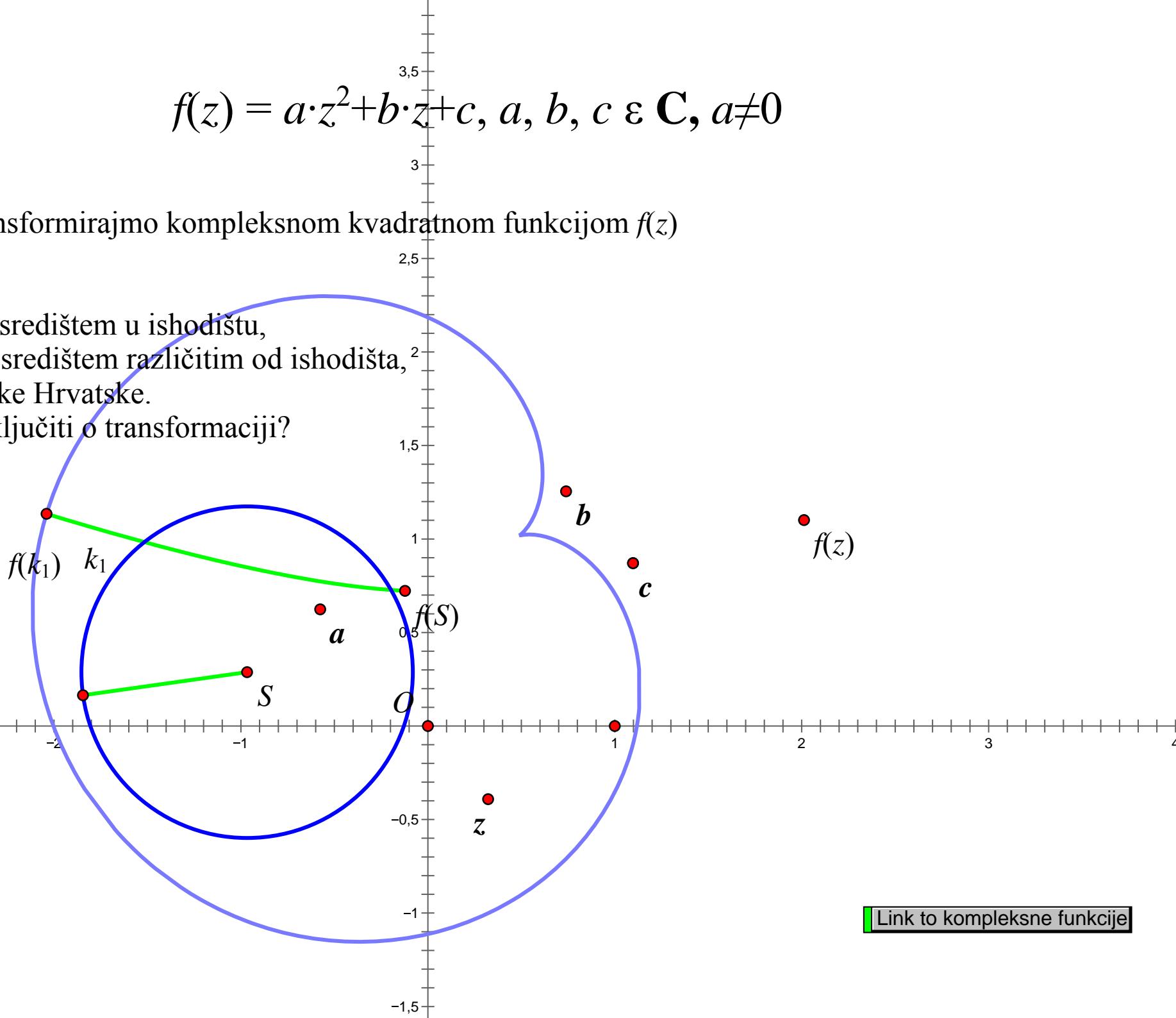
[Show a\)](#)

[Show b\)](#)

[Show c\)](#)

[Show d\)](#)

[Show e\)](#)



[Link to kompleksne funkcije](#)

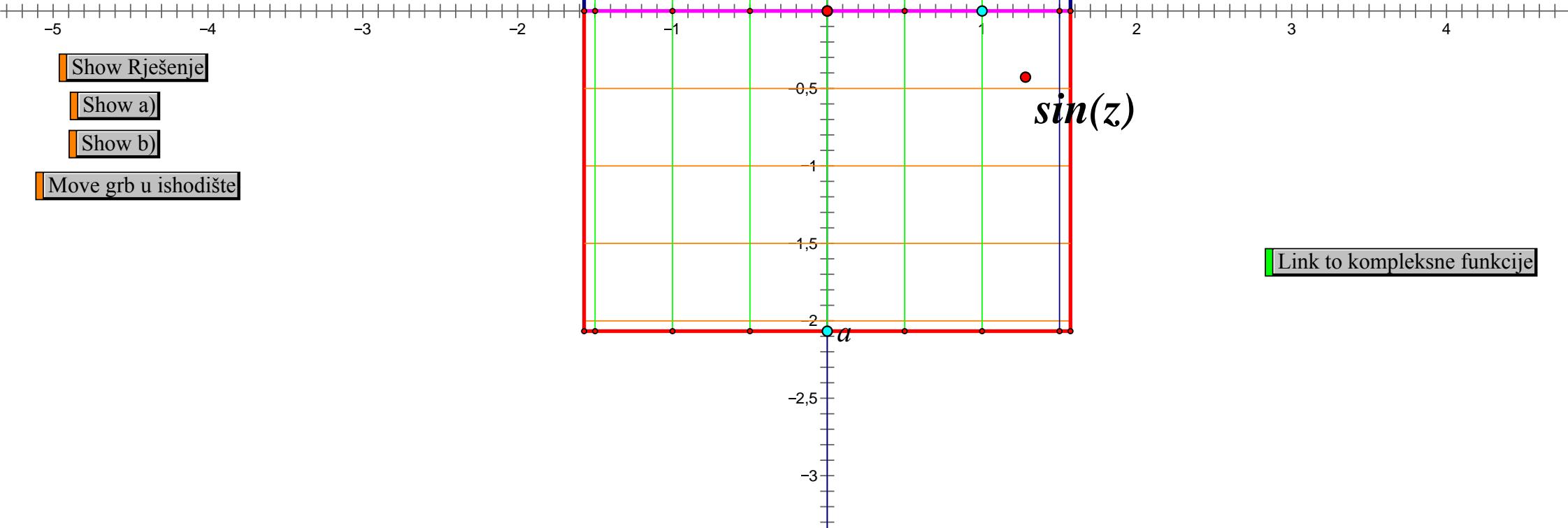
$$f(z) = \sin(z)$$

Preslikajmo/transformirajmo kompleksnom funkcijom sinus:

a) mrežu pravokutnika: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $a \leq y \leq b$

b) grb Republike Hrvatske.

Što se može zaključiti o transformaciji?



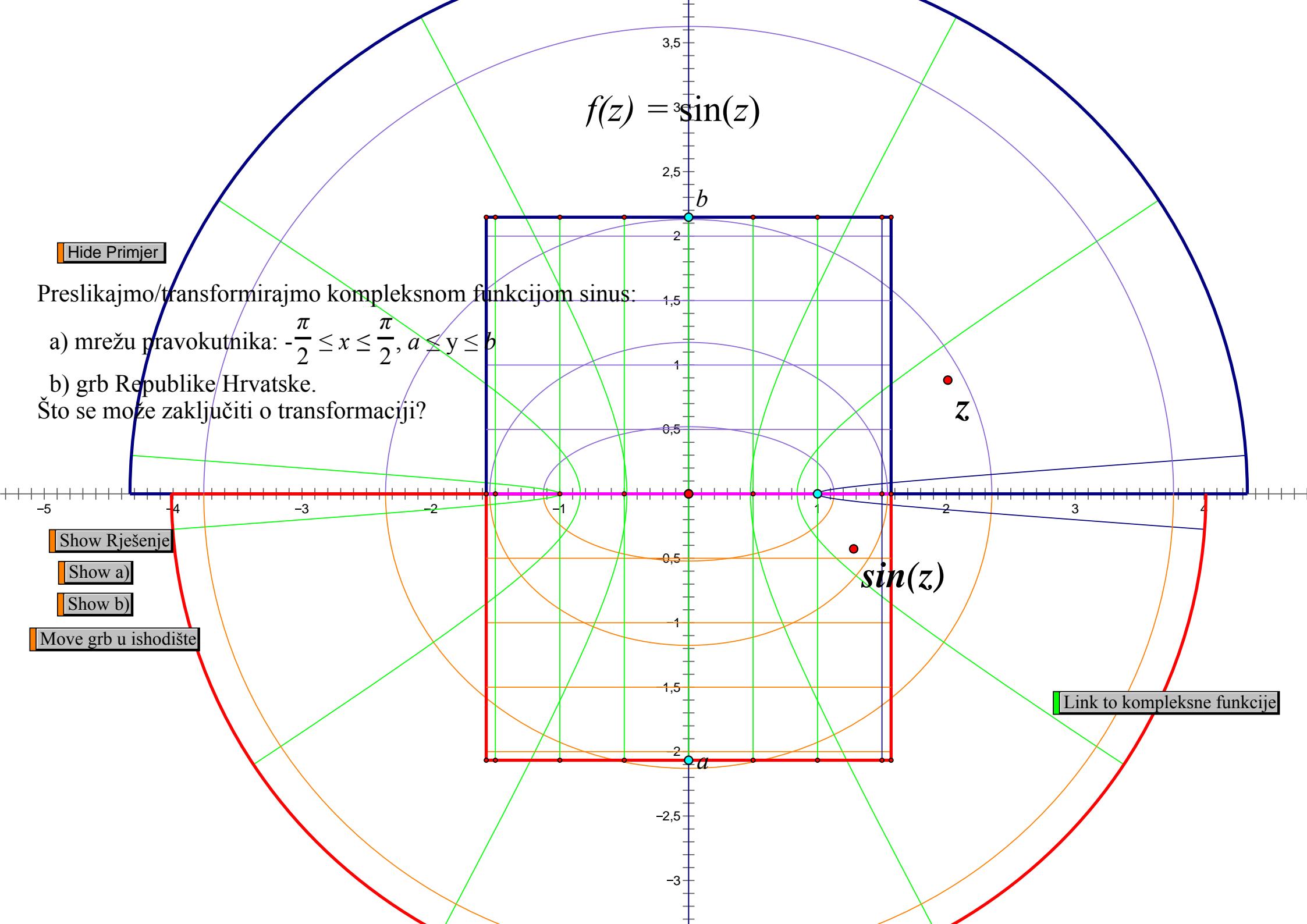
$$f(z) = \sin(z)$$

Preslikajmo/transformirajmo kompleksnom funkcijom sinus:

a) mrežu pravokutnika: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $a \leq y \leq b$

b) grb Republike Hrvatske.

Što se može zaključiti o transformaciji?



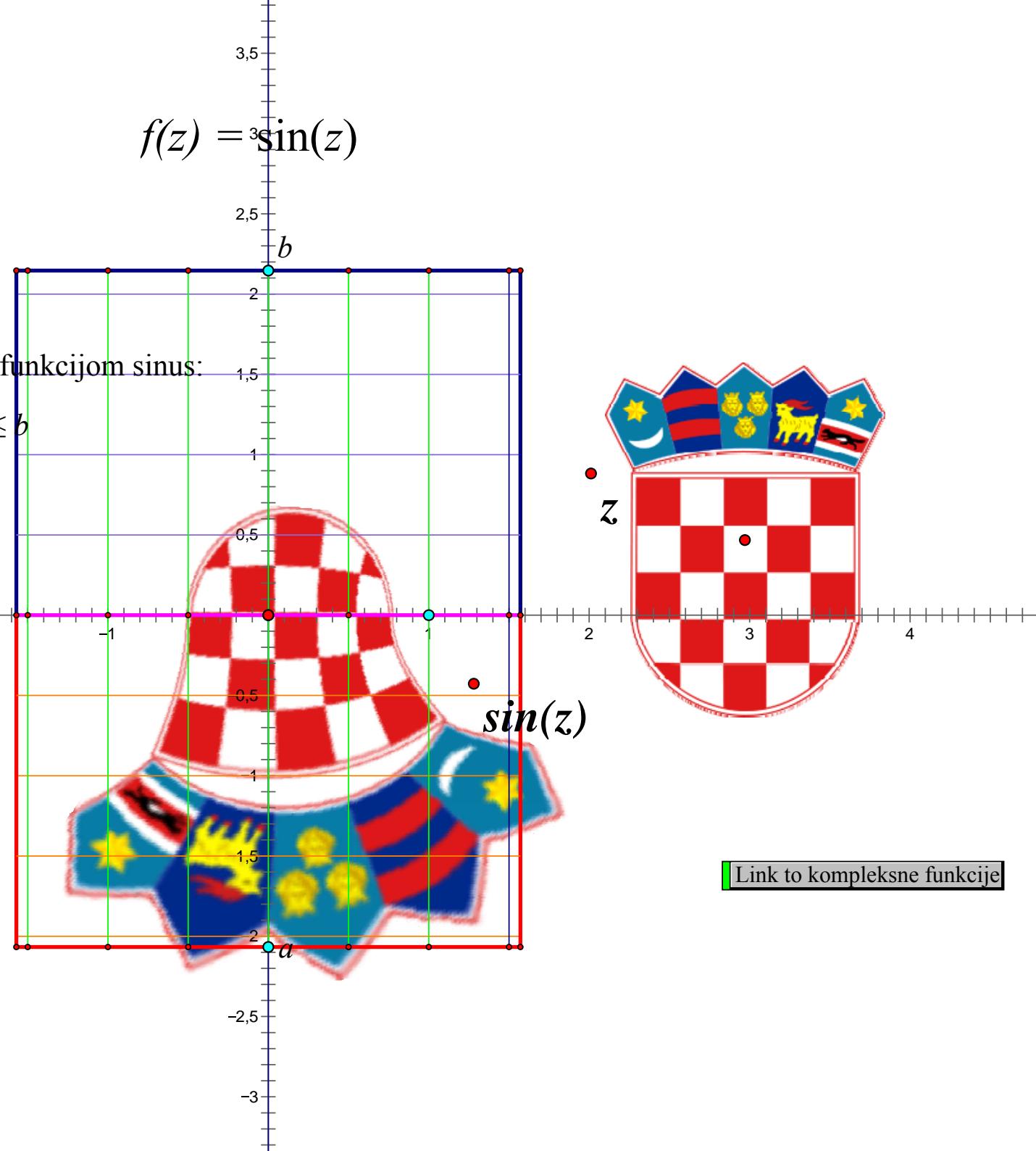
$$f(z) = \sin(z)$$

Preslikajmo/transformirajmo kompleksnom funkcijom sinus:

a) mrežu pravokutnika: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $a \leq y \leq b$

b) grb Republike Hrvatske.

Što se može zaključiti o transformaciji?



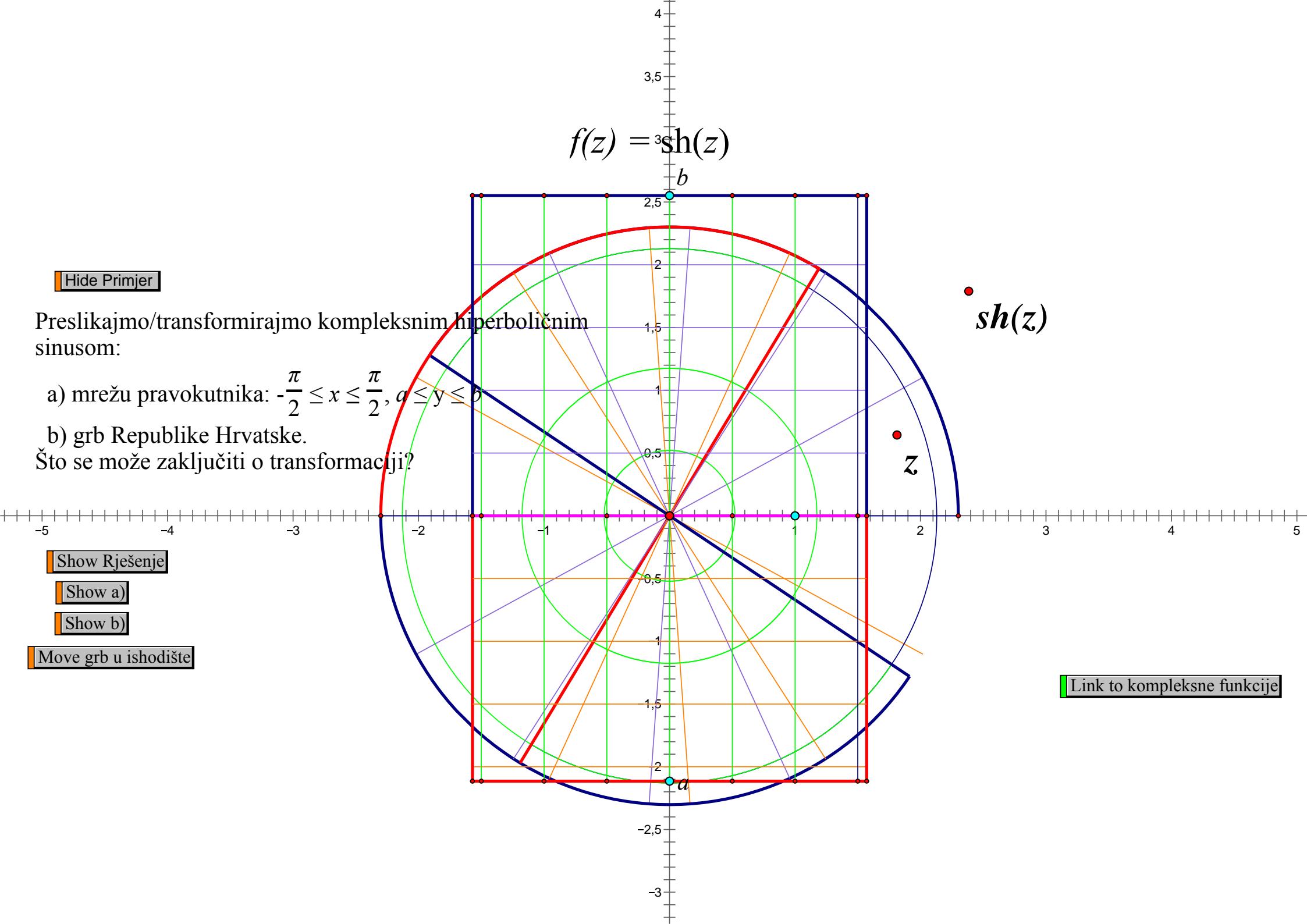
$$f(z) = \operatorname{sh}(z)$$

Preslikajmo/transformirajmo kompleksnim hiperboličnim sinusom:

a) mrežu pravokutnika: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $a \leq y \leq b$

b) grb Republike Hrvatske.

Što se može zaključiti o transformaciji?



$$f(z) = {}^3\sinh(z)$$

b

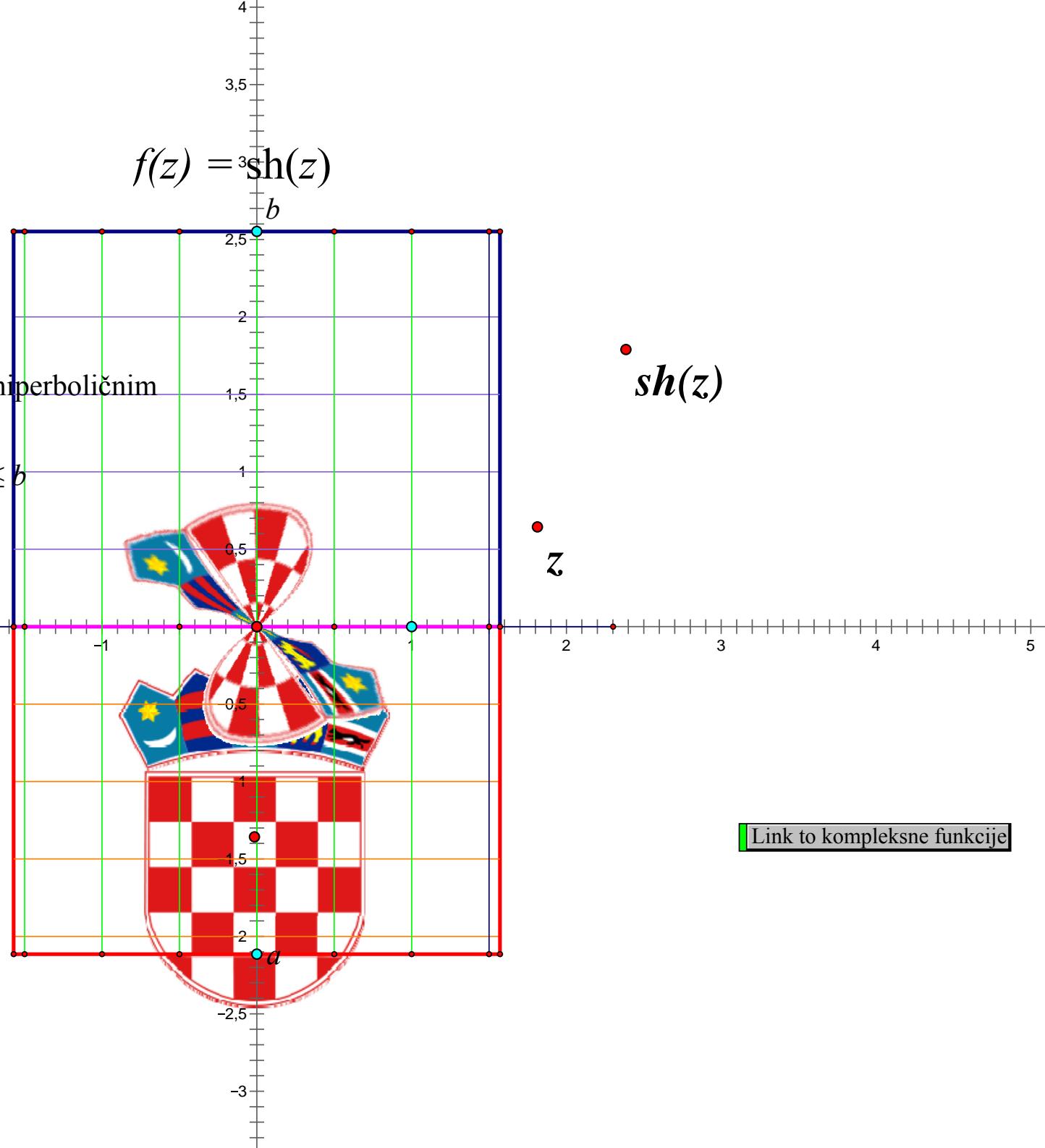
Hide Primjer

Preslikajmo/transformirajmo kompleksnim hiperboličnim sinusom:

a) mrežu pravokutnika: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $a \leq y \leq b$

b) grb Republike Hrvatske.

Što se može zaključiti o transformaciji?



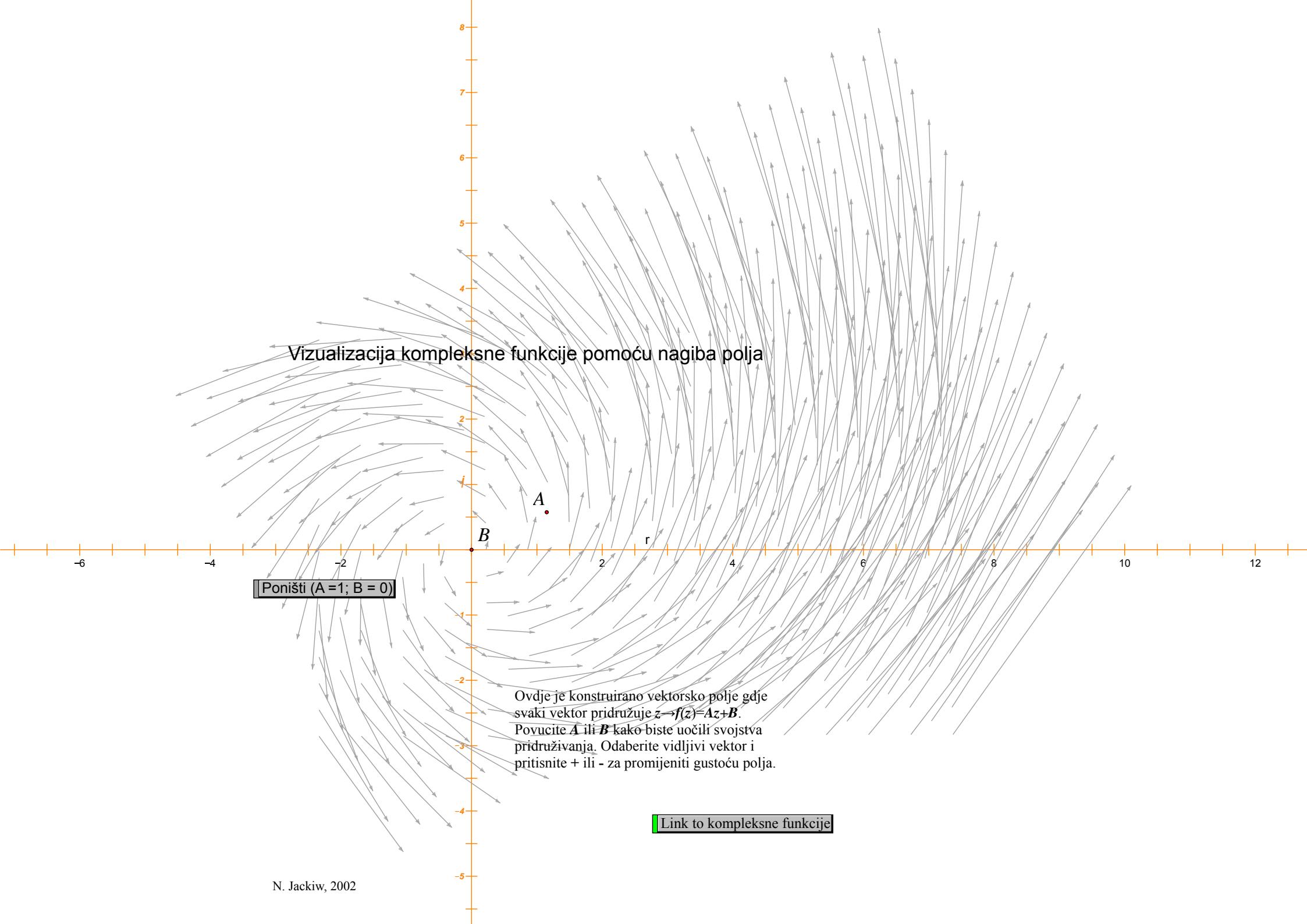
Show Rješenje

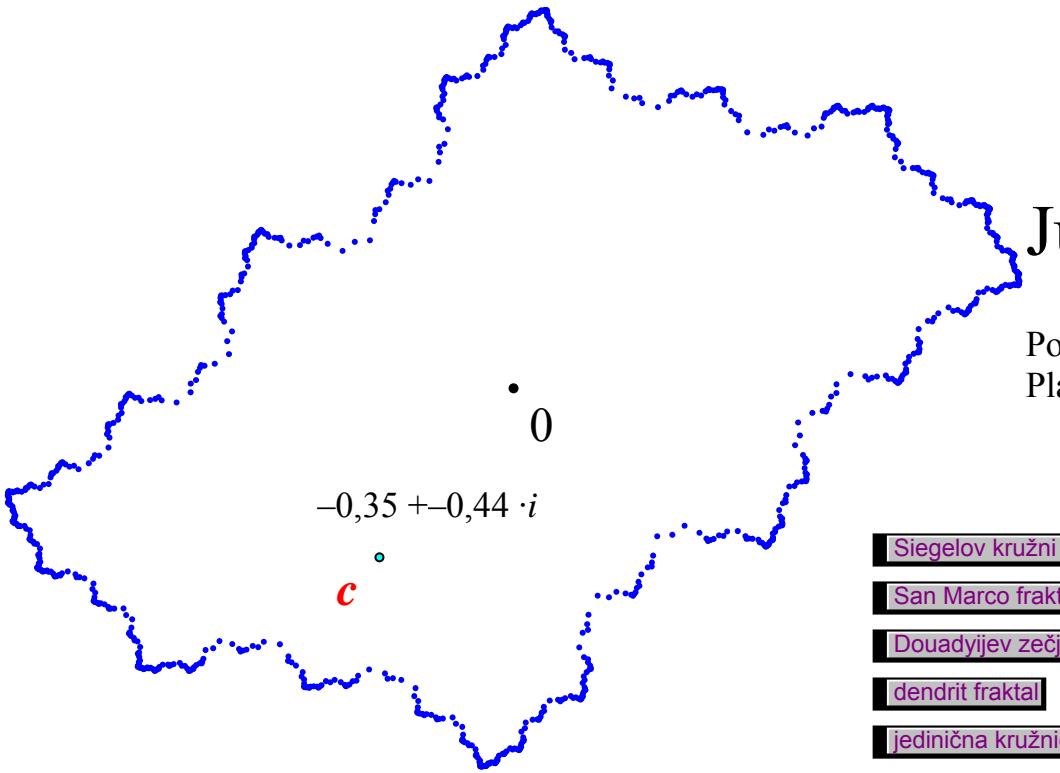
Show a)

Show b)

Move grb u ishodište

Link to kompleksne funkcije





Juliaov skup za $f(z) = z^2 + \textcolor{red}{c}$

Povucite $\textcolor{red}{c}$ za promjenu iteracije funkcije f .

Plave točke su članovi Juliaovog skupa separiranog vrijednošću z .

- Siegelov kružni fraktal
- San Marco fraktal
- Douadyijev zečji fraktal
- dendrit fraktal
- jedinična kružnica

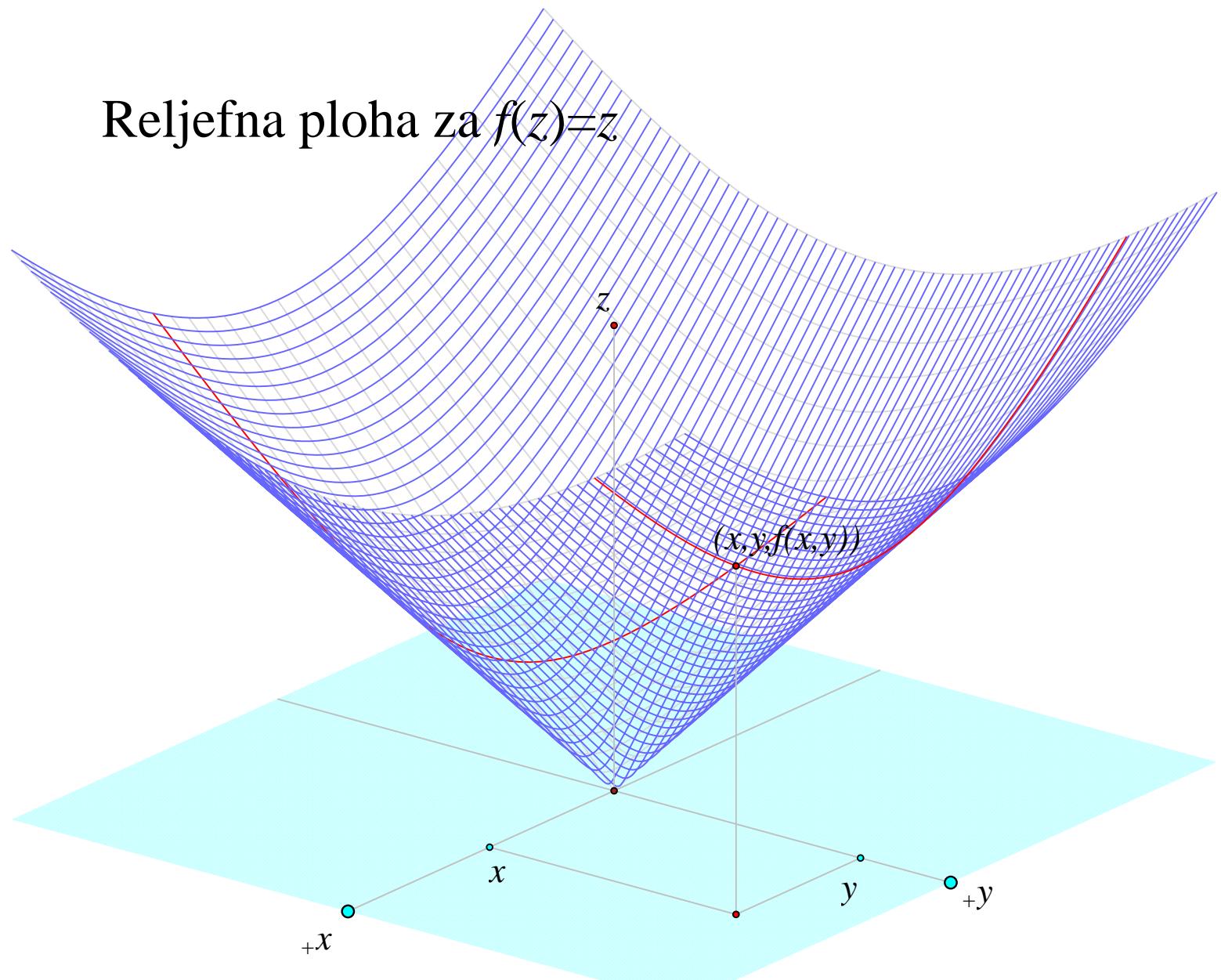
Ovo su neke vrijednosti za $\textcolor{red}{c}$ zabilježene u literaturi kao Juliaovi skupovi.

[Link to kompleksne funkcije](#)

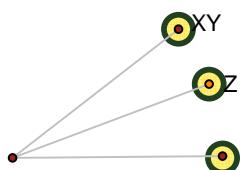
Reljefna ploha za $f(z)=z$

0 —————— 1

$y = 2,50$
 $x = 1,63$
 $|f(z)| = 2,98$



- Rotacija osi
- XY pogled
- XZ pogled
- YZ pogled



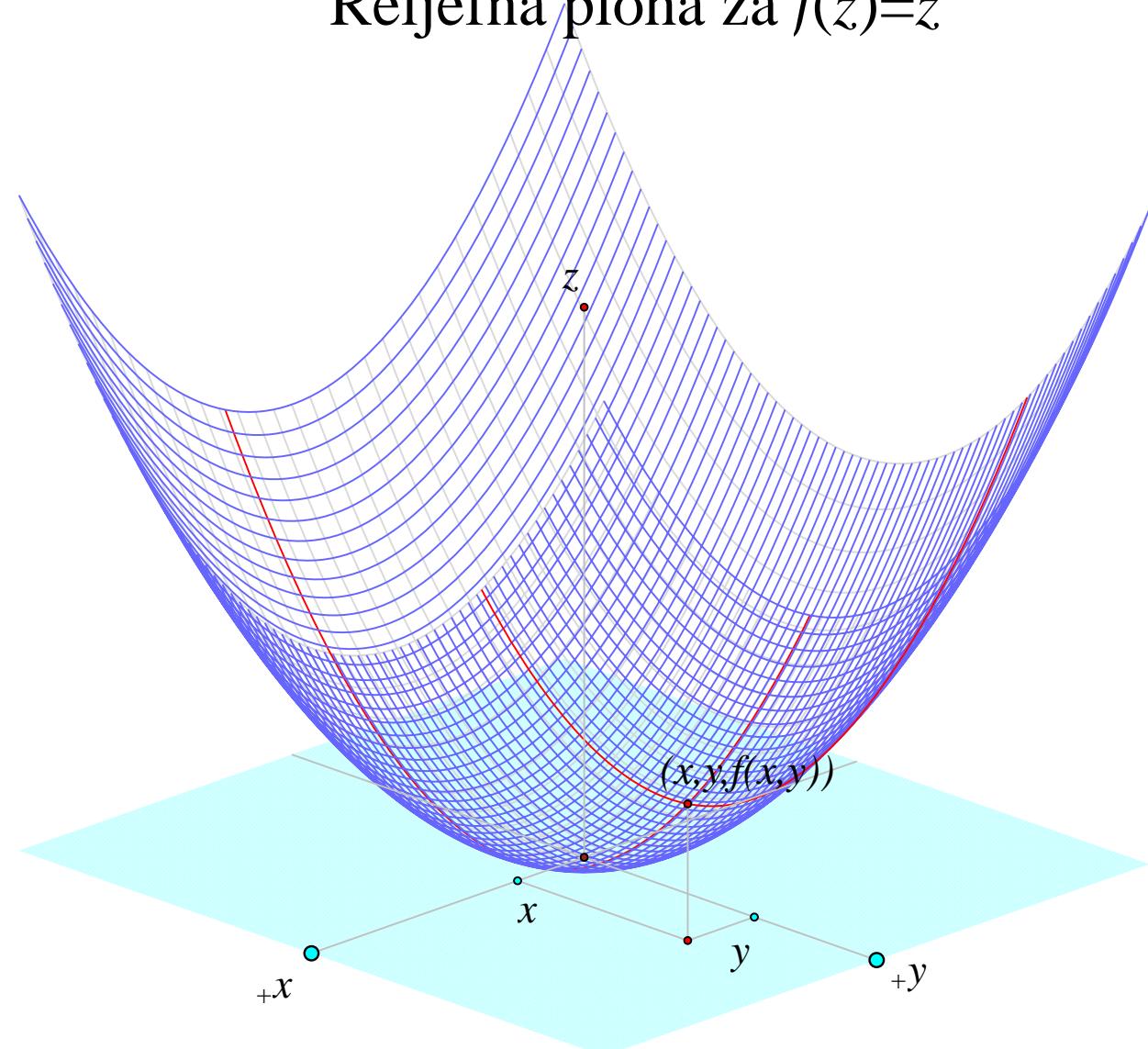
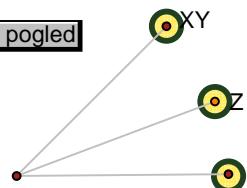
Link to kompleksne funkcije

Reljefna ploha za $f(z)=z^2$

0 ————— 1

$y = 0,53$
 $x = 0,21$
 $|f(z)| = 0,32$

- Rotacija osi
- XY pogled
- XZ pogled
- YZ pogled



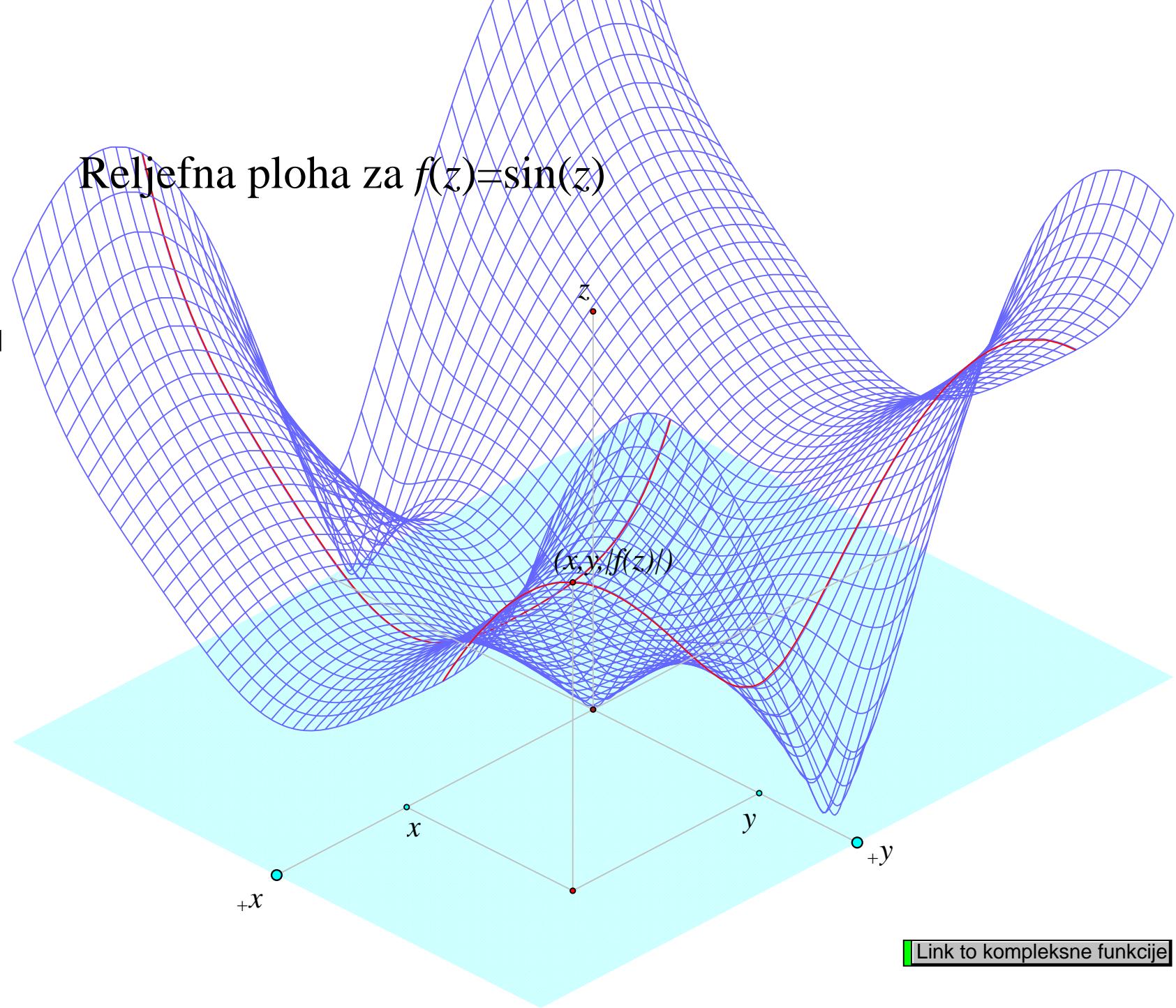
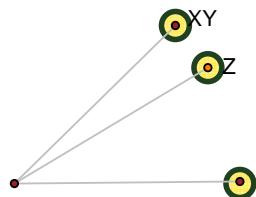
Link to kompleksne funkcije

Reljefna ploha za $f(z) = \sin(z)$

0

$y = 1,10$
 $x = 1,26$
 $|f(z)| = 1,70$

- Rotacija osi
- XY pogled
- XZ pogled
- YZ pogled



[Link to kompleksne funkcije](#)

Reljefna ploha za $f(z)=\operatorname{sh}(z)$

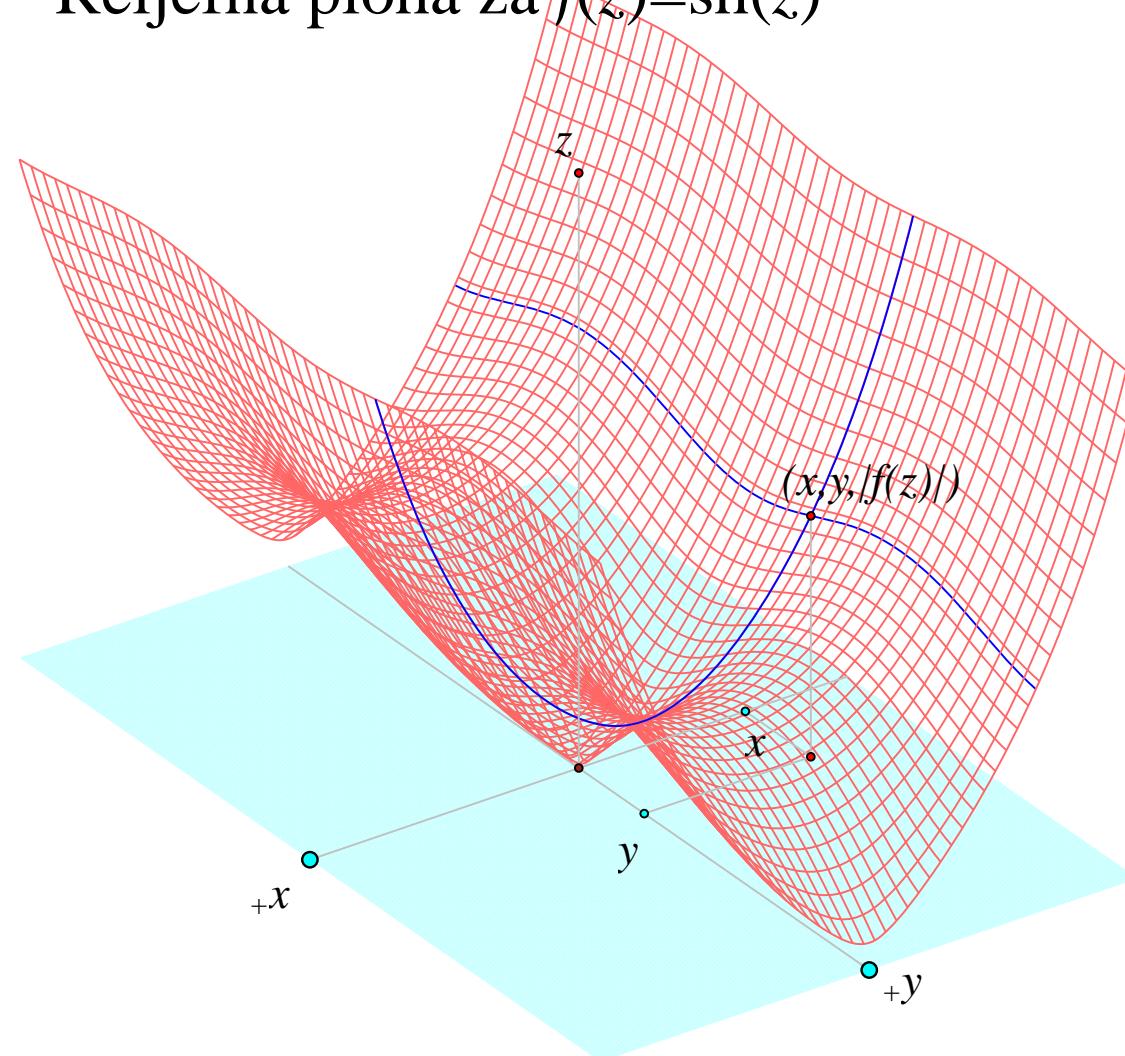
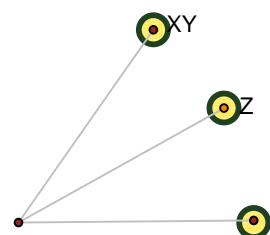
0 — 1

$y = 0,67$

$x = -1,19$

$|f(z)| = 1,61$

- Rotacija osi
- XY pogled
- XZ pogled
- YZ pogled



[Link to kompleksne funkcije](#)

The Lamé surface

Superegga



$$a = 1,51 \quad x = -0,17$$

$$c = 0,63 \quad y = 2,53$$

$m = [11]$

The rotation axis

$n = [4,00]$

XY view

$p = 9$

XZ view

YZ view

Show Picture

Hide Transformed Picture

Show Transformed Picture

Show Objects

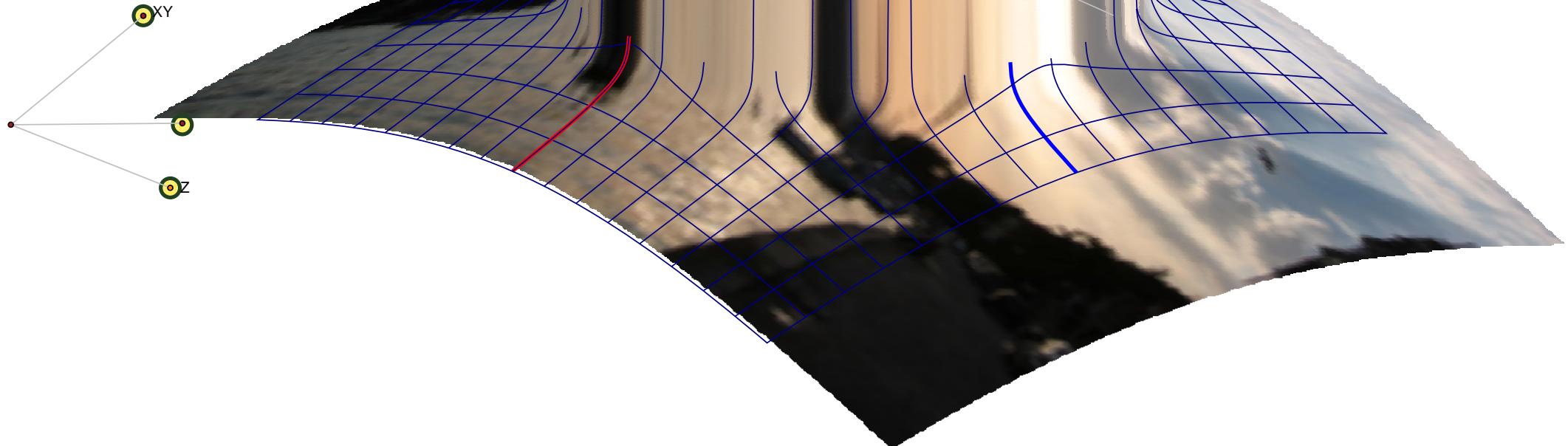
Hide Objects

$$c \cdot \left(1 - \left(\left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right|^{\frac{p}{2}} \right) \right)^{\frac{1}{p}} = -1,05$$

Q_1

z

$+y$



Zaključak

Dinamičnom vizualizacijom i snižavanjem razine apstrakcije matematičkih pojmove otvaraju se neslućene mogućnosti upoznavanja i prihvaćanja matematike kao svakodnevnog i moćnog alata na svim razinama i područjima učenja i poučavanja.

Povežite * * *

Hvala na pozornosti